Il problema proposto nella rivista di Ottobre 2013 (17 curve)

Supponiamo di “stirare” la pista da sci e numerare le curve, e di essere il giocatore A e B il nostro avversario:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
P	V	P	V	P	V	P	V	P	V	P	V	P	V	P	V	P
B																A

Definiamo quindi una matrice 17 × 17 con le mosse da fare per vincere sicuramente (se possibile) per ogni posizione.

Per ogni elemento in posizione (b,a) indichiamo le mosse nel seguente modo:

- XX indica una posizione irraggiungibile (a⩽b, cioè A e B sono sovrapposti o si sono incrociati)
- PP indica una posizione dove non esiste una strategia da seguire per vincere indipendentemente dalle mosse di B
- Vn con 1⩽n⩽3 indica una posizione dove esiste una strategia per vincere, e consiste nel muoversi n passi a sinistra
- WW indica una vittoria ad inizio turno, cioè B e A sono adiacenti e B si trova su P e A in V.

In una generica posizione (b,a) calcoliamo l'azione x da compiere in questo modo:

- se a⩽b, allora x = XX
- se a = b+1 e a è dispari, allora x = PP : A e B sono adiacenti e A si trova in P, quindi abbiamo perso
- se a = b+1 e a è pari, allora x = WW : A e B sono adiacenti e A si trova in V, quindi abbiamo vinto
- altrimenti cerchiamo (se esiste) una mossa di lunghezza k per cui la vittoria è certa: per k = 1, 2 o 3, verifichiamo se:
  - una mossa di lunghezza k è lecita, ovvero A non si sovrappone od oltrepassa B: in tal caso la mossa non è lecita, e quindi va considerata “non vittoriosa”
  - una mossa di lunghezza k termina il gioco, quindi A e B sono adiacenti: la nuova posizione di A (a-k – ci si muove verso sinistra) è “vittoriosa” se e solo se è pari: in tal caso x = Vk
  - una mossa di lunghezza k non termina il gioco, quindi B potrà muoversi: dobbiamo allora verificare che tutte le mosse lecite che B potrà effettuare siano “vittoriose” per A. Ricordiamoci che B può a priori muoversi di 1, 2 o 3 posizioni, ma alcune di queste mosse potrebbero non essere lecite. Supponiamo che B possa muoversi di al massimo j posizioni senza oltrepassare A: x = Vk se e solo se per ogni $m < j$ la posizione (b + m , a – k) – B si muove verso destra e A verso sinistra – è una posizione “vittoriosa”
  - se nessuna delle precedenti condizioni vale, allora muoversi di k posizioni a sinistra potrebbe portarci ad una sconfitta, cioè x = PP (attenzione! Non necessariamente questo implica sconfitta certa, se B gioca male potremmo tornare addirittura in una posizione di vittoria).

Dall'applicazione del precedente ragionamento sul caso proposto, si ottiene la seguente matrice:

	A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
B		**P**	**V**	**P**	**V**	**P**	**V**	**P**	**V**	**P**	**V**	**P**	**V**	**P**	**V**	**P**	**V**	**P**
1	**P**	XX	WW	V1	V2	V3	PP	PP	V1	V2	V3	V1	V2	V3	PP	PP	V1	V2
2	**V**	XX	XX	PP	PP	V1	V2	V3	V1	V2	V3	PP	PP	V1	V2	V3	V1	V2
3	**P**	XX	XX	XX	WW	V1	V2	V3	PP	PP	V1	V2	V3	V1	V2	V3	PP	PP
4	**V**	XX	XX	XX	XX	PP	PP	V1	V2	V3	V1	V2	V3	PP	PP	V1	V2	V3
5	**P**	XX	XX	XX	XX	XX	WW	V1	V2	V3	PP	PP	V1	V2	V3	V1	V2	V3
6	**V**	XX	XX	XX	XX	XX	XX	PP	PP	V1	V2	V3	V1	V2	V3	PP	PP	V1
7	**P**	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	WW	V1	V2	V3	PP	PP	V1	V2	V3	V1
8	**V**	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	PP	PP	V1	V2	V3	V1	V2	V3	PP
9	**P**	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	WW	V1	V2	V3	PP	PP	V1	V2
10	**V**	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	PP	PP	V1	V2	V3	V1	V2
11	**P**	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	WW	V1	V2	V3	PP	PP
12	**V**	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	PP	PP	V1	V2	V3
13	**P**	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	WW	V1	V2	V3
14	**V**	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	PP	PP	V1
15	**P**	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	WW	V1
16	**V**	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	PP
17	**P**	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX

Seguendo la tecnica proposta, non tutte le celle sono raggiungibili; solo le celle di seguito indicate sono significative.

	A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
B		**P**	**V**	**P**	**V**	**P**	**V**	**P**	**V**	**P**	**V**	**P**	**V**	**P**	**V**	**P**	**V**	**P**
1	**P**																	V2
2	**V**															V3		
3	**P**												V3			V3		
4	**V**									V3			V3			V1		
5	**P**						WW			V3			V1		V3			
6	**V**									V1		V3	V1		V3			
7	**P**								WW	V1		V3			V1			
8	**V**											V1		V3				
9	**P**										WW	V1		V3				
10	**V**													V1				
11	**P**												WW					
12	**V**																	
13	**P**																	
14	**V**																	
15	**P**																	
16	**V**																	
17	**P**																	

Il problema con un generico numero *C* di curve

Osservando la prima tabella, si nota che le celle si ripetono in modo abbastanza regolare.
Definiamo due funzioni:

1. d(x) =
    - WW per x = 1
      per i seguenti punti, sia t il resto della divisione (x – 2) / 8
    - V(t-1) per $0 \leqslant x \leqslant 2$
    - PP per $3 \leqslant t \leqslant 4$
    - V(t-4) per $5 \leqslant t \leqslant 7$

2. p(x) =
    sia t il resto della divisione (x – 1) / 8
    - PP per $0 \leqslant t \leqslant 1$
    - V(t-1) per $2 \leqslant t \leqslant 4$
    - V(t-4) per $5 \leqslant t \leqslant 7$

Riguardando la tabella, si osserva che:

B \ A	1 P	2 V	3 P	4 V	5 P	6 V	7 P	8 V	9 P	10 V	11 P	12 V	13 P	14 V	15 P	16 V	17 P
1 P	XX	d(1)	d(2)	d(3)	d(4)	d(5)	d(6)	d(7)	d(8)	d(9)	d(10)	d(11)	d(12)	d(13)	d(14)	d(15)	d(16)
2 V	XX	XX	p(1)	p(2)	p(3)	p(4)	p(5)	p(6)	p(7)	p(8)	p(9)	p(10)	p(11)	p(12)	p(13)	p(14)	p(15)
3 P	XX	XX	XX	d(1)	d(2)	d(3)	d(4)	d(5)	d(6)	d(7)	d(8)	d(9)	d(10)	d(11)	d(12)	d(13)	d(14)
4 V	XX	XX	XX	XX	p(1)	p(2)	p(3)	p(4)	p(5)	p(6)	p(7)	p(8)	p(9)	p(10)	p(11)	p(12)	p(13)
5 P	XX	XX	XX	XX	XX	d(1)	d(2)	d(3)	d(4)	d(5)	d(6)	d(7)	d(8)	d(9)	d(10)	d(11)	d(12)
6 V	XX	XX	XX	XX	XX	XX	p(1)	p(2)	p(3)	p(4)	p(5)	p(6)	p(7)	p(8)	p(9)	p(10)	p(11)
7 P	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	d(1)	d(2)	d(3)	d(4)	d(5)	d(6)	d(7)	d(8)	d(9)	d(10)
8 V	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	p(1)	p(2)	p(3)	p(4)	p(5)	p(6)	p(7)	p(8)	p(9)
9 P	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	d(1)	d(2)	d(3)	d(4)	d(5)	d(6)	d(7)	d(8)
10 V	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	p(1)	p(2)	p(3)	p(4)	p(5)	p(6)	p(7)
11 P	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	d(1)	d(2)	d(3)	d(4)	d(5)	d(6)
12 V	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	p(1)	p(2)	p(3)	p(4)	p(5)
13 P	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	d(1)	d(2)	d(3)	d(4)
14 V	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	p(1)	p(2)	p(3)
15 P	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	d(1)	d(2)
16 V	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	p(1)
17 P	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX

Resta da chiedersi se la sequenza prosegue con più di 17 curve.

Proposizione D

Per b dispari e a > b, l'elemento in posizione (b,a) è uguale a d(y), con y = b-a.

Dimostrazione

Se y = 1, allora A e B sono adiacenti, e il gioco è terminato: B si trova in posizione dispari, quindi ha perso e noi vinciamo. d(1) = WW è allora corretto.

Se y = 2, 3 o 4, allora mi muovo di y-1 posizioni e chiudo il gioco bloccando (b – a = y, dopo la mossa b – a = 1) in posizione dispari B, che quindi perde. d(y) = V(y-1) è corretto.
Sia y > 4 e t il resto di (y-2) / 8, quindi i valori delle celle adiacenti verso sinistra sono:

…	…	…	…	**d(y)**
…	p(y-4)	p(y-3)	p(y-2)	…
…	*d(y-5)*	d(y-4)	d(y-3)	…
…	*p(y-6)*	*p(y-5)*	p(y-4)	…
…	…	…	…	…

In alcuni casi le celle indicate in corsivo possono assumere valore XX, ma in quei casi si osserverà che il loro valore sarà ininfluente ai fini della dimostrazione.
Motiviamo le risposte per i singoli resti:

- t = 0:

…	…	…	…	**d(y)**
…	…	…	V3	…
…	…	…	V1	…
…	…	…	V1	…
…	…	…	…	…

  d(y) = V1
- t = 1: per la tabella precedente (basta riferirsi alla colonna scelta prima), d(y) = V2
- t = 2: per la tabella precedente (basta riferirsi alla colonna scelta per t = 0), d(y) = V3
- t = 3:

…	…	…	…	**d(y)**
…	PP	PP	…	…
…	…	…	…	…
…	…	…	PP	…
…	…	…	…	…

  Nessuna colonna garantisce la vittoria, quindi d(y) = PP
- t = 4:

…	…	…	…	**d(y)**
…	PP	…	…	…
…	…	…	…	…
…	…	PP	PP	…
…	…	…	…	…

  Nessuna colonna garantisce la vittoria, quindi d(y) = PP
- t = 5:

…	…	…	…	**d(y)**
…	…	…	V3	…
…	…	…	V3	…
…	…	…	V1	…
…	…	…	…	…

  d(y) = V1
- t = 6: per la tabella precedente (basta riferirsi alla colonna scelta prima), d(y) = V2
- t = 7: per la tabella precedente (basta riferirsi alla colonna scelta per t = 5), d(y) = V3

Proposizione P

Per b pari e $a > b$, l'elemento in posizione (b,a) è uguale a $p(y)$, con $y = b-a$.

Dimostrazione

Se $y = 1$, allora A e B sono adiacenti, e il gioco è terminato: B si trova in posizione pari, quindi ha vinto e noi perdiamo. $p(1) = PP$ è allora corretto.

Se $y = 2$, allora siamo obbligati a muoverci di un solo passo a sinistra terminando il gioco in posizione di sconfitta. Allora, correttamente, $p(2) = PP$.

Se $y = 3$, possiamo scegliere di muoverci una posizione verso sinistra, poi B deve muovere un passo a destra e terminare il gioco. A è allora in una cella pari, quindi vince: $p(3) = V1$.

Per $y = 4$ sfruttiamo l'osservazione precedente muovendoci di due passi a sinistra – $p(4) = V2$ – ; stesso ragionamento per $y = 5$, con $p(5) = V3$.

Sia $y > 5$ e t il resto di $(y-1) / 8$, quindi i valori delle celle adiacenti verso sinistra sono:

…	…	…	…	**p(y)**
…	d(y-4)	d(y-3)	d(y-2)	…
…	p(y-5)	p(y-4)	p(y-3)	…
…	*d(y-6)*	d(y-5)	d(y-4)	…
…	…	…	…	…

In un caso la cella indicata in corsivo può assumere valore XX, ma in quel caso si osserverà che il suo valore sarà ininfluente ai fini della dimostrazione.

Mostriamo la validità della proposizione nei possibili valori di t:

- $t = 0$:

…	…	…	…	**p(y)**
…	PP	PP	V1	…
…	V2	V3	V1	…
…	V2	V3	PP	…
…	…	…	…	…

Non esistono colonne raggiungibili che garantiscono una vittoria, quindi $p(y) = PP$.

- $t = 1$:

…	…	…	…	**p(y)**
…	PP	V1	V2	…
…	V3	V1	V2	…
…	V3	PP	PP	…
…	…	…	…	…

Non esistono colonne raggiungibili che garantiscono una vittoria, quindi $p(y) = PP$.

- $t = 2$:

…	…	…	…	**p(y)**
…	…	…	V3	…
…	…	…	V3	…
…	…	…	V1	…
…	…	…	…	…

Con una mossa sola, la vittoria è garantita, quindi $p(y) = V1$.

- t = 3:

Sfrutto l'osservazione precedente, quindi p(y) = V2.

- t = 4:

Sfrutto l'osservazione per t = 2, quindi p(y) = V3.

- t = 5:

…	…	…	…	**p(y)**
…	…	…	V3	…
…	…	…	V1	…
…	…	…	V1	…
…	…	…	…	…

Con una mossa sola, la vittoria è garantita, quindi p(y) = V1.

- t = 6:

Sfrutto l'osservazione precedente, quindi p(y) = V2.

- t = 7:

Sfrutto l'osservazione per t = 5, quindi p(y) = V3.

Le due dimostrazioni fanno uso l'una dell'altra solo per y minori di quelli che stanno cercando di dimostrare, quindi l'una non si basa sulla tesi (momentaneamente non dimostrata) dell'altra, e allora le due proposizioni possono essere ritenute dimostrate.

Per ricavare singolarmente i passi da seguire in base alla strategia dell'avversario basta produrre la matrice $C \times C$ calcolando nelle celle i relativi valori delle funzioni p e d.
Da osservare che non per tutti i C esiste una strategia vincente (p.e. con una pista di 23 curve).

Giulio GARBI
Studente del III anno Laurea Triennale in Informatica
Università degli Studi di Torino