

Di gambe e di stinchi (Problema di Giugno 2018)

Il Problema

Bisogna determinare spazio percorso e tempo impiegato da Alice e Piotr per andare dal bosco all'albergo seguendo due itinerari diversi.

In particolare i nostri tre e Poldo (un cane incontrato per caso) effettuano 4 percorsi diversi passando in parte nel bosco ed in parte in una stradina vicina che va direttamente all'albergo ed in cui si tiene una velocità doppia rispetto a quella nel bosco.

Piotr fa il percorso con tempo minimo, Alice quello che minimizza la strada nel bosco, Poldo la strada diretta attraverso il bosco e Rudy un percorso simmetrico (nel bosco) rispetto a quello di Rudy che, anche se più lungo di 3 Km, gli permette di godersi una fumata di pipa.

Poldo e Rudy arrivano allo stesso tempo e la velocità media più alta è di 5,5 km/h.

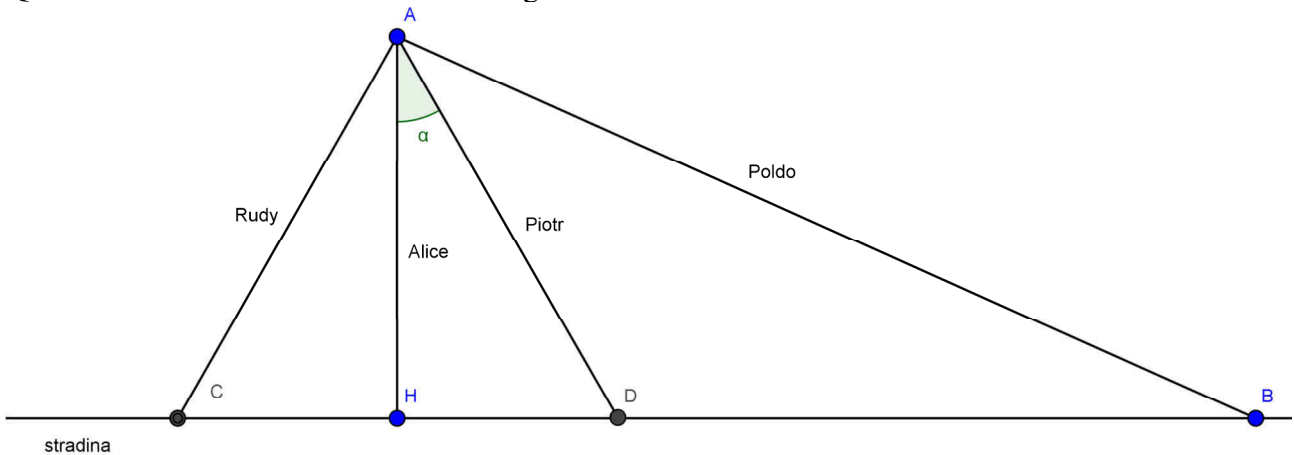
In base ai dati del problema, si può trovare la soluzione solo ammettendo che tutte le velocità nel bosco siano uguali e anche tutte le velocità sulla stradina siano uguali.

Soluzione:

Alice percorre circa 9,1 km in 1h 40m e 15s, Piotr percorre 8 km in circa 1h 34m e 17s.

Spiegazione:

Qui sotto c'è uno schema dei diversi tragitti.



Indico:

$a = AH$; $b = HB$; $s = AD$

si avrà tempo di percorrenza di Piotr $t_p = s/V_B + (b-s \cdot \sin\alpha)/2V_B$ dove V_B è la velocità nel bosco.

$s = a / \cos\alpha$

$$t_p = \frac{2a}{\cos\alpha} + b - \frac{a \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Per trovare il minimo faccio la derivata del numeratore rispetto ad α

$$\frac{dnum}{d\alpha} = \frac{-2a \cdot \sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{a}{\cos^2\alpha} = \frac{a(1 - 2\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}$$

Si trova così che il percorso con tempo minimo si ha per $\sin\alpha = 1/2$ ed il triangolo ACD è un triangolo equilatero.

Abbiamo anche che $s = 3$ km ed $a = 3 \frac{\sqrt{3}}{2}$ km.

Per determinare b sfruttiamo il fatto che il tempo di percorrenza di Poldo è uguale a quello di Rudy.

$$t_{po} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{V_B} = t_r = \frac{3}{V_B} + \frac{b + 1,5}{2V_B}$$

$$\frac{\sqrt{\frac{27}{4} + b^2}}{V_B} = \frac{2b + 15}{4V_B}$$

$$4\sqrt{\frac{27}{4} + b^2} = 2b + 15$$

$$108 + 16b^2 = 4b^2 + 225 + 60b$$

$$12b^2 - 60b - 117 = 0$$

$$4b^2 - 20b - 39 = 0$$

$$b = \frac{10 + \sqrt{100 + 156}}{4} = \frac{10 + 16}{4} = 6,5 \text{ km}$$

Si determinano così le distanze percorse da Piotr ed Alice; rispettivamente 8 km e circa 9,1 km. Si vede anche che Rudy ha percorso 11 km mentre Poldo ne ha percorsi 7.

Per determinare il tempo di ciascuno, bisogna determinare chi ha tenuto una velocità media più alta. Possono essere o Rudy o Alice che hanno fatto tratti di strada proporzionalmente maggiori sulla stradina. Si può vedere che in proporzione è Rudy che ha fatto più percorso sulla stradina, perciò è lui che ha tenuto la media più alta di 5,5 km/h percorrendo la distanza in 2h.

Abbiamo che $V_B = \frac{7}{2} = 3,5 \text{ km/h}$.

Il tempo di percorrenza di Alice è

$$\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{7}{2}} + \frac{\frac{13}{2}}{7} = \frac{3\sqrt{3}}{7} + \frac{\frac{13}{2}}{7} = \frac{\frac{13}{2} + 3\sqrt{3}}{7} \cong 1,67 \text{ h cioè 1 h 40m e 15 s}$$

Il tempo di Piotr

$$\frac{3}{3,5} + \frac{5}{7} = \frac{11}{7} \cong 1,57 \text{ h cioè 1h 34m e 17s.}$$