Sintesi di teoria dei tratteggi

Simone Battagliero

16 giugno 2011

1 Concetti fondamentali

La teoria dei tratteggi è una nuova teoria matematica del discreto. Introduciamo le definizioni dei concetti fondamentali.

Definizione 1. *Si definisce* trattino *una coppia ordinata* $t \equiv \langle i, k \rangle \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}$. i *è detto* indice *del trattino.*
Sia $I \subseteq \mathbb{N}^\star$. *Si pone* $\mathrm{Tratt}_I \equiv I \times \mathbb{N}$ *(l'insieme di tutti i possibili trattini con indice in* I*).*[1]

Definizione 2. *Sia* $I \subseteq \mathbb{N}^\star$, $I \neq \emptyset$. *Si definisce* tratteggio *una funzione* $T : \mathrm{Tratt}_I \to \mathbb{Z}$ *tale che:*

- $\forall \langle n, 0 \rangle, \langle m, 0 \rangle \in \mathrm{Tratt}_I : T(\langle n, 0 \rangle) = T(\langle m, 0 \rangle) \equiv \mathcal{O}_T \equiv$ *origine di* T
- $\forall \langle n, k \rangle, \langle n, h \rangle \in \mathrm{Tratt}_I : k < h \Rightarrow T(\langle n, k \rangle) \leq T(\langle n, h \rangle)$

I *si dice* insieme degli indici *di* T *e* $|I|$ *è detto ordine di* T. *Se* $|I| = n$, *si dice che* T *è* di n-esimo ordine.

Ad esempio, possiamo definire il tratteggio $U : \mathrm{Tratt}_{\{1,2,3\}} \to \mathbb{Z}$ come

$$U(\langle i, k \rangle) \equiv \begin{cases} 3k & \text{se } i = 1 \\ 4k & \text{se } i = 2 \\ 5k & \text{se } i = 3 \end{cases} \quad \forall \langle i, k \rangle \in \mathrm{Tratt}_{\{1,2,3\}}$$

[1] Il simbolo $\equiv$ indica che ciò che sta a destra e ciò che sta a sinistra sono due modi diversi per denotare la stessa cosa. Il simbolo $=$ invece è l'uguaglianza come risultato di un calcolo.

Questo tratteggio in particolare si dice *lineare*, perché $T(\langle i,k\rangle)$ si ottiene come $n_i k$, dove n_i dipende solo da i.

Un tratteggio è visualizzabile in una tabella che ha una riga per ogni indice, ed una colonna per ogni intero maggiore o uguale a $\mathcal{O}_T$ (nel caso di U, $\mathcal{O}_U \equiv U(\langle 1,0\rangle) = 3\cdot 0 = 0$); infatti, valori più piccoli non possono essere assunti dalla funzione, e quindi non ha senso rappresentarli. Per rappresentare il tratteggio U, ad esempio, si usa una delle seguenti due tabelle, a seconda delle informazioni che interessano:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
-			-			-			-			-			-	...
-				-				-				-				...
-					-					-					-	...

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
$\langle 1,0\rangle$			$\langle 1,1\rangle$			$\langle 1,2\rangle$			$\langle 1,3\rangle$			$\langle 1,4\rangle$			$\langle 1,5\rangle$	...
$\langle 2,0\rangle$				$\langle 2,1\rangle$				$\langle 2,2\rangle$				$\langle 2,3\rangle$				...
$\langle 3,0\rangle$					$\langle 3,1\rangle$					$\langle 3,2\rangle$					$\langle 3,3\rangle$	...

La corrispondenza tra le tabelle e la definizione della funzione tratteggio U è intuitiva, e non la formalizziamo.

Sul dominio di un tratteggio si definisce un ordinamento molto importante, detto *ordinamento temporale*. Da premettere che, se T è un tratteggio e t è un trattino appartenente al dominio di T, per alleggerire la notazione si scrive impropriamente $t \in T$ intendendo $t \in \operatorname{Dom} T$.

Definizione 3. *Sia T un tratteggio. Sui suoi trattini si definisce la relazione $\leq$, detto* ordinamento temporale, *tale che $\forall t \equiv \langle i,n\rangle \in T\, \forall t' \equiv \langle j,m\rangle \in T : \ t \leq t' \overset{def}{\iff} T(t) < T(t') \vee (T(t) = T(t') \wedge (i < j \vee (i = j \wedge n \leq m)))$.*

Questa definizione esprime un concetto che appare molto semplice osservando la tabella: i trattini sono ordinati dall'alto verso il basso e da sinistra verso destra. Ad esempio, nel tratteggio U definito poc'anzi, si ha che $\langle 1,0\rangle \leq \langle 2,0\rangle \leq \langle 3,0\rangle \leq \langle 1,1\rangle \leq \langle 2,1\rangle \leq \langle 3,1\rangle \leq \langle 1,2\rangle \leq \langle 2,2\rangle \leq \langle 1,3\rangle \leq \langle 3,2\rangle \leq \langle 1,4\rangle \leq \langle 2,3\rangle \leq \ldots$

Il motivo per cui quest'ordinamento si dice "temporale" è che si può interpretare un trattino come un evento ed il segno di $\leq$ come la relazione d'ordine "precede nel tempo o accade nello stesso istante". Si può immaginare ad esempio che le diverse righe della tabella corrispondano, dall'alto verso il basso, a diversi momenti della giornata (mattina, pomeriggio, sera) e che le diverse colonne corrispondano, da sinistra verso destra, a giorni successivi (giorno 0, giorno 1, ecc.). La definizione di tratteggio impone che nel giorno 0 debba accadere un evento in ogni momento della giornata; successivamente, eventi che accadono in parti diverse della giornata possono accadere con frequenza diversa o, più in generale, secondo leggi diverse. L'interpretazione temporale di un tratteggio è importante perché rende più intuitiva la formulazione dei problemi fondamentali della teoria. Ad esempio, una domanda semplice è: quando accade (giorno e momento della giornata) l'n-esimo evento? Ossia, qual è l'n-esimo trattino nell'ordine temporale? A questo proposito si definisce la funzione t_T:

Definizione 4. *Dato un tratteggio finito T con insieme di indici I, si definisce la funzione t_T:*

$$\mathrm{t}_T : \mathbb{N}^\star \to \mathrm{Tratt}_I \ni' \mathrm{t}_T(x) \equiv \begin{cases} \min\limits_{t\in T,\, t>\mathcal{O}_T} t & \textit{se } x = 1 \\ \textit{trattino successivo a } \mathrm{t}_T(T, x-1) & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

dove il minimo e l'espressione "successivo" vanno intese rispetto all'ordinamento temporale dei trattini di T.

Si noti che si cominciano a contare i trattini da dopo $\mathcal{O}_T$, ad esempio nel tratteggio U definito prima si ha $\mathrm{t}_U(1) = \langle 1, 1\rangle$, $\mathrm{t}_U(2) = \langle 2, 1\rangle$, $\mathrm{t}_U(3) = \langle 3, 1\rangle$, ecc.

La soluzione del problema del calcolo dell'n-esimo trattino e di altri problemi della teoria dei tratteggi si ottiene con un procedimento detto *downcast*. In pratica, si cerca di capire prima qual è l'indice del trattino richiesto (cioè su quale riga della tabella si trova); una volta individuato quest'indice, si eliminano uno alla volta tutti gli altri indici del tratteggio (tutte le altre righe della tabella), riducendo di volta in volta il problema di trovare l'n-esimo trattino in un tratteggio di d-esimo ordine al problema di trovare l'm-esimo trattino in un tratteggio di $(d-1)$-esimo ordine, dove m è funzione di n. Procedendo così si arriverà infine a considerare un tratteggio con un solo indice (tabella di una riga), in cui l'n-esimo trattino è, banalmente, $\langle 1, n\rangle$ (ponendo che il tratteggio con un solo indice sia definito su $\mathrm{Tratt}_{\{1\}}$).
Le seguenti definizioni formalizzano il procedimento appena descritto:

Definizione 5. *Siano T e T' due tratteggi e siano I e I', rispettivamente, gli insiemi degli indici di T e di T'. Sia $I' \subseteq I$ e $T' = T_{|\mathrm{Tratt}_{I'}}$. Allora T' viene detto* sottotratteggio

di T, e si scrive $T' \leq T$. Equivalentemente, T viene detto sovratratteggio *di T', e si scrive $T \geq T'$.*
Si pone inoltre $T' \equiv T[i_1, \ldots, i_n]$, dove $i_1 < \ldots < i_n$ e $I' = \{i_1, \ldots, i_n\}$.

Definizione 6. *Siano T e T'due tratteggi, $T' \leq T$ e $x \in \mathbb{N}^\star$. Si definisce* downcast di t da T a T' rispetto ad x *l'insieme:*

$$\mathrm{Down}_x^{T \to T'}(\mathrm{t}) \equiv \{y \in \mathbb{N}^\star \mid \mathrm{t}_T(x) = \mathrm{t}_{T'}(y)\}$$

Ad esempio, il sottotratteggio $U[1,2]$ di U corrisponde alla tabella:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\langle 1,0\rangle$			$\langle 1,1\rangle$			$\langle 1,2\rangle$			$\langle 1,3\rangle$			$\langle 1,4\rangle$			$\langle 1,5\rangle$
$\langle 2,0\rangle$				$\langle 2,1\rangle$				$\langle 2,2\rangle$				$\langle 2,3\rangle$			

Si può verificare facilmente che $\mathrm{t}_{U[1,2]}(6) = \langle 1,4\rangle = \mathrm{t}_U(8)$, dunque $\mathrm{Down}_8^{U \to U[1,2]}(\mathrm{t}) = \{6\}$, non essendoci altri y diversi da 6 tali che $\mathrm{t}_{U[1,2]}(y) = \langle 1,4\rangle = \mathrm{t}_U(8)$.

Può accadere che un trattino di U non appartenga a $U[1,2]$: in questo caso il corrispondente insieme di downcast sarà vuoto. Ad esempio, il trattino $\langle 3,1\rangle = \mathrm{t}_U(3)$ non appartiene a $U[1,2]$ (come tutti i trattini di indice 3), quindi $\mathrm{Down}_3^{U \to U[1,2]}(\mathrm{t}) = \emptyset$. Il fatto che il downcast di t può essere vuoto si esprime dicendo che la funzione t *non* è *down-conservativa*.

Un'altra funzione importante nella teoria dei tratteggi è t_spazio. Il problema questa volta è contare i valori che non possono essere assunti da una funzione tratteggio, chiamati *spazi* in quanto corrispondono alle colonne della tabella prive di trattini. Secondo l'interpretazione temporale, ciò equivale a chiedersi: qual è l'n-esimo giorno in cui non accade nessun evento?

Definizione 7. *Si definisce* spazio *di un tratteggio T un intero n tale che non esiste un trattino $t \in T$ tale che $T(t) = n$.*

Definizione 8. *Dato un tratteggio T con infiniti spazi, si definisce la funzione* $\mathrm{t\_spazio}_T$*:*

$$\mathrm{t\_spazio}_T : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{Z} \ni' \mathrm{t\_spazio}_T(x) \equiv \begin{cases} \displaystyle\min_{s \text{ spazio di } T,\, s > \mathcal{O}_T} s & \text{se } x = 1 \\ \displaystyle\min_{s \text{ spazio di } T,\, s > \mathrm{t\_spazio}_T(x-1)} s & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ad esempio, considerando il tratteggio $U[1,2]$ (tabella precedente), $\mathrm{t\_spazio}_{U[1,2]}$ assume successivamente i valori 1, 2, 5, 7, 10, 11, 13, 14, ecc.

L'approccio per il calcolo di t_spazio è sempre basato sul downcast e quindi sul fatto di ricondursi a tratteggi di ordine sempre più piccolo. Si può definire quindi il downcast di t_spazio:

Definizione 9. *Siano T e T' due tratteggi, $T' \leq T$ e $x \in \mathbb{N}^\star$. Si definisce* downcast di t_spazio da T a T' rispetto ad x *l'insieme:*

$$\mathrm{Down}_x^{T\to T'}(\mathrm{t\_spazio}) \equiv \{y \in \mathbb{N}^\star \mid \mathrm{t\_spazio}_T(x) = \mathrm{t\_spazio}_{T'}(y)\}$$

Tuttavia, rispetto al downcast di t, c'è un'importante differenza: $\mathrm{Down}_x^{T\to T'}(\mathrm{t\_spazio})$ non può essere vuoto. Infatti, gli spazi di un tratteggio sono sempre anche spazi di un suo qualsiasi sottotratteggio: si esprime ciò dicendo che la funzione t_spazio è *down-conservativa*.

Si può verificare, a titolo di esempio, che $\mathrm{t\_spazio}_U(4) = 11 = \mathrm{t\_spazio}_{U[1,2]}(6)$, dunque $6 \in \mathrm{Down}_4^{U\to U[1,2]}(\mathrm{t\_spazio})$ (più precisamente $\mathrm{Down}_4^{U\to U[1,2]}(\mathrm{t\_spazio}) = \{6\}$, essendo $\mathrm{t\_spazio}_U$ iniettiva).

2 Principali risultati

Ora vediamo i principali risultati della teoria dei tratteggi, relativamente agli argomenti esposti nel paragrafo precedente. Le dimostrazioni sono contenute nel testo di riferimento, scaricabile dal sito http://teoriadeitratteggi.webnode.it. Da premettere che attualmente si è condotto uno studio serio dei tratteggi lineari fino al secondo-terzo ordine (oltre ad altri studi su un'altra classe di tratteggi, nel primo-secondo ordine). Generalmente il primo ordine è abbastanza banale, il secondo è semplice e mostra solo una parte delle problematiche, mentre nel terzo ordine si trovano tutte le problematiche degli ordini superiori e si intuisce come dovrebbero essere generalizzati i risultati per un ordine generico.

Cominciamo dai risultati riguardanti la funzione t. Se T è un tratteggio lineare di secondo ordine, $T : \mathrm{Tratt}_{\{1,2\}} \to \mathbb{Z}$, $T(\langle i,k\rangle) \equiv \begin{cases} n_1 k & \text{se } i=1 \\ n_2 k & \text{se } i=2 \end{cases}$ $\forall \langle i,k\rangle \in \mathrm{Tratt}_{\{1,2\}}$, con $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^\star$, esiste un modo molto semplice per stabilire se l'x-esimo trattino,

$t_T(x)$, appartiene a $T[1]$ o $T[2]$ (cioè se ha indice 1 o 2):

$$t_T(x) \in T[i] \Leftrightarrow (n_i x - (i < j)) \bmod (n_i + n_j) < n_j \tag{1}$$

dove $\{i, j\} = \{1, 2\}$, mod è il resto della divisione e si è adottata la convenzione che un predicato in una espressione aritmetica ($i < j$, nella formula 1) è valutato 0 se è falso e 1 se è vero. Vale anche il seguente risultato più forte:

$$t_T(x) = t_{T[i]}(n) = \langle n_i, n\rangle \Leftrightarrow (n_i x - (i < j)) \bmod (n_i + n_j) = (n_i n - (i < j)) \bmod n_j$$

dove il legame tra x ed n è quello espresso nella definizione di downcast: $t_T(x) = t_{T[i]}(n) \Leftrightarrow n \in \mathrm{Down}_x^{T\to T[i]}(t) \Leftrightarrow \mathrm{Down}_x^{T\to T[i]}(t) = \{n\}$ (l'ultima doppia implicazione è dovuta all'iniettività della funzione t). Esiste però anche un legame più esplicito tra x ed n, nel caso che $t_T(x) \in T[i]$:

$$t_T(x) \in T[i] \Rightarrow t_T(x) = t_{T[i]}\left(\left\lceil \frac{n_j x + (i < j)}{n_i + n_j} \right\rceil\right) \tag{2}$$

dove $\lceil\cdot\rceil$ è la parte intera per eccesso ($\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \frac{a - a \bmod b}{b} + 1$ se $a \bmod b > 0$; $\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \frac{a}{b}$ se $a \bmod b = 0$).

Per conoscere $t_T(x)$ quando T è di secondo ordine, in sintesi, è possibile applicare le formule 1 e 2. Un metodo alternativo, forse più comodo, è dato invece dalla singola formula:

$$\begin{aligned} t_T(x) &= \min\left\{ t_{T[1]}\left(\left\lceil \frac{n_2 x + (1 < 2)}{n_1 + n_2} \right\rceil\right), t_{T[2]}\left(\left\lceil \frac{n_1 x + (2 < 1)}{n_1 + n_2} \right\rceil\right) \right\} \\ &= \min\left\{ t_{T[1]}\left(\left\lceil \frac{n_2 x + 1}{n_1 + n_2} \right\rceil\right), t_{T[2]}\left(\left\lceil \frac{n_1 x}{n_1 + n_2} \right\rceil\right) \right\} \end{aligned} \tag{3}$$

dove il minimo è riferito all'ordinamento temporale dei trattini.

Se invece si è interessati non a $t_T(x)$, ma semplicemente al valore assunto dal tratteggio in corrispondenza di tale trattino (ossia $T(t_T(x))$), vale la relazione (utile nello studio dei tratteggi di terzo ordine):

$$\left\lfloor \frac{n_1 n_2 x}{n_1 + n_2} \right\rfloor \le T(t_T(x)) \le \left\lfloor \frac{n_1 n_2 (x + 1)}{n_1 + n_2} \right\rfloor$$

dove il segno di $\le$ sulla sinistra si può sostituire con $=$ se $\mathrm{MCM}(n_1, n_2) \mid \mathrm{t\_valore}_T(x)$

e $\mathrm{t}_T(x) \in T[2]$; con $<$ altrimenti.

Passando a considerare un tratteggio V di terzo ordine, $V : \mathrm{Tratt}_{\{1,2,3\}} \to \mathbb{Z}$, $V(\langle i,k\rangle) \equiv \begin{cases} n_1 k & \text{se } i=1 \\ n_2 k & \text{se } i=2 \\ n_3 k & \text{se } i=3 \end{cases}$ $\forall \langle i,k\rangle \in \mathrm{Tratt}_{\{1,2,3\}}$, con $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}^\star$, esiste una importante proprietà dei trattini di $V[i]$:

$$\begin{aligned} \{(n_j+n_k)\, n_i x \bmod (n_i n_j + n_i n_k + n_j n_k) \mid \mathrm{t}_V(x) \in V[i],\, x \in \mathbb{N}^\star\} &= \\ \{n_j\,(\mathrm{mod}\,(n_i m, n_k, k<i)) + n_k\,(\mathrm{mod}\,(n_i m, n_j, j<i)) \mid m \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

dove $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ e per ogni $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^\star$: $\mathrm{mod}\,(a,b,v) \equiv \begin{cases} a \bmod b & \text{se } v \\ 1 + (a-1) \bmod b & \text{altrimenti} \end{cases}$.
Il modulo $(n_j+n_k)\, n_i x \bmod (n_i n_j + n_i n_k + n_j n_k)$ è la generalizzazione dell'espressione $n_i x \bmod (n_i + n_j)$ che compariva si usava nel secondo ordine (oltre il terzo ordine la scrittura esplicita diventa scomoda e conviene sfruttare i polinomi simmetrici elementari nelle variabili $n_1, n_2, \ldots, n_{\mathrm{ord}(T)}$). Tuttavia, la conoscenza di $(n_j+n_k)\, n_i x \bmod (n_i n_j + n_i n_k + n_j n_k)$, diversamente dall'analogo del secondo ordine, non consente di sapere facilmente se $\mathrm{t}_V(x) \in V[i]$ in modo simile all'equazione 1: questo punto potrebbe essere approfondito. Comunque si è dimostrato nel terzo ordine un risultato analogo all'equazione 2:

$$\mathrm{t}_V(x) \in V[i] \Rightarrow \mathrm{t}_V(x) = \mathrm{t}_{V[i,j]}\left(\left\lceil \frac{(n_i+n_j)\, n_k x - n_i n_j + (i<k)\,(n_i+n_j)}{n_i n_j + n_i n_k + n_j n_k} \right\rceil\right)$$

che permette di ricondurre il terzo ordine al secondo. Ragionando per analogia col secondo ordine, si è portati a pensare che la formula 3 si potrebbe generalizzare come segue:

$$\begin{aligned} \mathrm{t}_T(x) &= \min \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{t}_{V[1,2]}\left(\left\lceil \frac{(n_1+n_2)n_3 x - n_1 n_2 + (1<3)(n_1+n_2)}{n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3} \right\rceil\right), \\ \mathrm{t}_{V[1,3]}\left(\left\lceil \frac{(n_1+n_3)n_2 x - n_1 n_3 + (1<2)(n_1+n_3)}{n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3} \right\rceil\right), \\ \mathrm{t}_{V[2,3]}\left(\left\lceil \frac{(n_2+n_3)n_1 x - n_2 n_3 + (2<1)(n_2+n_3)}{n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3} \right\rceil\right) \end{array} \right\} \\ &= \min \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{t}_{V[1,2]}\left(\left\lceil \frac{(n_1+n_2)(n_3 x + 1) - n_1 n_2}{n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3} \right\rceil\right), \\ \mathrm{t}_{V[1,3]}\left(\left\lceil \frac{(n_1+n_3)(n_2 x + 1) - n_1 n_3}{n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3} \right\rceil\right), \\ \mathrm{t}_{V[2,3]}\left(\left\lceil \frac{(n_2+n_3) n_1 x - n_2 n_3}{n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3} \right\rceil\right) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Tuttavia questa formula deve essere dimostrata.

È possibile anche passare direttamente dal terzo ordine al primo:

$$\mathrm{t}_V(x) \in V[i] \Rightarrow \mathrm{t}_V(x) = \mathrm{t}_{V[i]}\left(\left\lceil \frac{n_j n_k x + n_j (i < k) + n_k (i < j)}{n_i n_j + n_i n_k + n_j n_k} \right\rceil\right)$$

tuttavia la dimostrazione attuale di questa formula si basa sull'ipotesi che $n_i(n_j + n_k) \geq n_j((n_i n - (i < k)) \bmod n_k)$; si dovrebbe studiare cosa succede quando quest'ipotesi non è verificata.

Passando alla funzione t_spazio, se T è un tratteggio di primo ordine ($T : \mathrm{Tratt}_{\{1\}} \to \mathbb{Z}$, $T(\langle 1, k\rangle) \equiv n_1 k \ \forall \langle 1, k\rangle \in \mathrm{Tratt}_{\{1\}}$, $n_1 \in \mathbb{N}^\star$) la funzione si può esprimere come:

$$\mathrm{t\_spazio}_T(x) = \left\lfloor \frac{n_1 x - 1}{n_1 - 1} \right\rfloor$$

dove $\lfloor\cdot\rfloor$ è la parte intera della divisione.

Se T è di secondo ordine ($T : \mathrm{Tratt}_{\{1,2\}} \to \mathbb{Z}$, $T(\langle i, k\rangle) \equiv \begin{cases} n_1 k & \text{se } i = 1 \\ n_2 k & \text{se } i = 2 \end{cases} \ \forall \langle i, k\rangle \in \mathrm{Tratt}_{\{1,2\}}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^\star$) si ha che:

$$\mathrm{t\_spazio}_T(x) = \mathrm{t\_spazio}_{T[i]}\left(\begin{cases} \frac{x}{s}(n_i - 1)\frac{\mathrm{MCM}(n_i, n_j)}{n_i} & \text{se } s \mid x \\ \left\lfloor \frac{(n_i-1)\left(n_j\left(x - \left\lfloor \frac{x}{s} \right\rfloor\right) - 1\right) - 1}{(n_i-1)(n_j-1)-1} \right\rfloor & \text{altrimenti} \end{cases}\right) \tag{4}$$

dove s è il numero di spazi del tratteggio compresi tra 0 e $\mathrm{MCM}(n_i, n_j)$ (si ha che $s = \frac{(n_1-1)(n_2-1)-1}{\mathrm{MCD}(n_1,n_2)} + 1$). In realtà la formula a destra dell'uguaglianza è ottenuta "correggendo" la formula più semplice:

$$\mathrm{t\_spazio}_{T[i]}\left(\left\lfloor \frac{(n_i - 1)(n_j x - 1) - 1}{(n_i - 1)(n_j - 1) - 1} \right\rfloor\right) \tag{5}$$

che genera comunque solo spazi di T in ordine strettamente crescente, ma "salta" tutti e soli gli spazi del tipo $k\mathrm{MCM}(n_i, n_j) - 1$, $k \in \mathbb{N}^\star$.

Lo studio della funzione t_spazio si è fermato al secondo ordine, anche perché la generalizzazione agli ordini più grandi sembra più difficile che per la funzione t. Il problema, in sintesi, è che è abbastanza semplice trovare funzioni come la 5 che generano solo spazi saltandone alcuni, mentre è complicato trovare funzioni che generano tutti e soli gli spazi del tratteggio, come la 4.

3 Connessioni con la teoria dei numeri

La teoria dei tratteggi è nata per lo studio dei numeri, in particolare di questioni riguardanti i numeri primi. Infatti è possibile costruire i numeri primi coi tratteggi lineari, con una specie di crivello. Denotando il tratteggio lineare di d-esimo ordine

$$T : \text{Tratt}_{\{1,\ldots,d\}} \to \mathbb{Z}, T\left(\langle i,k\rangle\right) \equiv \begin{cases} n_1 k & \text{se } i = 1 \\ \ldots & \ldots \\ n_d k & \text{se } i = d \end{cases} \quad \forall \langle i,k\rangle \in \text{Tratt}_{\{1,\ldots,d\}},\ n_1,\ldots,n_d \in \mathbb{N}^\star$$

con la scrittura $(n_1,\ldots,n_d)$, si possono considerare successivamente i tratteggi (2), $(2,3)$, $(2,3,4)$, $(2,3,4,5)$, ecc. Il tratteggio $(2,3,\ldots,n)$, di ordine $n-1$, è tale che i valori da esso assunti sono tutti e soli i multipli di $2,3,\ldots,n$ e quindi:

- Per ogni $t \in \text{Tratt}_{\{1,\ldots,n-1\}}$:$T\left(t\right) > n \Rightarrow T\left(t\right)$ non è primo
- Per ogni $s \in \mathbb{N}$, s spazio di T: $n < s < \left(n+1\right)^2 \Leftrightarrow s$ è primo

Sulla base di queste proprietà si potrebbero applicare i risultati della teoria dei tratteggi allo studio dei numeri primi. Il potenziale vantaggio è che, nell'insieme $\left\{n+1, n+2\ldots,\left(n+1\right)^2-1\right\}$ si possono identificare i numeri primi con i valori assunti dalla funzione t_spazio e i numeri composti con i valori assunti dalla funzione composta $T \circ \mathrm{t}$ (che prende il nome di t_valore$_T$), lavorando quindi con funzioni di cui sono note molte proprietà e che coinvolgono solo operazioni aritmetiche elementari.

4 Sviluppi futuri

Per quanto riguarda le applicazioni nella teoria dei numeri, prima di affrontare seriamente lo studio dei numeri primi con la teoria dei tratteggi, occorre completare lo studio dei tratteggi lineari, generalizzando i risultati fino ad un ordine generico. Sono comunque di interesse altre questioni di teoria dei tratteggi pura, come lo studio di classi di tratteggi non lineari, che è stato appena cominciato. Volendo andare ancora oltre, si potrebbe cercare di capire ad esempio cosa lega le funzioni t$_T$ e t_spazio$_T$, entrambe derivate dalla definizione dello stesso tratteggio T, non solo nel caso lineare ma anche per generici tratteggi, ed in particolare se esistono regole più o meno generiche per ottenere una funzione dall'altra.