Cura dimagrante con tartine

(Problema di Settembre 2020)

I Problemi

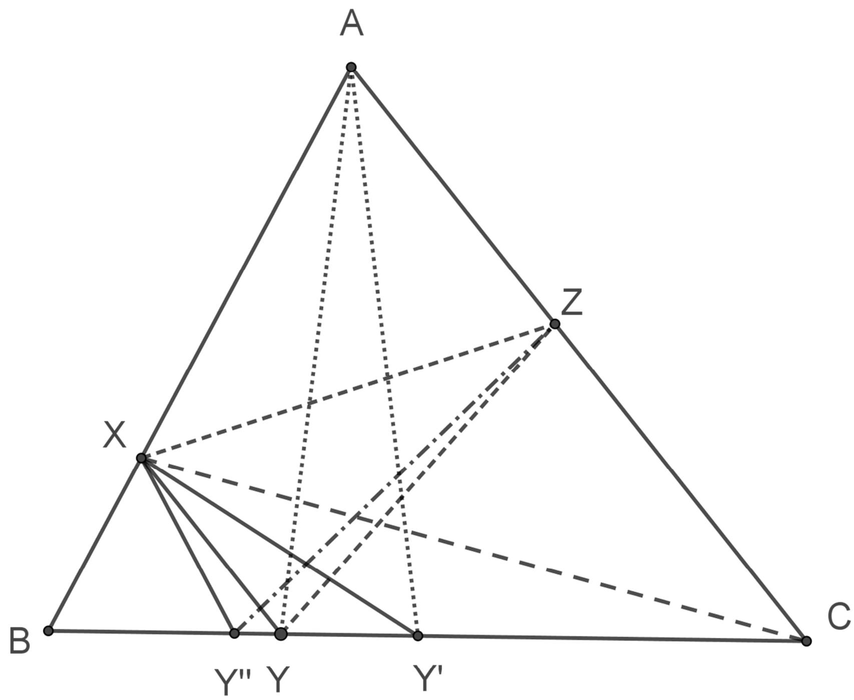
1. Dato il triangolo ABC (una tartina) Rudy sceglie un punto X sul lato AB, Piotr dovrà scegliere un punto Y sul lato BC ed infine Rudy sceglie un punto Z sul lato AC.
   Si viene così a formare il triangolo XYZ.
   Quale deve essere la strategia di Rudy e di Piotr se uno vuole massimizzare il triangolo XYZ mentre l'altro lo vuole minimizzare?
2. Dato un triangolo, Alice deve scegliere un punto del piano che lo contiene (può essere interno o esterno), successivamente Piotr traccerà una retta che passa per il punto scelto dividendo il triangolo in due parti e terrà per sé la parte più grande.
   Quale sarà il punto scelto da Alice se vuole rendere minima la parte scelta da Piotr?

Soluzione

1. Rudy sceglie il punto X a metà del lato AB; Piotr traccerà la parallela al lato AC che passa per il punto scelto da Rudy e fisserà il punto Y dove questa incontra il lato BC.
   Qualsiasi punto scelto da Rudy sul lato AC porta ad avere un triangolo XYZ con area costante.
2. Alice sceglie come punto il baricentro del triangolo, in questo modo Piotr può tracciare la retta in modo da avere la parte più grande che è 5/4 dell'altra.

Spiegazione

1. Dimostro innanzi tutto che qualsiasi sia il punto X scelto da Rudy, Piotr deve scegliere come punto Y l'intersezione tra la parallela al lato AC ed il lato BC.



Si nota innanzitutto che se si sceglie il punto Y (intersezione della parallela) qualsiasi sia la scelta del punto Z il triangolo XYZ avrà sempre la stessa area, indipendentemente dalla scelta di Z, avendo la base XY e l'altezza uguale alla distanza tra le parallele XY e BC.
Nel caso in cui il punto Y fosse più vicino al punto C (punto Y'), Rudy sceglie Z coincidente con il punto A (per massimizzare l'altezza del triangolo XY'Z relativa a XY') e si avrebbe il triangolo AXY' di area maggiore del triangolo AXY poiché i due triangoli hanno la stessa base AX ma altezze via via crescenti tanto più il punto Y' si avvicina al punto C.

Nel caso in cui il punto Y fosse più vicino al punto B (punto Y'') bisogna scegliere il punto Z coincidente con il punto C (in modo tale che il triangolo XY''Z con base XY'' abbia la massima altezza) ed il triangolo XCY ha un'area inferiore al triangolo XCY'' perché i due triangoli hanno la stessa base XC ma altezze crescenti man mano che il punto Y si avvicina a B.
Conoscendo la scelta che farà Piotr, Rudy deve fissare il punto X in modo tale che il triangolo XYZ sia di area massima.
Notiamo che l'area è 0 sia se X coincide con B, sia se Y coincide con A, perciò il triangolo di area massima si avrà con X interno ad AB.
Se indichiamo con x la distanza di X da B e con l la lunghezza di AB, bisogna determinare il valore di x che rende massima l'area del triangolo XYZ.
Se indichiamo con h l'altezza del triangolo XYZ relativa alla base XY e con h_1 l'altezza del triangolo ABC relativa alla base AC, dato che XY e AC sono paralleli, vale:
$XY/AC = x/l$ e $h/(l - x) = h_1/l$ per cui la doppia area del triangolo XYZ sarà $(AC \cdot x/l) \cdot (l - x) \cdot h_1/l =$
$k \cdot x \cdot (l - x)$ dove $k = AC \cdot h_1/l^2$ è una costante indipendente da x.
Derivando la doppia area ed uguagliando a zero si determina il valore di x che massimizza l'area del triangolo. $D(k \cdot x \cdot (l - x)) = kl - 2kx = 0$ da cui $x = l/2$.

2. Notiamo che il punto scelto da Alice deve essere interno al triangolo, altrimenti Piotr potrebbe tracciare una retta che non lo interseca e tenere per sé la parte costituita dall'intero triangolo di partenza.
Inoltre tanto più il punto di Alice si trova all'interno del triangolo tanto più difficile sarà per Piotr ottenere parti asimmetriche per poter scegliere quella di area maggiore.
Scegliendo di porre il punto sul baricentro Alice tenta di minimizzare l'asimmetria ma non può eliminarla del tutto, infatti si può vedere come facendo ruotare la retta di Piotr con asse il punto di Alice, la differenza tra le aree delle due figure è minima (uguale a zero) ogni volta che la retta interseca il punto medio di un lato mentre è massima quando la retta è parallela ad uno dei lati con un rapporto tra le aree di 5 a 4.