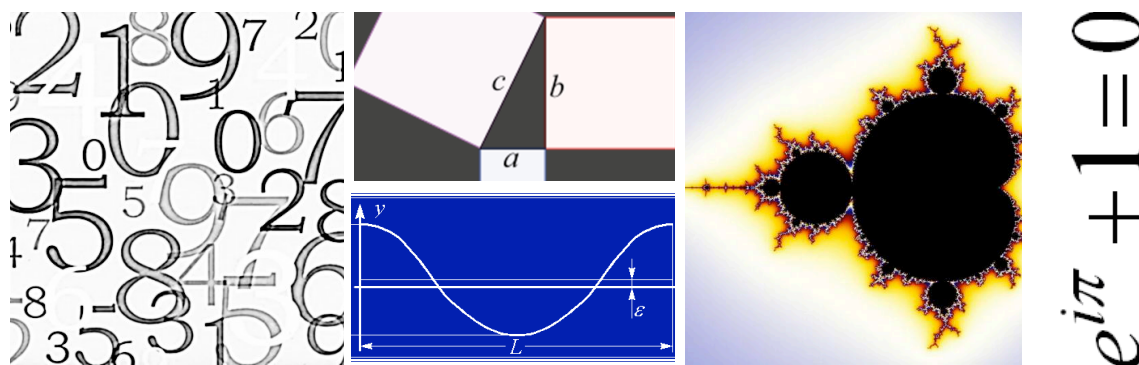

1.2. FUORI DAI LUOGHI COMUNI

La matematica: cos'è, cosa non è.



1.2.1 STORIA DEL CONCETTO

Matematica come tecnica di misurazione, conteggio e contabilità.

Non è possibile ricostruire con precisione la genesi della matematica, ci si può solo arrischiare a farlo. Una rigorosa analisi storica, infatti, è strettamente vincolata dalla presenza di testimonianze quanto più possibile dirette, mentre l'idea di conteggio e di misurazione sono precedenti all'invenzione della scrittura. Questa tesi è supportata sia da alcuni interessanti studi di etnomatematica condotti su popolazioni che non hanno sviluppato una tecnica di scrittura, che dal ritrovamento di alcuni reperti archeologici, tra cui graffiti e diversi manufatti, che manifestano la volontà di registrare conteggi, misurare il tempo e rappresentare forme nello spazio. La frammentarietà e la scarsità di queste fonti limita la natura delle ipotesi sulla nascita di un pensiero matematico al campo delle congetture.

Le conoscenze si fanno più salde nel momento in cui si rivolge l'attenzione verso le società egiziana e babilonese. Nonostante la deperibilità del materiale, sono giunti fino a noi nu-

merosi papiri che costituiscono la principale fonte di informazione sul contributo del popolo egiziano alla nascita della matematica come disciplina. Il più antico papiro, il papiro di Mosca, risale al 1850 a.C., ma la testimonianza più estesa è rappresentata dal papiro di Rhind (circa 1650 a. C.). In esso viene presentata una notazione simbolica dei numeri che documenta la capacità degli antichi egizi di manipolare grandi cifre; inoltre fornisce tutta una serie di quesiti aritmetici (basati principalmente sull'addizione di interi e frazioni aventi un'unità come numeratore) e geometrici (come il calcolo di alcune aree, alcuni rudimenti di trigonometria e un'approssimazione del valore di π) di natura sostanzialmente pratica. In alcuni casi pare che lo scriba Ahmes, colui che ha trascritto il papiro, abbia formulato alcuni problemi declinandoli sotto forma di indovinelli e giochi matematici.

Paragonata al numero di papiri, la quantità di tavolette di argilla pervenuteci dalla società babilonese si presenta come un deposito di informazioni molto più ampio. Lo studio di questi reperti documenta la netta superiorità della matematica babilonese rispetto a quella egiziana: ciò deriva da un lato dalla particolare notazione posizionale, che non era applicata semplicemente ai numeri interi, come facevano gli egizi, ma era estesa anche alle frazioni; e dall'altro dall'abilità nel calcolo algebrico.

Matematica come studio dei numeri e delle forme.

Occorre aspettare il 500 a. C. per assistere al superamento della visione utilitaristica della matematica: per i greci, infatti, questa disciplina assume la valenza di impresa intellettuale, basata sullo studio dei numeri e delle forme ed analizzata in chiave geometrica. La differenza sostanziale consiste in una maggiore astrazione dei concetti: gli egiziani e i babilonesi tendevano a derivare le regole matematiche dall'esperienza, ossia mediante l'osservazione e la ripetizione, arrivando quindi a formulare delle sottospecie di "ricette". Un esempio, tratto dal papiro di Mosca, riporta tutta una serie di istruzioni per calcolare il volume di un tronco di piramide quadrata:

Vi dicono: un tronco di piramide è 6 cubiti di altezza verticale per 4 cubiti sulla base per 2 cubiti alla sommità. Devi quadrare 2, risultato 4. Devi sommare il 16, l'8 e il 4, risultato 28. Devi prendere un terzo di 6, risultato

2. Devi moltiplicare 28 per 2, risultato 56. Vedi, viene 56. Vedrai che è giusto.³⁴

L'importante per queste civiltà era che il calcolo funzionasse, ma non veniva preso in esame il *perché* ciò accadesse. I greci, per contro, introdussero l'idea che una proposizione matematica andasse generalizzata e dimostrata formalmente secondo un procedimento deduttivo.

Le premesse di quella che sarà definita "l'epoca d'oro della matematica greca" poggiano sul lavoro di due studiosi in particolare: Talete di Mileto (624 - 546 a. C.) e Pitagora (circa 570 - 500 a.C.). Al primo viene tradizionalmente riconosciuta la formulazione della prima dimostrazione di un teorema, mentre a Pitagora e alla sua scuola va il merito di aver elevato la matematica a vera e propria impresa intellettuale, con valenze filosofiche ed estetiche. Nella scuola pitagorica, infatti, vengono considerati "numeri" unicamente quelli interi, di conseguenza le frazioni non sono altro che rapporti tra due numeri interi. Questa concezione mette in risalto l'aspetto teorico della matematica, dove i numeri sono apprezzati per il loro intrinseco valore, mentre la loro funzione di tecnica di calcolo e di misurazione approssimata è relegata in secondo piano. La ricostruzione delle realizzazioni di Talete e di Pitagora si basa su una tradizione persistente e su testimonianze indirette e frammentarie, non esistono infatti documenti storici attribuibili all'uno o all'altro. Quelle che possono essere considerate le loro idee di fondo, come la zelante ricerca di una dimostrazione logica a supporto di ogni enunciato e lo studio della matematica come attività intellettuale più che come strumento funzionale, si ritrovano nella più antica e importante opera greca di matematica pervenutaci: gli *Elementi* di Euclide (vissuto attorno al 300 a. C.). Gli *Elementi* sono una sorta di manuale introduttivo della matematica elementare dell'epoca, in cui confluiscono circa tre secoli di studi sulla geometria, sull'aritmetica e sull'algebra. In quest'opera la logica si dispiega nell'individuazione di assiomi e la dimostrazione di teoremi. Inoltre racchiude una visione della matematica come disciplina che si occupa di verità definite a priori rispetto all'osservazione della realtà fisica. Ne è un esempio l'elegante dimostrazione dell'esistenza di infiniti numeri primi riportata nella Proposizione 20:

³⁴ K. DEVLIN (1998), *Il linguaggio della matematica*, Bollati Boringhieri, Torino, 2002, p. 34.

La dimostrazione è indiretta: si mostra infatti che l'ipotesi dell'esistenza di un numero finito porta a una contraddizione. Sia P il prodotto di *tutti* i numeri primi, che si assumono essere di numero finito, e si consideri il numero $N=P+1$. Ora, N non può essere un numero primo, giacché contraddirebbe l'ipotesi secondo cui P era il prodotto di *tutti* i numeri primi. Pertanto N è un numero composto e vi deve essere qualche numero primo p che lo misura. Ma p non può essere nessuno dei fattori primi di P , perché altrimenti dovrebbe essere un numero primo diverso da tutti quelli che costituiscono il prodotto P ; dunque, l'ipotesi che P era il prodotto di *tutti* i numeri primi deve essere falsa.³⁵

La particolarità di questo ragionamento consiste nell'essere stato dimostrato in un'epoca in cui non esisteva una reale applicazione di tali numeri in quanto non era permesso dalla notazione numerica vigente effettuare calcoli con cifre di eccessivamente grandi.

Euclide, inoltre, impiega in diverse circostanze un particolare ragionamento logico, la *reductio ad absurdum*. Per dimostrare la validità di un teorema la dimostrazione per assurdo ne assume, inizialmente, la falsità. L'obiettivo è di riscontrare una contraddizione indagando sulle conseguenze logiche di questo assunto. Dal momento che la contraddizione non è accettabile in matematica, il teorema iniziale non può essere falso. Dunque è vero. Un esempio di *reductio ad absurdum* si trova nella dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$.

³⁵ C. B. BOYER (1968), *Storia della matematica*, ISEDI, Milano, 1976, pp. 136-137.

L'insieme dei numeri razionali è composto dai numeri interi e dai loro rapporti (ossia le frazioni). I numeri irrazionali, invece, sono numeri che non possono essere scritti in termini decimali, neppure se periodici. Il più famoso numero irrazionale è π , la notazione del suo valore con 3,14 è solo un'approssimazione, in realtà la lista dei suoi decimali prosegue all'infinito.

Per dare prova dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ bisogna dimostrare che non corrisponde nessuna frazione p/q , dove p e q sono numeri interi. Il punto di partenza di una dimostrazione per assurdo consiste invece nel supporre che:

$$\sqrt{2} = p/q$$

si eleva al quadrato ambedue i membri:

$$2 = p^2/q^2$$

si moltiplicano ambedue i membri per q^2 :

$$2q^2 = p^2$$

a questo punto occorre precisare che:

♦ moltiplicando un numero per 2 si ottiene un numero pari: dunque p^2 è pari;

♦ se il quadrato di un numero è pari, quel numero è pari: dunque p è pari.

Dal momento che p è pari, può essere scritto come la moltiplicazione tra 2 e un altro numero intero m (ad esempio $p=16$ e $m=8$). Se si sostituisce p con $2m$ si ottiene:

$$2q^2 = (2m)^2 = 4m^2$$

si dividono ambedue i membri per due:

$$q^2 = 2m^2$$

ragionando sulle medesime precisazioni fatte per l'equazione $2q^2 = p^2$ deduciamo che anche q è pari e può essere sostituito da $2n$, tornando all'assunto iniziale:

$$\sqrt{2} = p/q = 2m/2n \rightarrow \sqrt{2} = m/n$$

m/n è una versione semplificata di p/q (come $1/2$ lo è di $10/5$), eppure ci costringe a ripetere esattamente lo stesso ragionamento usato con p/q per giungere a una nuova frazione e/f ancora più semplice. Dal momento che le frazioni non possono essere semplificate all'infinito, è lecito pensare di aver trovato una contraddizione. Dunque l'affermazione secondo cui $\sqrt{2}$ non può essere espressa come frazione di numeri interi è vera, $\sqrt{2}$ è irrazionale.

Matematica come studio dei numeri, delle forme, del moto, del cambiamento e dello spazio.

Nel XVII secolo la concezione della matematica si evolve ulteriormente: se prima di allora questa disciplina era votata principalmente alla risoluzione di problemi che condividevano con gli strumenti che le erano propri (ossia numeri, equazioni, punti, rette) una sorta di “staticità”, nella seconda metà del '600 questi stessi strumenti “statici” furono utilizzati per rappresentare gli schemi del cambiamento e del movimento.

Due sono le considerazioni da fare sul secolo in questione: da un lato emerge la scienza moderna, caratterizzata da un interesse crescente nei confronti dell'indagine del mondo fisico e delle sue leggi attraverso un approccio meno frammentario e più strutturato. Dall'altro lato

scienza e matematica arrivano a interagire e a legittimarsi vicendevolmente, in un circolo virtuoso che vede la scienza come un bacino di problemi, stimoli e applicazioni e la matematica come strumento di ricerca e vero e proprio “linguaggio” attraverso cui interfacciarsi con la realtà sensibile.

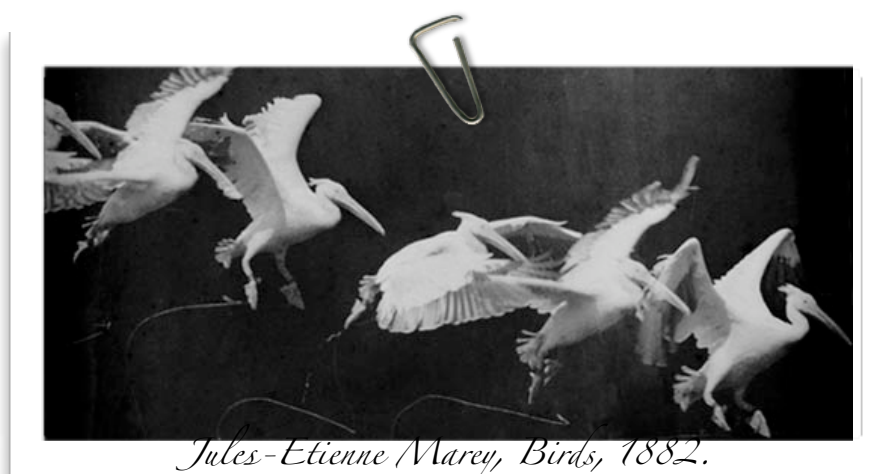
Dal punto di vista dell'attività matematica nasce una nuova area di studio, l'analisi, interessata alle strutture che sottendono il moto, lo spazio e il tempo. I due protagonisti indiscussi sono l'inglese Newton e il tedesco Leibniz che inventano, indipendentemente l'uno dall'altro, il calcolo differenziale e integrale.

L'esistenza di schemi numerici celati dietro al movimento e al cambiamento è un fatto osservabile, ma il processo attraverso cui è possibile spiegarli matematicamente è tutt'altro che intuitivo: l'analisi infatti si avvale di tecniche mentali basate su concetti astratti come l'infinito. Per capire meglio questo fatto occorre fare un passo indietro. Un tentativo di analisi del cambiamento e del moto era già stato fatto dai pitagorici. Essi concepivano lo spazio e il tempo come una sequenza di istanti (ricducibili al concetto geometrico di punto) caratterizzati dalla continuità. Questa suddivisione in una serie di istanti discreti venne messa in crisi dalle argomentazioni del filosofo greco Zenone. Tra i suoi famosi paradossi i più citati sono, appunto, quelli sul movimento che “dimostrano” l'impossibilità del moto sia se si assume l'infinita suddivisibilità (paradosso di Achille) che, al contrario, l'indivisibilità (paradosso della freccia) degli elementi discreti che costituiscono lo spazio e il tempo.

Il primo paradosso parla di una competizione podistica tra *Achille più veloce* e la *tartaruga zampa lenta* e sostiene che se l'eroe partirà con uno svantaggio, allora non raggiungerà mai la sua avversaria: nel momento in cui Achille giungerà al punto da cui è partita la tartaruga, infatti, lei sarà già avanzata di un po'. In pochi istanti il corridore coprirà questa distanza, ma la tartaruga si sarà spostata comunque più avanti. Procedendo così all'infinito egli resterà inesorabilmente indietro anche se sempre più prossimo all'animale. Supponendo infatti che Achille corra ad una velocità 10 volte superiore alla tartaruga (1 metro a secondo contro 0,1 metri a secondo) e che alla tartaruga venga concesso un vantaggio di 100 metri su un chilometro di distanza totale, quando Achille arriverà a coprire i 100 metri, il distacco sarà di 10 metri. Dopo 10 metri sarà di 1, e dopodiché sarà di 10 centimetri, poi 1, poi 1 millimetro eccetera. Questo processo è sintetizzabile in una serie infinita:

$$100 + 10 + 1 + 1/10 + 1/100 + \dots$$

Il paradosso della freccia, invece, sostiene che una freccia in volo, in realtà, è immobile. Infatti, in ognuno degli infiniti istanti indivisibili che compongono il tempo, la freccia occuperà uno spazio sempre uguale a se stesso, dunque sarà sempre ferma poiché la somma di infinite immobilità non può dare il movimento. La cronofotografia è una tecnica che permette di registrare le diverse posizioni di un oggetto in movimento in un'unica immagine grazie alla continua e regolare apertura e chiusura dell'obiettivo, per queste sue caratteristiche è un ottimo strumento per visualizzare l'idea sottesa nel paradosso della freccia. ³⁶



Questi paradossi hanno rappresentato un ostacolo insormontabile per gli antichi greci, che evitavano apertamente ogni riflessione sull'infinito: tutto ciò che non era finito era inconcepibile e confuso. Un esempio di tale avversione è, ad esempio, il trauma suscitato dalla scoperta dei numeri irrazionali.

L'errore insito nei ragionamenti di Zenone è da ricercarsi nel presupposto che la somma di una serie infinita non possa dare un valore finito. L'analisi supera questo fatalismo arrivando a riconoscere alle serie infinite la stessa coerenza dell'algebra che opera con quantità finite.

I paradossi di Zenone smettono di essere tali nel momento in cui si riscontra l'esistenza delle serie infinite convergenti e quindi il concetto di limite. Riprendendo il paradosso di Achille si nota che il corridore raggiungerà la tartaruga dopo circa 111 metri.

³⁶ foto tratta da <http://it.wikipedia.org/wiki/File:Marey_-_birds.jpg> Data ultima consultazione: 27 luglio 2009.

Il fatto di essere scesi a patti con l'infinito costituisce un enorme passo avanti concettuale all'interno dell'universo matematico; inoltre, la principale implicazione dello sviluppo dell'analisi consiste nel drastico cambiamento della concezione dei matema-

tici e del loro ruolo nella società. Se nel '600 gravava ancora la buia eredità medievale, nel '700 la matematica assume un carattere di autorevolezza strettamente connotato con le sue applicazioni nel mondo fisico.

Matematica come scienza delle strutture e degli schemi.

L'Ottocento segna la fine del predominio della geometria euclidea e con essa anche la perdita della certezza assoluta. Le nuove geometrie descritte inizialmente da Bolay e Lobačevskij destituiscono la matematica dal ruolo di verità assoluta indipendente dall'uomo il cui nobile ruolo si esaurisce nell'applicazione al mondo fisico, facendola apparire sempre più come prodotto della mente umana. L'importante lezione derivata da questa scoperta consiste nel promuovere l'attitudine della razionalità di conseguire la verità, sebbene relativa, sfidando la consuetudine, la percezione e l'intuito. Il risvolto positivo di questo avvenimento, al di là delle ripercussioni e delle scoperte nel campo delle altre scienze, fu di liberare la matematica dal suo carattere meramente utilitaristico, evidenziando l'importanza di esplorare ogni possibilità e circostanza degna di interesse.

La posizione del matematico prima del 1830 era paragonabile a quella di un artista la cui forza ispiratrice è l'amore assoluto per la sua arte ma che è introdotto dai dettami della necessità a limitarsi a disegnare copertine di

CONVERGENZA DELLA SERIE INFINITA S

$$S = 100 + 10 + 1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + \dots$$

moltiplicando la serie per 10 si ottiene l'uguaglianza:

$$10S = 1000 + 100 + 10 + 1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + \dots$$

sottraendo la prima uguaglianza alla seconda cancelliamo tutti i termini al secondo membro tranne il primo:

$$10S - S = 1000$$

da questa equazione di primo grado si ottiene come risultato:

$$S = 1000/9 = 111,11\dots$$

settimanali. Libero da una tale restrizione, l'artista potrebbe dare libero corso alla sua immaginazione e alle sue attività e produrre opere memorabili.³⁷

Una delle caratteristiche della matematica moderna consiste nell'incredibile numero di aree di studio in cui è suddivisa. Si è già fatto cenno all'indagine aritmetica e sulla teoria dei numeri, alla riflessione geometrica sulle strutture delle forme e all'analisi degli schemi di moto e cambiamento.

Questa lista può essere ampliata menzionando le indagini della logica sugli schemi del ragionamento, della topologia sulle strutture della posizione, fino al tentativo del calcolo probabilistico di cogliere le strutture degli eventi casuali. La matematica è anche statistica, teoria dei giochi, crittologia, matematica finanziaria... L'importante, infatti, non è tanto l'oggetto di studio in sé, che può essere reale o immaginario, statico o dinamico, fisico o mentale, utile o dilettevole; quanto il modo in cui questo oggetto viene studiato. La matematica si occupa di individuare le relazioni che accomunano le proprietà di molteplici oggetti, di cogliere i nessi tra diverse verità, di elaborare una semantica degli schemi e delle strutture: “*Rendere visibile l'invisibile*”³⁸ come recita il sottotitolo del libro di Keith Devlin *Il linguaggio della matematica*. Ed è proprio da questo manuale che è tratta la seguente definizione che ben sintetizza l'idea che sottende l'intero paragrafo:

La matematica, la scienza delle strutture, è un modo di guardare il mondo, sia il mondo fisico, biologico e sociologico che abitiamo, sia il mondo interiore della nostra mente e dei nostri pensieri. Il più grande successo della matematica rimane senza dubbio il mondo fisico, dove viene giustamente definita regina e serve delle scienze naturali. Eppure, essendo essa una creazione umana, lo studio della matematica è in ultima analisi lo studio dell'umanità stessa. Infatti, nessuna delle entità che formano il substrato della matematica esiste nel mondo fisico: i numeri, i punti, le rette e i piani,

³⁷ M. KLINE (1982), *La matematica nella cultura occidentale*, Feltrinelli, Milano, 1976, p. 397.

³⁸ K. DEVLIN (1998), *Il linguaggio della matematica*, Bollati Boringhieri, Torino, 2002.

le superfici, le figure geometriche, le funzioni e così via sono pure astrazioni che esistono solo nella mente collettiva dell'umanità.³⁹

1.2.2. PREGIUDIZI

La matematica può essere considerata vera e propria forza culturale, non solo in virtù delle sue applicazioni eminentemente pratiche, ma anche per il suo carattere di pensiero razionale e relativistico capace, dunque, di mettere in discussione tanto l'acritica accettazione di credenze precostituite che l'autorità che inibisce la ricerca di nuove verità. Eppure si assiste di frequente al rifiuto di considerare la matematica oggetto di interesse pari ad altri settori della nostra cultura: spesso questa avversione si manifesta con vere e proprie ostentazioni di ignoranza espresse con noncuranza, se non orgoglio. Se da un lato ciò è motivato da una tradizione scolastica tesa a trasmettere un'idea di questa disciplina molto più simile ad un arido corollario di tecniche, tanto infallibili quanto fini a se stesse, che non come vero e proprio impianto concettuale, dall'altro lato non è stata ancora pienamente superata la concezione della separazione tra cultura umanistica e scientifica, dove il primato della prima ha spesso degradato a mera "attività pratica" la seconda. Eppure, al pari della poesia o della dialettica, la scienza è indubbiamente prodotto dell'uomo e non c'è nulla di più umano della curiosità che alimenta la ricerca della verità scientifica.

Un ulteriore deterrente ad un approccio sereno alla matematica è rappresentato dalle difficoltà che bisogna affrontare per arrivare a comprenderla. A differenza di una sinfonia che può essere apprezzata dopo un atto passivo, ossia l'ascolto, la matematica necessita uno sforzo personale maggiore, dato dall'impegno e dalla concentrazione. Inoltre in questa disciplina non sempre è possibile fare affidamento sull'immediatezza e il coinvolgimento caratteristici di una rappresentazione visiva: mentre scienze come la medicina, l'astronomia, la zoologia possono dare un'immagine di sé attraverso fasci di muscoli, pianeti orbitanti e animali ripresi nel loro habitat, la matematica difficilmente riesce ad andare oltre alla formulazione di metafore, non sempre chiarificatrici. Un sostanziale passo avanti è stato fatto grazie all'avvento dei computer, soprattutto per quanto riguarda la visualizzazione dei frattali, ma si tratta comunque di un campo limitato.

³⁹ *Ivi*, p. 23.

Ovviamente con queste osservazioni non si esauriscono le motivazioni che sono alla base della disaffezione nei confronti della matematica, sono comunque un punto di partenza per spiegare in certa misura in che modo si sono andate formando delle immagini negative e distorte della matematica e di come alla base di tali affermazioni vi sia prima di tutto il disinteresse e l'ignoranza.

Le principali critiche riguardano una concezione della matematica come:

- ◆ un insieme di speculazioni inutili, in quanto eccessivamente astratte;
- ◆ corollario di tecniche finalizzate unicamente alla risoluzione di problemi pratici, senza una vera e propria valenza intellettuale;
- ◆ disciplina astrusa e incomprensibile a causa del suo artificioso linguaggio formale;
- ◆ disciplina statica, dogmatica, composta da verità assolute e incontrovertibili.

Mentre le prime due asserzioni manifestano due differenti punti di vista, tanto contraddittori quanto superficiali e riduttivi, le ultime due registrano due importanti caratteristiche della matematica dandone però una connotazione negativa. In entrambi i casi l'errore sta nell'immagine distorta che si ha di questa disciplina e di come questo inibisca la possibilità di apprezzarne non solo le potenzialità, ma anche l'immenso fascino.

Matematica eccessivamente astratta.

Come va che la matematica, essendo fondamentalmente un prodotto del pensiero umano indipendente dall'esperienza, spiega in modo così ammirevole le cose reali?

ALBERT EINSTEIN⁴⁰

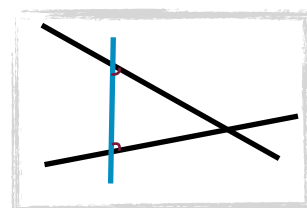
Quelli che per alcuni sono difetti, per altri sono veri e propri punti di forza: così l'astrattezza, se per alcuni è vista, in chiave negativa, come la negazione di tutto ciò che è concreto e reale, in matematica è la caratteristica fondamentale di qualsiasi ragionamento che miri ad

⁴⁰ E. T. BELL (1937), *I grandi matematici*, Sansoni, Firenze, 1997, p. XI.

essere universale. L'attitudine ad astrarre è legata alla volontà di superare il carattere contingente degli oggetti ricercando le proprietà caratteristiche e le strutture profonde che permettono di intravedere l'unitarietà e l'ordine nella moltitudine frammentaria. Questa particolare critica decade senza possibilità di appello nel momento in cui si elencano le numerose teorie che, sebbene nate come pure espressioni del ragionamento, si sono rivelate utili in diverse applicazioni pratiche. Le geometrie non euclidee costituiscono un esempio rappresentativo: la loro teorizzazione ha radici lontane, il cui embrione si annida addirittura in seno alla stessa geometria euclidea. Nei suoi *Elementi*, Euclide individua cinque postulati che fungono da premesse da cui derivare tutti i teoremi. Caratteristica fondamentale di tali proposizioni è che siano immediatamente accettabili ed evidenti di per se stesse.

I cinque postulati affermano:

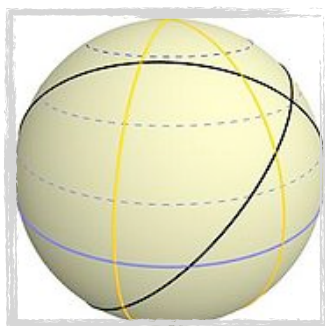
1. è possibile tracciare una retta che congiunga un qualsiasi punto ad un altro;
2. è possibile prolungare una retta illimitatamente;
3. è possibile tracciare un cerchio con un centro dato e per un punto dato;
4. gli angoli retti sono uguali tra loro;
5. se una retta, venendo a cadere su due rette, forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.



Si è già posto l'accento sull'importanza della chiarezza e dell'immediatezza, eppure, a differenza dei primi quattro postulati, il V sembra difettare di entrambe. Il primo ad essere insoddisfatto di questa proposizione fu Euclide stesso che tentò di dimostrare tutti i teoremi possibili prima di rassegnarsi a fare uso dell'ultimo postulato. Altri si mossero dopo di lui nel tentativo di derivare questa proposizione da una dimostrazione, ma senza spingersi oltre alla riformulazione del postulato. Il lavoro più costruttivo è stato condotto dal matematico gesuita Girolamo Saccheri. L'originalità del suo approccio sta nell'uso di una dimostrazione per assurdo: egli assume come ipotesi le negazioni del V postulato e su questo presupposto imbastisce una dimostrazione cercando di riscontrare una contraddizione che invalidi tali premesse. In realtà, dal lavoro di Saccheri non emersero delle vere e proprie contraddizioni, ma la stra-

nezza dei teoremi che derivò (ad esempio che la somma degli angoli interni di un triangolo possa essere inferiore a due angoli retti) lo condusse a considerarli errati in quanto contro natura. Il matematico italiano aveva inconsapevolmente intravisto un nuovo tipo di geometria, ma ne aveva rifiutato l'esistenza in quanto contrastante con le radicate convinzioni della geometria tradizionale, ossia quella euclidea. Fu solo nell'Ottocento che due diversi matematici, indipendentemente l'uno dall'altro, riconobbero la validità di queste geometrie alternative, nello specifico l'ungherese Bolay e il russo Lobačevskij. A questi va sommato anche Gauss che, per quanto riluttante a manifestare apertamente i propri risultati, afferma di essersi anch'egli soffermato su questo tema giungendo alle medesime conclusioni. In seguito altri matematici, tra cui Riemann, diedero importanti contributi alla costruzione di geometrie alternative a quella euclidea, tutte a partire dalla negazione del fatidico V postulato.

Queste teorie hanno avuto diverse applicazioni: l'idea di Riemann, ad esempio, venne rielaborata in fisica, confluendo nella teoria della relatività generale di Einstein. I suoi usi non si limitano alle scienze fisiche e alla cosmologia, le geometrie non euclidee ebbero ricadute anche in campi molto "concreti" e vicini a noi come l'ingegneria. La struttura meccanica del movimento di alcuni robot industriali, infatti, sfrutta le geodetiche ossia quelle linee che descrivono la traiettoria più breve tra due punti situati su una particolare superficie. Nel caso del piano euclideo, le geodetiche sono le rette, ma questo non è più vero su superfici diverse. Su una superficie sferica, le geodetiche sono i cerchi massimi: gli esempi più familiari di tali curve sono i meridiani e l'equatore che ricoprono i mappamondi, uno schema è proposto dall'immagine seguente:⁴¹



Le geodetiche sono i cerchi massimi, ossia le linee continue viola, nere e gialle; le linee tratteggiate non sono considerate "rette" in questa particolare geometria, detta ellittica, perché sono *cerchi* ma non *massimi*, e quindi non sono geodetiche ma semplici curve. Il concetto di geodetica offre una risposta a tutti coloro che si sono domandati come mai le traiettorie dei voli aerei illustrate dalle simulazioni non sono mai dei segmenti dritti.

⁴¹ Immagine tratta da <http://it.wikipedia.org/wiki/Geometria_sferica> Data ultima consultazione: 3 agosto 2009.

Le geometrie non euclidee sono dunque un ottimo esempio di teoria nata in risposta a una sfida puramente intellettuale, caratterizzata da un alto grado di astrazione, eppure di un'utilità pratica sostanziale anche in situazioni catalogabili dalla nostra esperienza.

Matematica totalmente pratica.

Un aneddoto ci racconta di uno studente che interrogò Euclide sull'utilità della matematica che stava imparando. Dopo aver completato la lezione, Euclide si rivolse al suo schiavo e gli disse: "Dai una moneta a quel ragazzo che desidera ricavare un profitto da tutto ciò che impara". Dopodiché lo studente fu espulso.⁴²

Questa è la posizione assunta da coloro che reputano la matematica nulla più di un ricettario di formule buone per fare la spesa, misurare le superfici degli appartamenti, costruire ponti che non crollino e calcolare quanto si impiega a raggiungere un dato luogo viaggiando a una data velocità. Tutto molto utile e nobile, ma da leggersi in senso ipocrita, come quello dell'artista spocchioso che definisce il lavoro di un artigiano (o dell'intellettuale spocchioso che definisce il lavoro di un matematico).

La matematica è indubbiamente utile: soddisfa importanti bisogni sociali, fornisce strumenti necessari allo sviluppo dell'ingegneria, della tecnologia, delle teorie informatiche ed economiche, così come provvede a organizzare i fenomeni naturali per le scienze. La nostra quotidianità è intrisa di matematica. Eppure per quanto numerose e fondamentali possano essere le sue applicazioni, le motivazioni che stanno a monte dell'attività matematica sono prevalentemente slegate dalle eventuali ricadute operative. "*La matematica per l'amore per la matematica.*"⁴³ sosteneva Poincaré. Essa, infatti, è prima di tutto un'attività mentale alimentata dalla curiosità intellettuale, dal piacere derivante dall'apprendere e dall'entusiasmo e dalla gioia che accompagnano una scoperta.

⁴² S. SINGH (1997), *L'ultimo teorema di Fermat*, Bur, Milano, 1999, pp. 70-71.

⁴³ E. T. BELL (1937), *I grandi matematici*, Sansoni, Firenze, 1997, p. 15.

Il processo attraverso cui si arriva a formulare le rigorose verità matematiche inizia concentrando la propria attenzione su una particolare “realtà” fisica o mentale quindi, attraverso intuizioni e congetture, prove ed errori, ipotesi e conferme, si tenta di fornirne una “immagine” che si deduce applicando un punto di osservazione innovativo. Questa tecnica di rendere visibile un punto di vista soggettivo su un particolare oggetto, concreto o immaginario che sia, ricorda molto più l’atto creativo di un’artista che non la metodicità di una macchina calcolatrice. A supportare questa analogia contribuisce il grado di soggettività che si manifesta nel metodo attraverso cui si giunge a un risultato, una sorta di stile personale. Tant’è vero che alcuni matematici si distinguono proprio per il loro particolare approccio, come testimonia l’episodio in cui Johann Bernoulli, vista la soluzione di un problema che Newton gli aveva mandato anonimamente, esclamò: "*Riconosco il leone dalla zampata*"⁴⁴.

Inoltre è possibile individuare una valenza estetica nella matematica, che si traduce talvolta come obiettivo da perseguire oppure come vero e proprio metro qualitativo. Come spiega Godfrey H. Hardy nel suo libro *Apologia di un matematico*:

Le forme del matematico, come quelle create dal pittore o dal poeta, devono essere *belle*; le idee, come i colori o le parole, devono legarsi armoniosamente. La bellezza è il requisito fondamentale: al mondo non c’è posto perenne per la matematica brutta.⁴⁵

Non è una bellezza percepibile attraverso i sensi, ma si sperimenta nella profondità dell’intelletto. Bertrand Russell la descriveva in termini di rigore e perfezione, portando alla luce quei caratteri di verità, profondità ed economia tanto cari anche ad Hardy:

La matematica, rettamente concepita, non possiede soltanto la verità, ma la suprema beltà, beltà fredda e austera, come quella della scultura, senza i ricorsi alle debolezze della nostra natura, senza i fastosi ornamenti della

⁴⁴ *Ivi*, p. 116.

⁴⁵ G. H. HARDY (1940), *Apologia di un matematico*, Garzanti, Milano, 2002, p. 67.

pittura o della musica, ma d'una purezza sublime e capace d'una severa perfezione, quale soltanto l'arte più elevata può raggiungere.⁴⁶

La bellezza dunque si disvela sia nel processo logico e rigoroso di deduzione, che nell'aspetto creativo del fare matematica. Talvolta si rimane affascinati dall'eleganza, dalla chiarezza o dalla complessità delle strutture e delle forme che emergono da tali ragionamenti, sia ad un livello più evidente (si vedano i bellissimi frattali⁴⁷ che è possibile visualizzare grazie ad appositi programmi) che a un livello più profondo. Il teorema di Fermat, ad esempio, è bello nella misura in cui implica, a fronte della semplicità di esposizione, una complessità tale da tenere impegnati stuoli di matematici nell'arco di tre secoli.



Per quanto riguarda le formule, esiste addirittura la *Megan Gale della Matematica*, associata al matematico svizzero Eulero e descritta dai rudi mathematici nella rubrica *Paraphernalia Mathematica* del numero 19⁴⁸.

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

L'Identità di Eulero combina in un'unica formula alcuni numeri che sono fondamentali in campi diversi della matematica con gli operatori fondamentali dell'aritmetica, ossia l'uguaglianza e l'addizione (da cui è possibile derivare anche la moltiplicazione e l'esponenziale):

♦ 0 e 1 sono rispettivamente elemento neutro dell'addizione e della moltiplicazione;

⁴⁶ E.T. BELL (1937), *I grandi matematici*, Sansoni, Firenze, 1997, p. 15.

⁴⁷ Immagine tratta da: <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Julian_fractal.jpg> Data ultima consultazione: 5 agosto 2009.

⁴⁸ RUDI MATHEMATICI N. 019 agosto 2000 <www.rudimathematici.com/archivio/019.pdf>, p. 5.

♦ i è l'unità immaginaria che introdotta in algebra nel campo dei numeri complessi e rappresenta la radice quadrata di -1 ;

♦ π è un numero irrazionale e trascendente, fondamentale in trigonometria e rappresenta il rapporto tra circonferenza e diametro.

♦ e è un numero irrazionale e trascendente introdotto a metà del XVII sec., base della funzione esponenziale è una delle più importanti costanti matematiche;

Sono tutti concordi nell'affermare che questa sia una tra le più belle formule matematiche, non solo perché unisce caratteri di complessità (rappresentati da e , i , π) con caratteri di semplicità (1 , 0 , $+$, $=$) in una formula concisa ed elegante, ma anche per la sua caratteristica di operare una sintesi tra concetti apparentemente lontani tra loro come l'aritmetica, l'analisi, l'algebra e la trigonometria. Dopotutto se si accetta la definizione della matematica come scienza degli schemi e delle strutture, non si può che considerare la capacità di individuare correlazioni sorprendenti una vera e propria manifestazione del bello.

Numeri periodici senza fine e numeri vaghi che non mostravano la loro vera natura, dopo avere tracciato una breve traiettoria, finivano per atterrare nello stesso punto. Non era apparso nessun cerchio, eppure il π era sceso volteggiando da un punto inaspettato dello spazio fino a e ed era andato a stringere la mano alla timida i . Si erano avvicinati e continuavano a trattenere il respiro, ma era bastato che un uomo vi addizionasse loro un solo numero per cambiare all'improvviso il mondo. Tutti erano finiti tra le braccia dello zero.

L'identità di Eulero era una stella cadente che illuminava le tenebre, era il verso di una poesia inciso in una grotta avvolta dall'oscurità.⁴⁹

⁴⁹Y. OGAWA (2003), *La formula del professore*, Il Saggiatore, Milano, 2010, p. 138.

Matematica e linguaggio formale.

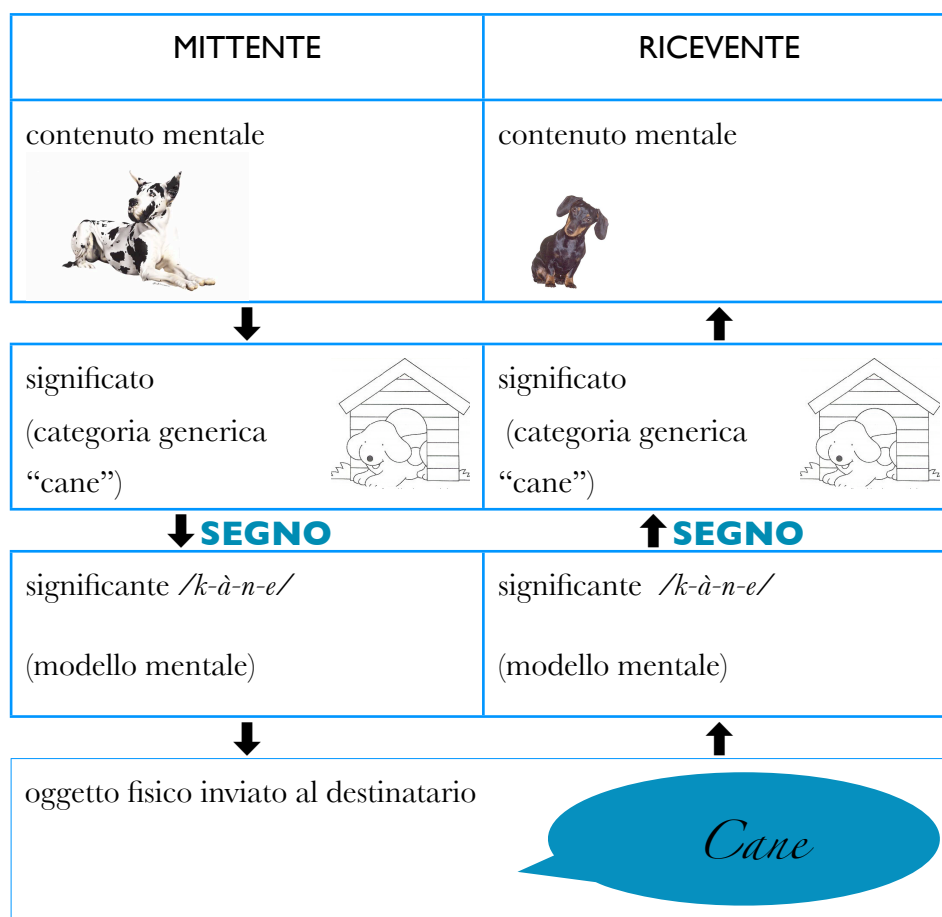
Al termine dell'esame di Logica lo studente chiede timido e circospetto -Professore, mi dica, sono promosso o bocciato?- e il professore risponde -Sì.-

Un matematico va a prendere il figlioletto all'uscita di scuola. -Papà, oggi in classe è arrivato un bambino che viene da un paese lontano, pensa, non conosce una parola di italiano!- -Ah sì?- risponde lui -E quale?-

Le barzellette sui matematici si sprecano, in particolare quelle sul linguaggio: in queste occasioni emerge una pedanteria esasperata nei confronti della comunicazione, sia nel piano dell'espressione che dell'interpretazione. L'elemento interessante di queste storielle non è tanto l'immagine del matematico che ne deriva, sia esso una persona sconnessa dalla realtà e dalle consuetudini che la regolano o un inguaribile simpaticone, quanto l'ambiguità del linguaggio che ne emerge. L'ambiguità, dopotutto, è insita nella comunicazione ed è inversamente proporzionale al grado di specificità e formalità del linguaggio che si utilizza.

Il processo comunicativo non è paragonabile ad un *trasloco* di informazioni dal cervello di una persona a quello di un'altra, questa sarebbe telepatia, è più simile a un libretto di istruzioni che permette al ricevente di *costruirsi* una propria entità mentale quanto più simile a quella che il mittente intendeva trasmettere. È possibile sintetizzare, semplificando molto, questo procedimento in termini semiotici: l'emittente ha ben chiaro in mente il contenuto mentale che intende comunicare. Per rendere partecipe l'interlocutore del suo pensiero, dovrà decidere quale segno, in questo caso quale parola appartenente al suo linguaggio, ha il significato più prossimo all'idea che ha in mente. Il segno è costituito sia da un significato, ossia un'entità standardizzata, generale e collettiva che si costituisce a partire dalla semplificazione e dalla classificazione della realtà, che da un significante, ossia un modello generico di forma

espressiva ad esso correlato. A questo punto non rimane che realizzare un oggetto fisico, sia esso suono, scritta o gesto, che si faccia portavoce dell'entità mentale da comunicare.



Il fatto che sia il significante che il significato siano dei modelli mentali generali è essenziale ai fini dell'economia di comunicazione: se per ogni entità mentale esistesse un significato tanto specifico da distinguerla da tutte le altre, ne conseguirebbe un numero infinito di termini, uno per ogni sfumatura di colore, per ogni tipo di tempo atmosferico, per ogni emozione. Per quanto riguarda il significante, associare un oggetto concreto a un modello generico di forma espressiva permette di riconoscerlo e distinguerlo nelle sue molteplici manifestazioni, così il termine “cane” detto da un adulto, cantato da un soprano, oppure deformato dalla pronuncia di un bambino piccolo, così come scritto in corsivo piuttosto che in stampatello, sarà comunque riconducibile ad un unico segno.

Questo sistema di segni non esaurisce la sua utilità nel permettere una comunicazione più o meno efficiente: grazie al suo grado di astrazione, semplificazione, classificazione e universalità *costruisce* un'immagine del mondo basata sull'organizzazione del pensiero e dell'espe-

rienza. Ciò è tanto più vero quanto più ci si allontana dalle lingue naturali per approdare a quei sistemi di segni formalmente e rigorosamente organizzati.

Come la matematica.

Lo sviluppo di questa disciplina è andato di pari passo con l'evolversi della notazione formale: per prendere consapevolezza di un concetto astratto, infatti, occorre individuare un segno per rappresentarlo, perché l'entità simbolica è il mezzo per manipolare un concetto attraverso il pensiero, per renderlo comprensibile e condivisibile. Esiste dunque un linguaggio della matematica specifico e rigoroso che, sebbene risulti ostico ai non matematici, mette al servizio di chi lo padroneggia tutte le potenzialità di una notazione scevra delle ambiguità e delle inesattezze delle lingue naturali. In matematica le definizioni sono i mattoni che danno sostanza ai postulati, che sono il punto di partenza delle dimostrazioni che sottendono i teoremi. Questi ultimi, a loro volta, si intrecciano e si richiamano in un gioco di rimandi che evoca l'immagine di una rete dinamica i cui fili si intrecciano in modi sempre nuovi. L'architettura di questo linguaggio è assolutamente precisa e ricalca pedestremente l'astrattezza propria degli oggetti matematici che si propone di descrivere. Eppure questa rigidità non significa costrizione, anzi, quest'organizzazione formale permette di librarsi all'interno di quel contesto matematico, creato dalle sue stesse notazioni astratte.

Date queste premesse, recriminare alla matematica l'astrattezza e il rigore del suo linguaggio risulta quasi ridicolo, sarebbe come lamentarsi dello stile ermetico in cui sono scritte le poesie di Quasimodo.

Stanislav M. Ulam racconta di quando usava trovarsi al caffè con Stanislav Mazur, questi scriveva sulla tovaglia o sul marmo del tavolino una formula qualsiasi, ad esempio $y = f(x)$, e passavano poi ore e ore scambiandosi le idee che la contemplazione della formula suggeriva loro: “*Quei simboli erano per noi come una sfera di cristallo . . .*”⁵⁰

⁵⁰ G. LOLLI, *La vita dei simboli*, p. 5, reperibile sul sito del progetto Polymath all'indirizzo <http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/Archivio/Mappa/Interventi/Seviceversa.htm> Data ultima consultazione: 16 settembre 2010.

Matematica e certezza.

Data una retta r e un punto P non appartenente a questa retta, quante rette parallele a r e passanti per P è possibile individuare?

☒ 1

☒ nessuna

☒ infinite

In matematica non esiste la certezza assoluta. Per certi versi quest'affermazione potrebbe sembrare paradossale: dopotutto la matematica è la regina delle scienze, la maggiore espressione del pensiero logico e razionale, è verità che si mantiene stabile nel tempo, è certezza irrefutabile fondata sul rigore di dimostrazioni inconfutabili e convincenti. I matematici sono noti per la loro ricerca di certezze e per la precisione e la cautela con cui trattano le asserzioni di cui non possiedono una dimostrazione scrupolosa. Ci sono addirittura delle barzellette su questo fatto:

Si narra che un astronomo, un fisico e un matematico fossero in vacanza in Scozia. Guardando fuori dal finestrino del treno, scorsero una pecora nera in mezzo a un prato. “Interessante”, osservò l'astronomo. “Tutte le pecore scozzesi sono nere!” A ciò il fisico replicò: “No, no! *Alcune* pecore scozzesi sono nere!” Il matematico alzò gli occhi verso il cielo con espressione compassionevole e poi intonò: “In Scozia esiste almeno un campo, che contiene almeno una pecora, *un lato almeno della quale è nero.*”⁵¹

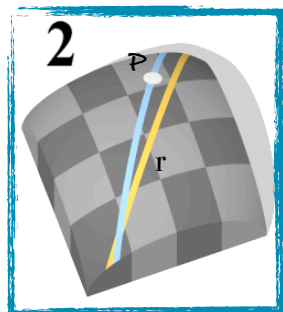
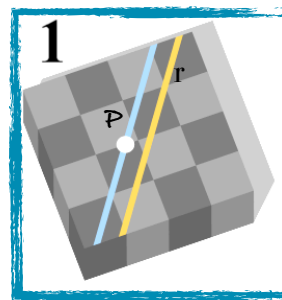
Questo modo di ragionare spinge i matematici a prendere in analisi solo verità rigorose, con il risultato di formulare ragionamenti esatti e stabili nel tempo: si prenda ad esempio il teorema di Pitagora la cui dimostrazione risale al V sec. e la cui validità permane ancora oggi.

Non è la certezza, dunque, ad essere messa in dubbio, quanto l'aggettivo ad essa associato. Assoluto deriva dal latino *absolutus* che significa “sciogliere”: la certezza assoluta dunque è slegata da qualsiasi limitazione, libera da condizioni. In matematica le cose non sono così semplici: le verità sono sempre *relative* al contesto logico in cui vengono elaborate.

⁵¹ S. SINGH (1997), *L'ultimo teorema di Fermat*, BUR, Milano, 1999, p. 163.

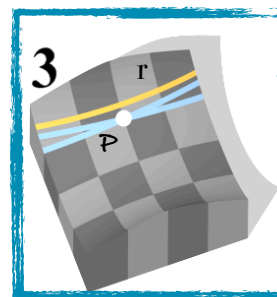
Ecco perché è possibile considerare veritiere tutte le risposte fornite alla domanda posta a inizio paragrafo ⁵²:

☒ **1**: dato un punto e una retta non passante per esso, esiste una e una sola retta passante per il punto P e parallela alla retta r. Questo è vero secondo la geometria piana di Euclide.



☒ **nessuna**: partendo dalla negazione dell'asserzione precedente, che non è altro che una variazione del V postulato, la geometria ellittica giunge alla conclusione che non esistono rette parallele. La sua superficie di riferimento è a curvatura positiva (come quella di una sfera).

☒ **infinite**: la geometria iperbolica, negando anch'essa il V postulato, mette in discussione l'unicità delle rette parallele. La superficie è a curvatura negativa (come quella di una sella).



Quanto affermato in merito alla certezza vale anche per il concetto di verità. Infatti se è vero che $1 + 1 = 2$ è vero anche che $1 + 1 = 10$, nel secondo caso però il sistema numerico è binario invece che decimale.

In ultima analisi la matematica è, per usare le parole di Morris Kline, “*un corpo di conoscenza. Essa non contiene però verità. La convinzione contraria, che la matematica sia un insieme inattaccabile di verità, che essa sia una sorta di rivelazione finale di Dio, così come le persone devote considerano la Bibbia, è un errore popolare che è estremamente difficile sradicare*”.⁵³ Le più volte citate geometrie non euclidee ne sono un esempio: Bolay e Lobačevskij incontrarono diverse resistenze prima che le loro idee venissero accettate; la loro storia evidenzia come, storicamente, alcune tra le teorie più consolidate siano state detronizzate, reinventate, affiancate da tesi nuove. Basta leggere un manuale generico di storia della matematica per rinvenire altri episodi che testimonino l'avvi-

⁵² Immagini tratte da <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Euclidian_and_non_euclidian_geometry.png> Data ultimo accesso: 4 agosto 2009.

⁵³ M. KLINE (1982), *La matematica nella cultura occidentale*, Feltrinelli, Milano, 1976, p. 21.

cendarsi di teoremi e dimostrazioni, la cui carica innovatrice, a volte, può avere effetti deflagranti.

Negli anni a cavallo tra il XIX e il XX sec. un nutrito numero di logici si è impegnato per assicurare alla disciplina delle salde fondamenta. Sin dai tempi degli antichi greci, la matematica si era evoluta arrivando ad accumulare sempre più teoremi. Sebbene fossero state elaborate anche le corrispettive dimostrazioni, vi erano alcune verità date per scontate. Il lavoro dei logici consisteva nello sventare qualsiasi dubbio cercando di dedurre tutte le verità da dimostrazioni sempre più semplici, in un procedimento a ritroso che si sarebbe concluso unicamente al cospetto degli assiomi fondamentali della matematica. L'obiettivo era di dimostrarne la completezza, ossia la capacità di rispondere a tutti i quesiti, e la coerenza, ossia la non contraddittorietà.

Questo movimento emerse anche in risposta ad alcune contraddizioni rinvenute all'interno di alcune importanti teorie. Nei primi anni del '900 Frege aveva teorizzato un sistema di assiomi atto a dedurre l'aritmetica dalla teoria degli insiemi di Cantor. Mentre il suo secondo volume era in stampa, il matematico tedesco ricevette una missiva da parte di Russell in cui era indicato un paradosso che evidenziava una contraddizione insita nella sua trattazione. A seguito di questo episodio ci furono diversi tentativi di estromettere questo tipo di antinomie. Lo stesso Russell fornì importanti contributi in merito. Questa rincorsa al rigore e alla coerenza venne incoraggiata da Hilbert in occasione del congresso internazionale dei matematici di Parigi nel 1900, ma 31 anni più tardi quest'ambizione sfumò alla luce dei teoremi di incompletezza di Gödel i quali asseriscono che la coerenza in un sistema formale è indimostrabile all'interno del sistema stesso. In altre parole, all'interno di un sistema assiomatico coerente esistono alcune asserzioni che non possono essere dimostrate.

In sintesi, neppure i fondamenti della matematica sono caratterizzati dalla certezza assoluta, ma non per questo bisogna concludere che la matematica è un'opinione, tanto mutevole e soggettiva quanto lo può essere una corrente filosofica. Una volta accettata la relatività delle sue verità, permane la sua importanza e la sua efficacia tanto nelle scienze quanto all'interno della vita quotidiana.

Dotato di pochi sensi limitati e di un cervello, l'uomo iniziò a penetrare
il mistero che lo circonda. [...] Il fine della sua ricerca era l'ordine; il suo

scopo, la costruzione dei sistemi di conoscenza radicalmente diversi dalle fuggevoli sensazioni e la creazione di modelli esplicativi che potessero aiutarlo a conquistare un certo dominio sull'ambiente. La sua maggiore conquista, il prodotto della sua ragione, è la matematica. Essa non è una gemma perfetta e neppure la continua opera di raffinamento ne eliminerà tutti i difetti. Purtroppo, la matematica è stata il legame più efficace con il mondo delle percezioni sensoriali, e per quanto sconcertante sia riconoscere che non possiede un fondamento sicuro, rimane il gioiello più prezioso della mente umana e merita di essere custodito con cura e attenzione. È stata la punta più avanzata della ragione e senza dubbio continuerà a esserlo anche se una ricerca più attenta porterà alla luce nuove imperfezioni. Una volta Alfred North Whitehead disse: “*Dobbiamo ammettere che la ricerca della matematica è una divina follia dello spirito umano*”. Follia, forse; ma divina follia.⁵⁴

⁵⁴ M. KLINE (1980), *Matematica la perdita della certezza*, Mondadori, Milano, 1985, pp. 383-384.