Tre dadi duri

(e tre sacchetti molli)

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Revisione **2.1**	*Codice* **RMB-BSH-007**
Data **200503242212**	*Autore* *AAVV*
Pagine **42**	*Titolo* **Tre Dadi Duri**

Indice

1. Introduzione

Quand'è stata l'ultima volta che avete comprato un paio di scarpe? Non troppo tempo fa, probabilmente. Nell'occidente industrializzato, l'acquisto delle calzature non rientra più nella classe degli "eventi memorabili", almeno per la maggior parte della gente. E, comprandole, avete esercitato il vostro criterio selettivo, avete applicato principi estetici o funzionali. Insomma, avete scelto. Non che ci sia nulla di straordinario, in questo: quasi ogni azione quotidiana, anche la più semplice e ripetitiva, richiede usualmente una scelta di qualche tipo. Aprite gli occhi e decidete se alzarvi o meno, se andare o no anche oggi al lavoro, se saltare o meno la colazione, e così via, di scelta in scelta, fino all'ultima decisione del giorno ("Adesso spengo la luce o leggo ancora due righe?").

Nonostante sia indubbio che anche gli animali facciano delle scelte, molti filosofi pensano addirittura che l'esercizio della scelta sia forse una delle maggiori caratteristiche dell'essere umano. Certo, questi filosofi si trovano in compagnia numerosa e autorevole: non c'è quasi religione, sul globo terracqueo, che non esorti a "scegliere la via giusta", mettendo all'erta sui possibili rischi di vivere una vita sbagliata. Il concetto di Libero Arbitrio gioca un ruolo importantissimo nell'etica di ogni religione e di ogni sistema giuridico; un giudice condannerà a pene ben diverse un omicidio volontario e uno preterintenzionale. E secondo molte religioni, è proprio dal Libero Arbitrio che discende, in ultima analisi, la cruciale differenza tra la perenne dannazione e la sempiterna beatitudine.

Dal lato opposto della bilancia, a far da contrappeso al Libero Arbitrio regna sovrano il Caso. Caso che la nostra bella lingua rende anagramma di Caos, e forse per questo nelle nostre latitudini i due termini sono quasi sinonimi. E tanto alto è il valore del Libero Arbitrio, tanto spesso il Caso viene denigrato, rivestito di diabolica perfidia.

Ma è poi davvero cosi? E soprattutto, cosa c'entra questa filosofica dicotomia con la matematica? Anzi, con la matematica ricreativa?

C'entra. E basta un problema apparentemente innocuo, a dimostrarlo. Un problema che inizia con tre dadi, misteriosamente definiti "duri" dal Deus Ex Machina di RM. I tre dadi sono ovviamente lo strumento del demonio, l'alea implicita in ogni tentazione. Chiedevamo ai nostri lettori di affrontare quell'alea, misurarla, domarla grazie alla vetusta saggezza dei numeri e dei calcoli. Poi, perfidamente, ponevamo un'altra domanda, più sottile e insinuante. Dopo aver misurato la forza del Caso, fate scendere in campo il vostro Libero Arbitrio. Scegliete, modificate, tenete, cambiate. E, dopo aver pesato il demonio, misurate il vostro divino potere di scelta.

Perché sapevamo che scegliere è difficile.

Ma i nostri lettori non ci hanno deluso. Hanno lottato con il Caso, e lo hanno domato, almeno quanto bastava a capire se valeva la pena di affrontarlo o no, secondo le nostre regole del gioco. Poi, con molta più fatica, hanno provato a applicare la stessa metrica al concetto di Scelta. E hanno scoperto quanto è più difficile, misurare le tentazioni dell'uomo.

Nelle pagine che seguono Mirtillo, GaS, PMP, Last Duke e Caronte dimostrano di avere la testa più dura dei dadi, per quanto duri essi possano essere. Nella lunga discussione che porterà alla soluzione la durezza dei dadi finirà per trasformarsi nella mollezza di sacchetti di panno, il percorso si arricchirà di grafici che era ben difficile immaginare nascosti nelle pieghe dell'apparentemente semplice enunciazione del problema.

È caratteristico notare anche come si evolva la notazione, al cambiare dell'approccio di ogni solutore e man mano che la complicazione del problema si acuisce. Nelle pagine che seguono troverete una foresta di sommatorie a cui seguirà un piccolo lago di istruzioni per un programma di calcolo; si alterneranno di continuo tabelle su tabelle, interrotte ogni tanto da grafici colorati di distribuzione, finchè il panorama si fissa sull'armonia imprevista di grafi triangolari fatti di punti e di linee. Un telegrafo grippale, potremmo dire, che chiude un lungo discorso con due righe finali di commento tanto profonde quanto dense di etica filosofica.

E che si possono applicare tanto al problema dei Tre Dadi Duri (o dei Tre Sacchetti Molli) quanto alla scelta del paio di scarpe di cui parlavamo all'inizio..

2. Il Problema – RM059

Allora, il gioco è stato testato da Alberto e Fred, che si sono impossessati dei miei dadi da "Dungeons & Dragons", mostrando un preoccupante interesse in particolare per quello icosaedrico. Comunque, cercheremo di generalizzare il gioco a dadi a N facce. Il consiglio, come al solito, è di provare prima con dei dadi piccoli (vi ricordo che in D&D esiste anche un dado a quattro facce…).

Il "Banco" tira due volte il dado, ottenendo due numeri. Quindi, tirate voi. Se il vostro risultato è strettamente incluso tra i due valori ottenuti dal banco, vincete. Quali sono le vostre probabilità di vincere?

Piccola complicazione: adesso, quando il banco ha tirato il dado due volte, potete scegliere: o "tenete" uno dei due valori ottenuti dal banco (e in questo caso il banco tira un'altra volta il dado per ottenere il suo secondo valore) o tirate voi il dado per ottenere il vostro valore. Le regole di vincita sono sempre le stesse.

La strategia di scelta non è difficile da ottenere, ma… Quali sono le vostre probabilità di vincita?

3. Le soluzioni in RM060

3.1 Mirtillo e la prima parte

[…] un giorno mi era stato proposto questo problema, da un'urna contenente N numeri, si estraggono 3 numeri, che possibilità ci sono che il terzo sia compreso tra i primi due?

Ora facendo due prove ci si rende conto che la possibilità è 1/3 per qualunque N, se prendete un segmento lungo N e prendete due punti a caso (infinite volte) la distanza media tra i due è $N/3$ perciò in media dividono il segmento in 3 parti uguali la probabilità che un terzo punto cada nel segmentino centrale è dunque di un terzo.

Questo discorso va a meraviglia se NESSUNO dei numeri estratti dopo è uguale ad uno già estratto (il caso dell'urna). Con i dadi è diverso, però mi aspetto che con un dado da tantissime facce la mia possibilità di vincere sia circa di 1/3.

Bene, a questo punto vediamo i vostri casi, partendo da quello a 3 facce (sì, giocavo anche io a D&D, non esiste questo dado... *[Ah sì? Il Manuale dice di tirare il dado da sei e dividere per due il risultato, tenendo la parte intera. Esiste anche il dado "da due", vedendo se viene pari o dispari un qualsiasi dado "pari". Ma in questo caso è più comodo a "testa o croce" (con una delle mie monete, evidentemente… (RdA)]).*

La mia possibilità base è 1/3 (come ho spiegato male prima :-)) meno tutte le possibilità in cui escano due numeri uguali, se due dei tre sono uguali io sono spacciato. Perciò ecco le possibilità di fare una coppia di numeri:

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{9}$$

ora delle possibilità rimanenti (1 - 7/9 = 2/9) ho 1/3 delle possibilità di vincere.

$$\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{27}.$$

La formula è:

$$\left[1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\right]\cdot\frac{1}{3}.$$

Vediamo il dado piramide a 4 facce: cambia solo la parte di possibilità di fare coppie di numeri:

$$\left[1-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}\right)\right]\cdot\frac{1}{3}=\left[1-\frac{10}{16}\right]\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{8}.$$

Vediamo il 20

$$\left[1-\left(\frac{1}{20}+\frac{19}{20}\cdot\frac{2}{20}\right)\right]\cdot\frac{1}{3}=\left[1-\frac{29}{200}\right]\cdot\frac{1}{3}=\frac{171}{600},$$

quasi un terzo.

Formuletta generale:

$$\left[1-\left(\frac{1}{N}+\frac{N-1}{N}\cdot\frac{2}{N}\right)\right]\cdot\frac{1}{3}.$$

3.2 La soluzione di GaS

La probabilità che vengano tre risultati distinti è:

$$P'=\frac{N-1}{N}\cdot\frac{N-2}{N}$$

(il primo dado può essere quello che mi pare, il secondo ha probabilità $(N\text{-}1)/N$ di essere diverso dal primo e, al terzo dado, rimangono solo N-2 possibilità su N). *Ora dobbiamo solo imporre che quello di punteggio mediano sia proprio il mio*; data la simmetria, ho una possibilità su tre.

[Credo ormai l'abbiate capito, che al primo gioco è meglio lasciare perdere; le possibilità sono schifosamente a favore del banco (RdA)].

3.3 La seconda parte secondo Mirtillo

*[**Mirtillo** mostra un'acutissima capacità di analisi, dicendo: "Il discorso è a dir poco complesso…". Comunque, ci prova, anche se la sua tattica non ci convince moltissimo (contrariamente alla sua poetica: il "ritmo" della dimostrazione ricorda Allen Ginsberg), per cui vi rimandiamo al numero di RM se siete proprio curiosi... (RdA).]*

3.4 Le elucubrazioni di GaS

*[**GaS** ci comunica che "…il 90% sono elucubrazioni, ma forse ci troverete qualcosa di interessante…", Beh, per definizione le elucubrazioni sono interessanti (RdA)].*

Siano A e B i risultati dei primi due dadi con $A<B$ (se sono uguali ho perso e quindi non devo calcolare proprio niente), l'intervallo dei numeri tra 1 ed N è diviso in tre tronconi:

- 1, …, (A-1)
- (A+1), …, (B-1)
- (B+1), …, N

Se l'intervallo più grande è il primo allora mi tengo A, se è il secondo tiro il mio dado, se è il terzo mi tengo B.

Devo scegliere quindi di giocare nell'intervallo "più grande", detto $C=\max[(A-1),(B-A-1),(N-B)]$ si ha che la probabilità di vittoria, giocando in modo intelligente, è di C/N.

Cominciamo, per esempio, col calcolare in maniera estesa un caso semplice: N=5. Se i primi due dadi sono uguali non abbiamo possibilità di vincere, possiamo vincere solo con una di queste alternative:

Risultato dei primi due dadi (A B)	Probabilità che venga tale risultato	Probabilità di vittoria
1 2	2/25	3/5
1 3	2/25	2/5
1 4	2/25	2/5
1 5	2/25	3/5
2 3	2/25	2/5
2 4	2/25	1/5
2 5	2/25	2/5
3 4	2/25	2/5
3 5	2/25	2/5
4 5	2/25	3/5

Cominciavo a notare lo schema generale, tutti i risultati che possono dare una speranza di vittoria hanno una probabilità di $\frac{2}{N^2}$ questa probabilità va moltiplicata per la somma dei valori dell'ultima colonna, si avrà quindi:

$$P(N) = \frac{2}{N^2} \cdot \frac{F(N)}{N}$$

dove la *F(N)* è una funzione di *N* che andrà calcolata; nel nostro caso si avrà *F*(5)=3+2+2+3+2+1+2+2+2+3=22 e quindi

$$P(5) = \frac{2}{5^3} \cdot 22$$

Non è difficile calcolare i valori di *F(N)* per *N* piccoli semplicemente enumerando tutti i casi:

N	F(N)
4	9
5	22
6	42
7	72
8	113

Quello che ho cercato di fare, senza successo, è stato trovare una struttura generale per la *F(N)*. Vediamo però qualche considerazione: la *P(N)*, per *N*→ infinito, deve mantenersi minore uguale di 1. Ne segue che la *P(N)*, che naturalmente è strettamente crescente, non può tendere ad infinito più velocemente di N^3. Se quindi la *F(N)* fosse una funzione polinomiale deve essere di terzo grado, con qualche calcolo, però, si vede che non esiste una funzione siffatta che soddisfi tutti e 5 i dati trovati.

Una formula che secondo me approssima abbastanza bene la *F(N)* è la seguente:

per *N* pari:

$$F(N) = \sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} 3 \cdot k \cdot (N-1-k) + H(N)$$

per N dispari:

$$F(N)=\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} 3\cdot k\cdot (N-1-k)+H(N)$$

Vediamo che cosa succede, nella sommatoria della $F(N)$ io avrò un certo numero di 1, un certo numero di 2, un certo numero di 3, ……. , un certo numero di (N-2); ma quanti?

Sperimentalmente ho notato che (N-2) compare 3 volte, (N-3) compare 6 volte, (N-4) compare 9 volte e così via finché si arriva ad (N-1)/2 - o (N-2)/2; questi contributi sono tenuti in conto nella sommatoria della formula di cui sopra. Per i contributi con valore più basso ho aggiunto la $H(N)$.

È facile capire (e anche dimostrare) che i contributi della $F(N)$ sono in tutto N(N-1)/2 [il numero triangolare di N-1 perché abbiamo tolto le coppie di numeri uguali] quindi dobbiamo aggiungere T contributi dove:

$$T=\frac{N\cdot (N-1)}{2}-\sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} 3\cdot k$$

A questo punto mi sono incasinato, nella versione originale di questo "articolo" avevo scritto un'altra pagina di conti, sommatorie e spiegazioni incomprensibili e così mi sono detto: ma cosa cavolo sto facendo? Tanto la formula che sto cercando (e non ho trovato) deve essere data in pasto ad un computer per essere calcolata, anche solo per N>10. A questo punto basta sviluppare una piccola routine con complessità leggermente superiore ma facilmente implementabile con qualsiasi programma di calcolo:

$$F(N)=\sum_{A=1}^{N-1}\sum_{B=A+1}^{N}\max\{(A-1),(B-A-1),(N-B)\}$$

a questo punto il problema è risolto.

Sento che vi state lamentando ma perché? Io sono allievo ingegnere, mica un matematico!! La formuletta appena scritta ha una complessità abbastanza bassa, la potrei sviluppare anche con excel.

$$P(N)=\frac{2}{N^3}\cdot\sum_{A=1}^{N-1}\sum_{B=A+1}^{N}\max\{(A-1),(B-A-1),(N-B)\}$$

Per la cronaca: ho tentato di barare cercando sulla "Enciclopedia of integer sequences" se la 9,22,42,72,113… fosse conosciuta ma non è niente di noto *[Solo due cose: tanto per cominciare, non è "barare". Secondariamente, potremmo sempre introdurla come "la prima sequenza che non è nell'Enciclopedia delle sequenze…" (RdA)].*

3.5 Il programma di PMP

Anche ***PMP*** ha contribuito con un programmino. In *perl*, tanto per cambiare (sarà perché ha scoperto che Rudy usa il "C"?) Se volete fare un po' di esperimenti, ve lo passiamo qui sotto.

```
more a.pl
#!/bin/perl
```

```
# problema 59.1 di Rudi Mathematici
# se abbiamo 12 valori possibili, e il banco ha tirato 3 e 8,
possiamo
# a) lasciarli: possibilità di vincita 8-3-1 = 4
# b) tenere 3: possibilità di vincita 3-1 = 2
# c) tenere 8: possibilità di vincita 12-8 = 4

use vars qw ($n $a $b $ok $diff $win $lose $tot);

$n = shift; # numero facce dado

if ( not defined $n ) { die "indica il numero di facce"; }

$win = $lose = 0;

for ($a = 1; $a <= $n; $a++) {
 $lose += $n; # il caso $a = $b è sempre perdente
 for ($b = $a+1; $b <= $n; $b++) {
 $ok = $b - $a - 1; # caso a)
 $diff = $a - 1;
 if ($diff > $ok) { $ok = $diff }; # caso b)

 $diff = $n - $b;
 if ($diff > $ok) { $ok = $diff }; # caso c)
 $win += 2*$ok; #due volte per ragioni di simmetria [Argh! (PRS)]
 $lose += 2*($n-$ok);
 }
}
$tot = $win+$lose;
print "$n facce: win $win, lose $lose, totale $tot\n";
```

4. RM061 e il chiarimento di Rudi

Qui sono arrivate soluzioni alla prima parte (quella "facile") da ***Guido*** e da ***Elena***. Tutto giustissimo, ed entrambi correttamente fanno notare che, per un dado ad infinite facce, la probabilità di vincita tende a $\frac{1}{3}$, e che quindi è da polli giocarci. Il massimo divertimento qui ormai è vedere come vi piace scrivere la formula finale della probabilità. Al momento, abbiamo contato cinque espressioni perfettamente equivalenti. Sarà per questo che ogni tanto delle soluzioni corrette ci sembrano "sbagliate".

Per quanto riguarda la seconda parte, continuiamo tutti a brancolare nel buio; in particolare, Guido scrive (a proposito della strategia da applicare) una frase che comincia per "ovviamente" e che, ovviamente, non mi convince: "[…] la strategia "vincente" è di tenere i punteggi centrali e ritirare gli altri [...]"

Forse non sono stato chiaro:

1. Il banco tira due volte il dado
2. Voi potete scegliere uno dei due numeri o dire che scegliete il terzo
3. Il banco tira una terza volta il dado
4. Si fanno i conti: se quello che avete scelto è compreso tra i due valori restanti, avete vinto.

Come vi dicevo, la strategia a me pare piuttosto semplice: i due tiri del banco al punto [1] dividono l'intervallo in tre segmenti; ora, verifichiamo qual'è il segmento più grande:

- Se è superiormente limitato dal tiro minore, scelgo il tiro minore
- Se è inferiormente limitato dal tiro maggiore, scelgo il tiro maggiore
- Se è superiormente limitato dal tiro maggiore e inferiormente limitato dal tiro minore, scelgo il terzo tiro.

Per simulazioni (in "C"), la probabilità di vittoria con il dado a venti facce è un valore dalle parti di 0.54…, ed era appunto per questo che mi chiedevo se fosse possibile trovare una formula anche per questo caso; capite che passare da una probabilità di un terzo a una maggiore di un mezzo, mi viene da sospettare di aver sbagliato i conti.

Allora, qualcuno vuole provare, con la seconda parte e la mia strategia?

5. RM063 e l'approccio di Last Duke

5.1 Premessa

Proprio oggi mi è venuta una illuminazione per la soluzione del problema dei tre dadi duri. Devo premettere che avevo capito male il regolamento del gioco, e pensavo che dopo i due lanci del banco potevo scegliere se scartare un dado e far rilanciare il banco oppure no. A questo punto lanciavo io e se ottenevo un risultato compreso tra i due valori del banco vincevo, altrimenti perdevo.

Invece non era così.

5.2 I tre casi di scelta del numero

Andiamo a vedere in quali casi si sceglie un numero piuttosto che un altro.

Si è detto (Rudi Mathematici, n.061) che la strategia migliore è quella di dividere il segmento tra 1 e n in tre parti, in base ai due numeri del banco, ed osservare l'intervallo di ampiezza maggiore.

- Se è quello limitato superiormente dal numero inferiore, scelgo il numero inferiore e faccio rilanciare il banco.
- Se è quello limitato dai due numeri, scelgo il terzo.
- Se è quello limitato inferiormente dal numero superiore, scelgo il numero superiore e faccio rilanciare il banco.

Come strategia mi sembra semplice e vincente. Resta da capire come fare i conti. Andiamo a vedere le probabilità di vincere, supponendo che io mi trovi in uno dei tre casi (che chiameremo A, B e C). Chiamo le probabilità p_A, p_B e p_C rispettivamente. Chiamo x il numero inferiore e y quello superiore. Indico inoltre con n le facce del dado.

Nel primo caso la probabilità di vincere è ovviamente: $p_A = \frac{x-1}{n}$, (ricordiamo che si vince solo se il nostro valore è <u>strettamente compreso</u> tra gli altri due, quindi l'intervallo è ampio x-1 e non x. Su questo punto mi ero inizialmente confuso).

Nel secondo caso è: $p_B = \frac{y-x-1}{n}$.

Nel terzo, infine, sarà: $p_C = \frac{n-y}{n}$.

E fino a qua, nulla di difficile. Il difficile comincia ora.

5.3 Come fare a capire, con una formula generale, quando scegliere un numero piuttosto che un altro

Cerchiamo di capire a quali condizioni matematiche devono soddisfare i numeri x e y affinché si ricada in uno dei tre casi elencati sopra.

Si è detto che l'intervallo (inferiore, superiore o centrale rispettivamente) deve essere maggiore (o al limite uguale) degli altri due. Quindi:

Nel caso A: $\begin{cases} x-1 \geq y-x-1 \\ x-1 \geq n-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq 2x \\ y \geq n-x+1 \end{cases}.$

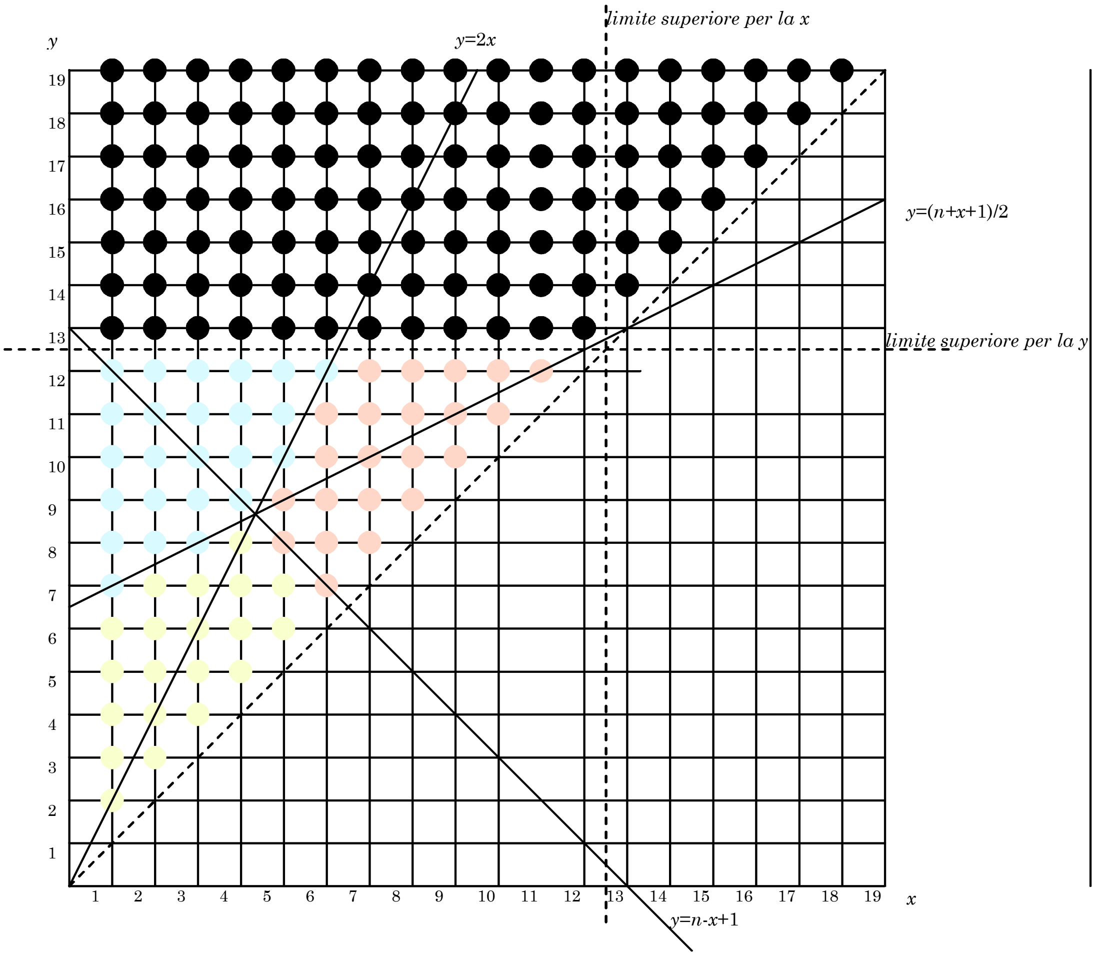
Nel caso B: $\begin{cases} y-x-1 \geq x-1 \\ y-x-1 \geq n-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 2x \\ y \geq \dfrac{n+x+1}{2} \end{cases}.$

Nel caso C: $\begin{cases} n-y \geq x-1 \\ n-y \geq y-x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq n-x+1 \\ y \leq \dfrac{n+x+1}{2} \end{cases}.$

Bene. Se ora il piano dei possibili risultati fosse stato un continuo, non ci sarebbero stati problemi a calcolare le somme di tutti i termini di probabilità al variare di x e y tra tutti i valori possibili. Ma purtroppo non è così, e per capirci qualcosa ho fatto un disegnino.

5.4 Approccio grafico per l'individuazione degli intervalli di variabilità di *x* e *y* al variare di *n* (nei tre casi).

Intanto osserviamo che se x=y sicuramente non vinco, dal momento che uno dei tre numeri non potrà mai essere strettamente compreso tra gli altri due.



Per i restanti casi, la situazione è simmetrica se x è il numero inferiore o quello superiore. Quindi ipotizzo che x sia il numero inferiore e y quello superiore. Così considererò la metà dei casi, e poi raddoppierò il risultato. La cosa va benissimo, in quanto i casi $x=y$, che rovinerebbero questo approccio, danno probabilità di vittoria 0 e quindi anche se (erroneamente) li raddoppio non sbaglio.

Nel grafico a fianco, disegnato per $n=12$, sono indicate con un pallino tutte le combinazioni di x e y che possono essere estratte.

In particolare:

- sono disegnate con un pallino nero le combinazioni (x, y) che non ci interessano (fuori dal range di variabilità di x e y, che ovviamente è in questo caso da 1 a 12)
- non sono disegnati i pallini in cui $x=y$ per il motivo sopra elencato (danno probabilità di vittoria nulla)
- non sono disegnati i pallini simmetrici rispetto alla diagonale, anche questo per il motivo sopra elencato (la situazione è simmetrica e basta raddoppiare il risultato).
- sono con un pallino salmone le combinazioni che ricadono nel caso A
- sono con un pallino celeste le combinazioni che ricadono nel caso B
- sono con un pallino giallo le combinazioni che ricadono nel caso C

Il punto di intersezione delle tre rette è a ($n/3$; $2n/3$). Ed inoltre i due punti di intersezione J e K hanno coordinate $(0;(n+1)/2)$ e $(n/2;n)$ rispettivamente.

Giocando un po' con questo grafico, variando la n, si è visto che, dal momento che è necessario ottenere valori interi per le variabilità di x e y, bisogna differenziare i casi modulo 6.

Poi, per calcolare le somme delle probabilità condizionate al singolo evento di estrazione (x, y) al variare appunto di x e y, vediamo tra quali valori può variare y al variare di x. Ed in particolare, dividiamo ogni area in due sottoaree con una retta verticale che passa per l'intersezione delle tre rette (per le aree B e C) oppure per il punto K (per l'area A).

- Un'ultima osservazione: alcuni punti possono appartenere a due o più aree (quelli che giacciono proprio sulle tre rette), ed allora ho usato una convenzione (in modo da usare sempre la stessa): i punti che giacciono sul confine tra B e un'altra area appartengono sempre al settore B; i punti sul confine tra A e C appartengono sempre ad A.

Ho studiato tutti questi casi e sono giunto ai seguenti risultati *[qui contribuiamo al pezzo solo riformattando in maniera più compatta il ragionamento, che è tutta farina di Andrea (AR)]*:

Caso 0: n mod 6 = 0	
Area A:	Per x che varia tra $n/3+1$ e $n/2$ (compresi), y varia tra $n-x+1$ e $2x-1$ (sempre compresi)
	Per x che varia tra $n/2+1$ e $n-1$, y varia tra $x+1$ e n
Area B:	Per x che varia tra 1 e $n/3$, y varia tra $(n+x+1)/2$ e n ($x+n$ dispari) oppure tra $(n+x+2)/2$ e n ($x+n$ pari)

	Per x che varia tra $n/3+1$ e $n/2$, y varia tra $2x$ e n
Area C:	Per x che varia tra 1 e $n/3$, y varia tra $x+1$ e $(n+x-1)/2$ ($x+n$ dispari) opp. tra $x+1$ e $(n+x)/2$ ($x+n$ pari)
	Per x che varia tra $n/3+1$ e $n/2-1$, y varia tra $x+1$ e $n-x$
Caso 1: *n* mod 6 = 1	
Area A:	Per x che varia tra $(n+2)/3$ e $(n-1)/2$, l'intervallo di variabilità della y è come quello del caso 0
	Per x che varia tra $(n+1)/2$ e $n-1$, l'intervallo di y è come nel caso 0
Area B:	Per x che varia tra 1 e $(n-1)/3$, l'intervallo di y è come nel caso 0
	Per x che varia tra $(n+2)/3$ e $(n-1)/2$, l'intervallo di y è come nel caso 0
Area C:	Per x che varia tra 1 e $(n-1)/3$, l'intervallo di y è come nel caso 0
	Per x che varia tra $(n+2)/3$ e $(n-1)/2$, l'intervallo di y è come nel caso 0

Osserviamo che l'espressione che identifica gli intervalli di variabilità della y resta sempre la stessa, pertanto per i restanti casi indico solo gli intervalli di variabilità della x, fermo restando che gli intervalli della y sono rispettivamente gli stessi.

variazione di x	Area A:	Area B:	Area C:
Caso 2: *n* mod 6 = 2	tra $(n+4)/3$ e $n/2$	tra 1 e $(n+1)/3$	tra 1 e $(n+1)/3$
	tra $n/2+1$ e $n-1$	tra $(n+4)/3$ e $n/2$	tra $(n+4)/3$ e $n/2-1$
Caso 3: *n* mod 6 = 3	tra $n/3+1$ e $(n-1)/2$	tra 1 e $n/3$	tra 1 e $n/3$
	tra $(n+1)/2$ e $n-1$	tra $n/3+1$ e $(n-1)/2$	tra $n/3+1$ e $(n-1)/2$
Caso 4: *n* mod 6 = 4	tra $(n+2)/3$ e $n/2$	tra 1 e $(n-1)/3$	tra 1 e $(n-1)/3$
	tra $n/2+1$ e $n-1$	tra $(n+2)/3$ e $n/2$	$(n+2)/3$ e $n/2-1$
Caso 5: *n* mod 6 = 5	tra $(n+4)/3$ e $(n-1)/2$	tra 1 e $(n+1)/3$	tra 1 e $(n+1)/3$
	tra $(n+1)/2$e $n-1$	tra $(n+4)/3$ e $(n-1)/2$	tra $(n+4)/3$ e $(n-1)/2$

5.5 Calcolo generale della probabilità di vittoria

Chiamiamo le probabilità di tutti i sottocasi con p_{XYZ}, dove X indica l'area, Y il caso e Z la sottoarea. Ad esempio: p_{B21} significa probabilità (condizionata al cadere nell'area B), nel caso in cui n mod 6 = 2, sottoarea 1 (ossia la prima delle due elencate). Al termine del calcolo di tutti questi termini, si avrà che, nei sei casi:

$$p_0 = p_{A01} + p_{A02} + p_{B01} + p_{B02} + p_{C01} + p_{C02},$$

$$p_1 = p_{A11} + p_{A12} + p_{B11} + p_{B12} + p_{C11} + p_{C12},$$

$$p_2 = p_{A21} + p_{A22} + p_{B21} + p_{B22} + p_{C21} + p_{C22},$$

$$p_3 = p_{A31} + p_{A32} + p_{B31} + p_{B32} + p_{C31} + p_{C32},$$

$$p_4 = p_{A41} + p_{A42} + p_{B41} + p_{B42} + p_{C41} + p_{C42},$$

$$p_5 = p_{A51} + p_{A52} + p_{B51} + p_{B52} + p_{C51} + p_{C52}.$$

Ognuna delle p_{XYZ} sarà ovviamente due volte quella che si otterrebbe con le x e le y che variano come indicato nell'elenco sopra, in ragione dei casi considerati (metà di quelli complessivi).

Inoltre osserviamo che, tabulando gli intervalli di variabilità della x al variare di n, per alcuni tra i più bassi valori di n alcune delle sottoaree non esistono, e pertanto il calcolo generale che farò nel seguito potrebbe perdere di validità. Andrà calcolato caso per caso. Ma fortunatamente questi casi sono pochi. Vedere la tabella qui di seguito riportata. In violetto sono riportati i casi particolari.

N	A1: x		A2: x		B1: x		B2: x		C1: x		C2: x	
	da	a	da	a	da	a	da	a	da	a	da	a
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
2	2	1	2	1	1	1	2	1	1	1	2	0
3	2	1	2	2	1	1	2	1	1	1	2	1
4	2	2	3	3	1	1	2	2	1	1	2	1
5	3	2	3	4	1	2	3	2	1	2	3	2
6	3	3	4	5	1	2	3	3	1	2	3	2
7	3	3	4	6	1	2	3	3	1	2	3	3
8	4	4	5	7	1	3	4	4	1	3	4	3
9	4	4	5	8	1	3	4	4	1	3	4	4
10	4	5	6	9	1	3	4	5	1	3	4	4
11	5	5	6	10	1	4	5	5	1	4	5	5
12	5	6	7	11	1	4	5	6	1	4	5	5
13	5	6	7	12	1	4	5	6	1	4	5	6
14	6	7	8	13	1	5	6	7	1	5	6	6
15	6	7	8	14	1	5	6	7	1	5	6	7
16	6	8	9	15	1	5	6	8	1	5	6	7
17	7	8	9	16	1	6	7	8	1	6	7	8
18	7	9	10	17	1	6	7	9	1	6	7	8
19	7	9	10	18	1	6	7	9	1	6	7	9
20	8	10	11	19	1	7	8	10	1	7	8	9

Qundi vanno calcolati a parte i casi in cui n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 8.

5.6 Calcolo delle varie probabilità parziali

Siccome ci servirà spesso calcolare somme del tipo $\sum_{i=a}^{b} i$ e $\sum_{i=a}^{b} i^2$, andiamo a vedere quanto valgono queste espressioni.

$$\sum_{i=a}^{b} i = \sum_{i=1}^{b} i - \sum_{i=1}^{a-1} i = \frac{b^2 + b - a^2 + a}{2},$$

$$\sum_{i=a}^{b} i^2 = \sum_{i=1}^{b} i^2 - \sum_{i=1}^{a-1} i^2 = \frac{2b^3 + 3b^2 + b - 2a^3 + 3a^2 - a}{6}.$$

Ed inoltre, siccome la y varia sempre tra gli stessi estremi, andiamo a calcolarci le somme lasciando indicati con a e b (oppure con 1 e b per le sottoaree B1 e C1) gli estremi per la x, cosicché possiamo facilmente sostituire di volta in volta gli estremi.

Tralascio di riportare i calcoli altrimenti verrebbe una cosa davvero lunghissima.

La probabilità nel sottocaso A1 sarà:

$$p_{Ax1} = \frac{2}{n^2}\sum_{x=a}^{b}\sum_{y=n-x+1}^{2x-1}\frac{x-1}{n} = \frac{2b^3 - 2a^3 - b^2(n+1) + a^2(n+7) + b(n-1) - a(3n+7) + (2n+2)}{n^3}$$

La probabilità nel sottocaso A2 sarà:

$$p_{Ax2} = \frac{2}{n^2}\sum_{x=a}^{b}\sum_{y=n-x+1}^{2x-1}\frac{x-1}{n} = \frac{-2b^3 + 2a^3 + 3nb^2 - a^2(3n+6) - b(3n-2) + a(9n+4) - 6n}{3n^3}$$

La probabilità nel sottocaso B1 sarà:

$$p_{Ax2} = \frac{2}{n^2}\sum_{x=1}^{b}\begin{Bmatrix} \displaystyle\sum_{y=\frac{n+x+1}{2}}^{n}\frac{y-x-1}{n}\_per\_x+n\_dispari \\ \displaystyle\sum_{y=\frac{n+x}{2}+1}^{n}\frac{y-x-1}{n}\_per\_x+n\_pari \end{Bmatrix} = \ldots$$

Qui c'è il problema di considerare i casi x pari e x dispari, nonché b ed n pari e b ed n dispari. Dopo aver effettuato le due sommatorie all'interno delle parentesi graffe, ho sostituito la x con $2t$-1 e con $2t$ (a seconda che la x sia dispari o pari, rispettivamente), estendendo la somma esterna da 1 a b/2, se b è pari, mentre la somma esterna andrà da 1 a (b-1)/2 con l'aggiunta dell'ultimo termine calcolato a mano se b è dispari.

Il risultato sarà:

Caso b pari, n pari: $\dfrac{b^3 + b^2(2-3n) + b(3n^2 - 4n)}{4n^3}$ (sarebbe il caso 0).

Caso b pari, n dispari: $\dfrac{b^3 + b^2(2-3n) + b(3n^2 - 4n - 1)}{4n^3}$ (caso 1 e 5).

Caso b dispari, n pari: $\dfrac{b^3 + b^2(2-3n) + b(3n^2 - 4n - 1) + n - 2}{4n^3}$ (caso 2 e 4).

Caso b dispari, n dispari: $\dfrac{b^3 + b^2(2-3n) + b(3n^2 - 4n) - n + 2}{4n^3}$ (caso 3).

La probabilità nel sottocaso B2 sarà:

$$p_{Bx2} = \frac{2}{n^2}\sum_{x=a}^{b}\sum_{y=2x}^{n}\frac{y-x-1}{n} = \frac{b^2(2-n) - a^2(2-n) + b(n^2-2n) - a(n^2-4) + n^2 - n - 2}{n^3}$$

La probabilità nel sottocaso C1 sarà:

$$p_{Ax2} = \frac{2}{n^2}\sum_{x=1}^{b}\left\{\begin{array}{l}\sum_{y=x+1}^{\frac{n+x-1}{2}} \frac{n-y}{n} \_per\_x+n\_dispari \\ \sum_{y=x+1}^{\frac{n+x}{2}} \frac{n-y}{n} \_per\_x+n\_dispari\end{array}\right\} = \ldots$$

Con lo stesso procedimento del caso B1, ottengo:

Caso b pari, n pari: $\frac{b^3 + b^2(3-3n) + b(3n^2 - 6n + 2)}{4n^3}$ (sarebbe il caso 0).

Caso b pari, n dispari: $\frac{b^3 + b^2(3-3n) + b(3n^2 - 6n + 3)}{4n^3}$ (caso 1 e 5).

Caso b dispari, n pari: $\frac{b^3 + b^2(3-3n) + b(3n^2 - 6n + 3) - n + 1}{4n^3}$ (caso 2 e 4).

Caso b dispari, n dispari: $\frac{b^3 + b^2(3-3n) + b(3n^2 - 6n + 2) + n - 1}{4n^3}$ (caso 3).

La probabilità nel sottocaso C2 sarà:

$$p_{Cx2} = \frac{2}{n^2}\sum_{x=a}^{b}\sum_{y=x+1}^{n-x}\frac{n-y}{n} = \frac{b^2(1-n) - a^2(1-n) + b(n^2 - 2n + 1) - a(n^2 - 1) + n^2 - n}{n^3}$$

5.7 La probabilità di vittoria

Escludendo a questo punto ancora i casi particolari, da calcolare in seguito, vediamo l'espressione della probabilità di vittoria, nei sei casi considerati:

Occorre "solo" inserire nelle formule sopra elencate i valori estremi per a e b in ognuno dei casi ed effettuare le somme.

Caso 0: *n* mod 6 = 0	
$p_{A01} = \frac{4n^3 + 3n^2 - 18n}{108n^3}$	$p_{A02} = \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6n^3}$
$p_{B01} = \frac{19n^3 - 30n^2}{108n^3}$	$p_{B02} = \frac{n^3 - 2n^2}{36n^3}$
$p_{C01} = \frac{19n^3 - 45n^2 + 18n}{108n^3}$	$p_{C02} = \frac{n^3 - 7n^2 + 6n}{36n^3}$

La somma di queste probabilità dà la probabilità di vittoria nel caso 0:

$$p_0 = \frac{22n^2 - 51n + 18}{36n^2}.$$

Caso 1: *n* mod 6 = 1	
$p_{A11} = \dfrac{n^3 - 6n^2 + 9n - 4}{27n^3}$	$p_{A12} = \dfrac{2n^3 - 3n^2 - 2n + 3}{12n^3}$
$p_{B11} = \dfrac{19n^3 - 42n^2 + 9n + 14}{108n^3}$	$p_{B12} = \dfrac{n^3 + 2n^2 - 13n + 10}{36n^3}$
$p_{C11} = \dfrac{19n^3 - 57n^2 + 57n - 19}{108n^3}$	$p_{C12} = \dfrac{n^3 - 3n^2 + 3n - 1}{36n^3}$

La somma di queste probabilità dà la probabilità di vittoria nel caso 1:

$$p_1 = \frac{22n^3 - 51n^2 + 18n + 11}{36n^3}.$$

Caso 2: *n* mod 6 = 2	
$p_{A21} = \dfrac{4n^3 + 3n^2 - 42n + 40}{108n^3}$	$p_{A22} = \dfrac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6n^3}$
$p_{B21} = \dfrac{19n^3 - 18n^2 - 12n - 56}{108n^3}$	$p_{B22} = \dfrac{n^3 - 6n^2 + 12n - 8}{36n^3}$
$p_{C21} = \dfrac{19n^3 - 33n^2 - 42n + 64}{108n^3}$	$p_{C22} = \dfrac{n^3 - 11n^2 + 26n - 16}{36n^3}$

La somma di queste probabilità dà la probabilità di vittoria nel caso 2:

$$p_2 = \frac{22n^3 - 51n^2 + 18n - 8}{36n^3}.$$

Caso 3: *n* mod 6 = 3	
$p_{A31} = \dfrac{n^3 - 6n^2 + 9n}{27n^3}$	$p_{A32} = \dfrac{2n^3 - 3n^2 - 2n + 3}{12n^3}$
$p_{B31} = \dfrac{19n^3 - 30n^2 - 27n + 54}{108n^3}$	$p_{B32} = \dfrac{n^3 - 2n^2 - 9n + 18}{36n^3}$
$p_{C31} = \dfrac{19n^3 - 45n^2 + 45n - 27}{108n^3}$	$p_{C32} = \dfrac{n^3 - 7n^2 + 15n - 9}{36n^3}$

La somma di queste probabilità dà la probabilità di vittoria nel caso 3:

$$p_3 = \frac{22n^3 - 51n^2 + 18n + 27}{36n^3}.$$

Caso 4: *n* mod 6 = 4	
$p_{A41} = \dfrac{4n^3 + 3n^2 - 18n - 16}{108n^3}$	$p_{A42} = \dfrac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6n^3}$

$p_{B41} = \dfrac{19n^3 - 42n^2 + 36n - 40}{108n^3}$	$p_{B42} = \dfrac{n^3 + 2n^2 - 4n - 8}{36n^3}$
$p_{C41} = \dfrac{19n^3 - 57n^2 + 30n + 8}{108n^3}$	$p_{C42} = \dfrac{n^3 - 3n^2 - 6n + 8}{36n^3}$

La somma di queste probabilità dà la probabilità di vittoria nel caso 4:

$$p_4 = \frac{22n^3 - 51n^2 + 18n - 16}{36n^3}.$$

Caso 5: *n* mod 6 = 5	
$p_{A51} = \dfrac{n^3 - 6n^2 + 3n + 10}{27n^3}$	$p_{A52} = \dfrac{2n^3 - 3n^2 - 2n + 3}{12n^3}$
$p_{B51} = \dfrac{19n^3 - 18n^2 - 39n - 2}{108n^3}$	$p_{B52} = \dfrac{n^3 - 6n^2 + 3n + 10}{36n^3}$
$p_{C51} = \dfrac{19n^3 - 33n^2 - 15n + 37}{108n^3}$	$p_{C52} = \dfrac{n^3 - 11n^2 + 35n - 25}{36n^3}$

La somma di queste probabilità dà la probabilità di vittoria nel caso 5:

$$p_5 = \frac{22n^3 - 51n^2 + 18n + 19}{36n^3}.$$

5.8 Gli altri casi particolari

Restano da calcolare le probabilità di vittoria per n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 8. Erano infatti i casi in cui non si potevano usare le formule sopra elencate. Ma facendo due conti si vede che le probabilità di vittoria sono quelle che si avrebbero usando le stesse formule! Quindi, i casi particolari non esistono, o meglio sono conglobati dentro i sei casi generali, potendosi usare la medesima formula.

5.9 Riepilogo delle formule per il calcolo della probabilità di vittoria

Va usata la formula corrispondente al numero di facce del dado modulo 6.

$$p_0 = \frac{22n^2 - 51n + 18}{36n^2},$$

$$p_1 = \frac{22n^3 - 51n^2 + 18n + 11}{36n^3},$$

$$p_2 = \frac{22n^3 - 51n^2 + 18n - 8}{36n^3},$$

$$p_3 = \frac{22n^3 - 51n^2 + 18n + 27}{36n^3},$$

$$p_4 = \frac{22n^3 - 51n^2 + 18n - 16}{36n^3},$$

$$p_5 = \frac{22n^3 - 51n^2 + 18n + 19}{36n^3}.$$

Per n=20 la probabilità di vittoria è effettivamente il 54.15%. Per n che tende ad infinito ho addirittura gli 11/18 (61.1%) di probabilità di vincere!!!

Per inciso, il gioco conviene al banco solo se $n \leq 12$.

6. RM065 – Caronte - Tre Dadi Duri (e tre sacchetti molli)

6.1 Lettera introduttiva

Cari Alice, Piotr e Rudy,

perché maltrattate la punteggiatura e l'includerla nelle formule sembra farvi orrore? E perchè vi permettete di cancellarla dai miei messaggi? Vi permettereste mai di eliminarla da un sonetto del Petrarca, da un romanzo del Manzoni, da una lettera del ragionier Pautasso? Negli scritti che trattano di matematica, le formule fanno parte del linguaggio corrente, e in esso vanno immerse: se una formula è un inciso, va messa tra due virgole; se con una formula un discorso finisce, va seguita da un punto; se fa parte di un elenco, i vari termini devono essere separati da una virgola, eccetera, eccetera. Scusatemi lo sfogo, forse un po' pignolo, ma per me è una sofferenza leggere un qualsiasi testo con una punteggiatura inesistente o di fantasia; e purtroppo succede con una certa frequenza anche in testi senza formule!

La ragione principale di questo mio messaggio la conoscete già. Guardando il n. 63 di RM mi sono imbattuto nella soluzione di Last Duke del problema dei tre dadi duri, problema che non conoscevo, e sono rimasto colpito dalla mostruosità di tale soluzione (decine di sottocasi e doppie sommatorie, ...); allora sono andato a cercare il problema nel vostro archivio sul n. 59 (io la vostra rivista l'ho conosciuta col n. 60) e questo mi offre lo spunto per una piccola divagazione. (...)[1]

Tornando alla ragione che mi ha fatto cercare il n. 59, ho letto il problema e mi sono detto: adesso me ne occupo io (e mal me ne incolse). Facendovi una piccola confessione, devo premettere che il mio atteggiamento nei confronti della maggior parte dei problemi che pretendono dei calcoli per essere risolti è: non ho voglia di occuparmene, ma se mi ci metto lo risolvo. Ma, per "mettermici", ho bisogno di qualche incentivo. Qui l'incentivo è stato la presuntuosa sicurezza di trovare (rapidamente) una soluzione, non dico semplice, ma almeno un po' meno icasinata di quella di Last Duke. Mi ci sono dunque messo di buzzo buono e, in men che non si dica, mi sono incamminato, senza inizialmente accorgermene, sullo stesso faticoso, aspro e contorto cammino percorso dall'ultimo duca; quando mi sono ritrovato a disegnare su un piano (il mio si chiamava piano jk anziché piano xy, ma la differenza non è sostanziale) un certo numero di rette, mi sono ricordato di aver visto un disegno simile sul n. 63, quello che aveva sollecitato la mia curiosità. Allora sono andato a ripassare la storia delle elucubrazioni comparse in merito, ma, a parte la bella (pregevole perché elementare ed istintiva, una volta formulata) soluzione di GaS del problema semplificato con la scelta forzata del terzo dado, comparsa nel n. 60, e la corretta strategia suggerita dal GC nel n. 61, non ho trovato altro di notevole, se non, appunto, l'arzigogolato calcolo di Last Duke. Per inciso, segnalo un piccolo errore: il punto di intersezione delle tre rette del disegno di Last Duke (che è poi il centro di simmetria della regione interessante della figura, ma questo non risulta evidenziato) non è $(n/3,2n/3)$, ma $((n+1)/3,2(n+1)/3)$; ciò non influisce tuttavia sul risultato finale (il perchè non lo so, dato che mi sono rifiutato di seguire i suoi calcoli, così come avevo rifiutato di affrontarli io stesso) o, meglio, sui risultati finali, che sono giusti. Nell'approccio di Last Duke, a parte la notevole complicazione dei calcoli necessari per arrivare ai risulati voluti, quello che è criticabile è il fatto che l'importante

[1] Stendiamo un velo pietoso su errori non riguardanti il problema…

riconoscimento della necessità di considerare sei casi distinti non ha una giustificazione adeguata. E per me questo è il punto essenziale di tutto il discorso e quello che, se messo in chiaro, può portare ad una semplificazione sensibile, anche se non estrema (eliminando, se non altro, le sommatorie doppie), dei calcoli, come vedrete, se avrete la pazienza di seguire il mio approccio.

Un metodo per arrivare al risultato in modo estremamente semplice dal punto di vista computazionale, che piglio in considerazione nelle mie meditazioni, ma sul quale varrebbe forse la pena di soffermarsi ancora un poco, pretenderebbe la dimostrazione del fatto (certo a posteriori) che il numero di casi favorevoli che si ha effettuando la scelta che massimizza la probabilità di vincita è necessariamente dato da un polinomio di terzo grado (osservazione banale), del tipo

$$an^3 + bn^2 + cn + d_n,$$

con a, b e c coefficienti universali (ecco il punto per me non banale, che non sono riuscito a dimostrare) e solo il termine noto caratterizzante le diverse classi. Questo potrebbe essere un argomento di meditazione per i vostri lettori, cui, forse, vista la difficoltà del problema dei tre dadi duri, potreste anche sottoporre, come problemino d'allenamento, quello dei due dadi duri, magari riformulato con due sacchetti molli (la spiegazione della riformulazione la trovate all'inizio delle meditazioni mie): dati due dadi ad n facce equiprobabili, lanciato il primo dado e visto il numero selezionato, scelgo uno dei due dadi e vinco se il numero del dado da me scelto è maggiore del numero fornito dall'altro. Già nel caso di questo semplice problema è necessario dividere i numeri in due classi (banali): i pari e i dispari, cui competono probabilità distinte. Se non avete voglia di fare i conti e siete curiosi, vi passo il risultato (non l'impostazione della soluzione del problema, che è elementare):

$$P(n) = \begin{cases} \dfrac{3n-2}{4n}, & \forall n \quad \textit{pari}, \\ \dfrac{3n^2-2n-1}{4n^2}, & \forall n \quad \textit{dispari}. \end{cases}$$

E adesso basta divagare. Vi mando il mio parto, che ha preteso una lunga gestazione, come allegato a parte. Il primo reticolo che ho preso in considerazione ho provato a farlo usando quello che conosco di Tex per fare formule, ma è venuto piuttosto brutto; penso che sarebbe opportuno rifarlo adeguandolo alla grafica degli altri reticoli e grafi.

Nel frattempo abbiatevi un saluto affettuoso da un diavolo canuto.

6.2 Premessa

Lasciatemi riformulare il problema, assimilando i tre dadi duri ad n facce (identificate dai primi n numeri naturali e considerate come equiprobabili al lancio di un dado) a tre sacchetti molli, contenenti ciascuno n gettoni identici (numerati da 1 ad n ed aventi tutti la stessa probabilità di essere estratti), e, ovviamente, il lancio di un dado, con conseguente identificazione di uno particolare degli n numeri, all'estrazione di un gettone, e quindi di un numero, da un sacchetto. Questo mi dà il vantaggio di poter considerare anche i casi di n=0, 1, 2 e 3, che sono valori non fisici per un dado ad n facce, dato che il più semplice solido a facce piane che può essere realizzato in uno spazio a tre dimensioni (come quello in cui, almeno apparentemente, viviamo) è un tetraedro che possiede 4 facce. Il vantaggio è notevole da un punto di vista teorico, dato che una formula matematica che fornisca una informazione valida per qualsiasi valore di n deve contenere anche le previsioni relative ad n=0, 1, 2 e 3, e dal punto di vista pratico, perché considerare anche tali valori permette di faticare molto di meno, cioè di semplificare drasticamente i calcoli numerici. Il fatto, poi, di assimilare un dado duro ad un sacchetto molle mi permette di credere che lanciando un dado ad n facce, con n generico, la probabilità che il dado caschi su una determinata faccia (e questo è l'unico modo di selezionare univocamente una delle n facce del dado) sia effettivamente la stessa per ogni faccia, cosa che ritengo assai ardua da provare per un dado fisico con un numero arbitrario di facce, ma che possiamo accettare, come atto di fede, per un astratto dado teorico che soddisfi per definizione al postulato di equiprobabilità; la cosa può invece ritenersi scontata per un gettone estratto, tra n identici, da un sacchetto. Ciò premesso, mi adeguerò al linguaggio utilizzato e continuerò a parlare di "dadi", in senso astratto, considerando quindi anche dadi a zero facce (non esistono facce e le probabilità sia di vincita che di perdita sono, per qualsiasi tipo di gioco, nulle: informazione matematicamente preziosa!), ad una, a due ed a tre facce.

Indicati con A, B e C i tre dadi, si lanciano i dadi A e B, e siano rispettivamente j e k i numeri da essi selezionati; visti tali numeri, ho la possibilità di scegliere uno qualsiasi dei tre dadi; lanciato il terzo dado C ed indicato con l il numero da esso selezionato, vinco se il numero associato al dado da me scelto è strettamente contenuto tra i numeri selezionati dagli altri due dadi, mentre perdo in tutti gli altri casi; per fissare le idee, supponendo, per esempio, di avere scelto il dado A, vinco se $k<j<l$, ovvero se $l<j<k$. Il problema è: trovare la probabilità di vincita, massimizzando tale probabilità con una scelta oculata di uno dei tre dadi.

Se la scelta dei tre dadi fosse casuale, la risposta sarebbe quasi immediata, e la stessa che si avrebbe assumendo a priori la scelta del terzo dado (C). Infatti, considerando l'insieme dei tre dadi, il numero degli eventi (o casi) possibili, cioè il numero delle possibili terne (j,k,l), è n^3 (uguale al numero D'_{n3} delle disposizioni con ripetizione di n numeri a 3 a 3), mentre il numero di casi in cui è possibile che il valore scelto sia compreso tra gli altri due è quello delle terne con elementi tutti diversi tra loro, che è uguale a $n(n-1)(n-2)$, il numero D_{n3} delle disposizioni di n elementi a 3 a 3, e di queste solo un terzo realizzano la condizione che sia proprio il numero da me scelto ad essere compreso tra gli altri due. Dunque la probabilità di vincita, in caso di scelta casuale, è

$$P(n) = \frac{1}{3}\frac{D_{n3}}{D'_{n3}} = \frac{(n-1)(n-2)}{3n^2},$$

risultato noto e fornito in modo brillante da GaS.

6.3 Il calcolo dei casi favorevoli

Però, purtroppo per la semplicità dei ragionamenti e dei calcoli e fortunatamente per le possibilità di vincita, la scelta del dado non deve essere casuale, ma meditata, in modo da massimizzare la probabilità di vincita, e questo complica notevolmente, per n arbitrario, il calcolo del numero di casi favorevoli, numero che vorremmo poter esprimere in modo tale da fornire la probabilità $P(n)$ cercata con un'unica formula, valida per ogni valore di n, come già nel caso della scelta casuale di un dado (equivalente a quella forzata del terzo dado). Poiché le possibili terne di numeri (j,k,l) ottenibili col lancio dei tre dadi sono n^3 e quelle favorevoli solo una parte di queste, è certo che il numero di casi favorevoli, che indicheremo con $F(n)$, deve essere esprimibile con un polinomio di terzo grado (al più) in n. Ora, è facile rendersi conto che un unico polinomio di terzo grado che fornisca $F(n)$ per ogni valore di n non esiste; infatti, se tale polinomio esistesse, esso dovrebbe annullarsi sia per n=0, che per n=1, che per n=2, casi in cui le possibilità di vincita sono palesemente nulle; ma gli unici polinomi di terzo grado che abbiano tale caratteristica sono proporzionali a $n(n-1)(n-2)$ e quindi dovrebbe essere

$$F(n)=\alpha n(n-1)(n-2). \qquad \textbf{[1]}$$

Ma, se questa fosse la formula esatta, per fissare α basterebbe confrontare i due membri per un valore di n per cui $F(n)$ sia noto; verificato che per n=3 il numero di casi favorevoli è uguale a 6 (per ognuna delle sei coppie (j,k) con $j \neq k$ esiste un solo valore di l che fornisce un caso favorevole), la **[1]** ci dice che dovrebbe essere 6=6α e quindi α=1 e

$$F(n)=n(n-1)(n-2); \qquad \textbf{[2]}$$

ma questa relazione cade immediatamente in difetto già per n=4, caso in cui il numero di casi favorevoli è 18, mentre il secondo membro della **[2]** vale 24.

Il polinomio che esprime $F(n)$ deve quindi essere un polinomio di terzo grado in n con almeno un coefficiente dipendente da n; con maggior precisione, questo vuol dire che occorre suddividere gli infiniti insiemi di tre dadi ad n facce in un certo numero di classi aventi le stesse caratteristiche, in modo tale che un'unica formula fornisca il numero di casi favorevoli per tutti gli elementi della classe; questo implica il suddividere l'insieme dei numeri naturali n in un certo numero di sottoinsiemi, in corrispondenza biunivoca con le classi degli insiemi dei dadi. Il primo problema da risolvere è quindi quello della determinazione di queste classi e dei corrispondenti sottoinsiemi di numeri. A tal fine è necessario, per prima cosa, definire la scelta del dado che massimizza le probabilità di vincita, cioè il numero di casi favorevoli (CF). Cominciamo allora con l'osservare che, una volta lanciati i dadi A e B, delle n^2 coppie (j,k) possibili, le n coppie con $j=k$ sono inesorabilmente perdenti e che pertanto i casi favorevoli devono essere associati alle rimanenti $n(n-1)$ coppie con $j \neq k$; che per metà di queste si ha $j<k$ e per l'altra metà $j>k$ e che il numero di CF associati a $j<k$ è uguale al numero di CF associati a $k<j$. Pertanto quello che ci proponiamo di calcolare è il numero

$$\phi(n)=\frac{1}{2}F(n) \qquad \textbf{[3]}$$

che rappresenta il massimo di CF associati a tutte le coppie di numeri j, determinato dal lancio di A, e k, determinato dal lancio di B, con $j<k$. Vediamo ora dunque quali degli n possibili valori di l, ottenibili tirando il dado C, producano casi favorevoli, in funzione delle tre possibili scelte. Scegliendo il dado A, gli l favorevoli sono quelli minori di j, in numero di $j-1\ (l=1,2,\dots,j-1)$; scegliendo B, sono quelli maggiori di k, in numero di $n-k\ (l=k+1,k+2,\dots,n)$; scegliendo C, sono quelli compresi tra j e k, in numero di $k-j-1\ (l=j+1,j+2,\dots,k-1)$. Per massimizzare il numero di casi favorevoli devo dunque scegliere[2]:

il dado A se $j-1>n-k$ e $j-1>k-j-1$,

[2] Questo è quello che nei commenti relativi al problema dei tre dadi duri viene indicato come "la strategia del GC".

il dado B se $n-k > j-1$ e $n-k > k-j-1$,

il dado C se $k-j-1 > j-1$ e $k-j-1 > n-k$.

La scelta di A e B dà palesemente lo stesso numero massimo di CF se

$$j-1 = n-k \text{ e } j > \frac{n+1}{3} \Leftrightarrow k < 2\frac{n+1}{3};$$

quella di A e C è parimenti indifferente se

$$j-1 = k-j-1 \Rightarrow k = 2j \text{ e } j > \frac{n+1}{3} \Leftrightarrow k > 2\frac{n+1}{3}$$

e quella tra B e C conduce a sua volta allo stesso numero massimo di CF se

$$n-k = k-j-1 \Rightarrow 2k = n+j+1 \text{ e } k < 2\frac{n+1}{3} \Leftrightarrow j < \frac{n+1}{3}.$$

È infine indifferente scegliere sia A che B che C se

$$j-1 = n-k = k-j-1 \Rightarrow j = \frac{n+1}{3} \text{ e } k = 2\frac{n+1}{3};$$

quest'ultimo caso può verificarsi, ovviamente, solo se $(n+1)/3$ è un numero intero, cioè per n=2, 5, 8, 11,... ovvero, altrimenti detto, n=3s+2 (s intero) ovvero ancora, con altra notazione, n=2, mod 3.

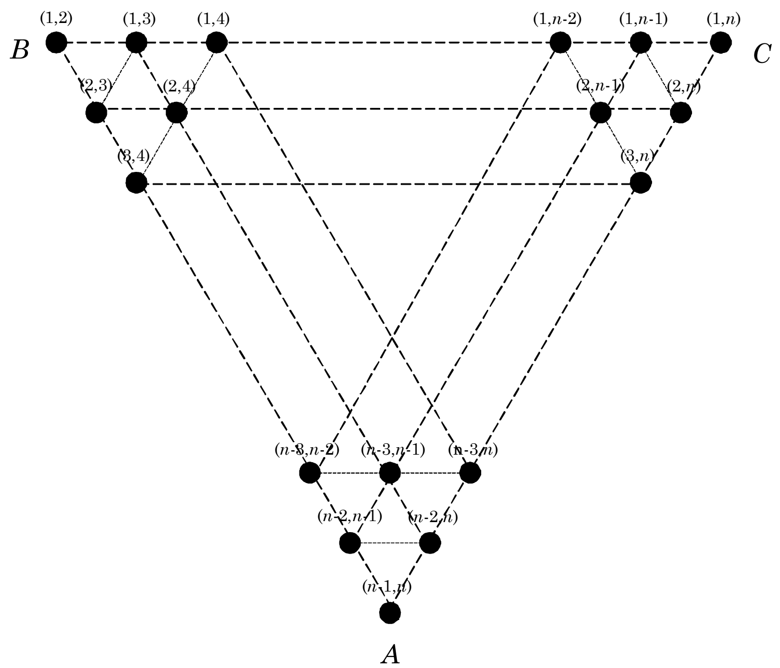


Figura 1: Reticolo per n generico

Una volta definita la scelta da fare, il compito che ci attende è la valutazione, per n arbitrario, del numero di casi favorevoli corrispondenti ad ognuna delle $n(n-1)/2$

coppie *(j,k)* considerate. Cominciamo, a tal fine, con l'osservazione banale che, essendo per ipotesi $j<k$, i valori che j può assumere vanno da 1 ad n-1, mentre quelli che può assumere k vanno da 2 ad n ed immaginiamo di disporre in modo ordinato le $n(n-1)/2$ coppie *(j,k)* sui punti di un reticolo triangolare, avente n-1 punti per lato, secondo lo schema indicato in ***Figura 1***.

Riportiamo qui di seguito (***Figura 2***) i primi 6 reticoli che si possono costruire, quelli per n=3, 4, 5, 6, 7 e 8 (omettendo, per semplicità grafica, parentesi e virgole nell'identificazione delle coppie, visto che nei casi considerati non sono possili confusioni) che possono servire per rendere più evidenti alcune caratteristiche generali e cui faremo inoltre riferimento esplicito per i calcoli numerici che faremo.

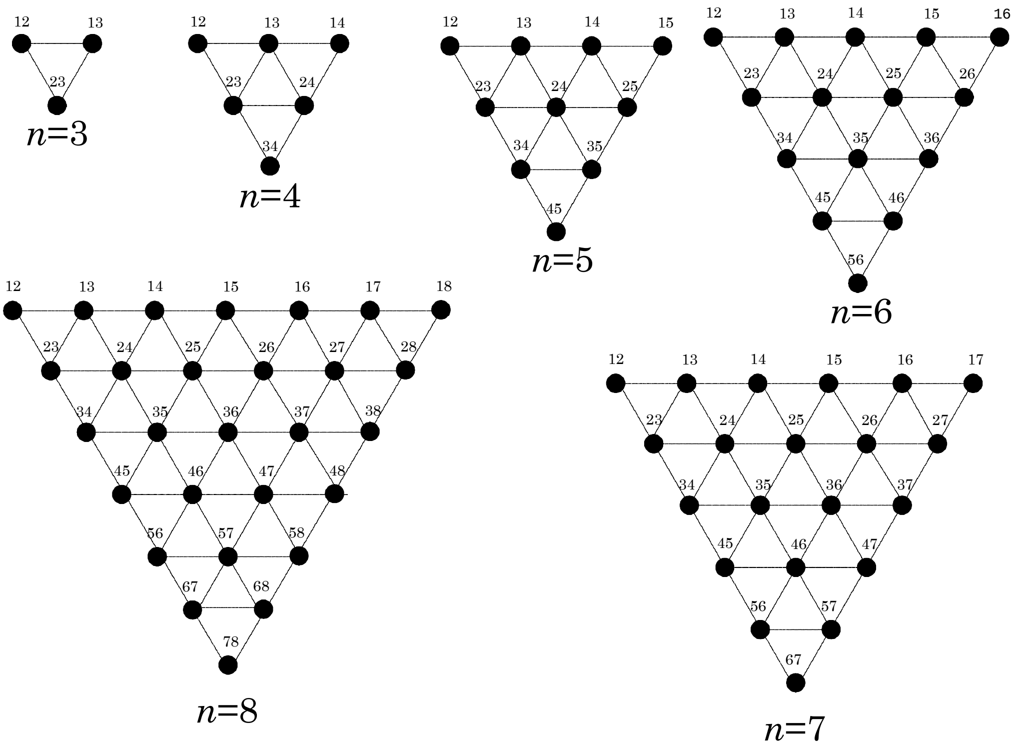


Figura 2: Reticoli per n=3, 4, 5, 6, 7 e 8

Considerando il reticolo relativo ad un valore generico di n (e con uno sguardo ai vari casi particolari), è immediato rendersi conto che le tre coppie *(j,k)* situate nei tre vertici del reticolo sono quelle che forniscono il massimo numero possibile di CF, uguale ad $n-2$, per una specifica scelta di uno dei tre dadi. Precisamente: il vertice *(1,2)* dà $n-2$ CF per la scelta di B (mentre nullo è il numero di CF per le scelte di A e di C), il vertice *(1,n)* dà lo stesso numero di CF per la scelta di C (e 0 CF per le altre scelte) e, infine, il vertice $(n-1,n)$ li dà per la scelta di A (con 0 CF per B e C). Indicheremo pertanto i tre vertici con le stesse lettere del dado da privilegiare e quindi il vertice in cui sta la coppia (1,2) sarà il vertice B, eccetera. Se n è sufficientemente grande, il reticolo palesa delle proprietà peculiari che servono ad evidenziare facilmente la scelta che massimizza il numero di casi favorevoli relativi ad una generica coppia *(j,k)* ed il valore di tale numero. Partendo da uno qualsiasi dei vertici e spostandosi di un passo sul reticolo si incontrano due coppie *(j,k)* che forniscono ancora il massimo numero di CF per la stessa scelta del dado fatta per il vertice, ma tale numero risulta diminuito di una unità (e quindi uguale ad $(n-3)$). Facendo un secondo passo sul reticolo, allontanandosi maggiormente dai vertici (in qualsiasi direzione), si raggiunge, in corrispondenza di ogni vertice, una terna di coppie *(j,k)* che forniscono, sempre per la stessa scelta del dado che caratterizza il vertice, lo stesso massimo numero di CF, che risulta ancora diminuito di un'unità (e quindi uguale ad n-4); ogni terna è situata su tre punti del reticolo che giacciono su un segmento parallelo al lato opposto al vertice di partenza. Continuando così, sempre che n sia grande a sufficienza, man mano che ci si allontana da ogni vertice si incontrano, di passo in passo, multipletti di coppie *(j,k)*, costituiti da un numero di elementi crescente via via di un'unità e giacenti su segmenti paralleli tra loro ed al lato opposto, cui è associato lo stesso numero massimo di CF, sempre per la stessa scelta del dado fatta per il vertice di partenza, essendo tale numero via via diminuito di un'unità.

Viene istintivo a questo punto associare ad ogni reticolo un semplice grafo, mettendo in corrispondenza le coppie del reticolo coi punti del grafo, associando a questi una molteplicità che uguaglia il numero massimo di CF relativo alla coppia corrispondente e collegando tra loro con dei segmenti i punti aventi la stessa molteplicità. Per semplificare la grafica, segneremo solo i punti estremi di tali segmenti, con associata la loro molteplicità, mentre sul segmento riporteremo il numero di punti del grafo che stanno su tale segmento, pari al numero di coppie che possiedono la stessa molteplicità. Per quanto riguarda la parte del reticolo fino ad ora esaminata, la struttura del grafo ad essa associata è, per n generico, ma sufficientemente grande, del tipo riportato in ***Figura 3***.

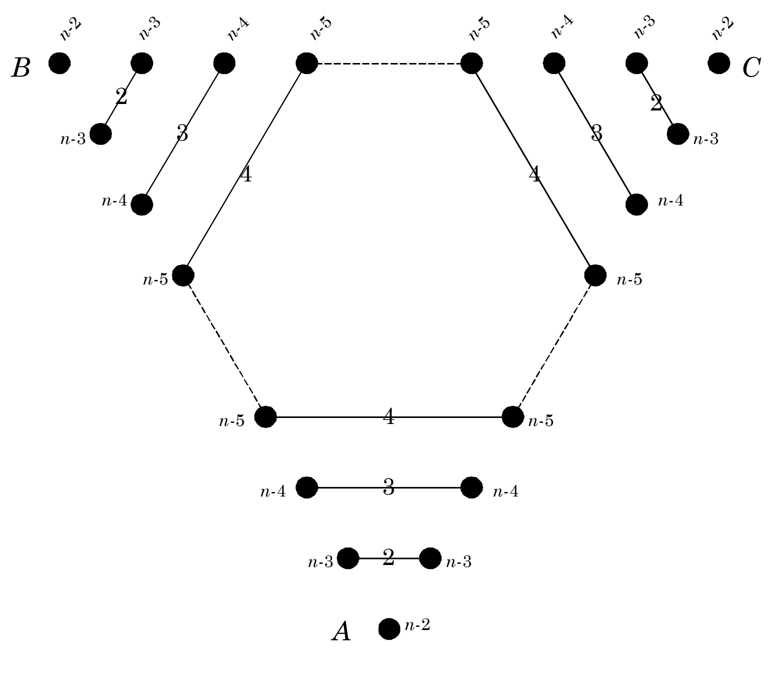


Figura 3: Grafo per n generico

Il grafo presenta una palese simmetria, rispetto allo scambio dei tre vertici, che rispecchia la sostanziale identità dei tre dadi e delle possibili scelte per massimizzare le probabilità di vincita; inoltre mostra chiaramente che l'associazione di un punto ad un vertice (ovvero di una coppia ad un dado) è determinata dalla vicinanza del punto al vertice stesso: la molteplicità di un punto è determinata dal vertice più vicino.

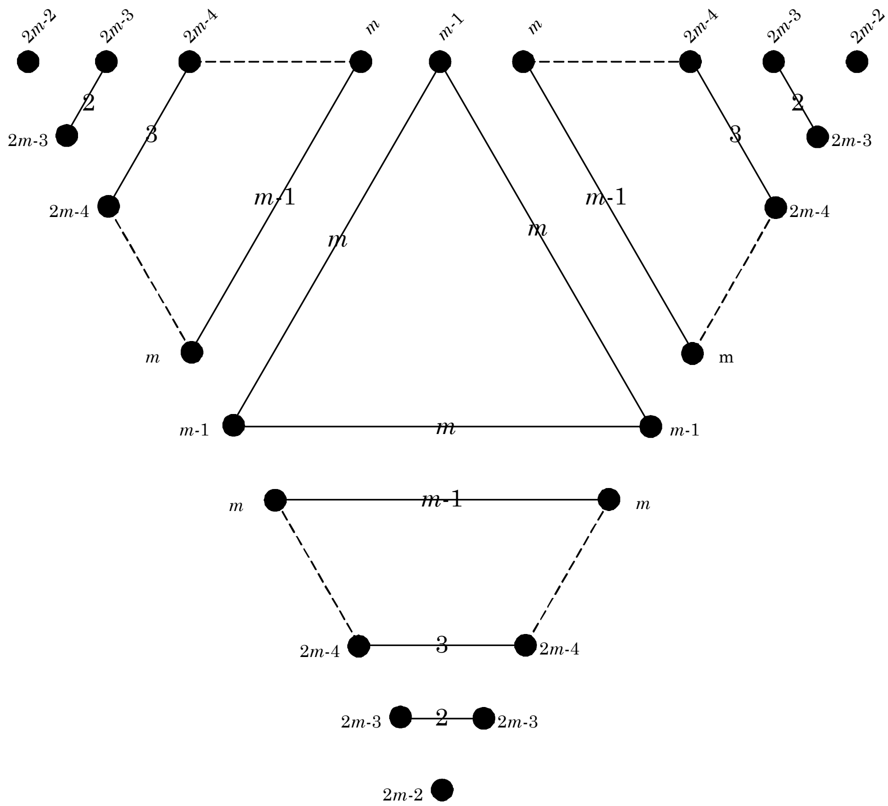


Figura 4: Grafo per n=2m

Dobbiamo ora esaminare la parte più interna del reticolo, che è quella che ci permetterà di costruire la parte più interessante del grafo, quella centrale, e di differenziare tra di loro i vari tipi di grafi a seconda dei valori di n e quindi di classificarli, di collocarli cioè in un certo numero di classi, intendendo per classe l'insieme dei grafi che possiedono le stesse caratteristiche; i grafi di una stessa classe corrisponderanno allora ad un sottoinsieme dei numeri n per cui le probabilità $P(n)$ cui siamo interessati (ovvero i numeri di CF $\phi(n)$ e $F(n)$) saranno dati da un'unica formula. Cominciamo con l'osservare che il processo di allontanamento dai vertici, con associazione al vertice più vicino degli elementi raggiunti, può continuare solo fino a che non si sia raggiunta la metà di un lato; e qui occorre fare una prima distinzione tra i grafi, a seconda che il punto centrale dei lati (che, ricordiamo, posseggono $(n-1)$ punti) appartenga al grafo oppure no. Questo ci porta ad una prima distinzione tra i numeri n a seconda che siano pari o dispari. Nel primo caso, di n=$2m$, m intero, il numero dei punti appartenenti ad un lato è dispari $(2m-1)$ e quindi il punto centrale del lato appartiene al grafo (è l'm-esimo punto dal lato). Considerando, per esempio, il lato BC, che nel nostro grafo è quello orizzontale, $m-1$ punti stanno alla sua sinistra, e la loro molteplicità è determinata dal vertice B, ed $m-1$ punti stanno alla sua destra, e la loro molteplicità è determinata dal vertice C; quella del punto centrale, equidistante da B e C, è determinata indifferentemente dall'uno o dall'altro vertice e risulta uguale a $m-1$. Naturalmente, data la perfetta simmetria del grafo per lo scambio dei vertici, per gli altri lati vale un discorso identico a quello appena fatto, salvo lo scambio del nome del vertice, importantissimo per l'utilizzazione pratica di queste considerazioni (cioè per massimizzare effettivamente le probabilità di vincita in fase di gioco), ma inessenziale al fine del computo della probabilità cercata, cioè del numero totale di CF. I punti centrali dei tre lati risultano collegati tra loro ed a tutti i punti del reticolo aventi la stessa molteplicità $m-1$ (uguale alla molteplicità $2m-2$ dei vertici diminuita del numero $m-1$ dei passi effettuati per raggiungere il centro dei lati). I tre segmenti, equidistanti dai tre vertici, che uniscono i punti con uguale molteplicità si sono a questo punto saldati a formare un triangolo con m punti per ogni lato (in numero pari ad 1 più il numero di passi effettuati). I vertici di tale triangolo, punti medi dei lati, sono, come già detto, punti di scelta indifferente per due dei tre dadi, mentre la molteplicità assegnata ai rimanenti punti appartenenti ai lati è sempre associata al vertice più vicino (si veda la ***Figura 4***).

È opportuno qui segnalare che per il conteggio dei CF occorrerà fare una certa attenzione perché, mentre nelle situazioni precedentemente considerate esistevano tre segmenti equivalenti disgiunti e quindi, se ad ogni segmento appartenevano p punti, ciascuno con molteplicità r, il numero totale di punti con molteplicità r era ovviamente $3p$, questo diventa $3p-3\equiv 3(p-1)$ nel caso in cui i tre segmenti siano saldati a formare un triangolo.

Se ora nel grafo ci spostiamo ancora (da ognuno dei punti appartenenti al triangolo appena considerato) di un passo verso il centro, incontriamo un punto appartenente a sua volta ad un triangolo, concentrico al precedente e formato da punti aventi tutti la stessa molteplicità (inferiore di una unità rispetto a quella del punto da cui ci si è mossi e quindi uguale ad $m-2$) e con ogni lato costituito da un numero di punti inferiore di 3 unità a quello del triangolo precedente (nel caso specifico, quindi, da $m-3$ punti); i suoi vertici risultano nuovamente equidistanti da due vertici del grafo e sono quindi associati a coppie (j,k) per cui la scelta di due dadi è indifferente, mentre per i punti interni ai lati la molteplicità è sempre determinata dal vertice più vicino. Continuando a muoversi verso il centro, sempre che n sia sufficientemente grande, si incontrano via via triangoli concentrici sempre più piccoli (con il numero di punti per lato diminuito di 3 unità ad ogni passo, ogni punto avente una molteplicità diminuità di una unità per passo), fino a raggiungere un triangolo centrale che può essere costituito da 3 o 6 o 9 punti (rispettivamente 2 e 3 e 4 punti per lato); nei primi due casi all'interno dell'ultimo triangolo raggiunto non esistono più punti del grafo, mentre nel terzo all'interno dell'ultimo triangolo raggiunto esiste ancora un punto appartenente al grafo che ne è il centro (equidistante dai tre vertici) e rappresenta dunque una coppia (j,k) per cui è indifferente la scelta di ognuno dei tre dadi.

Nel caso considerato di n pari, $n=2m$, abbiamo quindi tre categorie di grafi, diversificate dal loro "centro" che può essere costituito o da un triangolo formato da sei punti o da un triangolo formato da tre punti o da un unico punto. Poiché il centro viene raggiunto, partendo da un triangolo con m punti per lato, con passi successivi che comportano la diminuzione di tre punti per lato per ogni passo, è chiaro che il tipo di centro è determinato dallo specifico valore del numero m considerato e precisamente che occorre distinguere tre casi:

$$\begin{aligned} m &= 3q && \Rightarrow \quad \text{centro con 3 punti per lato,} \\ m &= 3q+2 && \Rightarrow \quad \text{centro con 2 punti per lato,} \\ m &= 3q+1 && \Rightarrow \quad \text{centro costituito da un unico punto.} \end{aligned}$$

Per n pari, dunque, si hanno tre classi di grafi,

$$n = 6q \quad \Rightarrow \quad \text{triangolo centrale di 6 punti,}$$
$$n = 6q + 4 \quad \Rightarrow \quad \text{triangolo centrale di 3 punti,}$$
$$n = 6q + 2 \quad \Rightarrow \quad \text{centro costituito da un unico punto.}$$

Ovviamente, per q=0 il grafo corrispondente non esiste nel primo nè nel terzo caso.

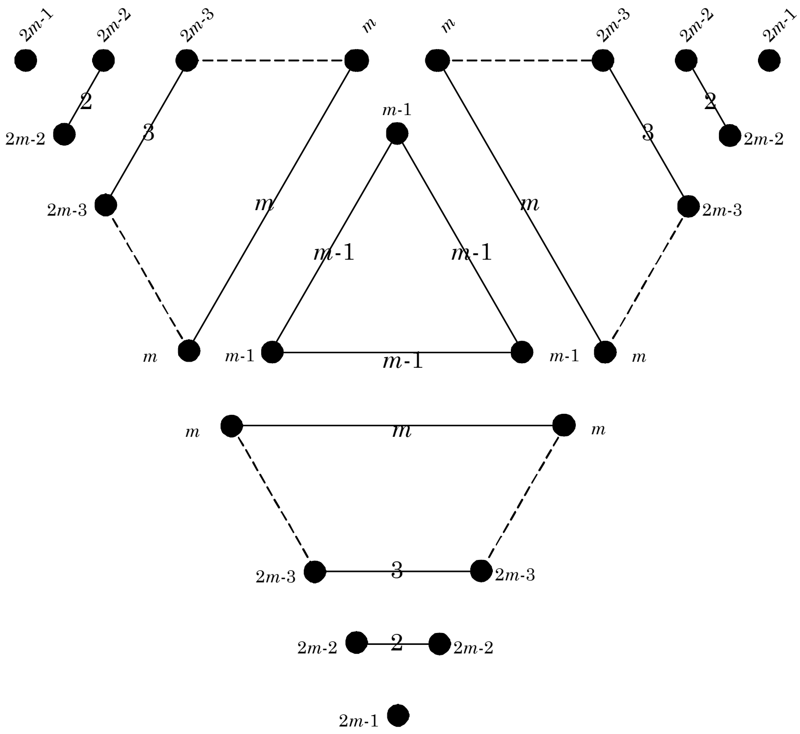


Figura 5: Grafo per n=2m+1

Nel caso di n dispari, n=2m+1, la differenza essenziale rispetto al caso di n pari è che ora il punto centrale dei lati del grafo non appartiene al grafo; sui lati non esiste alcun punto che corrisponda ad una scelta equifavorevole di due dadi. Il grafo possiede ugualmente una struttura centrale, formata da triangoli concentrici, dello stesso tipo di quella appena esaminata, ma il primo triangolo che si incontra, muovendosi dai lati del grafo verso il centro, ha i propri vertici situati nei punti centrali dei primi segmenti paralleli ai lati del reticolo ed interni ad esso (formati da $2m-1$ punti) (si veda ***Figura 5***).

Il primo triangolo della struttura interna ha ora $m-1$ punti per lato ed ogni punto ha molteplicità $m-1$; spostandosi verso il centro i triangoli che si incontrano via via hanno sempre un numero di punti per lato che decresce di tre unità ad ogni passo, mentre la molteplicità di tali punti decresce di una unità per passo. Il centro del grafo potrà di nuovo essere costituito o da un triangolo di 6 punti (3 per lato) ovvero da un triangolo di 3 punti (2 per lato) ovvero ancora da un unico punto, secondo la corrispondenza:

$$m = 3q \quad \Rightarrow \quad \text{centro con 2 punti per lato,}$$
$$m = 3q + 2 \quad \Rightarrow \quad \text{centro di un unico punto,}$$
$$m = 3q + 1 \quad \Rightarrow \quad \text{centro con 3 punti per lato.}$$

Anche per n dispari, dunque, si hanno tre classi di grafi:

$$\begin{aligned} n &= 6q+1 \quad \Rightarrow \quad \text{triangolo centrale di 6 punti,} \\ n &= 6q+3 \quad \Rightarrow \quad \text{triangolo centrale di 3 punti,} \\ n &= 6q+5 \quad \Rightarrow \quad \text{centro costituito da un unico punto.} \end{aligned}$$

Mettendo insieme quanto visto a proposito di n pari ed n dispari, possiamo dunque concludere che esistono 6 classi di grafi associati ai 6 sottoinsiemi dei numeri naturali costituiti dai numeri[3]

$$n_i = 6q + i, \quad q = 0,1,2,\ldots, \quad i = 0,1,2,3,4,5 .$$

Per ognuno di questi sottoinsiemi deve esistere una una formula unica, valida per tutte le terne di dadi con n_i facce, con i prefissato, che fornisca la probabilità di vincita $P(n_i)$, deve cioè esistere un polinomio di terzo grado in n_i, determinato in modo univoco, che fornisca il numero di casi favorevoli per ogni possibile valore di n_i. Lo studio dettagliato delle 6 classi di grafi che abbiamo determinato ed esaminato in precedenza ci fornisce una strada sicura per la determinazione dei polinomi $\phi(n)$ relativi ad ogni classe: si tratta di trovare, per ogni tipologia di grafo, caratterizzata dalla particolare classe, la somma delle molteplicità di tutti i punti costituenti il grafo. La cosa è semplicissima del punto di vista concettuale, ma un po' meno da quello pratico, in quanto i calcoli relativi pretendono una certa attenzione ed una buona dose di pazienza. Prima di affrontarli vediamo dunque se è possibile cercare di ottenere i risultati voluti riducendo lo sforzo necessario.

Abbiamo già visto che il numero di casi favorevoli $\phi(n)$, associato al grafo relativo a dadi con un numero n generico di facce, deve essere esprimibile con un polinomio di terzo grado in n, i cui coefficienti non possono essere tutti indipendenti da n, in quanto $\phi(n)$ deve essere in grado di distinguere le sei classi di grafi (ovvero i 6 sottoinsiemi di numeri naturali n_i). A tal fine è sufficiente che un unico coefficiente differenzi tra loro i polinomi $\phi(n_i)$ e l'ipotesi più semplice è che, se ciò è vero, tale coefficiente sia il termine noto. In effetti è praticamente scontato che il coefficiente del termine cubico sia lo stesso per ogni $\phi(n)$, perché il $\lim_{n\to\infty} P(n) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{F(n)}{n^3} \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{2\phi(n)}{n^3}$ non può dipendere dal sottoinsieme di numeri n_i considerato per effettuare il limite, ed è plausibile che anche i coefficienti di n^2 e di n siano gli stessi. Proviamo dunque a vedere se possa essere adatto ad esprimere $\phi(n)$ per ogni valore di n un polinomio del tipo

$$\phi(n) = an^3 + bn^2 + cn + d_n . \qquad \textbf{[4]}$$

con $d_n = d_{n+6}$ determinato dalla classe cui appartiene il grafo associato ad n e a, b e c coefficienti universali. Se ciò è vero (come sarà verificato a posteriori) la determinazione di tutti i polinomi $\phi(n)$ dipende dalla conoscenza di 9 numeri, i 6

[3] A questa conclusione l'ultimo duca arriva con la folgorante asserzione:*"giocando un po' con questo grafico, variando la n, si è visto che, dal momento che è necessario ottenere valori interi per le variabili, bisogna differenziare i casi modulo 6*". Mi piacerebbe sapere quale è il tipo di gioco che ha giocato!

valori di d_n per n=0, 1, 2, 3, 4, 5 e quelli dei tre coefficienti universali a, b e c. Si tratta allora di sfruttare 9 informazioni per determinarli, cioè di utilizzare la **[4]** per 9 distinti valori di n per cui si sia valutato $\phi(n)$, ottenendo così un sistema lineare di nove equazioni in nove incognite; la dimensione del sistema non deve spaventare, in quanto la sua soluzione è in realtà molto semplice. La prima informazione la fornisce immediatamente la **[4]** per il caso di n=0; infatti, essendo $\phi(0)=0$, ne segue che deve essere $d_0=0$. Ci rimangono quindi solo più 8 equazioni da considerare e, ovviamente, saranno quelle ottenute dalla **[4]** facendo variare n da 1 a 8; dobbiamo quindi ricavarci i valori di $\phi(n)$ per tali valori di n. Per n=1 ed n=2 il numero di casi favorevoli è palesemente nullo e quindi abbiamo $\phi(1)=\phi(2)=0$. I valori di $\phi(n)$ per i 6 successivi valori di n si ottengono facilmente dai grafi corrispondenti a questi ultimi, riportati in ***Figura 6***.

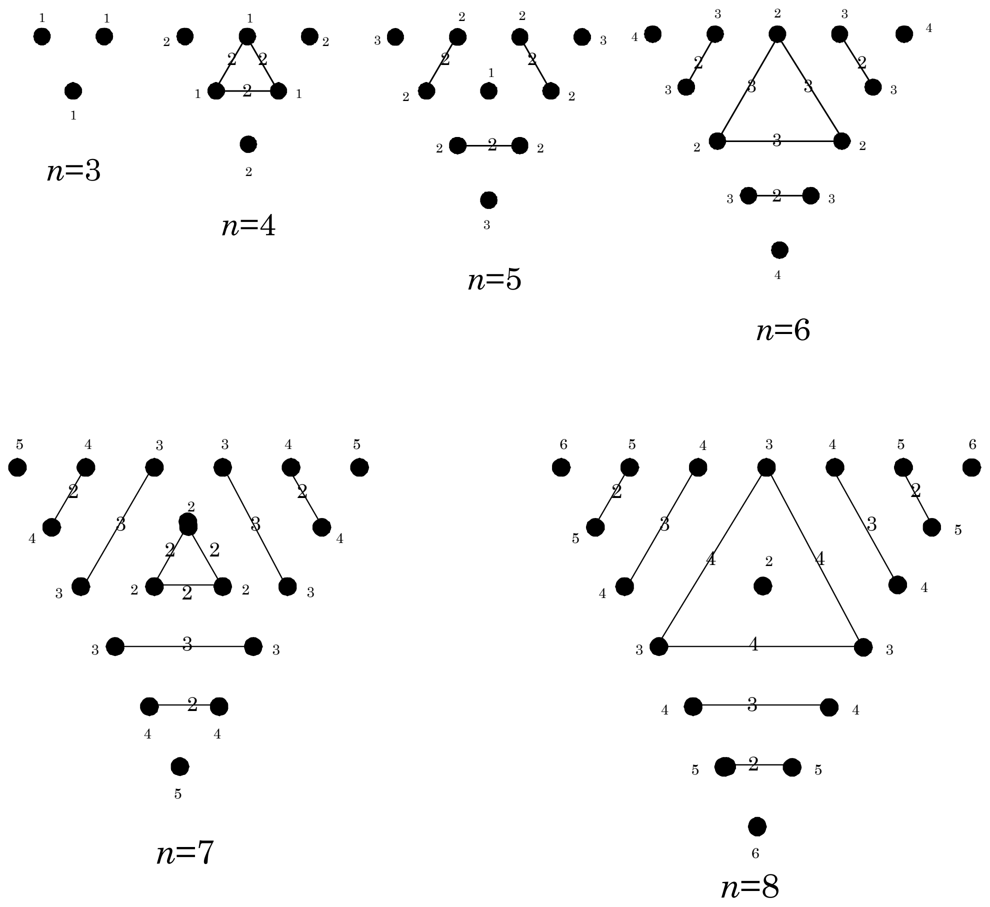


Figura 6: Grafi per n=2,...,8

Sommando, per ognuno di essi, le molteplicità di tutti i punti del grafo, ricaviamo

$$\phi(3)=3,\quad \phi(4)=9,\quad \phi(5)=22,\quad \phi(6)=42,\quad \phi(7)=72,\quad \phi(8)=113.$$

A partire dalla **[4]**, otteniamo così il sistema

$$
\begin{cases}
a+b+c+d_1=0, & [5.1] \\
8a+4b+2c+d_2=0, & [5.2] \\
27a+9b+3c+d_3=3, & [5.3] \\
64a+16b+4c+d_4=9, & [5.4] \\
125a+25b+5c+d_5=22, & [5.5] \\
216a+36b+6c=42, & [5.6] \\
343a+49b+7c+d_1=72, & [5.7] \\
512a+64b+8c+d_2=113. & [5.8]
\end{cases}
\quad \textbf{[5]}
$$

Considerando le equazioni ottenute sottraendo la **[5.1]** dalla **[5.7]** e la **[5.2]** dalla **[5.8]**, associate alla **[5.6]**, si ottiene un sottosistema che contiene solo i coefficienti a, b e c:

$$
\begin{cases}
342a+48b+6c=72, \\
504a+60b+6c=113, \\
216a+36b+6c=42.
\end{cases}
\quad \textbf{[6]}
$$

Di qui, sottraendo la terza dalla prima e la prima dalla seconda, si hanno le due equazioni

$$
\begin{cases}
126a+12b=30, \\
162a+12b=41;
\end{cases}
\quad \textbf{[7]}
$$

sottraendo ancora la prima dalla seconda si ricava l'equazione

$$36a=11$$

che fornisce il primo coefficiente

$$a=\frac{11}{36}\equiv\frac{22}{72}. \quad \textbf{[8]}$$

Sostituendo questo valore nella prima delle **[7]** si ricava

$$b=\frac{1}{12}\left(30-126\frac{11}{36}\right)=-\frac{51}{72}; \quad \textbf{[9]}$$

introducendo i valori ricavati per a e b nella terza delle **[6]**, si ricava c:

$$c=\frac{1}{6}\left(42-216\frac{11}{36}+36\frac{51}{72}\right)=\frac{18}{72}=\frac{1}{4}. \quad \textbf{[10]}$$

Noti a, b e c, le **[5.i]**, con $i=1,2,\ldots,5$ ci forniscono per i termini noti d_i i valori

$$d_1=\frac{11}{72},\quad d_2=-\frac{8}{72}=-\frac{1}{9},\quad d_3=\frac{27}{72}=\frac{3}{8},\quad d_4=-\frac{16}{72}=-\frac{2}{9},\quad d_5=\frac{19}{72}. \quad \textbf{[11]}$$

Grazie ai risultati numerici **[8]**,...,**[11]**, dalla **[5]** otteniamo per $\phi(n)$ la formula generale

$$\phi(n)=\frac{1}{72}\left(22n^3-51n^2+18n+\alpha_n\right), \qquad \textbf{[12]}$$

dove abbiamo posto $\alpha_n = 72d_n$; esplicitamente, quindi

$$\alpha_0=0,\ \ \alpha_1=11,\ \ \alpha_2=-8,\ \ \alpha_3=27,\ \ \alpha_4=-16,\ \ \alpha_5=19,\ \ \alpha_{n+6}=\alpha_n. \qquad \textbf{[13]}$$

Va sottolineato che la validità generale della **[12]** è per ora solamente una ipotesi, dato che non siamo stati in grado di dare una piena giustificazione della **[4]**; che la **[12]** sia una formula di validità generale è però effettivamente vero e ciò può essere verificato a posteriori, confrontando le sue predizioni per quattro valori di n per ognuna delle sei classi di grafi[4] con il valore della molteplicità totale dedotta dai grafi corrispondenti. La verifica è sufficientemente noiosa, ma dà una conferma certa della sua validità.

Accettata la validità della **[12]**, per la probabilità di vincita ***P(n)***, data dal rapporto tra il numero totale di eventi favorevoli $F(n)=2\phi(n)$ e il numero totale di eventi possibili, pari ad n^3, abbiamo la formula generale

$$P(n)=\frac{22n^3-51n^2+18n+\alpha_n}{36n^3}, \qquad \textbf{[14]}$$

esendo gli α_n dati dalla **[13]**.

Un metodo sicuro per valutare $\phi(n)$ consiste, come già abbiamo fatto notare, nel sommare esplicitamente le molteplicità di tutti i punti costituenti un generico grafo; poiché i grafi sono raggruppati in ***6*** classi, corrispondenti a diverse tipologie, dobbiamo aspettarci, per tale somma, che rappresenta $\phi(n)$, una formula a priori diversa per ogni classe. Conviene qui considerare separatamente le tre classi associate agli n pari e le tre classi associate agli n dispari. Per ogni classe è poi opportuno separare la somma delle molteplicità dei punti del generico grafo della classe in due parti: la prima, che indicheremo con *S(n)*, tiene conto della regione "esterna" del grafo, quella, separata in tre parti, cosituita dagli intorni dei vertici del grafo, in cui i punti sono collegati da segmenti aventi gli estremi liberi, e la seconda, che indicheremo con *T(n)*, che tiene conto della somma delle molteplicità dei punti appartenenti al nucleo, formato da triangoli concentrici, che contiene il centro del grafo. Pensando alla struttura dei vari grafi, risulta chiaro che la forma di *S(n)* dipende soltanto dall'essere *n* pari o dispari, mentre la forma di *T(n)* sarà specifica di ogni singola classe; ci attende quindi il calcolo di otto somme, le quali, tutte, coinvolgeranno somme elementari del tipo

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{s} C = C\cdot s, \quad \sum_{k=0}^{s} C = C(s+1), \quad \forall C \text{ indipendente da } k,\\
&\sum_{k=0}^{s} k = \sum_{k=1}^{s} k = \frac{1}{2}s(s-1),\\
&\sum_{k=0}^{s} k^2 = \sum_{k=1}^{s} k^2 = \frac{1}{6}s(s+1)(2s+1) \equiv \frac{2s^3+3s^2+s}{6}.
\end{aligned} \qquad \textbf{[15]}$$

[4] In realtà per 5 delle 6 classi ne sono sufficienti tre, se teniamo conto del fatto che il valore ***a*** deve essere universale.

Cominciamo a considerare il caso di n pari, n=2m. L'esame della parte esterna del generico grafo relativo ad n=2m mostra che

$$\begin{aligned}S(n) &= 3[1\cdot(2m-2)+2(2m-3)+3(2m-4)+\ldots+(m-1)m]=\\ &=3\sum_{k=1}^{m-1}k(2m-k-1)=\\ &=3(2m-1)\sum_{k=1}^{m-1}k-3\sum_{k=1}^{m-1}k^2=\\ &=3(2m-1)\frac{1}{2}m(m-1)-3\frac{1}{6}(m-1)m(2m+1)=\\ &=m(m-1)(2m+1)\equiv 2m^3-3m^2+m;\end{aligned}$$

sostituendo $m=n/2$ in questo risultato, si ha

$$S(n)=\frac{1}{4}n^3-\frac{3}{4}n^2+\frac{1}{2}n,\quad \forall n=2m. \qquad \textbf{[16]}$$

Dobbbiamo ora calcolare i contributi dei nuclei triangolari per i tre valori di m che definiscono le tre classi di grafi relative agli n pari.

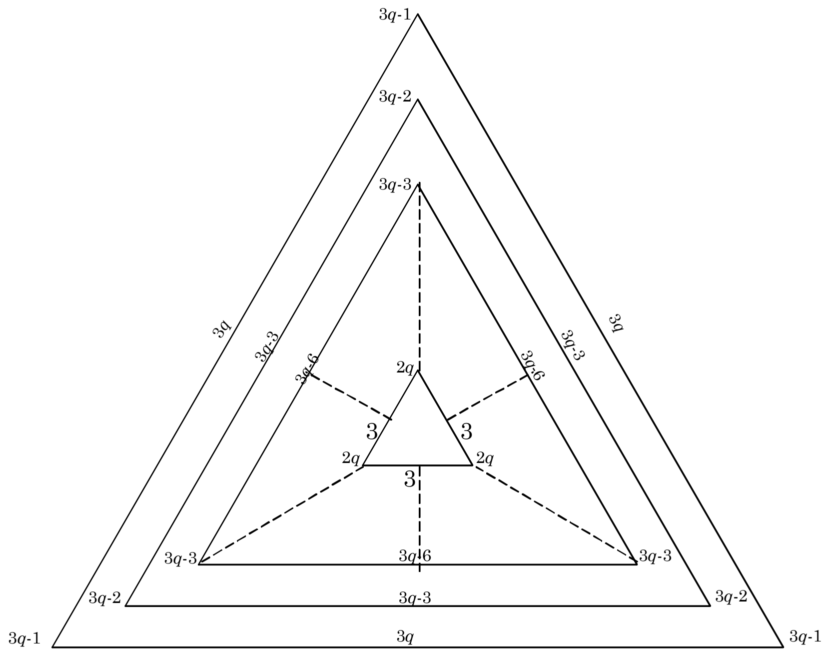


Figura 7: Grafo per n=2m, m=3q

Per m=3q (e quindi n=6q), la parte interna del grafo, a triangoli concentrici, ha la struttura del grafo di ***Figura 7*** e pertanto si ha:

$$\begin{aligned}T(n) &= 3[(3q-1)(3q-1)+(3q-4)(3q-2)+(3q-7)(3q-3)+\ldots+2(2q)]=\\ &=3\sum_{k=1}^{q}(3q-3k+2)(3q-k)=3\sum_{k=1}^{q}\left[(9q^2+6q)-(2+12q)k+3k^2\right]\ ;\end{aligned}$$

ricordando le somme **[15]**, con due passaggi algebrici si ricava

$$T(n) = \frac{3}{2}\left(8q^3 + q^2 - q\right), \quad \text{per} \quad n = 6q. \qquad \textbf{[17]}$$

Sommando la **[16]** con la **[17]**, calcolata per $q = n/6$, ricaviamo per $\phi(n)$, nel caso specifico di n=6q, l'espressione

$$\phi(n) = \frac{1}{72}\left(22n^3 - 51n^2 + 18n\right), \quad n = 6q. \qquad \textbf{[18]}$$

Possiamo notare subito che la **[18]** è effettivamente un caso particolare della **[12]** da noi precedentemente dedotta in modo semiempirico.

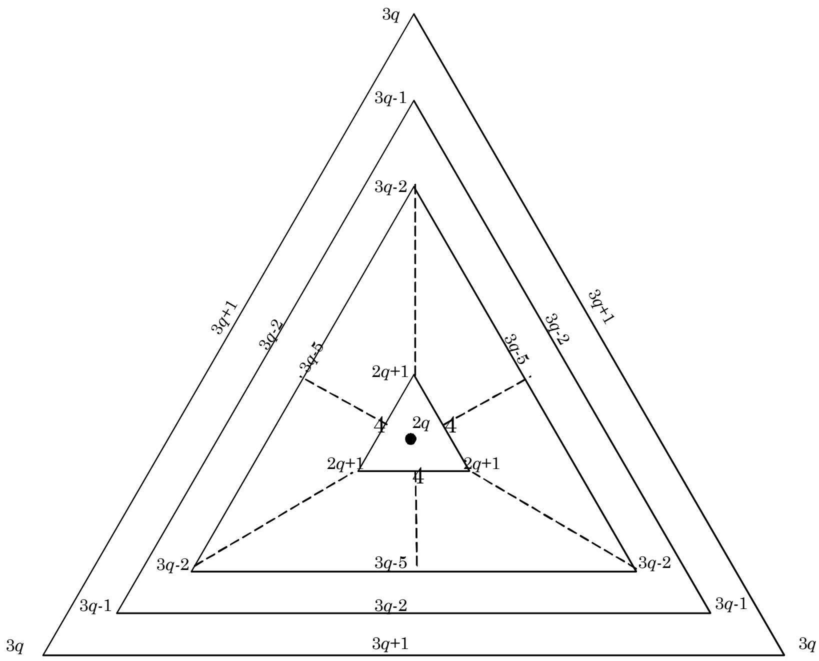


Figura 8: Grafo per n=2m, m=3q+1

Passando a considerare, sempre per n=2m, il caso di m=3q+1 (e quindi n=6q+2), la parte triangolare interna del grafo ha la struttura di ***Figura 8***, che ci permette di leggere immediatamente $T(n)$:

$$\begin{aligned} T(n) &= 3\left[3q \cdot 3q + (3q-3)(3q-1) + (3q-6)(3q-2) + \ldots + 3(2q+1)\right] + 1 \cdot 2q = \\ &= 3\sum_{k=0}^{q-1}(3q-3k)(3q-k) + 2q, \end{aligned}$$

dove l'ultimo termine rappresenta il contributo singolo del punto centrale del grafo. L'uso delle solite formule per le somme e due semplici passaggi algebrici ci forniscono in risultato

$$T(n) = 12q^3 + \frac{27}{2}q^2 + \frac{7}{2}q, \quad \text{per} \quad n = 6q + 2. \qquad \textbf{[19]}$$

Sommando questo risultato, valutato per $q = (n-2)/6$, con la **[16]**, ricaviamo

$$\phi(n)=\frac{1}{72}\left(22n^3-51n^2+18n-8\right), \quad n=6q+2. \qquad \textbf{[20]}$$

Di nuovo vediamo che la **[20]** risulta un caso particolare della **[12]**.

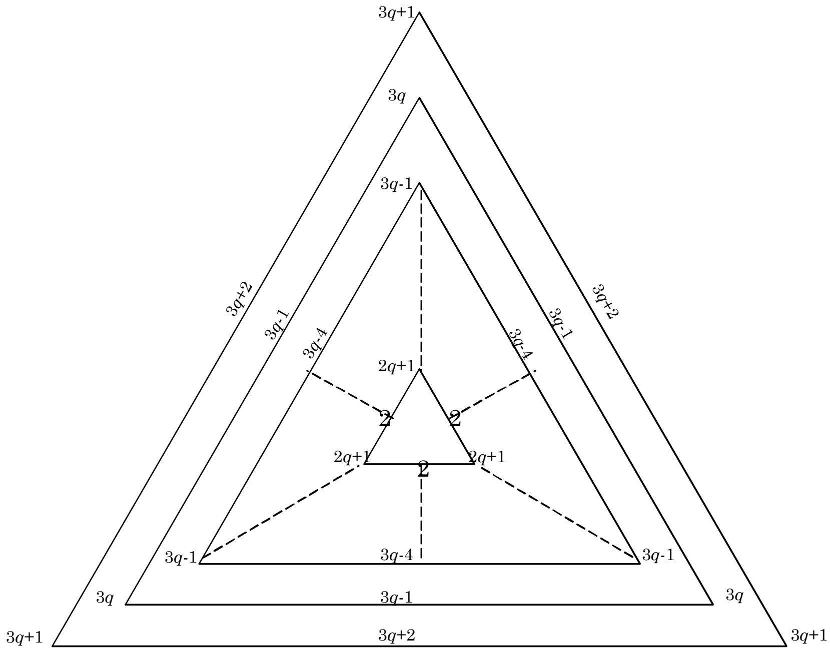


Figura 9: Grafo per n=2m, m=3q+2

Per l'ultimo caso da considerare per n pari, quello di m=3q+2 (e quindi n=6q+4), la struttura della parte centrale del grafo è quella di ***Figura 9*** e quindi abbiamo

$$T(n)=3\left[(3q+1)(3q+1)+(3q-2)3q+(3q-5)(3q-1)+\ldots 1(2q+1)\right]=$$
$$=3\sum_{k=0}^{q}(3q-3k+1)(3q-k+1)$$

e il solito tipo di calcoletto ci fornisce

$$T(n)=12q^3+\frac{51}{2}q^2+\frac{33}{2}q+3, \quad \text{per} \quad n=6q+4. \qquad \textbf{[21]}$$

Questo risultato, valutato per $q=(n-4)/6$, sommato con la **[16]** ci permette di dare per $\phi(n)$, per la classe di dadi con n=6q+4 facce, l'espressione

$$\phi(n)=\frac{1}{72}\left(22n^3-51n^2+18n-16\right), \quad n=6q+4. \qquad \textbf{[22]}$$

Anche la **[22]** risulta essere un sottocaso della **[12]**.

Ci rimane da trattare il caso degli n dispari. Per n=2m+1 il numero di casi favorevoli fornito dalla parte esterna del grafo relativo (vedi ***Figura 5***) è

$$S(n)=3[1\cdot(2m-1)+2(2m-2)+3(2m-3)+\ldots+m\cdot m]=$$
$$=3\sum_{k=1}^{m}k(2m-k)\ ;$$

di qui, con due semplici passaggi si ha

$$S(n)=\frac{1}{2}\left(4m^3+3m^2-m\right)$$

e quindi, essendo ora $m=(n-1)/2$,

$$S(n)=\frac{1}{4}n^3-\frac{3}{8}n^2-\frac{1}{4}n+\frac{3}{8},\quad \forall n=2m+1. \qquad \textbf{[23]}$$

Anche qui, per quanto riguarda i contributi dei nuclei triangolari, dobbiamo esaminare separatamente le tre classi di grafi legate agli n dispari.

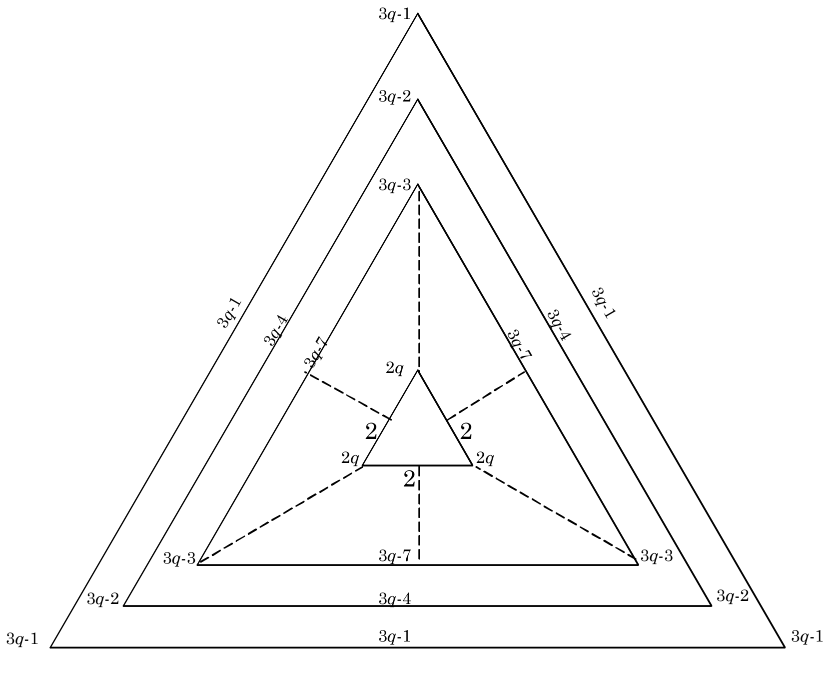


Figura 10: Grafo per n=2m+1, m=3q

Per m=3q (e quindi n=6q+1), la struttura del nucleo triangolare è data dal grafo in ***Figura 10*** e quindi abbiamo

$$T(n)=3[(3q-2)(3q-1)+(3q-5)(3q-2)+(3q-8)(3q-3)+\ldots+1\cdot 2q]=$$
$$=3\sum_{k=0}^{q-1}(3q-3k+1)(3q-k)$$

e di qui, col solito tipo di calcolo, ricaviamo

$$T(n)=12q^3-6q^2,\quad \text{per}\quad n=6q+1. \qquad \textbf{[24]}$$

Sommando la **[24]**, calcolata per $q = (n-1)/6$, con la **[23]**, otteniamo la relazione

$$\phi(n) = \frac{1}{72}\left(22n^3 - 51n^2 + 18n + 11\right) \ , \quad n = 6q+1, \qquad \textbf{[25]}$$

altro caso particolare della **[12]**.

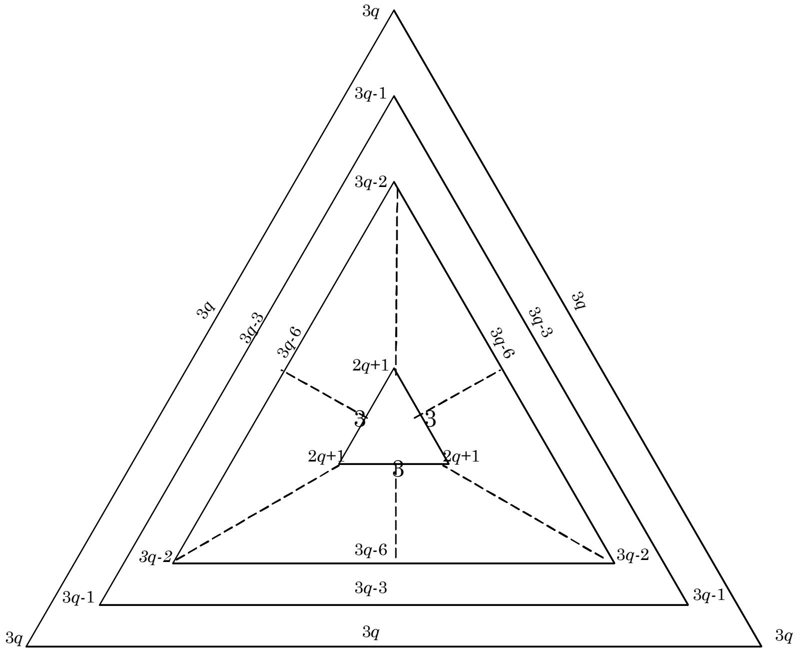


Figura 11: Grafo per n=2m+1, m=3q+1

Per m=3q+1 (e quindi n=6q+3), la struttura del nucleo triangolare è data dal grafo in ***Figura 11*** e quindi abbiamo

$$\begin{aligned} T(n) &= 3\left[(3q-1)3q + (3q-4)(3q-1) + (3q-7)(3q-2) + \ldots + 2(2q-1)\right] \\ &= 3\sum_{k=0}^{q-1}(3q-3k-1)(3q-k) \end{aligned}$$

e di qui, coi soliti passaggi,

$$T(n) = 12q^3 + 6q^2, \quad \text{per} \quad n = 6q+3. \qquad \textbf{[26]}$$

Sommando questo risultato, valutato per $q = (n-3)/6$, con quello fornito dalla **[23]**, otteniamo la relazione

$$\phi(n) = \frac{1}{72}\left(22n^3 - 51n^2 + 18n + 27\right) \ , \quad n = 6q+3, \qquad \textbf{[27]}$$

ulteriore caso particolare della **[12]**.

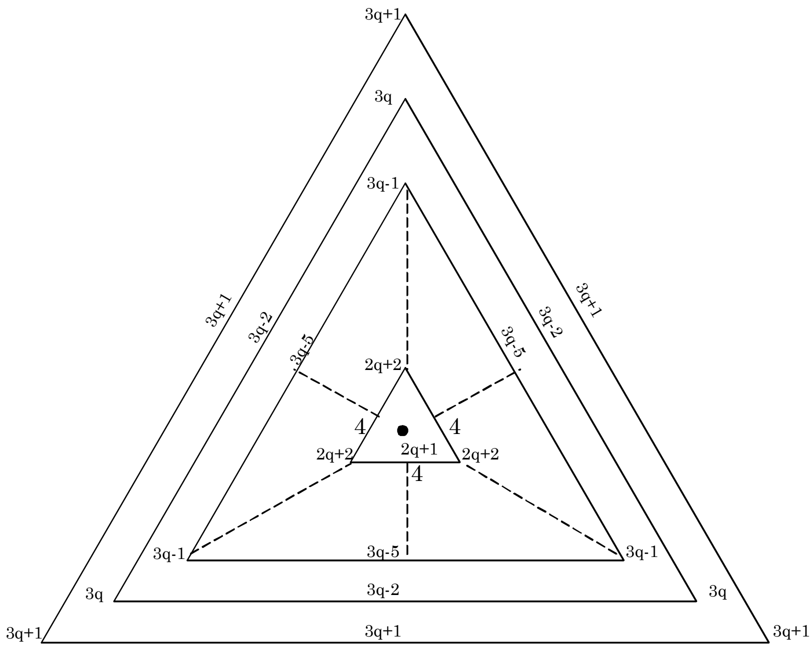


Figura 12: Grafo per n=2m+1, m=3q+2

Per l'ultimo caso che ci rimane da considerare, m=3q+2 (e quindi n=6q+5), il nucleo triangolare è dato dal grafo in ***Figura 12***, che ci permette di leggere $T(n)$, come:

$$T(n) = 3[3q(3q+1) + (3q-3)3q + (3q-6)(3q-1) + \ldots + 3(2q+2)] + 1 \cdot (2q+1) =$$
$$= 3\sum_{k=0}^{q-1} 3(q-k)(3q-k+1) + 2q + 1,$$

dove il contributo che compare fuori sommatoria è quello dovuto al punto centrale del grafo; di qui, procedendo come al solito, ricaviamo

$$T(n) = 12q^3 + 18q^2 + 8q + 1, \quad \text{per} \quad n = 6q+5, \qquad \textbf{[28]}$$

e quindi, sommando questo risultato, valutato per $q = (n-5)/6$, con quello fornito dalla **[23]**, ricaviamo l'epressione di $\phi(n)$ per la sesta ed ultima classe dei grafi associati ai tre dadi ad n facce, espressione che risulta

$$\phi(n) = \frac{1}{72}\left(22n^3 - 51n^2 + 18n + 19\right), \quad n = 6q+5, \qquad \textbf{[29]}$$

fornendo l'ultimo caso particolare previsto dalla **[12]**.

Morale: Il caso è semplice, ma tira a fregarvi. Il libero arbitrio vi dà maggiori possibilità, ma vi complica notevolmente l'esistenza!