

Soluzione al problema “Lettere di primavera”

Sia n il numero complessivo di caramelle in omaggio a ogni singola rivista.

Se consideriamo 3 interi positivi ordinati n_1, n_2, n_3 tali che:

$$n_1 < n_2 < n_3 \text{ e } n_1 + n_2 + n_3 = n$$

possiamo pensare di associare una qualsiasi delle loro $3!=6$ permutazioni ai 3 sacchetti dedicati ai Rudi ottenendo in questo modo sempre un numero diverso di caramelle in ogni singolo sacchetto.

Ad esempio per $n = 10$ possiamo considerare 4 terne ordinate $[(1,2,7), (1,3,6), (1,4,5) \text{ e } (2,3,5)]$ ognuna delle quali può essere distribuita in 6 modi diversi nei 3 sacchetti dedicati ai Rudi e quindi soddisfare in totale 24 copie della rivista.

Seguendo questo approccio il problema si riduce a contare il numero di terne distinte (n_1, n_2, n_3) con: $n_i < n_j$ e $n_1 + n_2 + n_3 = n$, con l'ulteriore proprietà che:

$$n_1 < n_2 < n_3 \quad (1)$$

Per determinare il numero di copie della rivista gestibili sarà quindi sufficiente moltiplicare il risultato ottenuto per 6.

Indichiamo con $C(n)$ il numero di distinte triple con la proprietà (1); sia inoltre $c = n \bmod 6$

$C(n)$ si può esprimere come:

$$C(n) = \frac{(n-c)}{6} * \frac{(n+c-6)}{2} + I_0(c)$$

Dove $I_0(c)$ è la funzione indicatrice di c , ovvero $I_0(c) = 1$ per $c = 0$

Per vedere come si giunge a questo risultato si veda l'Appendice.

Il numero di distinte riviste $S(n)$ che si potranno associare a distinte distribuzioni di n caramelle nei 3 sacchetti sarà uguale a $6 * C(n)$.

Supponendo che “Le Scienze” abbia una tiratura di 100.000 copie si vede subito che il minimo intero n tale che $S(n) \geq 100.000$ è 451.

A me piace tuttavia pensare che il numero di tirature della rivista sia esattamente 92.022, corrispondente a $6 * 72 = 432$ caramelle. Un numero perfetto come regalo, non trovate?

Appendice

Dimostriamo che il numero di distinte terne (n_1, n_2, n_3) con:

$n_i \neq n_j$ e $n_1 + n_2 + n_3 = n$, con l'ulteriore proprietà che:

$$n_1 < n_2 < n_3 \quad (1)$$

è una funzione $C(n)$ che si può esprimere come:

$$C(n) = \frac{(n-c)}{6} * \frac{(n+c-6)}{2} + I_0(c)$$

dove $c = n \bmod 6$ e $I_0(c)$ è la funzione indicatrice di c , ovvero $I_0(c) = 1$ per $c=0$ ($I_0(c) = 0$ per $c \neq 0$)

Si tratta in definitiva di contare il numero di terne ordinate la cui somma è n : la prima terna sarà

$$(1, 2, n-3)$$

che dà come somma per l'appunto n . Tutte le altre terne con prima coordinata = 1 si ottengono dalla prima aumentando ad ogni passo di un'unità la seconda coordinata e diminuendo la terza di un'unità, finché questa resta maggiore della seconda (ad esempio $(1, 3, n-4)$, $(1, 4, n-5)$ e così via.).

Quando il ciclo è finito si passa alle triple con coordinata $(2, 3, n-5)$ ripetendo il ragionamento al passo precedente e così via ripartendo ogni volta con le prime 2 coordinate diverse. Si vede subito che in questo modo si generano tutte le triple possibili e che sono tutte diverse.

Fissato n , il massimo valore che può assumere la prima coordinata di una tripla siffatta è $\inf(n/3)$ dove con $\inf(x)$ indichiamo la parte intera inferiore di x . In definitiva dobbiamo contare tutte le triple che hanno come prima coordinata da 1 a $\inf(n/3)$ e la seconda e terza coordinata individuata come descritto prima.

Si osserva allora che se n è pari, le triple con la prima coordinata = 1 sono $(n-4)/2$, mentre le triple con la prima coordinata = 2 sono $(n-8)/2$. Nel caso in cui n è dispari si ha invece che il numero di triple con la prima coordinata = 1 è pari a $(n-5)/2$, mentre nell'altro caso il numero di triple = $(n-7)/2$.

Sommando i due termini si ottiene per ogni n :

$$(n-4)/2 + (n-8)/2 = 2(n-6)/2 = n-6 = (n-5)/2 + (n-7)/2$$

Più in generale la somma delle triple con coordinate k e $k+1$ possono essere espresse come:

$$n-6k$$

per cui quello che stiamo cercando è:

$$C(n) = \sum_{k=1}^m n - 6k + I_0(c) \quad (2)$$

dove m è tale per cui $n = 6m + c$ e $I_0(c) = 1$ per $c=0$ ($I_0(c) = 0$ per $c \neq 0$). La presenza della $I_0(c)$ è conseguenza del fatto che quando n è un divisore esatto di 6 ossia $n=6m$ si ha $n-6m = 0$ e quindi per $k =$

m l'ultimo termine della somma è 0 mentre in realtà dobbiamo tenere conto dell'ultima tripla che è del tipo $(n/3-1, n/3, n/3+1)$.

Dalla (2) otteniamo:

$$C(n) = \sum_{k=1}^m n - 6 * \sum_{k=1}^m k + I_0(c)$$

$$= mn - 6\left(\frac{m(m+1)}{2}\right) + I_0(c)$$

$$= mn - 3m(m+1) + I_0(c)$$

$$= m(n - 3(m+1)) + I_0(c)$$

e poiché abbiamo assunto che $n = 6m + c$, ovvero $m = (n-c)/6$

$$= \frac{(n-c)}{6} * \left(n - \frac{(n-c+6)}{2}\right) + I_0(c)$$

$$= \frac{(n-c)}{6} * \frac{(n+c-6)}{2} + I_0(c) \quad \mathbf{QED}$$