

Imposte e gabelle (anzi dazi)

(Problema di Marzo 2012)

Il Problema:

1° Caso

Alice si è trasformata in una particolare gabelliera; può riscuotere un dazio pari ad un quarto del valore di carico dichiarato o acquistare (sempre al valore dichiarato) quanto trasportato da Piotr con un camion. Il valore effettivo trasportato è di € 1000,00. Qual è il valore dichiarato da Piotr in modo da ottimizzare il suo guadagno?

2° Caso e caso generale

Alice può acquistare la merce se ha lo spazio dove mettere gli acquisti altrimenti deve rinunciare. Quanto dichiarerà Piotr se sa che Alice può acquistare al massimo il contenuto di un camion al giorno e si presenta per primo insieme ad un suo amico con due camion che trasportano merce di pari valore? E se Alice ha spazio per la merce di due camion e si presentano cinque camion, quanto dichiarerà il primo conducente? E più in generale se n sono i camion e c'è spazio per la merce di m camion?

Risposta:

Nel primo caso Piotr dichiara un valore di € 800,00.

Nel secondo caso (2 camion e posto per 1) dichiarerà € 640,00.

Nel caso (5 camion e posto per 2) dichiarerà € 655,36

Spiegazione:

Indichiamo con $x(n,m)$ la dichiarazione effettuata quando si presenta il primo di n camion e c'è il posto per la merce di m camion e con $V(n,m)$ il valore totale, tra merci e contante, che rimane dopo che gli n camion sono passati per la dogana.

Indichiamo inoltre con v il valore delle merci trasportate da ogni camion e con t la frazione di v che deve essere pagata (nel caso specifico è $v = € 1000,00$ e $t = 0,25$).

Abbiamo:

$x(n,0) = 0$ e $V(n,0) = n \cdot v$. Infatti se Alice non ha posto per la merce non può far altro che applicare la tassa ed in questo caso risulta conveniente dichiarare un valore nullo della merce e non pagare nessuna imposta.

Se $n \leq m$ Alice può effettuare l'acquisto della merce per ciascun camion per cui sarà opportuno dichiarare un valore tale da ottenere lo stesso risultato sia che Alice acquisti la merce o effettui la tassazione.

Sarà perciò

$$v - xt = x \text{ da cui } x = \frac{v}{1+t} \text{ e } x(n,m) = \frac{v}{1+t}; V(n,m) = \frac{nv}{1+t}$$

$$\text{E' questo il 1° caso per cui } x(1,1) = \frac{1000}{1+0,25} = \frac{1000}{1,25} = 800$$

Se $n > m$ dovrà valere

$v - x(n,m) \cdot t + V(n-1,m) = x(n,m) + V(n-1,m-1)$ (il primo membro corrisponde al pagamento della tassa, per cui resta immutato il posto per le merci mentre diminuisce il numero dei camion; il secondo membro corrisponde all'acquisto della merce da parte di Alice per cui diminuisce di una unità sia il posto per le merci che il numero di camion che deve passare la dogana)

Dall'espressione precedente si ottiene:

$$x(n,m) = \frac{v + V(n-1,m) - V(n-1,m-1)}{1+t}; V(n,m) = \frac{v + V(n-1,m) + t \cdot V(n-1,m-1)}{1+t}$$

Riassumendo la soluzione generale è:

$$x(n,0) = 0; V(n,0) = n \cdot v;$$

$$x(n,m) = \frac{v}{1+t}; V(n,m) = \frac{nv}{1+t} \text{ se } m > 0 \text{ e } n \leq m$$

$$x(n,m) = \frac{v + V(n-1,m) - V(n-1,m-1)}{1+t}; V(n,m) = \frac{v + V(n-1,m) + t \cdot V(n-1,m-1)}{1+t} \text{ se } m > 0 \text{ e } n > m$$

Di seguito una tabella con i primi casi ottenuta con un foglio di calcolo.

| | 0 | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | | 8 | |
|----|------|----------|---------------|----------|---------------|---------|--------|---------|--------|---------|--------|---------|--------|---------|--------|---------|--------|---------|
| | x | V | x | V | x | V | x | V | x | V | x | V | x | V | x | V | x | V |
| 1 | 0,00 | 1000,00 | 800,00 | 800,00 | 800,00 | 800,00 | 800,00 | 800,00 | 800,00 | 800,00 | 800,00 | 800,00 | 800,00 | 800,00 | 800,00 | 800,00 | 800,00 | 800,00 |
| 2 | 0,00 | 2000,00 | 640,00 | 1640,00 | 800,00 | 1600,00 | 800,00 | 1600,00 | 800,00 | 1600,00 | 800,00 | 1600,00 | 800,00 | 1600,00 | 800,00 | 1600,00 | 800,00 | 1600,00 |
| 3 | 0,00 | 3000,00 | 512,00 | 2512,00 | 768,00 | 2408,00 | 800,00 | 2400,00 | 800,00 | 2400,00 | 800,00 | 2400,00 | 800,00 | 2400,00 | 800,00 | 2400,00 | 800,00 | 2400,00 |
| 4 | 0,00 | 4000,00 | 409,60 | 3409,60 | 716,80 | 3228,80 | 793,60 | 3201,60 | 800,00 | 3200,00 | 800,00 | 3200,00 | 800,00 | 3200,00 | 800,00 | 3200,00 | 800,00 | 3200,00 |
| 5 | 0,00 | 5000,00 | 327,68 | 4327,68 | 655,36 | 4064,96 | 778,24 | 4007,04 | 798,72 | 4000,32 | 800,00 | 4000,00 | 800,00 | 4000,00 | 800,00 | 4000,00 | 800,00 | 4000,00 |
| 6 | 0,00 | 6000,00 | 262,14 | 5262,14 | 589,82 | 4917,50 | 753,66 | 4818,62 | 794,62 | 4801,66 | 799,74 | 4800,06 | 800,00 | 4800,00 | 800,00 | 4800,00 | 800,00 | 4800,00 |
| 7 | 0,00 | 7000,00 | 209,72 | 6209,72 | 524,29 | 5786,43 | 720,90 | 5638,40 | 786,43 | 5605,06 | 798,72 | 5600,38 | 799,95 | 5600,01 | 800,00 | 5600,00 | 800,00 | 5600,00 |
| 8 | 0,00 | 8000,00 | 167,77 | 7167,77 | 461,37 | 6671,09 | 681,57 | 6468,01 | 773,32 | 6411,72 | 796,26 | 6401,32 | 799,70 | 6400,09 | 799,99 | 6400,00 | 800,00 | 6400,00 |
| 9 | 0,00 | 9000,00 | 134,22 | 8134,22 | 402,65 | 7570,43 | 637,53 | 7308,62 | 754,97 | 7222,98 | 791,67 | 7203,40 | 799,01 | 7200,33 | 799,93 | 7200,02 | 800,00 | 7200,00 |
| 10 | 0,00 | 10000,00 | 107,37 | 9107,37 | 348,97 | 8483,18 | 590,56 | 8160,98 | 731,49 | 8040,11 | 784,33 | 8007,32 | 797,55 | 8000,95 | 799,75 | 8000,08 | 799,98 | 8000,00 |
| 11 | 0,00 | 11000,00 | 85,90 | 10085,90 | 300,65 | 9408,02 | 542,24 | 9025,42 | 703,30 | 8864,28 | 773,77 | 8813,87 | 794,90 | 8802,22 | 799,31 | 8800,26 | 799,94 | 8800,02 |

Le colonne corrispondono ai posti per le merci mentre le righe il numero di camion che si presentano alla dogana.
 In blu il primo valore dichiarato nei casi $n = 1, m = 1$; $n = 2, m = 1$ e $n = 5, m = 2$.