Approccio ricorsivo al problema degli *n* punti su un cerchio

Michele Botta

e-mail: maco0025@yahoo.it

Abstract: In questo paper si propone una soluzione alternativa a un problema già risolto in due dimensioni che (per quelle che sono le informazioni a nostra disposizione) rimane aperto in tre, cinque e più dimensioni.

1. Introduzione

Il nostro obbiettivo è trovare la probabilità che presi casualmente *n* punti su una circonferenza, il poligono che viene a formarsi contenga il centro del cerchio. Proviamo indipendentemente un risultato noto, vedi riferimento bibliografico [1], proponendo una soluzione ricorsiva alternativa.

Definizione 1. Definiamo f(n) come la probabilità che, presi n punti in modo casuale su una circonferenza, il poligono che viene a formarsi contenga il centro del cerchio.

$$f: \ n \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \rightarrow q \ \in \ \mathbb{Q}, \ 0 < q < 1 \, .$$

Per n=2 il poligono degenera in un segmento e per contenere il centro è necessario che i due punti siano diametralmente opposti, quindi fissiamo un punto e la probabilità che l'altro sia diametralmente opposto al primo è 0, ne consegue che f(2)=0. In ogni versione k-dimensionale del problema (per esempio, k=3 implica che si abbia a che fare con una sfera anziché con un cerchio) se $n \leq k$, allora f(n)=0. Nella figura seguente vediamo due possibili poligoni che emergono dai punti definiti.

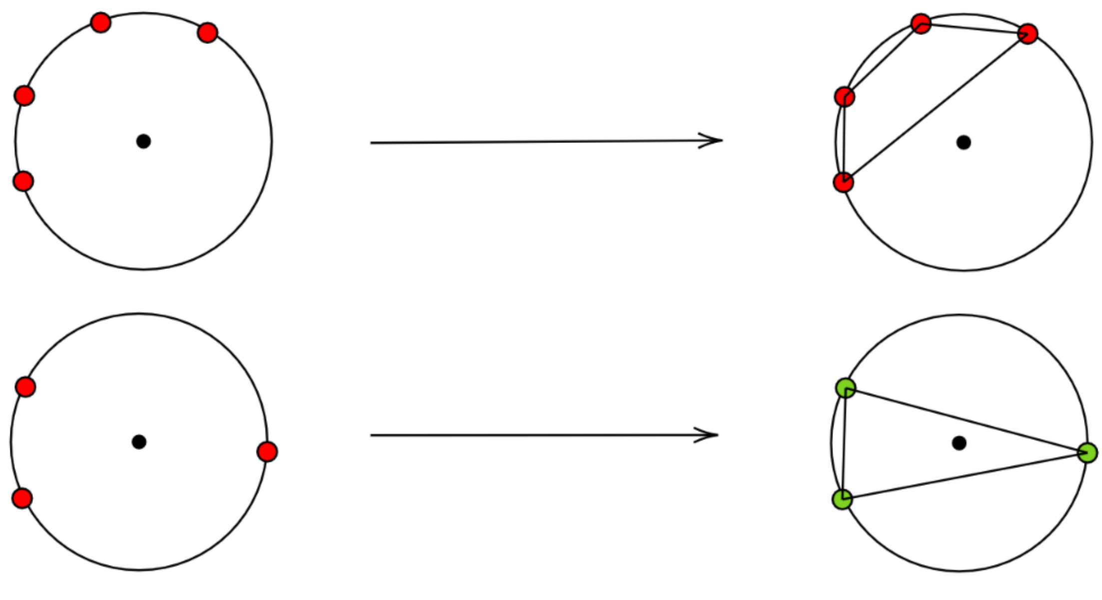

Figura 1. Nel primo caso il poligono non contiene il centro del cerchio, mentre nel secondo caso lo contiene.

2. Il caso base *n*=3

Risolviamo il caso *n*=3 (il più semplice). Se fissiamo due punti della circonferenza e tracciamo le linee che passano per i punti e per il centro, notiamo che l'ultimo punto deve stare nell'arco 3, quello opposto all'arco compreso tra i due punti. La probabilità che questo avvenga corrisponde alla misura quell'arco rispetto a tutta la circonferenza e il caso medio sarà f(3). In Figura 2 mostriamo quattro esempi.

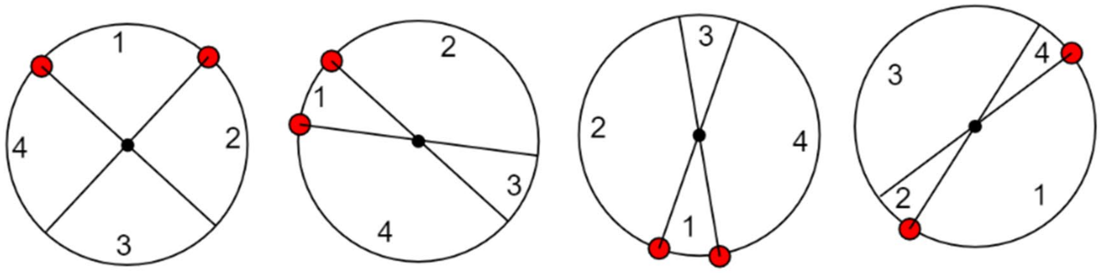

Figura 2. Se l'ultimo punto cade nell'arco 3 il centro è contenuto dal triangolo.

Per trovare il caso medio dobbiamo fare un altro step: invece di fissare *n*-1 punti fissiamo *n*-1 linee e otteniamo 2^{n-1} possibili configurazioni di punti, come mostrato in Figura 3.

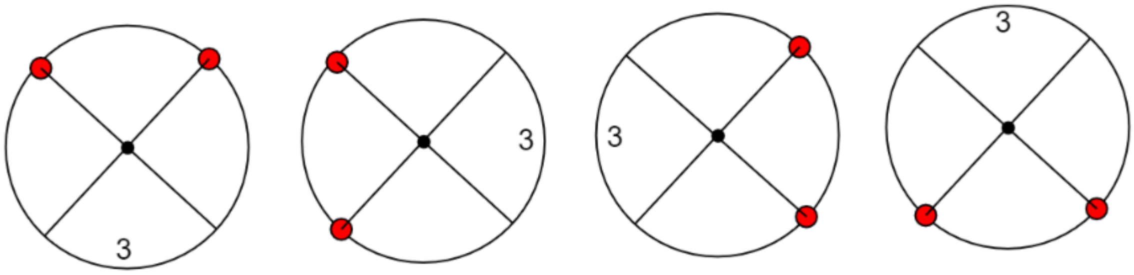

Figura 3. Le quattro configurazioni possibili per queste linee fissate.

Continuiamo a chiamare l'arco possibile per l'ultimo punto *arco 3*. Stabiliamo una relazione tra la lunghezza della circonferenza e la probabilità che il poligono contenga il centro; infatti se la lunghezza dell'arco possibile per l'ultimo punto è A_p e la lunghezza della circonferenza è A_c , allora la probabilità che il poligono contenga il centro è $\frac{A_p}{A_c}$. Poniamo il raggio del cerchio uguale a $\frac{1}{2\pi}$ in modo che la lunghezza della circonferenza sia 1 e se l'intera circonferenza è arco possibile per l'ultimo punto la probabilità che il poligono contenga il centro è 1. Notiamo che nelle quattro configurazioni gli archi possibili coprono tutta la circonferenza, e il caso medio è perciò $\frac{1}{4}$.

Quindi,

$$f(3) = \frac{1}{4}. \tag{1}$$

Congettura 1. Consideriamo la k-sfera S_k (S_2 è un cerchio, S_3 indica una sfera, S_4 un'ipersfera, etc.) e poniamo n=k+1. Si congettura che la probabilità che la figura che emerge da n punti presi casualmente sulla superfice di S contenga il centro di S sia $\frac{1}{2^k}$.

3. Risultato principale

Definizione 2. Abbiamo fissato n-1 linee e generato 2^{n-1} possibili configurazioni con $2 \cdot (n-1)$ archi (vedi Sezione 2); definiamo un arco come un *arco possibile* in una data configurazione se è vero che in quella configurazione quando l'ultimo punto cade su quell'arco, allora il poligono contiene il centro.

Fissiamo un arco A e identifichiamo il numero di configurazioni per cui A risulti essere un arco possibile. Chiamiamo r_1 e r_2 i raggi che definiscono il settore circolare opposto a quello sotteso da A; otteniamo che A è un arco possibile se e solo se esiste una coppia di punti (P_1, P_2) tale che P_2 appartenga all'arco compreso tra il raggio opposto a quello a cui appartiene P_1 e il più vicino a questo raggio tra r_1 e r_2 (l'arco possibile per P_2 include anche l'estremità opposta del segmento a cui appartiene P_1, ma assumiamo che tutti i punti giacciano su linee diverse). Nella Figura 4, mostriamo tutti i punti che si abbinano col punto rosso per rendere A un arco possibile.

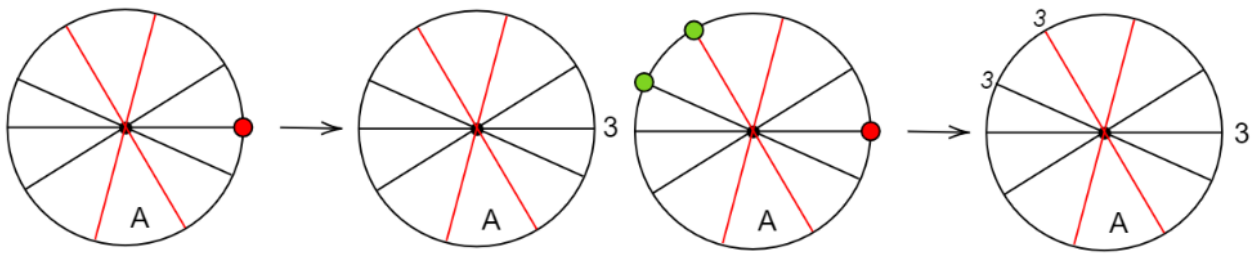

Figura 4. A è un arco possibile dato che i punti verdi e quello rosso identificano le due coppie di punti verde-rosso indicate.

Notiamo che il numero di configurazioni in cui A è un arco possibile dipende dal numero di coppie che rendono A possibile. La Figura 5 mostra tutte le possibili coppie che rendono A possibile per n=*6*.

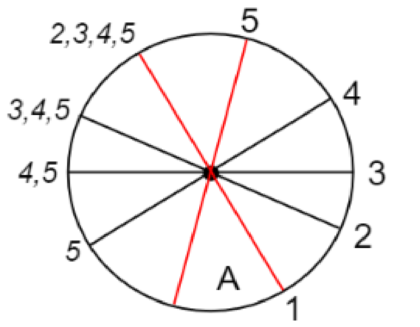

Figura 5. Tutte le possibili coppie di punti che rendono A un arco possibile.

Come mostrato in Figura 6, possiamo vedere che per un dato insieme di n-1 linee fissate per ogni arco, il numero di coppie che rendono l'arco un arco possibile è lo stesso.

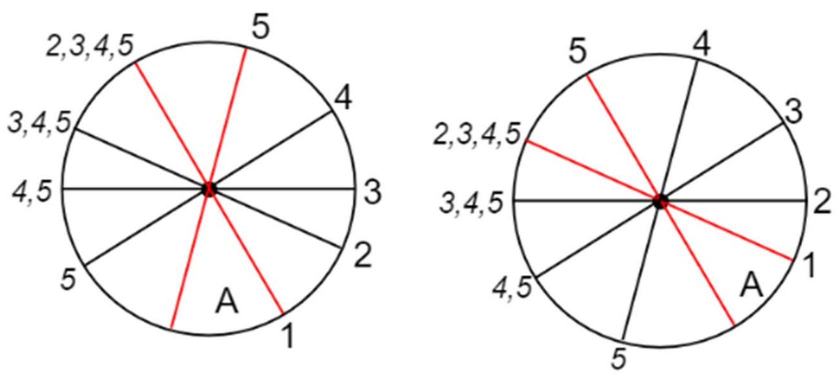

Figura 6. Il numero di coppie di punti della circonferenza che rendono un arco possibile è lo stesso per ciascun arco.

Se il numero di coppie che rendono un arco un arco possibile è lo stesso per ogni arco, anche il numero di configurazioni in cui un arco è possibile è lo stesso per ogni arco. Indichiamo con c(n) il numero di configurazioni tali che un arco è possibile. Ne consegue che l'intera circonferenza (che ha lunghezza unitaria) sarà un arco possibile c(n) volte all'interno di tutte le 2^{n-1} possibili configurazioni.

Quindi,

$$\mathrm{c} : n \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \rightarrow m \in \mathbb{N},$$

$$\mathrm{f}(n) = \frac{\mathrm{c}(n)}{2^{n-1}} . \qquad (2)$$

Per trovare c(n), fissiamo un arco A e proviamo a trovare il numero di configurazioni dove A è un arco possibile. Dato che un punto può cadere su due estremità di una linea, possiamo prendere una linea e dire che c(n) corrisponda al numero di configurazioni tali che A sia un arco possibile con il punto P su un'estremità, più il numero di configurazioni in cui A sia un arco possibile con il punto P che cade sull'altra estremità. Prendiamo una delle linee che definiscono A e fissiamo il punto P dall'altra parte rispetto ad A. Chiamiamo j_1 il semicerchio definito da quella linea (dove risiede A) e indichiamo come j_2 l'altro semicerchio. Ne consegue che è sufficiente che ci sia un punto che cada su j_2 per formare una coppia con P che renda A un arco possibile; l'unico caso in cui questo non avviene è la configurazione con tutti gli altri n-2 punti che appartengono a j_1.

Abbiamo fissato un punto e rimangono n-2 linee. Ne consegue che il caso dove tutti i punti appartengono a j_1 è unico, quindi il numero di configurazioni in cui A è un arco possibile, con P dall'altra parte rispetto ad A, è $2^{n-2} - 1$.

Mostriamo in Figura 7 tutti gli n-2 punti che si abbinano con P per fare di A un arco possibile.

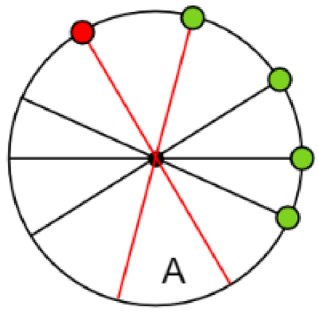

Figura 7. Il punto P (il rosso) cade sull'altro lato rispetto ad A ed è sufficiente che ci sia uno dei punti verdi per rendere A un arco possibile.

Studiamo cosa accade se il punto P cade dalla parte di A. In questo caso nessun altro punto può abbinarsi con P per formare una coppia che renda A un arco possibile. Infatti, il raggio opposto a quello a cui appartiene P è esattamente uno tra r_1, r_2, quindi l'arco possibile per l'altro punto è il solo punto alla fine del raggio opposto a quello a cui appartiene P, ma assumiamo che tutti i punti si trovino su linee diverse dato che la probabilità che due punti si trovino sulla stessa linea è 0. Quindi, è come se la linea dove P cade non esistesse e la possiamo rimuovere. Ne consegue che il numero di coppie che rende A un arco possibile è lo stesso che nel caso n-1. Se il numero di coppie è lo stesso che nel caso n-1, anche il numero di configurazioni è il medesimo, quindi se P cade dalla stessa parte di A il numero di configurazioni dove A è un arco possibile è c(n-1). In Figura 8 vediamo che quando il punto P cade dalla stessa parte di A nessun altro punto può fare coppia con P per rendere A un arco possibile.

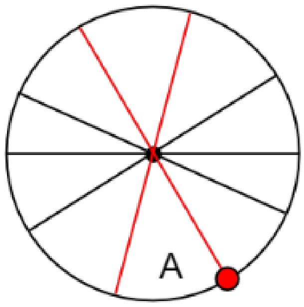

Figura 8. Non esiste un punto che si abbini col punto rosso per creare una coppia che renda A un arco possibile.

Dato che il punto P cade sullo stesso lato di A, vediamo che possiamo rimuovere la linea (Figura 9), quindi il numero di coppie che rendono A un arco possibile è lo stesso che nel caso n-1.

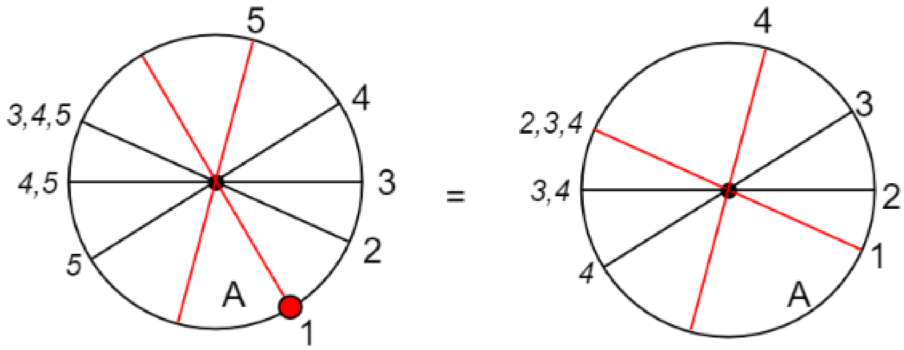

Figura 9. Le coppie sono le stesse che nel caso *n-1*.

Finalmente sappiamo quanto vale c(n); se P cade dall'altra parte rispetto ad A il numero di configurazioni che rendono A un arco possibile è $2^{n-2} - 1$, mentre se P cade parte opposta rispetto ad A, allora il numero di configurazioni è c(n-1).

Dunque,

$$\mathrm{c}(n) = 2^{n-2} - 1 + \mathrm{c}(n-1), \mathrm{c}(2) = 0 \Rightarrow \mathrm{c}(n) = 2^{n-2} - 1 + 2^{n-3} - 1 + \cdots + 2^1 - 1\,. \tag{3}$$

Ne consegue che

$$\mathrm{c}(n) = \sum_{j=2}^{n-1} \left(2^{n-j} - 1\right). \tag{4}$$

Ora esplicitiamo c(n) secondo l'equazione 4 e abbiamo che

$$\mathrm{f}(n) = \frac{\sum_{j=2}^{n-1}(2^{n-j}-1)}{2^{n-1}}. \tag{5}$$

Quindi

$$\mathrm{f}(n) = 1 - \frac{n}{2^{n-1}} \ . \tag{6}$$

Quando *n* tende a infinito, $\frac{n}{2^{n-1}}$ diventa infinitesimo. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 0 \, . \tag{7}$$

Risulta pertanto che

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{f}(n) = 1 \, . \tag{8}$$

4. Esempi

La Tabella 1 (vedi sotto) presenta i casi principali: *n* indica il numero di punti presi casualmente sulla circonferenza, 2^{n-1} rappresenta il numero delle possibili configurazioni con *n*-1 linee fissate, c(*n*) è il numero di configurazioni dove un dato arco A è un arco possibile per l'ultimo punto e f(*n*) corrisponde alla probabilità che il poligono che emerge dagli *n* punti contenga il centro del cerchio.

$\boldsymbol{n}$	$\mathbf{c}(\boldsymbol{n})$	$\mathbf{2}^{\boldsymbol{n-1}}$	$\mathbf{f}(\boldsymbol{n})$
2	0	2	0
3	1	4	0.25
4	4	8	0.5
5	11	16	0.6875
6	26	32	0.8125
7	57	64	0.8906
8	120	128	0.9375
9	247	256	0.9648
10	502	512	0.9804
11	1013	1024	0.9892
12	2036	2048	0.9941
13	4083	4096	0.9968
14	8178	8192	0.9982
15	16369	16384	0.999
16	32752	32768	0.9995
17	65519	65536	0.9997
18	131054	131072	0.9998
19	262125	262144	0.9999
20	524268	524288	0.9999

Tabella 1. Per $n \geq 19$ la probabilità che il poligono non contenga il centro del cerchio è inferiore a $\frac{1}{10000}$.

5. Conclusioni

Abbiamo risolto questo problema in un modo più complesso della soluzione già nota [1], nell'auspicio che questo metodo possa essere d'aiuto nella risoluzione della versione a tre o più dimensioni, che sono problemi aperti; in particolare, il caso n=4 per k=3 è stato risolto (cfr. [2]&[3]).

Bibliografia

[1] math.stackexchange.com (2018). *Probability that polygon formed by n points on a circle contain the center of the circle ?*. Accessed on Dec. 10 2020. Avialable online at `https://math.stackexchange.com/questions/2786367/probability-that-polygon-formed-by-n-points-on-a-circle-contain-the-center-of-th`

[2] G. Sanderson, youtube.com/3Blue1Brown, *The hardest question on the hardest test* (2017). Accessed on Dec. 10 2020. Avialable online at `https://www.youtube.com/watch?v=OkmNXy7er84&vl`

[3] N. Guarìn-Zapata, nicoguaro.github.io, *Probability that a random tetrahedron over a sphere contains its center* (2017). Accessed on Dec. 10 2020. Avialable online at `https://nicoguaro.github.io/posts/putnam_prob/`