Un'utile proprietà?

Arcangelo Muschitiello
arcangelomusk@gmail.com

Siano:

$$\boldsymbol{N_1} = \sum_{i=-d}^{n-(d+1)} b_i * 10^i = b_{n-(d+1)} * 10^{n-(d+1)} + \cdots + b_{-d} * 10^{-d}$$

$$= b_{n-(d+1)} * 10^{n-(d+1)} + \sum_{i=-d+1}^{n-(d+2)} b_i * 10^i + b_{-d} * 10^{-d} \qquad n \geq 2$$

$$\boldsymbol{N_2} = b_{-d} * 10^{n-(d+1)} + \sum_{i=-d+1}^{n-(d+2)} b_i * 10^i + b_{n-(d+1)} * 10^{-d}$$

n = numero di cifre di cui si compone il numero
b = cifre che lo costituiscono
10 = pesi ad essi associati (sistema decimale)
d = numero di cifre decimali

$$(es.\ \boldsymbol{N_1} = \mathbf{6324{,}52};\ \boldsymbol{N_2} = \mathbf{2324{,}56})$$

un intero positivo (o decimale limitato positivo) e il suo corrispondente con gli "estremi invertiti", scritti nella cosiddetta forma polinomiale (*), si dimostra che:

$$\boldsymbol{J_b} = \boldsymbol{N_1} - \boldsymbol{N_2} = \left(b_{n-(d+1)} - b_{-d}\right) * \left(10^{n-(d+1)} - 10^{-d}\right) \qquad N_1 \geq N_2 \Rightarrow b_{n-(d+1)} \geq b_{-d}; \qquad n, d \in N$$

$$\sum_{i=-d}^{n-(d+1)} b_i * 10^i - \left(b_{-d} * 10^{n-(d+1)} + \sum_{i=-d+1}^{n-(d+2)} b_i * 10^i + b_{n-(d+1)} * 10^{-d}\right) = \left(b_{n-(d+1)} - b_{-d}\right) * \left(10^{n-(d+1)} - 10^{-d}\right)$$

$$\sum_{i=-d}^{n-(d+1)} b_i * 10^i - b_{-d} * 10^{n-(d+1)} - \sum_{i=-d+1}^{n-(d+2)} b_i * 10^i - b_{n-(d+1)} * 10^{-d} = \left(b_{n-(d+1)} - b_{-d}\right) * \left(10^{n-(d+1)} - 10^{-d}\right)$$

considerando l'espressione equivalente di $\boldsymbol{N_1}$, semplificando si ottiene

$$b_{n-(d+1)} * 10^{n-(d+1)} + b_{-d} * 10^{-d} - b_{-d} * 10^{n-(d+1)} - b_{n-(d+1)} * 10^{-d} = \left(b_{n-(d+1)} - b_{-d}\right) * \left(10^{n-(d+1)} - 10^{-d}\right)$$

$$b_{n-(d+1)} * \left(10^{n-(d+1)} - 10^{-d}\right) + b_{-d} * \left(10^{-d} - 10^{n-(d+1)}\right) = b_{n-(d+1)} * 10^{n-(d+1)} - b_{n-(d+1)} * 10^{-d} - b_{-d} * 10^{n-(d+1)} + b_{-d} * 10^{-d}$$

$$b_{n-(d+1)} * \left(10^{n-(d+1)} - 10^{-d}\right) + b_{-d} * \left(10^{-d} - 10^{n-(d+1)}\right) = b_{n-(d+1)} * \left(10^{n-(d+1)} - 10^{-d}\right) + b_{-d} * \left(10^{-d} - 10^{n-(d+1)}\right)$$

c.v.d.

(*) Somma di più termini ciascuno dei quali è il prodotto di una potenza di 10 per un numero naturale minore di 10 (sistema di numerazione decimale).

Ora definiamo:

$$\boldsymbol{J_a} = a_{n-(d+1)} * 10^{n-(d+1)} + a_{-d} * 10^{-d} + 10^{n-(d+1)} - 10^{-d+1}$$

$$= \left(a_{n-(d+1)} + 1\right) * 10^{n-(d+1)} + (a_{-d} - 10) * 10^{-d}$$

un intero positivo (o decimale limitato positivo); è possibile dimostrare che esistono $\boldsymbol{10 - n_0}$ coppie "$\boldsymbol{b_{n-(d+1)}}, \boldsymbol{b_{-d}}$" tali che sia soddisfatta la seguente relazione:

$$\left(b_{n-(d+1)} - b_{-d}\right) * \left(10^{n-(d+1)} - 10^{-d}\right) = \boldsymbol{J_a}$$

Poniamo:

- $\left(b_{n-(d+1)} - b_{-d}\right) = \frac{\left(a_{n-(d+1)}*10+a_{-d}\right)}{9} = \boldsymbol{n_0} \Longrightarrow \left(a_{n-(d+1)} * 10 + a_{-d}\right) = \boldsymbol{n_0} * 9 = \boldsymbol{n_k} \qquad \{\boldsymbol{n_0} \in N | 0 \leq \boldsymbol{n_0} \leq 9\}$

$$n_0 * \left(10^{n-(d+1)} - 10^{-d}\right) = J_a$$

- $a_{n-(d+1)} * 10^{n-(d+1)} + a_{-d} * 10^{-d} = 9 * \boldsymbol{m} \qquad \textbf{(1)}$

$$n_0 * \left(10^{n-(d+1)} - 10^{-d}\right) = \boldsymbol{9 * m} + 10^{n-(d+1)} - 10^{-d+1}$$

- $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{\Upsilon} + n_0 * 10^{-d}$
- $\boldsymbol{\Upsilon} = \frac{\Lambda*(n_0-1)}{9}$
- $\boldsymbol{\Lambda} = 10^{n-(d+1)} - 10^{-d+1} = \sum_{i=-d+1}^{n-(d+2)} 9_i * 10^i + 0 * 10^{-d}$

$$n_0 * \left(10^{n-(d+1)} - 10^{-d}\right) = 9 * \left(\boldsymbol{\Upsilon} + \boldsymbol{n_0} * \boldsymbol{10^{-d}}\right) + \Lambda$$

$$" = 9 * \boldsymbol{\Upsilon} + 9 * n_0 * 10^{-d} + \Lambda$$

$$" = 9 * \left[\frac{\boldsymbol{\Lambda * (n_0 - 1)}}{\boldsymbol{9}}\right] + 9 * n_0 * 10^{-d} + \Lambda$$

$$" = n_0 * \left(\boldsymbol{\Lambda} + 9 * 10^{-d}\right)$$

$$" = n_0 * \left(\boldsymbol{10^{n-(d+1)}} - \boldsymbol{10^{-d+1}} + 9 * 10^{-d}\right)$$

$$" = n_0 * \left(10^{n-(d+1)} - 10^{-d+1} + (10 - 1) * 10^{-d}\right)$$

$$" = n_0 * \left(10^{n-(d+1)} - 10^{-d+1} + 10^{-d+1} - 10^{-d}\right)$$

$$n_0 * \left(10^{n-(d+1)} - 10^{-d}\right) = n_0 * \left(10^{n-(d+1)} - 10^{-d}\right)$$

c.v.d.

Conoscendo $\boldsymbol{J_a}$ è possibile quindi calcolare facilmente il valore di $\boldsymbol{n_0}$, così definito:

$$\{n_0 \in N | 0 \leq n_0 \leq 9\}$$

Inoltre, dalla definizione di n_0 consegue che, fissati $n, d \in N$, esistono $\boldsymbol{10 - n_0}$ possibilità (cioè combinazioni "$\boldsymbol{b_{n-(d+1)}}$, $\boldsymbol{b_{-d}}$") per cui $\boldsymbol{J_b}$ sia uguale a $\boldsymbol{J_a}$.

I valori di $\boldsymbol{b_{n-(d+1)}}$, $\boldsymbol{b_{-d}}$ rispettano la sequenza di seguito illustrata:

$b_{n-(d+1)}$	b_{-d}
n_0	0
n_0 + 1	1
n_0 + 2	2
…	…
9	$9 - n_0$

TABELLA DI RIFERIMENTO

$\boldsymbol{10 - n_0}$	$\boldsymbol{b_{n-(d+1)}}$	$\boldsymbol{b_{-d}}$	$\boldsymbol{a_{n-(d+1)} * 10 + a_{-d} = n_k}$									
1	n_0	0	81	72	63	54	45	36	27	18	09	0
2	n_0 + 1	1		72	63	54	45	36	27	18	09	0
3	n_0 + 2	2			63	54	45	36	27	18	09	0
4	n_0 + 3	3				54	45	36	27	18	09	0
5	n_0 + 4	4					45	36	27	18	09	0
6	n_0 + 5	5						36	27	18	09	0
7	n_0 + 6	6							27	18	09	0
8	n_0 + 7	7								18	09	0
9	n_0 + 8	8									09	0
10	n_0 + 9	9										0
$\boldsymbol{n_0 = \left(b_{n-(d+1)} - b_{-d}\right)}$			9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Esempio:

$$J_a = \mathbf{399,9996} = 3 * 10^2 + \sum_{i=-3}^{1} 9_i * 10^i + 0 * 10^{-4} + 6 * 10^{-4}$$

- $\boldsymbol{n_k} = \left(a_{n-(d+1)} * 10 + a_{-d}\right) = 3 * 10 + 6 = 36$
- $\boldsymbol{n_0} = \frac{n_k}{9} = \frac{36}{9} = \mathbf{4}$
- $\mathbf{10} - \boldsymbol{n_0} = \mathbf{6}$

Esistono cioè **6** possibilità per cui la differenza "$\boldsymbol{b_{n-(d+1)} - b_{-d}}$" sia uguale a **4**, e precisamente:

$b_{n-(d+1)}$	b_{-d}
4	0
5	1
6	2
7	3
8	4
9	5

$N_1 - N_2$	J_a
$\mathbf{4}b_1b_0, b_{-1}b_{-2}b_{-3}\mathbf{0} - \mathbf{0}b_1b_0, b_{-1}b_{-2}b_{-3}\mathbf{4}$	399,9996
$\mathbf{5}b_1b_0, b_{-1}b_{-2}b_{-3}\mathbf{1} - \mathbf{1}b_1b_0, b_{-1}b_{-2}b_{-3}\mathbf{5}$	
$\mathbf{6}b_1b_0, b_{-1}b_{-2}b_{-3}\mathbf{2} - \mathbf{2}b_1b_0, b_{-1}b_{-2}b_{-3}\mathbf{6}$	
$\mathbf{7}b_1b_0, b_{-1}b_{-2}b_{-3}\mathbf{3} - \mathbf{3}b_1b_0, b_{-1}b_{-2}b_{-3}\mathbf{7}$	
$\mathbf{8}b_1b_0, b_{-1}b_{-2}b_{-3}\mathbf{4} - \mathbf{4}b_1b_0, b_{-1}b_{-2}b_{-3}\mathbf{8}$	
$\mathbf{9}b_1b_0, b_{-1}b_{-2}b_{-3}\mathbf{5} - \mathbf{5}b_1b_0, b_{-1}b_{-2}b_{-3}\mathbf{9}$	

$$\boldsymbol{J_b} = N_1 - N_2 = \left(b_{n-(d+1)} - b_{-d}\right) * \left(10^{n-(d+1)} - 10^{-d}\right) = 4 * (10^2 - 10^{-4}) = \mathbf{399,9996}$$

Per completezza si riporta la dimostrazione della $(\mathbf{1})$, relazione che lega la variabile "$\boldsymbol{m}$" agli estremi di $\boldsymbol{J_a}$:

$$m = \boldsymbol{\Upsilon} + n_0 * 10^{-d}$$

$$m = \frac{\boldsymbol{\Lambda} * (\boldsymbol{n_0} - \mathbf{1})}{\mathbf{9}} + n_0 * 10^{-d}$$

omettendo alcuni semplici passaggi diventa

$$9 * m = \left(10^{n-(d+1)} - 10^{-d+1}\right) * (n_0 - 1) + \mathbf{9} * n_0 * 10^{-d}$$

$$9 * m = \left(10^{n-(d+1)} - 10^{-d+1}\right) * (n_0 - 1) + (\mathbf{10} - \mathbf{1}) * n_0 * 10^{-d}$$

moltiplicando si ottiene

$$9 * m = n_0 * 10^{n-(d+1)} - 10^{n-(d+1)} - n_0 * 10^{-d+1} + 10^{-d+1} + n_0 * 10^{-d+1} - n_0 * 10^{-d}$$

$$9 * m = n_0 * \left(10^{n-(d+1)} - 10^{-d}\right) - 10^{n-(d+1)} + 10^{-d+1}$$

- $\boldsymbol{J_a} = n_0 * \left(10^{n-(d+1)} - 10^{-d}\right)$
- $\boldsymbol{\Lambda} = 10^{n-(d+1)} - 10^{-d+1}$

$$9 * m = \boldsymbol{J_a} - \boldsymbol{\Lambda}$$

- $\boldsymbol{J_a} = a_{n-(d+1)} * 10^{n-(d+1)} + a_{-d} * 10^{-d} + \boldsymbol{\Lambda}$

$$\mathbf{9} * \boldsymbol{m} = \boldsymbol{a_{n-(d+1)}} * \mathbf{10}^{\boldsymbol{n-(d+1)}} + \boldsymbol{a_{-d}} * \mathbf{10}^{\boldsymbol{-d}}$$

c.v.d.

Concludiamo esaminando un caso particolare:

$$\boldsymbol{J_a} = \sum_{i=-d}^{n-(d+2)} 9_i * 10^i \qquad per\ n_0 = 1$$

In genere:

$$n_0 * \left(10^{n-(d+1)} - 10^{-d}\right) = J_a \qquad (\mathbf{2})$$

- $\frac{a_{n-(d+1)}*10+a_{-d}}{9} = n_0$

$$\frac{a_{n-(d+1)} * 10 + a_{-d}}{9} = 1 \implies a_{n-(d+1)} * 10 + a_{-d} = 9 \quad se \quad \boldsymbol{a_{n-(d+1)}} = 0 \quad ed \quad \boldsymbol{a_{-d}} = 9$$

dunque l'espressione di $\boldsymbol{J_a}$ può essere così riproposta:

$$J_a = 0 * 10^{n-(d+1)} + \mathbf{10}^{\boldsymbol{n-(d+1)}} - \mathbf{10}^{\boldsymbol{-d+1}} + 9 * 10^{-d}$$

$$= 0 * 10^{n-(d+1)} + \sum_{\boldsymbol{i=-d+1}}^{\boldsymbol{n-(d+2)}} \mathbf{9}_{\boldsymbol{i}} * \mathbf{10}^{\boldsymbol{i}} + \mathbf{0} * \mathbf{10}^{-\boldsymbol{d}} + 9 * 10^{-d}$$

$$= \sum_{i=-d}^{n-(d+2)} 9_i * 10^i$$

Infatti riscrivendo la $(\mathbf{2})$ con $\boldsymbol{n_0} = \mathbf{1}$ risulta:

$$\left(10^{n-(d+1)} - 10^{-d}\right) = \sum_{i=-d}^{n-(d+2)} 9_i * 10^i$$

c.v.d.