Le Scienze - Rudi matematici

Problema di Maggio 2013

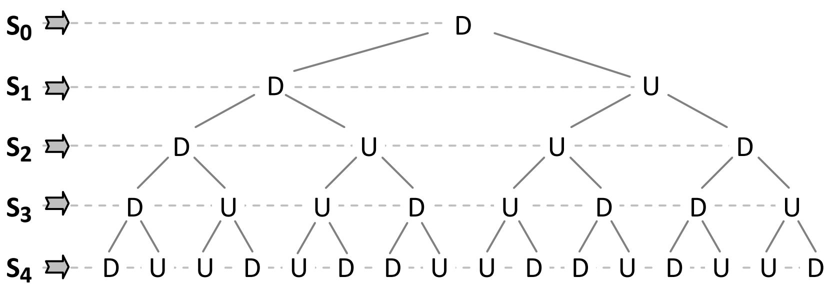
Esistono sequenze di lunghezza <u>non limitata</u> che soddisfano la proprietà di non avere tre sottosequenze consecutive uguali; questa proprietà verrà indicata nel seguito con $\mathcal{P}$.

Un insieme di sequenze per cui vale la proprietà $\mathcal{P}$ può essere, ad esempio, una successione $\{\mathbf{S}_n\}$ così definita:

- $\mathbf{S}_0$ = D
- $\mathbf{S}_n$ = risultato delle seguenti sostituzioni in $\mathbf{S}_{n-1}$:

  D $\Rightarrow$ DU   U $\Rightarrow$ UD

Come esempio, si riportano nella figura che segue i termini iniziali della successione:



Nel seguito si dimostrerà che per ciascun termine $\mathbf{S}_n$ della successione vale la proprietà $\mathcal{P}$; allo scopo vengono adottate le seguenti convenzioni:

- i simboli **a**, **b**, **c**, ... sono utilizzati per indicare generiche sottosequenze di una sequenza qualunque $\mathbf{S}_n$
- i simboli di una sequenza $\mathbf{S}_n$ vengono numerati *a partire da 0* (il primo simbolo ha quindi *posizione 0*, il secondo *posizione 1*, ecc.)
- con *posizione* di una sottosequenza si intende la posizione del suo *simbolo iniziale* all'interno della sequenza $\mathbf{S}_n$ che la contiene; ad esempio, con riferimento alla figura precedente, la sottosequenza UU di $\mathbf{S}_3$ ha posizione 1 e la sottosequenza UD di $\mathbf{S}_2$ ha posizione pari.
- nelle rappresentazioni grafiche usate nel seguito, si adotta la convenzione secondo cui le singole caselle di una sequenza (che contengono due simboli) hanno posizione *pari* (ossia contengono sempre sottosequenze di posizione pari); di conseguenza, ad esempio nella rappresentazione

...	D U	U D	D U	U D	U D	D U	...

  $\underbrace{\text{U UD D}}_{\mathbf{a}}$ $\underbrace{\text{UD UD DU}}_{\mathbf{b}}$

  le sequenze **a** = UUDD e **b** = UDUDDU hanno rispettivamente posizione *dispari* e *pari*.

Per come sono stati definiti gli $\mathbf{S}_n$, si possono osservare intanto alcune proprietà immediate:

P1. la lunghezza di $\mathbf{S}_n$ è 2^n (visto che ciascun termine ha lunghezza doppia rispetto al precedente)

P2. le sottosequenze DD e UU possono avere soltanto *posizione dispari* (considerando che le tutte le posizioni pari sono costituite, per costruzione, da una delle sottosequenze DU o UD)

P3. non possono esserci 3 simboli uguali consecutivi (poiché verrebbe violata la proprietà *P2*)

P4. non possono esserci 3 sottosequenze consecutive uguali di *posizione pari* e di *lunghezza 2* (poiché queste tre sottosequenze in $\mathbf{S}_n$ corrisponderebbero a tre simboli uguali consecutivi in $\mathbf{S}_{n-1}$, violando la proprietà *P3*)

P5. ogni sottosequenza **T** di lunghezza 7 o superiore contiene (in posizione dispari per la proprietà *P2*) almeno una sottosequenza DD o UU; in caso contrario, infatti, in **T** ci sarebbero 3 sottosequenze consecutive uguali di posizione pari e di lunghezza 2 con simboli alternati, ad esempio | UD | UD | UD | U ... , con violazione della proprietà *P4*.

Pur se non rilevanti ai fini della dimostrazione, possono essere sottolineate a titolo di curiosità anche le seguenti caratteristiche:

- la stessa successione **{S_n}** precedentemente descritta può anche essere generata definendo ciascun **S_n** come la *concatenazione* di **S_{n-1}** con il suo *complemento* (ossia con la sequenza ottenuta da **S_{n-1}** scambiando tra loro i simboli U e D):

$$S_n = S_{n-1} \oplus \overline{S_{n-1}} \quad \text{(dove } \oplus \text{ è il simbolo di concatenazione)}$$

- ogni **S_n** presenta la struttura tipica di *frattale*, come si può ad esempio dedurre dalla figura iniziale, dove (immaginando di estendere la figura indefinitamente verso il basso) ciascun sottoalbero contiene infinite volte se stesso.

La proprietà $\mathcal{P}$ può essere dimostrata per induzione.

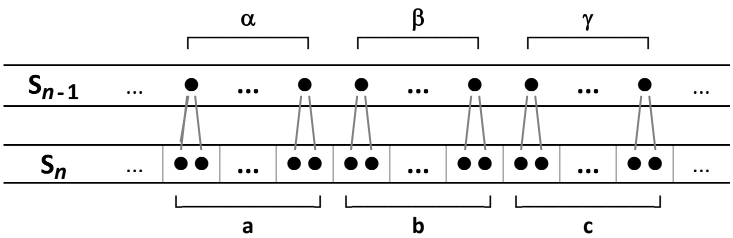
1. $\mathcal{P}$ vale per **S_0** (o, se si preferisce considerare il primo termine **S_n** di almeno tre simboli, $\mathcal{P}$ vale per **S_2**)

2. Se $\mathcal{P}$ vale per **S_{n-1}**, allora vale per **S_n**.

Per dimostrare questa affermazione è necessario esaminare tre casi distinti.
Nel seguito vengono chiamate **a**, **b**, **c** tre sottosequenze *consecutive di uguale lunghezza* di **S_n**.

Caso 1 - Le sottosequenze **a**, **b**, **c** di **S_n** hanno *lunghezza pari* e *posizione pari*.

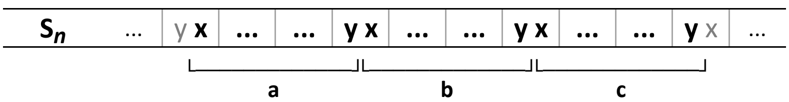
In questa ipotesi è possibile individuare tre corrispondenti sottosequenze α, β, γ di **S_{n-1}** tali che α genera **a**, β genera **b**, γ genera **c**, come mostrato nella figura seguente.



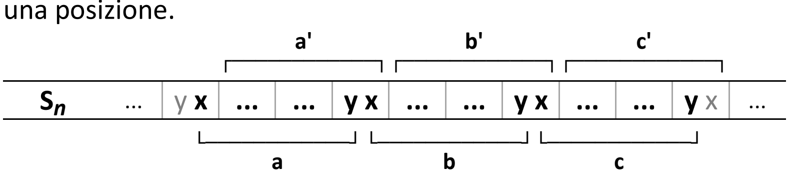
Poiché per ipotesi induttiva almeno due tra α, β, γ sono diverse tra loro, la stessa considerazione vale per **a**, **b**, **c** (considerando che sottosequenze diverse in **S_{n-1}** generano sottosequenze diverse in **S_n**).

Caso 2 - Le sottosequenze **a**, **b**, **c** di **S_n** hanno *lunghezza pari* e *posizione dispari*.

Si suppone inizialmente **a** = **b** = **c**.
Considerando i simboli iniziali e finali di ciascuna sottosequenza **a**, **b**, **c** ed i simboli immediatamente prima e dopo l'intera concatenazione **abc**, si osserva che i valori assunti da questi simboli devono rispettare lo schema indicato nella figura che segue, dove **x** ≠ **y** in quanto **yx** costituisce una sottosequenza di lunghezza 2 e di posizione pari (cfr. proprietà *P2*).



Si considerino ora le sottosequenze **a'**, **b'**, **c'** di **S_n** ottenute da **a**, **b**, **c** con una traslazione in avanti (o anche all'indietro) di una posizione.



Si osserva (rilevando che ciascuna delle **a'**, **b'**, **c'** si ottiene con la stessa permutazione circolare della corrispondente **a**, **b**, **c** , come mostra anche la figura precedente) che **a** = **b** = **c** implica **a'** = **b'** = **c'**; ma **a'**, **b'**, **c'** sono sottosequenze di $\mathbf{S}_n$ con lunghezza pari e posizione pari e, rientrando nel precedente caso 1, non possono essere uguali. Ciò comporta anche che l'ipotesi iniziale **a** = **b** = **c** è falsa.

Caso 3 - Le sottosequenze **a**, **b**, **c** di $\mathbf{S}_n$ hanno *lunghezza dispari*.

Se **a**, **b**, **c** hanno lunghezza 1, si richiama la proprietà *P3*.

Per lunghezze maggiori o uguali a 3, si suppone inizialmente **a** = **b** = **c**.
In questa ipotesi si osserva quanto segue.

a) I simboli iniziali e finali di ciascuna sottosequenza **a**, **b**, **c** sono sempre diversi tra loro. Si osserva infatti che i valori assunti da questi simboli devono rispettare lo schema indicato nella figura che segue, dove $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ in quanto il confine tra **a** e **b** (oppure, in alternativa, il confine tra **b** e **c**) si trova all'interno di una sottosequenza di lunghezza 2 e di posizione pari (cfr. proprietà *P2*).

$\mathbf{S}_n$	...	y **x**	**...**	**... y**	**x ...**	**...**	**y x**	**...**	**... y**	...
		a			**b**			**c**		

b) Poiché la lunghezza dell'intera concatenazione **abc** è maggiore o uguale a 9, in **abc** deve esserci almeno una sottosequenza **xx** di due simboli uguali consecutivi (cfr. proprietà *P5*).
Avendo supposto **a** = **b** = **c**, si osserva poi che **xx** deve essere contenuta *in ciascuna* delle **a**, **b** e **c**, e *nella stessa posizione relativa*; **xx** è inoltre contenuta *interamente* in ognuna delle **a**, **b** e **c** (ciascuna occorrenza di **xx** non può essere 'a cavallo' di **a**, **b** o di **b**, **c** per quanto affermato al punto a).
Considerando però che, tra **a**, **b** e **c**, almeno una ha posizione dispari ed almeno una ha posizione pari, ne consegue che almeno un'occorrenza di **xx**, rispetto all'intera $\mathbf{S}_n$, ha posizione assoluta dispari ed almeno un'occorrenza di **xx** ha posizione assoluta pari, in contrasto con quanto asserito dalla proprietà *P2*.

$\mathbf{S}_n$	...	... ●	... **x**	**x** ...	● ...	**x x**	... ●	... **x**	**x** ...	...
		a			**b**			**c**		

Per quanto considerato, l'ipotesi iniziale **a** = **b** = **c** è quindi falsa.
Si noti anche che, in quest'ultimo caso 3, l'ipotesi induttiva non viene utilizzata.

In conclusione si può affermare che per ogni $\mathbf{S}_n$ vale la proprietà $\mathcal{P}$.