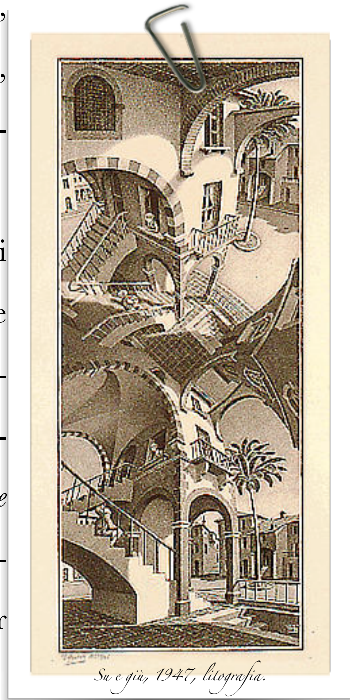
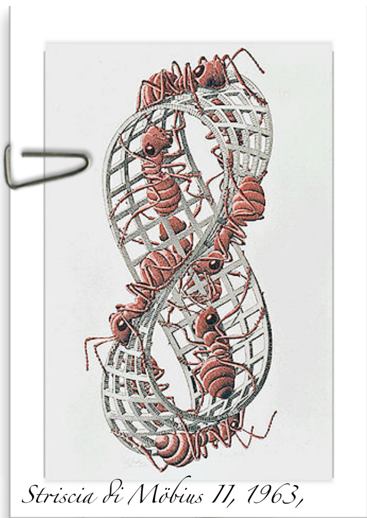
Mentre in *Altro mondo II* vi è un solo punto di fuga, in *Relatività* (1953) ve ne sono addirittura tre che compongono tre mondi diversi, ingegnosamente collegati, ognuno con i propri abitanti.


Relatività, 1953, litografia.

Gli studi sulla prospettiva si spingono fino a inventare nuove leggi, come la sostituzione delle linee rette che convergono nel punto di fuga, con delle curve, come appare in *Su e giù* (1947). La particolarità di questa composizione consiste nell'obbligare l'osservatore ad assumere due punti d'osservazione per vedere le stesse cose.


Su e giù, 1947, litografia.

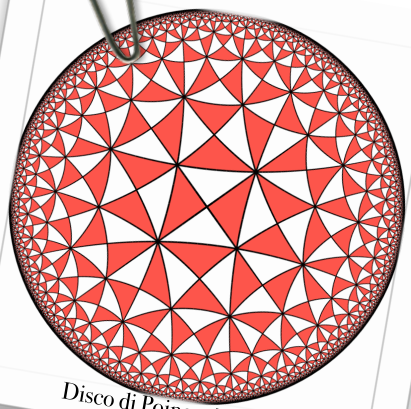
Escher non abbandona completamente la prospettiva tradizionale a cui fa ricorso per rappresentare particolari forme e strutture geometriche. Alcuni di questi solidi sono presenti in natura, si ritrovano, in particolare, nella regolarità dei cristalli. Tra il 1953 e il 1958 compone cinque opere incentrate sulle spirali: queste composizioni sono costituite da un insieme di spirali logaritmiche. Escher elabora una tecnica per costruire questa struttura matematica servendosi unicamente della sua intuizione artistica.


Striscia di Möbius II, 1963,

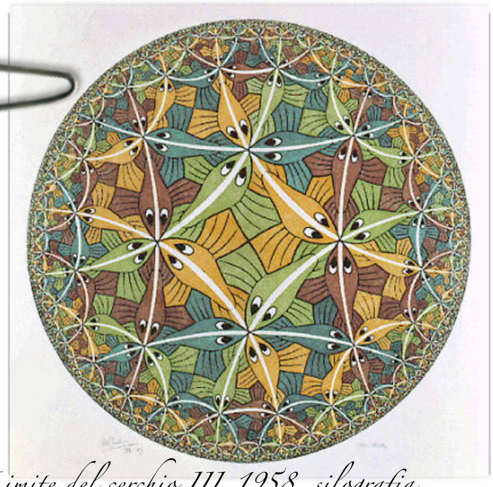

Striscia di Möbius I, 1961,

La sua attenzione viene calamitata anche da alcune forme con particolari caratteristiche topologiche come i nastri di Möbius. Queste particolari strisce si costruiscono unendo le due estremità di un nastro sottoposto a una semitorsione; il risultato è una forma chiusa con una sola faccia e un solo bordo. Questa caratteristica è dimostrata dal cammino delle nove formiche in *Striscia di Möbius II* (1963), mentre *Striscia di Möbius I* (1961) mostra la figura che si ottiene tagliando uno di questi nastri lungo la lunghezza: invece di due anelli scissi si ottiene una striscia con due semitorsioni.

Gli ultimi temi proposti da Escher riguardano le approssimazioni all'infinito e le figure impossibili. Sebbene la percezione dell'infinito sia teoricamente preclusa alla mente umana, Escher si dedica con ostinazione alla sua rappresentazione. Lo spunto maggiore giunge attraverso una missiva del matematico H. S. M. Coxeter. Nel 1957 Coxeter ottiene da Escher il permesso di utilizzare, nel suo intervento ad un convegno sulla simmetria, due stampe sulle tassellature. A titolo di ringraziamento, Coxeter invia all'artista una copia del suo saggio. Nell'articolo è raffigurata una tassellatura del piano iperbolico costruita sul modello circolare di Poincaré[13]. Questo particolare disegno fornisce a Escher i mezzi per liberarsi di una rappresentazione dell'infinito in espansione, che limita la funzione dell'opera alla raffigurazione di un frammento, per raggiungere una concezione d'infinito compresa in maniera logica nella sua totalità. Il 5 luglio 1958 Escher scrive a Coxeter: "*Sono interessato da molto tempo agli schemi con "motivi" che diventano sempre più piccoli fino a raggiungere il limite dell'infinita piccolezza. La questione è relativamente semplice quando il limite è un punto posto al centro di uno schema. Anche il caso di una linea-limite non mi era nuovo, mentre non ero mai stato in grado di creare uno schema in cui ogni "macchia" diventa gradualmente più piccola man mano che si allontana dal centro per avvicinarsi al limite esterno del cerchio, come mostra la sua figura.*"[14]



Disco di Poincaré

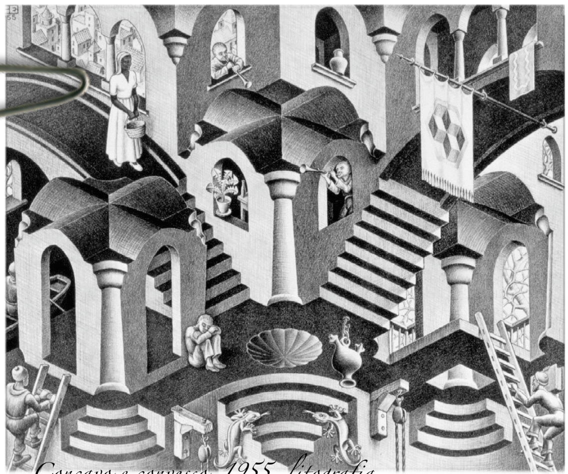


Limite del cerchio III, 1958, silografia.

[13] Immagine tratta da <http://it.wikipedia.org/wiki/File:Order-4_bisected_pentagonal_tiling.png> Data ultima consultazione: 11 agosto 2009.

[14] S. ROBERTS (2006), *Il re dello spazio infinito*, Rizzoli, Milano, 2006, p. 510.

Analizzando questo disegno Escher perviene a una sua personale struttura che elabora in diverse varianti. Un'opera rappresentativa è *Limite del cerchio III* elaborata nel 1958. Nonostante i triangoli rossi e bianchi del disco di Poincaré possano apparire tutti diversi, secondo la geometria iperbolica essi sono congruenti, di conseguenza anche i pesci di *Limite del cerchio III* hanno tutti le stesse dimensioni e i punti di incontro delle loro pinne, teste e code coincidono con i vertici della tassellatura.



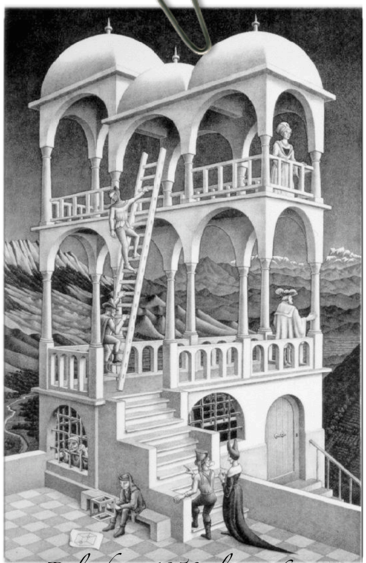
Concavo e convesso, 1955, litografia.

Concavo e convesso (1955) è la prima tra le cosiddette figure impossibili. L'opera è attraversata al centro da un confine invisibile oltrepassato il quale la scenografia viene invertita: così i pavimenti diventano soffitto, l'esterno diventa interno, ciò che era convesso diventa concavo. Questa litografia nasce dall'interesse di Escher per alcuni studi sul peculiare effetto ottico prodotto dalla rappresentazione di un cubo su una superficie piana , il *Cubo di Necker*, condotti dal Prof. Schouten, direttore dell'Istituto per le ricerche percettive di Eindhoven. Questo concetto, così come la struttura della composizione, è esplicitato nell'opera dall'immagine sullo stendardo. Sulla bandiera è riprodotto un gruppo di tre parallelepipedi rettangoli che possono essere interpretati in due modi diversi:

✦come tre parallelepipedi verticali, il lato più scuro costituisce le facce rivolte verso l'angolo in alto a destra dell'opera;

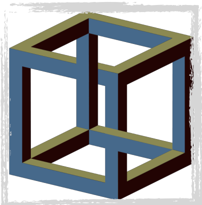
✦come tre parallelepipedi orizzontali, il lato più scuro costituisce le facce rivolte verso l'angolo in basso a sinistra dell'opera.

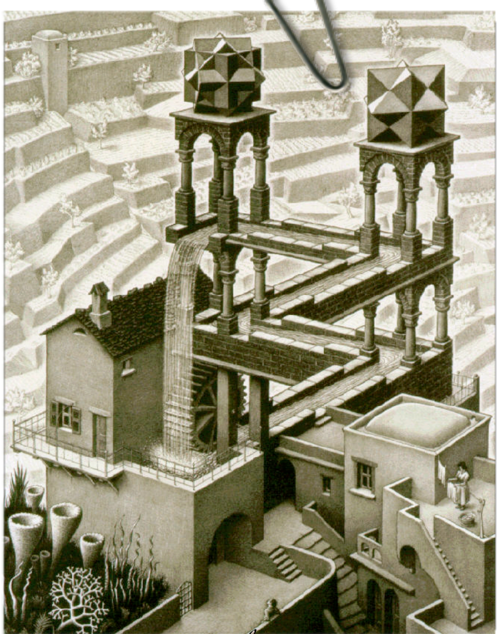
La forma base dell'opera gioca sulla medesima ambivalenza, sono infatti riconoscibili tre cubi rappresentati da tre piccoli templi dalla volta a crociera. Quello a destra e quello a sinistra sono rispettivamente convesso e concavo, questa prospettiva è resa chiara dalla disposizione delle figure e dal modo in cui esse interagiscono con l'architettura. Il tempio posto attorno alla linea di confine invece si presta a entrambe le interpretazioni, così come la conchiglia raffigurata ai suoi piedi che appare concava se si concentra l'attenzione verso il lato convesso dell'opera (quello di sinistra) e appare convessa dal punto di vista dell'architettura concava.



Belvedere, 1958, litografia.

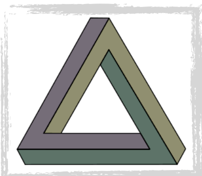
Anche in *Belvedere* (1958) la struttura base è esplicitata nell'opera: il modellino tenuto in mano dall'uomo seduto sulla panchina, così come il progetto abbozzato nel foglio ai suoi piedi, riproducono un particolare cubo la cui parte superiore è collegata a quella inferiore in un modo impossibile. Al pari del modello, l'intera architettura non può esistere al di fuori dello spazio bidimensionale in quanto le leggi della tridimensionalità sono state violate. La persona che si trovasse a metà della scala che collega il primo piano del padiglione al secondo, per esempio, incapperebbe nel dilemma di decidere se essere all'interno della struttura o al suo esterno.





Cascata, 1961, litografia.

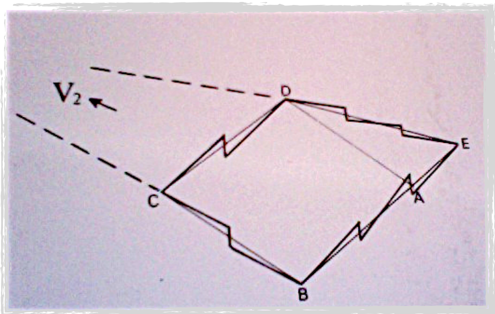
Così come *Belvedere* deve la sua forma ai collegamenti rovesciati tra i vertici di un cubo, *Cascata* (1961) sfrutta l'effetto ottico prodotto dall'unione impossibile dei vertici di un triangolo[15]. Questa figura è stata pubblicata da L. S. e R. Penrose in *Impossible Objects. A Special Type of Visual Illusion* nel *British Journal of Psychology* (vol. 49 del febbraio 1958) e non è altro che l'unione di tre angoli retti attraverso collegamenti inesatti. In *Cascata* questo soggetto viene proposto attraverso un corso d'acqua assurdo che si au-



[15] Le immagini delle figure impossibili sono tratte da <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Impossible_objects.svg> Data ultima consultazione: 17 agosto 2009.

toalimenta attraverso una cascata perpetua. Questo moto continuo in cui la discesa e la salita non determinano un reale spostamento verso l'alto (della cascata) o il basso (del mulino) richiama le scale di *Salita e discesa* (1960). Questa litografia gioca con l'illusione ottica per ricondurci, dopo ogni giro, al punto di partenza; in questo modo ripropone il tema dell'infinito declinato sotto forma di un'interminabile ascesa e una discesa senza fine. Quest'inganno è creato per mezzo di una particolare costruzione: sebbene i piani dell'edificio siano conformi ad una forma a spirale, i gradini sono costruiti in modo da mantenere la scala allo stesso livello compensando i movimenti verso l'alto con altrettanti verso il basso, come rappresentato in figura[16] e facendo leva sulla prospettiva. Il carattere illusorio delle figure impossibili di Escher deve il suo fascino alla logica figurativa attraverso cui esse sono costruite: per quanto poco conformi all'esperienza, queste strutture appaiono convincenti grazie alle innumerevoli possibilità dei concetti matematici su cui poggiano.

Salita e discesa, 1960, litografia.



In un'intervista Escher afferma: "*Non una volta mi diedero una sufficienza in matematica. La cosa buffa è che, a quanto pare, io utilizzo teorie matematiche senza saperlo. No, ero un ragazzo gentile e un po' stupido a scuola. Immaginatevi adesso che i matematici illustrano i loro libri con i miei quadri! E che io vado in giro con gente colta quasi fossi loro fratello o collega. Non riescono neppure a immaginarsi che io non ne capisco nulla.*"[17] La particolarità dell'approccio di Escher alla matematica consiste nell'averla scoperta, più che usata, all'interno delle strutture che sottendono sia il mondo reale che quello mentale degli oggetti e della loro percezione e nel come tutto questo sia stato veicolato dall'intuizione e dalla sua sensibilità di artista. Con la matematica Escher condivide la volontà

[16] Immagine tratta da B. ERNST (1978), *Lo specchio magico di M. C. Escher*, Taschen, Colonia, 2007, p. 96.

[17] B. ERNST (1978), *Ivi*, p. 27.

di immaginare universi alternativi caratterizzati da leggi diverse da quelle proprie dell'esperienza, inoltre la sua produzione artistica ha in comune con le scienze esatte la ricerca di modelli generali e strutture astratte da cui parte per costruire, abilmente, le sue animazioni.

> Confrontando attentamente gli enigmi che ci circondano, e analizzando le osservazioni da me compiute, sono finito nel regno delle matematiche. Anche se sono assolutamente digiuno di studi e di conoscenze nel campo delle scienze esatte, sembra spesso che io abbia più cose in comune con i matematici che con gli altri artisti.[18]

Rettili (1943)

Rettili, 1943, litografia.

Schizzo per *Rettili*, 1939, china e acquerello.

A differenza della traduzione in italiano che si limita a richiamare gli animali protagonisti della composizione, il titolo originale *Reptiles* ha un significato in più: *tile* è piastrella, mattonella e, come verbo, significa ricoprire/rivestire con piastrelle; *repeted* significa ripetuto. Escher ha dunque usato dei *Reptiles* (rettili) come *Rep-tiles* (mattonelle ripetute). Il riferimento alla tassellazione del piano è esplicito già dal titolo e nell'opera è raffigurato dalla composizione di rettili nel blocco da disegno appoggiato sul tavolo. Gli oggetti sparsi tutto attorno suggeriscono l'esistenza dell'artista: le cartine e i fiammiferi per fumare; la bottiglia con il suo bicchiere; la squadra per disegnare le griglie; alcuni libri (tra cui uno di zoologia), due piccole piante e un dodecaedro da cui presumibilmente trarre idee per le rappresentazioni. La pre-

[18] J.L. LOCHER (a cura di) (1978), *Il mondo di Escher,* Garzanti, Milano, 1978, p.49.

senza di questi effetti personali sparpagliati e sovrapposti manifesta, per contrasto, una temporanea assenza dell'artista ed è in questo momento che la composizione prende vita. Le forme che ricoprono l'album si distaccano dalla struttura esagonale che le ingabbia nel foglio, oltrepassano il limite del disegno e passeggiano sugli oggetti circostanti mutuandone la tridimensionalità, per poi rituffarsi nella statica esistenza di uno schizzo.

Questa litografia riconosce alla composizione una sorta di vita autonoma, ribadita dallo stesso Escher "*sono colto da questa sensazione ogni volta che sono impegnato nel disegnare una divisione regolare del piano. Ho allora la sensazione che non sono io a determinare il disegno, ma che i semplici piccoli compartimenti del piano sui quali sono concentrato abbiano una loro volontà, come se fossero questi a controllare i movimenti della mia mano*."[19] La stessa impressione si ottiene leggendo i commenti su alcune teorie matematiche, come quello del fisico Heinrich Hertz in merito alle geometrie non euclidee: "*Non ci si può liberare dell'impressione che queste formule matematiche abbiano un'esistenza indipendente e un'intelligenza propria, che siano più sapienti di noi, più sapienti anche dei loro scopritori, e che noi ricaviamo da esse più di quanto fu posto in esse originariamente*"[20].

Nell'intreccio di rettili disegnati sull'album da disegno si nota con chiarezza la riga di demarcazione degli esagoni che compongono la tassellatura. Non esistono opere dedicate esclusivamente alla suddivisione astratta del piano (se non nei suoi quaderni di schizzi): tutte le sue strutture sono movimentate da figure di animali, piante, persone e oggetti riconoscibili. Questa scelta lo contraddistingue dai mori che hanno decorato l'Alhambra vincolati da un preciso precetto del Corano che impone loro di comporre gli ornamenti usando unicamente forme geometriche astratte ed elementi calligrafici "*Questa limitazione è per me tanto più incomprensibile, perché la riconoscibilità delle componenti dei miei stessi motivi ornamentali è la ragione del mio interesse, mai interrotto, in questo campo.*"[21] Lo stesso ragionamento spinge Escher a trasformare il triangolo di Penrose in una cascata o il disco di Poincaré in un una boccia di infiniti pesci.

L'interesse e il piacere derivante dal "vestire" una struttura logica astratta caratterizza anche l'attività del creatore di giochi matematici. Come Piotr puntualizza nell'editoriale del numero 39 di *Rudi Mathematici*:

---

[19] *Ivi*, p. 47.

[20] M. KLINE (1982), *La matematica nella cultura occidentale*, Feltrinelli, Milano, 1976, p. 396.

[21] B. ERNST (1978), *Lo specchio magico di M. C. Escher*, Taschen, Colonia, 2007, p. 41.

> Il lavoro del solutore di problemi è spesso un problema di matematizzazione: spogliare il testo di tutte le cose che non servono, stando bene attenti a non buttare, insieme all'acqua sporca, anche il proverbiale bambino. Altrettanto ovvio, il lavoro dell'autore dei giochi (beh, almeno "uno" dei lavori...) è quello opposto, quello di dematematizzare un problema squisitamente matematico. Ci sono problemi che si risolvono davvero con un paio di sottrazioni e un'addizione, ma la magia sta nel nascondere quelle sciocchezze in un ambiente realistico, completo di vincoli accessori, e possibilmente con un pezzo di narrazione che leghi il tutto.[22]

Davanti a un enigma così ottenuto

> Il solutore di problemi non batte ciglio, di fronte a violazioni dei diritti civili che prevedono il taglio della testa se apri la porta sbagliata; trova naturale avere le grazie d'una discinta principessa se si riesce ad articolare frasi risolutive del tipo "se io chiedessi al tuo compagno se la porta di destra è fatta di legno, potrebbe lui rispondermi che il latte e` bianco?", e altre amenità del genere.[23]

Allo stesso modo nessuno si lamenta del fatto che un paese sul mare possa diventare un cinesino, che una superficie possa essere contemporaneamente soffitto e pianerottolo o che si possa percorrere in salita un infinito numero di gradini rimanendo sempre sullo stesso piano.

Pierre de Fermat


Pierre de Fermat (1601 - 1665)

Pierre de Fermat[24] nasce nel 1601 ed è un consigliere al parlamento di Tolosa. La sua professione è un prolungamento della sua istruzione in giurisprudenza tanto voluta dalla famiglia. Fermat dedica alla matematica il suo tempo libero, coltivandola come un passatempo di tutto rispetto. Julian Coolidge lo esclude dal suo *Mathematics of Great Amateurs* perché gli riconosce le capacità di un professionista; lo storico della matematica

[22] *De/Matematizzazione*, "Rudi Mathematici", n, 39, aprile 2002, p. 4.

[23] *Ivi*, p. 2.

[24] Immagine tratta da <http://it.wikipedia.org/wiki/File:Pierre_de_Fermat.jpg> Data ultima consultazione: 19 aprile 2009.

E. T. Bell lo definisce "*il Principe dei dilettanti*". Il '600 è un periodo storico particolare per la matematica: la cultura non si è ancora pienamente liberata dagli strascichi di quel periodo buio e superstizioso che è stato il medioevo e la matematica, di conseguenza, fatica ad ottenere il giusto rispetto. Anche negli ambienti accademici i corsi di matematica sono tenuti poco in considerazione: nel 1619 vi è un'unica cattedra di geometria, a Oxford. La via più battuta per avere una formazione di matematica consiste nel ricorrere a lezioni private, come fa Galilei. Si potrebbe quasi dire che nel XVII sec. quasi tutti i matematici sono "dilettanti".

Riguardo a Fermat si può aggiungere che è un personaggio isolato, abitando in un piccolo centro non può che mantenere rapporti di natura epistolare con gli altri matematici. Questo isolamento, unito al fatto che la matematica è per Fermat un'attività a cui dedicarsi per puro piacere intellettuale, alimenta la sua indipendenza: egli non si cura di pubblicare i propri risultati, preferendo la possibilità di lavorare ai suoi teoremi indisturbato dai riconoscimenti che ne sarebbero derivati (e dalle conseguenti domande, interrogazioni, giudizi da parte di altri matematici). La matematica è per Fermat un passatempo, per questo preferisce concentrarsi sulle sue teorie senza premurarsi eccessivamente di dimostrare tutti i suoi passaggi con eccessivo rigore. Se questo, da un lato, gli permette una maggiore libertà di azione, dall'altro irrita alcuni suoi colleghi tecnicamente più disciplinati di lui e di questo Fermat è consapevole. Nel libro *L'ultimo teorema di Fermat*[25] Simon Singh racconta alcuni aneddoti su questo personaggio tanto modesto e riservato, quanto dispettoso. Fermat prova un piacere perverso a provocare altri esimi matematici, specialmente inglesi, comunicando loro alcuni teoremi senza fornirne una dimostrazione e sfidandoli a trovarla. Ciò gli vale l'appellativo di "*maledetto francese*" dall'inglese John Wallis e la definizione di "*sbruffone*" da parte del suo connazionale Descartes. Ii toni di quest'ultimo matematico, in particolare, sono spesso più che velenosi, quasi denigratori: Descartes si sente punto nell'orgoglio nel sentire criticate le proprie ipotesi sulle leggi di riflessione e rifrazione della luce da un dilettante, a questo fatto si aggiunge lo sviluppo di una geometria algebrica con cui il magistrato di Tolosa anticipa il lavoro del rinomato matematico. Nonostante la validità dei risultati elaborati da Fermat, Descartes continua a screditare il suo lavoro criticandone la mancanza di metodo e di rigore.

[25] S. SINGH (1997), *L'ultimo teorema di Fermat*, BUR, Milano, 1999.

Non tutti i contatti di Fermat con gli altri matematici sono così litigiosi, egli intrattiene una corrispondenza regolare con Marin Mersenne, un frate dell'ordine dei Minimi che attraverso viaggi, incontri e un fitto scambio epistolare promuove la diffusione delle conoscenze e un atteggiamento collaborativo tra studiosi di matematica. Mersenne è, con Pascal, uno dei pochi matematici con cui Fermat discute apertamente delle proprie idee. Con Pascal in particolare la collaborazione si spinge fino alla teorizzazione delle regole generali del calcolo delle probabilità. L'abilità di Fermat si esprime anche in un'altra importante scoperta, ossia nel calcolo differenziale che sarà protagonista, nel XVIII sec., degli studi di Newton e Leibniz inerenti all'Analisi. Eppure il campo in cui Fermat manifesta l'interesse più grande e propone i contenuti più importanti non è il calcolo delle probabilità o il calcolo differenziale, ma la teoria dei numeri. Egli mostra un'eccezionale abilità nel trovare schemi e corrispondenze tra i numeri naturali, in particolare tra i numeri primi, ed elabora svariati ragionamenti senza fornirne, però, delle vere e proprie dimostrazioni.

Per esempio Fermat osserva che se a è un numero naturale e p un numero primo ma non un divisore di a, allora p divide $a^{p-1} - 1$.

Questa congettura viene dimostrata da Eulero nel 1736 ed è nota come *piccolo teorema di Fermat*. Pur non sembrando, a prima vista, nulla di più di un risultato curioso, questo teorema ha numerose applicazioni oltre alla teoria dei numeri, ad esempio in crittografia.

ESEMPIO NUMERICO:
$a = 14$
$p = 3$
secondo Fermat 3 deve dividere $14^2 - 1$.
Facendo i calcoli si ottiene
$196 - 1 = 195$.
che in effetti è divisibile per 3
$195 / 3 = 65$.

L'eredità di Fermat non si riduce al "piccolo teorema", tra le sue carte e nella sua corrispondenza sussistono numerosi quesiti aperti. Il compito di trasformare queste congetture in teoremi ricade sulle spalle dei posteri e sebbene nel XVIII sec., grazie ad Eulero, vengano elaborate quasi tutte le dimostrazioni necessarie, un particolare "teorema" resiste a circa 350 anni di assalti frontali diventando croce e delizia, con una spiccata propensione per la prima, di numerosi matematici.

L’ultimo teorema di Fermat

> Cubum autem in duos cubos, aut quadtratoquadtratum in duos quadratoquadratos et generaliter nullam in infinitum ultra quadtratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.[26]

> [Non è, invece, possibile dividere un cubo in due cubi, o un biquadrato in due biquadrati, né, in generale, dividere alcun’altra potenza di grado superiore al secondo in due altre potenze dello stesso grado: della qual cosa ho scoperto una dimostrazione veramente mirabile, che non può essere contenuta nella ristrettezza del margine.][27]

$x^n + y^n = z^n$
non possiede soluzioni
intere per $n>2$

Un appunto scarabocchiato sui margini (esigui) di un libro: così si presenta uno tra i più celebri problemi della matematica. L’enunciato è di una semplicità disarmante, eppure ha resistito a tre secoli di tentativi di dimostrazione condotti da matematici più o meno ferrati e con tecniche più o meno serie (si parla di alcune sedute spiritiche volte ad evocare lo spirito dello stesso Fermat). Di questa “dimostrazione mirabile” non è stata trovata traccia, si è persino giunti a dubitare della sua esistenza (o per lo meno della sua correttezza).

Cinque anni dopo la morte di Fermat, avvenuta nel 1665, il figlio Samuel decise di raccogliere le annotazioni paterne con la prospettiva di pubblicarle. Tra le carte trovò una copia dell’*Aritmetica* di Diofanto curata da Claude Bechet e pubblicata nel 1621 i cui margini riportavano diverse osservazioni scritte a mano. *Aritmetica* è l’opera principale del greco Diofanto e risale al III sec. a. C. Questo trattato rappresenta il primo esempio di uso sistematico di una notazione algebrica, contiene un corollario di problemi matematici e le rispettive, dettagliate, soluzioni. Sebbene siano giunti sino ai giorni nostri solo sei degli originali tredici volumi, con la traduzione (dal greco al latino) e la diffusione dell’*Aritmetica* Bechet si fece artefice di un rinnovato interesse per la matematica, dal momento che durante il medioevo gran parte delle

[26] A. CONTE, “Introduzione”, in P. DE FERMAT (1670), *Osservazioni su Diofanto*, Bollati Boringhieri, Torino, 1959, p. XVIII.

[27] P. DE FERMAT (1670), *Osservazioni su Diofanto*, Bollati Boringhieri, Torino, 1959, p. 2.

conoscenze antiche erano state dimenticate e nel '600 la cultura matematica stentava a prendere piede.

Samuel decise di pubblicare una nuova edizione dell'*Aritmetica* arricchita dalle quarantotto osservazioni paterne come appendice. La seconda di queste note, posta a margine del problema 8 del libro II "*dividere un quadrato dato in due quadrati*"[28], è passata alla storia come *ultimo teorema di Fermat*. Ci sono diversi problemi facili da enunciare e difficili da risolvere, ma se a questo fatto si aggiunge la storia di un matematico dilettante isolato dalla comunità di studiosi del suo tempo che dichiara di avere una *dimostrazione mirabile* andata perduta e che i migliori matematici non sono riusciti a ricostruire in 350 anni di tentativi, si arriva a comprendere il fascino di questa congettura, la cui fama è cresciuta nel tempo a suon di conferme della sua validità e offerte di sostanziosi premi in denaro per la sua risoluzione.

Il quesito 8 del libro II di Diofanto è strettamente collegato al teorema di Pitagora. Le soluzioni intere dell'equazione $x^2 + y^2 = z^2$ erano note sin dai tempi degli egizi che se ne servivano nell'edilizia per costruire degli angoli retti: una volta composto un cerchio formato da 12 segmenti di corda della stessa lunghezza, essi disegnavano sul terreno un triangolo rettangolo formando dei lati da 3, 4, 5 segmenti. I numeri interi che soddisfano questa equazione sono detti *terna pitagorica* e sono trattati anche negli *Elementi*, dove Euclide fornisce una formula per calcolarne gli infiniti valori. Fermat iniziò a ragionare su questo problema, arrivando a chiedersi se, cambiando l'esponente, fosse ancora possibile individuare delle soluzioni intere. Egli fornì la risposta con il suo celebre teorema, sostenendo che per ogni esponente maggiore di 2 non esistevano soluzioni.

Che avesse realmente trovato una dimostrazione alla sua congettura, oppure no, rimane un mistero; quel che è certo è che una prima dimostrazione di impossibilità, per $n = 4$, fu abbozzata dallo stesso Fermat. Per ulteriori progressi occorre aspettare il 1753: Eulero scrisse al matematico prussiano Goldbach dicendo di aver dimostrato la congettura per $n = 3$. La sua dimostrazione, in realtà, conteneva una fallacia e anche se la correzione non è avvenuta attraverso il metodo teorizzato da Eulero, questo risultato è comunque attribuito a lui.

Con la conferma della validità della congettura per $n = 3$ e $n = 4$ vengono dimostrati automaticamente anche tutti i casi dove n è un multiplo di 4 o multiplo di 3. I tentativi di dimo-

---

[28] *Ibidem.*

strare il teorema si restrinsero al caso dei numeri primi perché così facendo tutti gli altri casi, essendo multipli dei numeri primi, sarebbero stati dimostrati automaticamente.

Nel 1825 Peter Gustav Lejeune Dirichlet e Adrien-Marie Legendre dimostrarono il teorema di Fermat per $n = 5$. Quattordici anni dopo Gabriel Lamé utilizzò lo stesso ragionamento per dimostrare $n = 7$. Questi importanti risultati si basano sulla deduzione di Sophie Germain che, nel 1820 circa, individuò un metodo per determinare una particolare classe di numeri primi che probabilmente non fornivano soluzioni per l'equazione $x^n + y^n = z^n$.

Questo modo di procedere, analizzando caso per caso, non era comunque adatto per elaborare una soluzione generale e, se da un lato faceva apparire l'enigma sempre più vulnerabile, dall'altro manifestava quanto una dimostrazione vera e propria fosse complessa e sfuggente.

Un primo passo verso una maggiore generalizzazione fu compiuto dal matematico tedesco Ernst Kummer nel 1847: egli suddivise i numeri primi in regolari ed irregolari a seconda di una specifica proprietà, riuscendo poi a dimostrare la validità dell'Ultimo Teorema di Fermat per la classe di numeri primi regolari. In un solo colpo, Kummer dimostrò tutti i casi in cui n è un numero primo dispari inferiore a 100 eccetto 37, 59 e 67 (a qualche decina d'anni dalle "sudate" dimostrazioni di Dirichlet, Legendre e Lamé). Da questo momento in poi, complice l'avvento dei calcolatori, vennero analizzati valori di n sempre più grandi, tanto che all'inizio degli anni '90 era stata assodata la validità del teorema per n compreso tra 2 e 4.000.000.

Tutti questi risultati non dimostravano completamente l'ultimo teorema di Fermat: una possibile soluzione giunse ancora più tardi e seguendo un ragionamento abbastanza inaspettato. Una delle idee chiave fu di riformulare il problema in termini geometrici. Il primo passo lo fece il matematico Geld Faltings nel 1983 dimostrando la cosiddetta "congettura di Mordell". Questa scoperta, trasposta alla teoria dei numeri, implica che l'equazione di Fermat possiede solo un numero finito di soluzioni in numeri interi per ogni $n > 2$. Questa rivelazione accese nuove speranze, ma non si riuscì ad approfondire il teorema di Faltings fino a dimostrare che il numero finito di soluzioni per $n > 2$ fosse uguale a zero.

Parallelamente, in Giappone, i matematici Taniyama e Shimura ipotizzarono una connessione tra le curve ellittiche e le forme modulari. Le forme modulari sono state studiate per la prima volta nel XIX sec. e sono delle entità matematiche caratterizzate da un grado infinito di simmetria: ciò significa che, anche a seguito di una rotazione, una riflessione o una traslazione, queste forme appaiono invariate. Rappresentarle attraverso un disegno è impossibile in quanto esistono in uno spazio complesso a quattro dimensioni. Le curve ellittiche invece erano note già ai greci e non possiedono alcuna simmetria. Non hanno nessun collegamento con le forme modulari.

Taniyama e Shimura si proponevano di dimostrare esattamente il contrario. Nel 1955, anno del Convegno internazionale della matematica a Tokyo, Taniyama sottopose ai partecipanti la congettura secondo cui ogni forma modulare fosse associata ad una curva ellittica. Quest'idea era rivoluzionaria di per sé in quanto individuava un nesso tra due argomenti separati e completamente differenti, con conseguenze di enorme portata in entrambi i campi di applicazione, ma lo stupore fu ancora più grande quando, nel 1986, Gerhard Frey stabilì che la dimostrazione di questa congettura implicasse la dimostrazione del teorema di Fermat. Frey presuppose che l'ultimo teorema fosse falso, ossia che dalla sua equazione con $n > 2$ fosse possibile individuare delle soluzioni intere. Per mezzo di questa soluzione ipotetica riscrisse l'equazione di Fermat ottenendo l'equazione di una curva ellittica. Tuttavia questa equazione era troppo strana per essere messa in relazione con una forma modulare. Questo ragionamento venne dimostrato l'anno seguente da Kenneth Ribet. A questo punto l'ultimo teorema di Fermat era indissolubilmente legato alla congettura di Taniyama-Shimura. Il celebre enigma del XVII secolo e la congettura rivoluzionaria del XX sec. uniti dalla logica di una dimostrazione e dalla caparbietà con cui ne rifuggivano. La sfida fu colta dal matematico inglese Andrew Wiles.

Wiles era rimasto affascinato dall'ultimo teorema di Fermat sin da ragazzo, quando cercò di dimostrarlo attraverso la matematica imparata al liceo. Nel corso degli anni la risoluzione dell'enigma si trasformò in una vera e propria ossessione. Trascorse sette anni a lavorare assiduamente alla risoluzione della congettura di Taniyama-Shimura, senza svelare a nessuno quale fosse il reale oggetto delle sue ricerche.

Il 21 giugno 1993 in occasione di un convegno sulla teoria dei numeri a Cambridge, Wiles tenne il primo di tre interventi volti a illustrare il suo straordinario risultato. Nonostante la sua riservatezza la notizia sull'oggetto della sua esposizione era trapelata, creando un'atmosfera di frenetica aspettativa. Il 23 giugno Wiles tirò le fila dei suoi ragionamenti, provò la congettura di Taniyama-Shimura, annotò sulla lavagna l'enunciato dell'ultimo teorema di Fermat e disse "Penso di fermarmi qui" [29]. L'aula esplose in un applauso prolungato.

Dopo 350 anni di tentativi, conferme ed errori, l'enigma sembrava svelato. In realtà si sarebbe consumato a breve un ultimo colpo di scena: nel corso della verifica del lavoro di Wiles da parte di una giuria composta da sei matematici emerse un errore non tanto grave da invalidare l'intera dimostrazione, ma abbastanza da renderla incompleta. Seguì un periodo di agitazione in cui il mondo accademico insisteva affinché Wiles pubblicasse i suoi calcoli di modo da poter operare sul problema, mentre Wiles cercava di guadagnare abbastanza tempo da riuscire a correggere per conto proprio la dimostrazione a cui aveva consacrato sette anni.

In questo delicato momento Wiles fece ricorso alla collaborazione di uno dei giudici responsabile della verifica, nonché suo ex studente, Richard Taylor.

Nell'ottobre del 1994 l'errore non era stato ancora corretto. Nonostante lo sconforto, i due matematici convennero di perseverare un altro mese, dopodiché avrebbero resa pubblica la dimostrazione sebbene incompleta.

La svolta si ebbe grazie ad una brillante intuizione di Wiles che corresse il passaggio inesatto integrando i suoi calcoli con una teoria che aveva già tentato di utilizzare per risolvere la congettura di Taniyama-Shimura, ma che infine aveva accantonato.

Il 25 ottobre 1994 vennero consegnati per la pubblicazione due manoscritti: uno, più ampio, intitolato *Curve ellittiche modulari e Ultimo Teorema di Fermat* di Andrew Wiles; l'altro, più breve a titolo di integrazione, *Proprietà teoriche di anello di alcune algebre di Hecke* di Richard Taylor e Andrew Wiles.

Questa dimostrazione è importante non solo in quanto trionfo intellettuale, ma anche per le tecniche matematiche su cui si basa: Wiles ha infatti riunito in un'unica dimostrazione alcune tra le più importanti scoperte della teoria dei numeri, fondendole in combinazioni originali e versatili. Solo la dimostrazione della congettura di Taniyama-Shimura rappresenta un traguardo importante: accertandone la sua validità si rende possibile affrontare problemi riguardanti le equazioni ellittiche attraverso le funzioni modulari. Inoltre questo teorema instaura un incredibile connessione tra aree diverse della matematica, alimentando l'idea di una grande matematica unificata da schemi sempre più generali.

[29] S. SINGH (1997), L'ultimo teorema di Fermat, Bur, Milano, 1999, p. 281.

Purtroppo, al momento della pubblicazione della sua dimostrazione, Wiles aveva già superato i 40 anni che, secondo il rigido regolamento, costituiscono la soglia oltre i quali non è più possibile concorrere per la medaglia Fields, il più autorevole premio matematico. L'Unione Internazionale dei Matematici decise di premiare comunque il suo lavoro: in occasione della seduta inaugurale del Congresso il presidente della società, David Mumford, consegnò a Wiles una tavoletta d'argento dicendo: "*Mi dispiace che l'esiguità della tavoletta ci abbia impedito di incidervi sopra la sua dimostrazione*"[30].

L'ultimo grande enigma di Fermat dunque è stato risolto e, per ironia della sorte, proprio da un matematico d'oltremanica, come quelli che Fermat si divertiva tanto ad istigare.

1.1.2 GIOCO DI ASSOCIAZIONI.

> Escher si divertiva sempre moltissimo con queste associazioni. Ricordava che anche da bambino si divertiva a porsi indovinelli come questo: come stabilire un'associazione logica tra la lettera L e la coda di un cane? Una risposta, per esempio, poteva essere questa: cominciare dalla L di *lucht* (aria), passare attraverso uccello - nido - ramo - giardino - cane, per arrivare alla coda. Molte delle sue opere, esemplificate da *Metamorfosi II*, costituiscono una dimostrazione visiva di questo tipo di gioco.[31]

Dopo aver approfondito l'opera di Escher e di Fermat è facile intuire che l'approccio da dilettanti alla matematica è solo uno degli aspetti in comune con la rivista *Rudi Mathematici*. Da una parte c'è Escher che attraverso la sua attività di artista interessato alle strutture matematiche, costruisce un ponte tra due culture, quella artistica e quella matematica. Dall'altro lato c'è Fermat che incarna il fruitore della matematica come passatempo intrigante e sorprendente che mette alla prova la creatività della sua intelligenza. Il suo ultimo teorema enfatizza l'aspetto di sfida e la sua dimostrazione è un esempio di associazione di idee dall'impatto folgorante. Le parole chiave, dunque, sono intuito, creatività, fascino, divertimento, sfida che bene si adattano all'arguzia necessaria ad individuare la modalità di risoluzione di un problema, la creatività con cui si fa fronte all'assenza di una soluzione predeterminata, il modo

---

[30] A. Conte, "Introduzione," in S. SINGH (1997), *L'ultimo teorema di Fermat*, Bur, Milano, 1999, p. XXI.

[31] J. L. LOCHER (a cura di) (1978), *Il mondo di Escher*, Garzanti, Milano, 1978, p. 16.

affascinante in cui l'enunciato viene presentato e la voglia di divertirsi che spinge ad affrontarlo, il tutto reso intrigante dal carattere di sfida.

Come in Escher e Fermat, anche nel caso della matematica ricreativa si parla di un passatempo di tutto rispetto: veicolare la matematica attraverso un'attività ludica non significa necessariamente banalizzarla. L'attività dei matematici è intrinsecamente legata alla soluzione di problemi ed è basata sulla formulazione di nuove teorie che a loro volta generano nuovi problemi. In questo caso i quesiti sono selezionati, resi più accessibili e presentati in una forma intrigante. Il requisito fondamentale non è tanto padroneggiare la teoria, quanto apprezzare la disciplina in sé. La tecnica può sopraggiungere in seguito e magari anche grazie all'essersi dilettati con la matematica.

1.1.3 CHI HA PAURA DELLA MATEMATICA?

> Si è stabilito un consenso generale che determina tacitamente ma in modo massiccio l'atteggiamento verso la matematica. A nessuno sembra dar fastidio che la sua esclusione dalla sfera della cultura corrisponde a una specie di castrazione intellettuale. Chi giudica deplorevole questa situazione, chi mormora qualcosa sul fascino e l'importanza, sulla portata e la bellezza della matematica è considerato un esperto e guardato con stupore; e se si fa riconoscere come un cultore dilettante, passa nel migliore dei casi per uno stravagante che si occupa di un hobby insolito come se allevasse tartarughe o collezionasse fermacarte vittoriani.
>
> HANS MAGNUS ENZENSBERGER[32]

Escher ha mostrato quanto fosse bella e Fermat quanto potesse essere intrigante.

Anche in *Rudi Mathematici* la matematica viene presentata sotto una luce diversa da quella che ci si aspetterebbe tenendo conto di tutti i luoghi comuni che sottendono la sua percezione: "matematica ricreativa" per alcuni è un vero e proprio ossimoro. Tra gli obiettivi della rivista rientra il nobile progetto di rivalutarne l'immagine auspicando il famoso supera-

[32] H. M. EZENSBERGER (2002), *Gli elisir della scienza*, Einaudi, Torino, 2004, p. 7.

mento della separazione tra le culture (umanistica e scientifica) e dell'idea distorta che se ne ha. Dal punto di vista operativo ciò si traduce nella diffusione ed elaborazione di giochi, problemi, indovinelli, ma anche nella stesura di rubriche incentrate sulla storia della matematica, dei suoi protagonisti e delle loro idee, facendo ricorso anche a temi non-matematici e ad una narrazione umoristica e giocosa.

> La matematica non è un gioco.
>
> Non è necessariamente facile, piacevole, divertente. La matematica non è leggera, non è una disciplina riservata solo a spiriti nobili o brillanti, o a quei personaggi necessariamente sbadati, distratti, dipinti sempre a mezza strada tra il genio e l'autismo. Non è un'attività destinata ad esseri umani speciali, fuori dalle regole, esterni al catalogo della normale umanità.[33]

Ma cos'è, allora, la matematica?

[33] "*Per gioco*" in RUDI MATHEMATICI N. 119 dicembre 2008, p. 3 <http://www.rudimathematici.com/archivio/119.htm>