

STRUTTURE MODULARI ASSOCIATE AL PROBLEMA DELLA PRIMALITÀ DI ALCUNE SEQUENZE CONCATENATE

Marco Ripà

<http://spiqrsociety.webs.com/>

E-mail: marcokrt1984@yahoo.it

Sintesi In questo articolo, mostriamo le relazioni interne tra gli elementi della sequenza circolare $(1, 12, 21, 123, 231, 312, 1234, 2341, \dots)$. Illustriamo un metodo per minimizzare il lotto dei “candidati numeri primi” fino a un prestabilito termine della sequenza. Così, avendo scelto un particolare divisore primo, è possibile analizzare solo un quantitativo fissato dei più piccoli termini appartenenti a un dato intervallo, ricavando quindi la distribuzione di quel fattore primo in un più vasto insieme di elementi. In conclusione, combiniamo questi risultati con un altro, estendendo al contempo l’analisi ad alcune nuove sequenze di interi collegate a quella circolare.

Termini chiave Relazioni di ricorrenza, fattorizzazione, schemi, sequenze intere, permutazioni, numeri primi, strutture modulari.

§1. INTRODUZIONE E RISULTATI PRINCIPALI

Introduciamo alcune notazioni al fine di indicare (sinteticamente) speciali gruppi di termini della sequenza [A001292](#), facente parte della *On-line Encyclopedia of Integer Sequences* [8]. Innanzitutto, dobbiamo descrivere cosa sia precisamente la *sequenza circolare* [9-12].

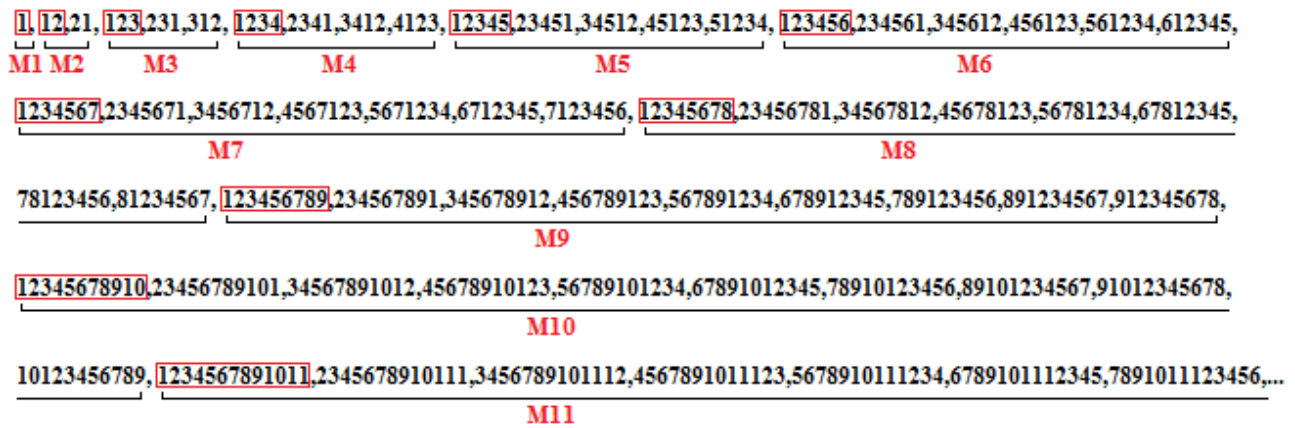


Figura 1: I primi termini della sequenza circolare di Smarandache e alcuni appartenenti alla sequenza consecutiva [7].

Definizione 1.1. Dato l' n -esimo termine della sequenza consecutiva di Smarandache [A007908](#), costruita giustappoendo i primi n interi, chiamiamo “*permutazioni circolari*” gli n elementi che compongono il sottoinsieme delle permutazioni della forma:

$$\begin{aligned} a_{j-i+1} &:= 2_3_4_..._ (n-1)_n_1 \Rightarrow p_1=1, \\ a_{j-i+2} &:= 3_4_..._ (n-1)_n_1_2 \Rightarrow p_2=2, \\ &\dots \\ a_j &:= (i+1)_(i+2)_..._ (n-1)_n_1_2_..._ (i-1)_i \Rightarrow p_i=i, \\ &\dots \\ a_{j+n-i} &:= 1_2_3_..._ (n-1)_n \Rightarrow p_n=n. \end{aligned}$$

Bisogna ora chiarire i due parametri necessari a isolare una data classe di elementi rispetto al resto [7].

Definizione 1.2. Sia $r:=n$ l' n -esimo costituente dell' n -esimo termine della sequenza consecutiva $(1_2_3_..._ (n-1)_n)$, indichiamo con $M(r)$ l'intero insieme delle permutazioni circolari di quell'elemento (definizione 1.1). Dato r , specifichiamo un particolare termine della sequenza circolare semplicemente assegnando un valore al parametro p .

Per esempio, $(r=n, p=i)$ indica $a_j:= (i+1)_(i+2)_..._ n_1_2_..._ (i-1)_i \in M(n)$. Ovviamente $\overline{123 \dots (n-1)n}$, con $n \geq 1$ [5], l'elemento generico della sequenza consecutiva, è caratterizzato da $p=r=n$.

È noto che solo il 13. $\bar{3}$ % dei termini non sono divisibili per 2, 3 o 5 (i numeri che sono relativamente primi a 30) e Ripà [7] ha specificato la loro forma.

È possibile mostrare che gli elementi divisibili per un'ampia gamma di grandi fattori primi descrivono chiare strutture modulari all'interno della sequenza ed è abbastanza semplice individuare la loro dimensione.

Teorema 1.3. Dato uno specifico fattore primo $7 \leq pr < \sqrt{a_j}$, dove $a_j := (r=n, p=i)$, con l'intero insieme di valori caratterizzati da p e r formati da un fissato numero di cifre, se $a_j \mid pr$, allora $a_j := (r=n+q, p=i+k) \mid pr$. In particolare, se la lunghezza in cifre di r e p è la stessa, $q=k$.

Teorema 1.4. Dato a_j e definendo “ $d(p)$ ” la lunghezza in cifre di p , se $d(p)$ è (strettamente) minore di $d(r)$ – la lunghezza in cifre di r –, il numero naturale q , associato a ogni $\tilde{r}$ tale che $10^{d(p)-1} \leq \tilde{r} \leq 10^{d(p)} - 1$, è pari a k ¹.

Corollario 1.5. Siano fissati $d(r)$ e $d(p)$. $\forall pr < 9 * 10^{d(r)-1}$, q e k (se esistono) sono multipli di pr ($q := pr * t$ e $k := pr * s$, dove $t, s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)².

Usando i risultati di cui sopra, possiamo identificare svariati schemi per dati valori di $d(p)$ e $d(r)$. Per esempio, scegliendo $pr=7$ e $d(r)=d(p)=2$, abbiamo il modello in figura 2.

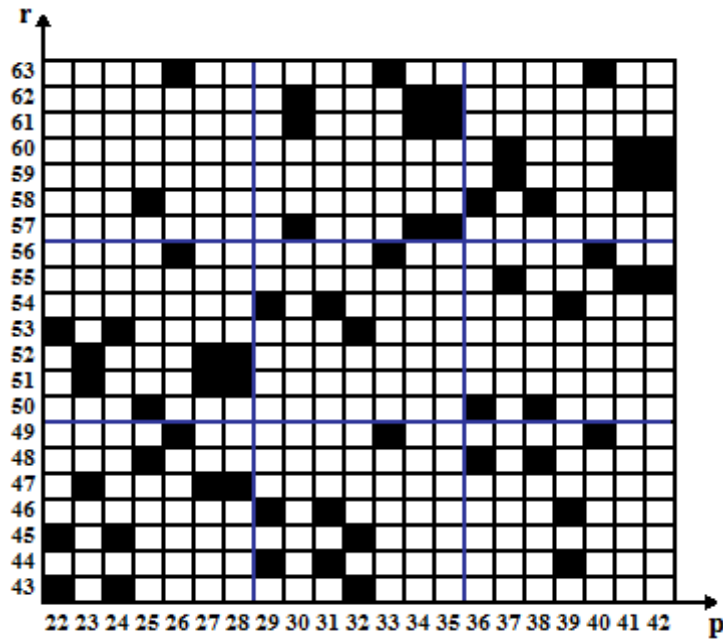


Figura 2: Schema ottenuto imponendo $pr=7$ e $d(r)=d(p)=2$.

Nel caso specifico, $d(r)=d(p) \Rightarrow k=q=7*m$, in particolare $m=3$.

La griglia evidenzia come ciascuna colonna e ciascuna riga contengano tre caselle nere; tuttavia non si tratta di una caratteristica generale. È possibile dedurre che la frazione dei termini della sequenza, divisibili per un dato “ pr ” associato a uno schema che ricorre più di una volta all’interno dell’intervallo $d(r)=\text{costante}$ prescelto, è almeno pari a $\frac{1}{pr}$. Sotto il vincolo su pr di poc’anzi, la disuguaglianza (non stretta) precedente include tutte le possibili combinazioni di $d(r)$ e $d(p)$. In tal modo, possiamo sfruttare questa relazione e sintetizzare una formula probabilistica volta a stimare l’occorrenza dei “candidati numeri primi” (i termini

¹ Chiaramente, $d(r) \in [1, +\infty)$ e $d(p) \in [1, d(r)]$.

² Poiché (per definizione) $d(r) \geq d(p)$, è possibile che il corollario 1.5 valga solo per q (mentre non esiste un siffatto k associato al dato pr). Questa evenienza implica $d(r) > d(p)$, giacché siamo in grado di identificare k (empiricamente) solo se è minore di $9 * 10^{d(p)-1}$.

che non sono divisibili per alcuno dei fattori primi presi in considerazione nell'analisi degli schemi) rispetto alla numerosità degli elementi appartenenti al sottoinsieme $d(r)=\text{costante}$ della sequenza circolare:

$$0.1\bar{3} - 0.1\bar{3} * \frac{1}{7} - 0.1\bar{3} * \frac{6}{7} * \frac{1}{11} - 0.1\bar{3} * \frac{6}{7} * \frac{10}{11} * \frac{1}{13} - \dots = 0.1\bar{3} * \left[\frac{6}{7} - \sum_{i=5}^h \frac{1}{pr_i} * \prod_{j=4}^{i-1} \left(1 - \frac{1}{pr_j} \right) \right] \quad (1)$$

L'indice h inerisce all' h -esimo elemento della sequenza dei numeri primi [A000040](#) $pr_j:=2,3,5,7,11,13,17,\dots$, per $j=1,2,3,4,5,6,7,\dots$, cosicché il primo termine della sommatoria di cui sopra è $pr_5:=11$, laddove i prodotti iniziano $pr_4:=7$.

Facendo specifico riferimento alla ripetitività delle strutture modulari, la concreta limitazione è che pr_h deve essere forzatamente minore di $9 * 10^{d(r)-1}$ ³.

Inoltre, escludendo dalla formula precedente i pr_j per cui i corrispondenti schemi non si ripetono almeno una volta, per il dato valore di $d(r)$, otteniamo una sovrastima probabilistica della proporzione dei candidati numeri primi⁴ (in tal caso, prendiamo in considerazione solo i fattori della moltiplicazione che potrebbero essere usati nella nostra analisi degli schemi, mentre il restante sottoinsieme di [A000040](#) deve essere rimosso dalla formula per la stima (1)).

Per illustrare un esempio di schema che non rispetta la precedente predizione, possiamo porre $pr=11$ e $d(r)=d(p)=2$ (vedi figura 3).

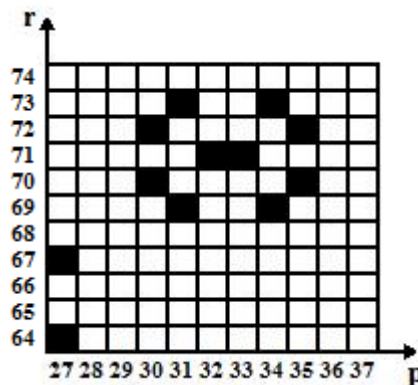


Figura 3: Schema ottenuto usando $pr=11$ e $d(r)=d(p)=2$.

Potremmo anche pensare all'implicito risultato [7] associato a $pr=37$ e $r=3$. In quel caso $m=1$, ma ci sono $37*2$ termini divisibili per 37 in ogni griglia di 37×37 elementi.

Infatti, esistono due differenti valori di $100 \leq r < 137$ tali che, per ogni possibile $p \leq r$, la fattorizzazione di $a_j := (p+1) \dots (r-1) \cdot r \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1) \cdot p$ include il fattore primo 37.

La sezione 4 contiene un assortimento aleatorio di altre strutture modulari della medesima tipologia, per $pr \in \{7, 11, 13, 37\}$ e $d(r) \leq 4$.

Un'ovvia conseguenza è che, una volta individuato il valore di $q := q(pr, d(r), d(p))$ per un dato $(pr^*, d(r \leq r^*))$, conosciamo automaticamente qual è il valore di $k := k(pr^*, d(r), d(p))$ per l'intero insieme di termini contraddistinti da $d(r) \leq d(r^*)$ (si ricordi che $d(p) \leq d(r)$, $\forall pr$). Dunque, sotto le precedenti condizioni fissate, k

³ Nella sezione 2, questi risultati saranno combinati con un altro al fine di restringere ulteriormente l'insieme dei candidati numeri primi.

⁴ In virtù della disuguaglianza stabilita poche righe fa.

è implicito in q. Un altro modo per formalizzare lo stesso risultato è quello di postulare che, per una coppia $(pr, d(p))$ fissata, il valore di k è costante al variare del parametro r . Ciò è mostrato graficamente nella figura sottostante:

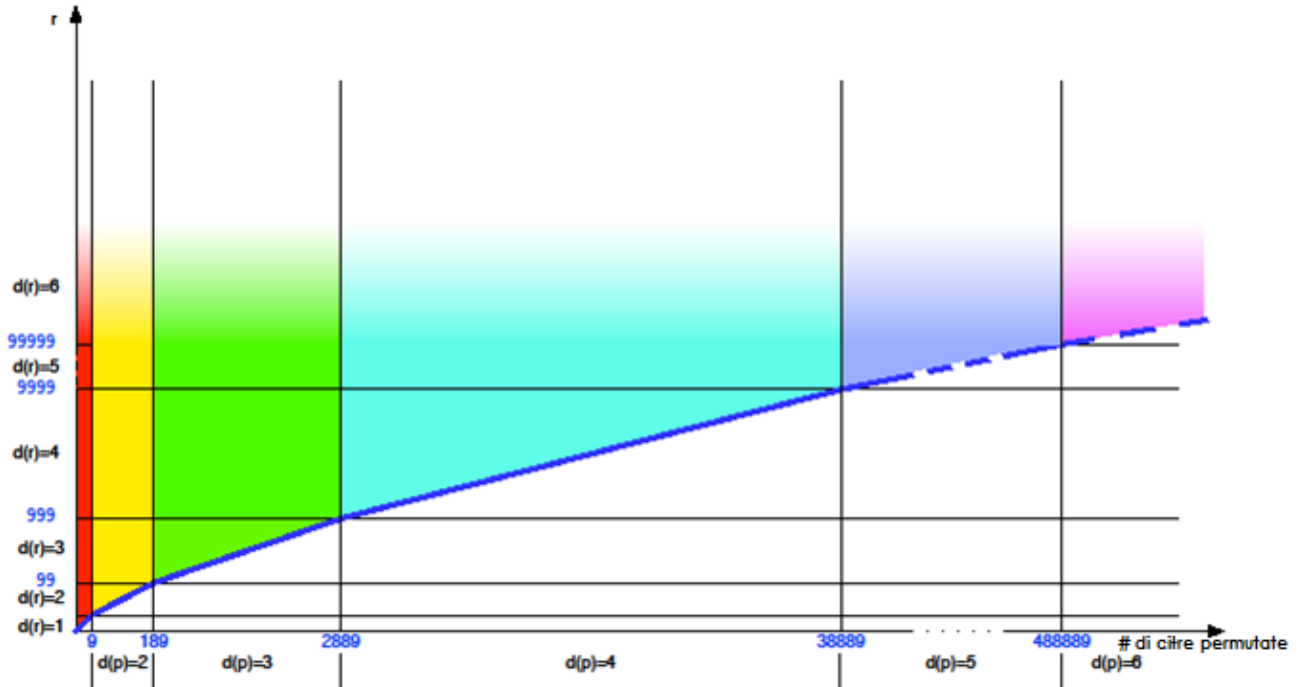


Figura 4: Nel grafico, settori dello stesso colore indicano insiemi di elementi caratterizzati da un identico valore di k .

C'è un'altra conseguenza (abbastanza facile da dimostrare): sia $pr=pr^*$ (cioè qualunque numero primo fissato), considerando due generici termini della sequenza consecutiva, poniamo $a':=(p=n', r=n') \in M(n')$ e $a'':=(p=n'', r=n'') \in M(n'')$ – dove $n' > n''$ –, i quali siano entrambi divisibili per pr^* , il seguente elemento della sequenza circolare risulta anch'esso divisibile per pr^* :

$$a''':=(n''+1)_{(n''+2)} \dots (n'-1)_{n'_1 2_3 \dots (n''-1)_{n''}} \in M(n').$$

Infatti, il numero $(n''+1)_{(n''+2)} \dots (n'-1)_{n'}$ è parimenti divisibile per pr^* .

Chiaramente siamo certi che pr^* divide i termini:

$$(n''+1)_{(n''+2)} \dots (n'-1)_{n'_1 \dots (n'+q-1)_{(n'+q)} 1_2 3 \dots (n''-1)_{n''}} \in M(n'+q),$$

$$(n''-k+1)_{(n''-k+2)} \dots (n'-1)_{n'_1 2_3 \dots (n''-k-1)_{(n''-k)}} \in M(n') \text{ e}$$

$(n''-k+1)_{(n''-k+2)} \dots n'_{(n'+1)} \dots (n'+q) 1_2 3 \dots (n''-k-1)_{(n''-k)} \in M(n'+q)$ **sse** $d(p)$ e $d(r)$ restano immutati. In tal modo, conoscendo la distribuzione di un *piccolo* fattore primo all'interno di una porzione della sequenza consecutiva, siamo in grado di escludere da quella circolare un altro sottoinsieme di elementi non primi. Questi dati ci consentono di elidere alcuni termini della sequenza consecutiva caratterizzati da $d(p)=d(r)$, giacché il periodo (noto) della sequenza consecutiva è q e, in quei settori, $q=k$ (teorema 1.3).

Per presentare un'applicazione pratica, possiamo utilizzare gli stessi fattori primi analizzati da Ripà [7] e studiare una particolare griglia quadrata composta da 37×37 termini, caratterizzati da $d(r)=d(p)=3$.

Lo schema è riportato in figura 5.

Le caselle bianche e quelle rosse rappresentano i candidati numeri primi (le seconde sottendono numeri effettivamente primi), le aree nere descrivono i termini che sono divisibili per (almeno) un fattore primo

appartenente a $\{2,3,5,37\}$, mentre gli spazi blu indicano gli elementi della sequenza circolare divisibili per 7, 11 o 13. In questo caso, i candidati-primi sono 101 (con 3 numeri primi [A181073](#)) su un totale di 1369 termini.

In un dato settore $(d(r),d(p))$, sovrapponendo lo schema dei termini divisibili per pr_{b+1} (con $b \leq h-1$) a quello degli elementi divisibili per $pr_{(j \leq b)}$, siamo in grado di ridurre il totale dei candidati numeri primi da verificare tramite un test di primalità [2]. Il vantaggio evidente è quello di testare solo una minoranza dei *più piccoli* termini della sequenza nel nostro quadrante $(d(r),d(p))$, per alcuni $7 \leq pr_j < 9 * 10^{d(r)-1}$.

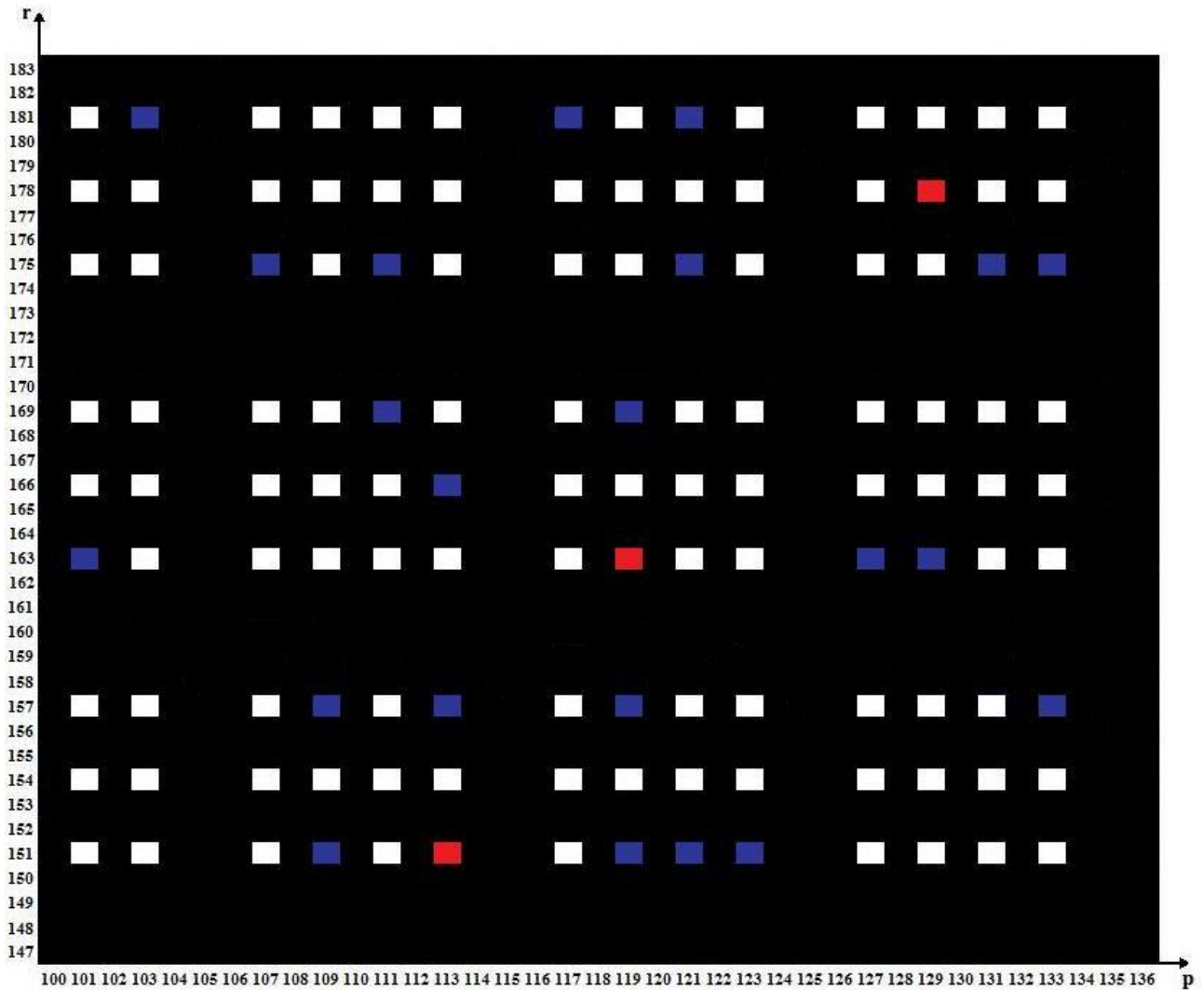


Figura 5: Schema sintetico relativo a una griglia di 37x37 termini contraddistinti da $d(r)=d(p)=3$.

§2. LA SEQUENZA FINITA DELLE PERMUTAZIONI CIRCOLARI DELLE CIFRE E ALTRE

In questa sezione enunciamo un'altra importante regola associata agli schemi di divisibilità concernenti la sequenza circolare, per poi presentarne delle nuove costruite partendo dal risultato appena menzionato.

Definizione 2.1. Sia $f_1f_2f_3\ldots f_{(n-1)}f_n$ la enupla di cifre consecutive scaturite dalla concatenazione dei primi n termini della sequenza [A007376](#), dove $f_1:=1$ e $f_2:=f_1+1$. Definiamo “permutazioni circolari delle cifre” gli n elementi che compongono il sottoinsieme delle permutazioni della forma:

$$\bar{a}_{l+1}:=f_2f_3f_4\ldots f_{(n-1)}f_nf_1\equiv 2_3_4\ldots f_{(n-1)}f_n_1,$$

$$\bar{a}_{l+2}:=f_3f_4\ldots f_{(n-1)}f_nf_1f_2\equiv 3_4\ldots f_{(n-1)}f_n_1_2,$$

...

$$\bar{a}_{l+i}:=f_{(i+1)}f_{(i+2)}\ldots f_nf_1f_2\ldots f_{i-1}f_i\equiv f_{(i+1)}f_{(i+2)}\ldots f_n_1_2\ldots f_{i-1}f_i,$$

...

$$\bar{a}_{l+n}:=f_1f_2f_3\ldots f_{(n-1)}f_n\equiv 1_2_3\ldots f_{(n-1)}f_n.$$

Teorema 2.2. Per alcune coppie (j,r) , $\exists M(r) \mid pr_j$. Per questi (j,r) , tutte le permutazioni circolari delle cifre di $M(r)$ sono anche divisibili per pr_j .

Sia $d(r)=\text{costante}$, in virtù del teorema 1.3, $M(r) \mid pr_j \Leftrightarrow M(r+q) \mid pr_j$, ma esistono altri $pr > 9 * 10^{d(r)-1}$ in possesso della medesima proprietà. Inoltre, dal teorema 2.2., discende che anche tutte le possibili permutazioni circolari delle cifre di $M(r+q)$ sono divisibili per pr_j .

Nella pagina successiva, analizziamo la sequenza della definizione 2.1, associata a ciascuna permutazione circolare delle cifre di quella consecutiva canonica [A007908](#). Da qui in avanti, limitiamo la numerosità dei termini della sequenza fissando il valore di $d(r)$ a 3, cosicché $r \in [100, 999]$. Esaminando una certa porzione della sequenza estesa alle permutazioni circolari delle cifre, si rilevano molti nuovi elementi rispetto alla sequenza circolare canonica. Infatti:

$$\bar{a}_1:=12345\ldots 9899100 \in M(100),$$

$$\bar{a}_2:=23456\ldots 98991001 \in M(100),$$

...

$$\bar{a}_{11}:=0111213\ldots 98991001234567891 \equiv 111213\ldots 98991001234567891 \in M(100),$$

...

$$\bar{a}_{1386450}:=91234\ldots 99799899 \in M(999).$$

La numerosità totale degli elementi di una sequenza siffatta è $192+195+198+\ldots+2886+2889$, ovvero

$$\sum_{m=0}^{899} (192 + m * 3) = 192 * 900 + 3 * \frac{899*900}{2} = 900 * (192 + 1.5 * 899) = \mathbf{1386450} \quad (2)$$

Questo rappresenta solo la conferma empirica delle proprietà già osservate nella prima sezione: ci sono numerosi pr_j ([A180346](#)) che dividono l'intero insieme delle permutazioni circolari delle cifre di $M(\tilde{r})$, per $\tilde{r} \in [100, 999]$. Sia $4 \leq j \leq 169$ (il che implica $7 \leq pr \leq 1009$), i valori $\tilde{r}$ sono i seguenti (e sotto la nostra assunzione, essi appartengono alla sequenza [A181373](#) della OEIS [8]):

$$\begin{aligned}
M(\tilde{r}) \mid 7 &\Rightarrow \tilde{r}=100+14*v & (v=0,1,2,\dots,64) \\
M(\tilde{r}) \mid 11 &\Rightarrow \tilde{r}=106+22*v & (v=0,1,2,\dots,40) \\
M(\tilde{r}) \mid 13 &\Rightarrow \tilde{r}=120+26*v & (v=0,1,2,\dots,33) \\
M(\tilde{r}) \mid 17 &\Rightarrow \tilde{r}=196+272*v & (v=0,1,2) \\
M(\tilde{r}) \mid 19 &\Rightarrow \tilde{r}=102+114*v & (v=0,1,2,3,4,5,6,7) \\
M(\tilde{r}) \mid 23 &\Rightarrow \tilde{r}=542 \\
M(\tilde{r}) \mid 29 &\Rightarrow \tilde{r}=400 \\
M(\tilde{r}) \mid 31 &\Rightarrow \tilde{r}=181+155*v & (v=0,1,2,3,4,5) \\
M(\tilde{r}) \mid 37 &\Rightarrow \tilde{r}=123+\sum_s d_s, & (\text{dove } d_s=0,12,25,12,25,12,25,\dots \text{ per } s=0,1,2,3,\dots,47) \\
M(\tilde{r}) \mid 41 &\Rightarrow \tilde{r}=216+205*v & (v=0,1,2,3) \\
M(\tilde{r}) \mid 43 &\Rightarrow \tilde{r}=372+301*v & (v=0,1,2) \\
M(\tilde{r}) \mid 53 &\Rightarrow \tilde{r}=127+689*v & (v=0,1) \\
M(\tilde{r}) \mid 61 &\Rightarrow \tilde{r}=616 \\
M(\tilde{r}) \mid 67 &\Rightarrow \tilde{r}=399 \\
M(\tilde{r}) \mid 73 &\Rightarrow \tilde{r}=196+584*v & (v=0,1) \\
M(\tilde{r}) \mid 83 &\Rightarrow \tilde{r}=118 \\
M(\tilde{r}) \mid 97 &\Rightarrow \tilde{r}=516 \\
M(\tilde{r}) \mid 101 &\Rightarrow \tilde{r}=416+404*v & (v=0,1) \\
M(\tilde{r}) \mid 107 &\Rightarrow \tilde{r}=884 \\
M(\tilde{r}) \mid 127 &\Rightarrow \tilde{r}=106 \\
M(\tilde{r}) \mid 163 &\Rightarrow \tilde{r}=576 \\
M(\tilde{r}) \mid 211 &\Rightarrow \tilde{r}=306 \\
M(\tilde{r}) \mid 271 &\Rightarrow \tilde{r}=936 \\
M(\tilde{r}) \mid 277 &\Rightarrow \tilde{r}=174 \\
M(\tilde{r}) \mid 1009 &\Rightarrow \tilde{r}=960
\end{aligned}$$

Utilizzando queste relazioni, possiamo ridurre la percentuale dei termini candidati-primi della figura 5, dato che $M(181) \mid 31$, la loro numerosità tra i 1369 elementi considerati precipita a **90** (con un rapporto di 0.06574).

Lemma 2.3. *Nell'intervallo che abbiamo individuato, i “fattori fissi” considerati nel teorema 2.2 ricorrono con regolarità al crescere di $\tilde{r}$: essi sono periodici e il periodo è un multiplo di pr_j stesso (come asserito dal corollario 1.5).*

L'inclusione nella lista di $pr=1009$, che si colloca oltre il limite superiore di $\tilde{r}$, rappresenta la dimostrazione dell'esistenza di primi che dividono tutte le possibili permutazioni circolari delle cifre di un dato $M(r)$, per i quali la strategia presentata nella prima sezione non può essere applicata. È lecito combinare questa proprietà con il metodo mostrato precedentemente. La sinergia delle due tecniche dovrebbe condurci a una percentuale veramente ridotta di candidati numeri primi da testare tramite l'approccio diretto ⁵.

⁵ Ci stiamo chiaramente riferendo ai test di primalità.

A tal fine, è necessario conoscere preventivamente per quali coppie (pr, r) c'è piena corrispondenza. Risulta pertanto valida l'applicazione del metodo di Pascal [3-4] per derivare i criteri di divisibilità relativi ai fattori primi che ci proponiamo di considerare.

Nell'ambito delle restrizioni poste su r in apertura di sezione, possiamo individuare alcuni valori di $pr > 9 * 10^{d(r)-1} = 900$ caratterizzati dall'applicabilità del lemma 2.3, ad esempio $pr_{2157} = 18973$ e $r = 903$.

Facendo specifico riferimento all'analisi dei pr fissi (derivati dal lemma 2.3), e considerando l'intervallo finito che stiamo studiando, possiamo sintetizzare le precedenti condizioni (per tutti i $pr_{j \leq 169}$ dati – sottintendendo il vincolo $a_i \pmod{10} \in \{1, 3, 7, 9\}$ –) nelle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \tilde{r} = 100 + 3 * v \\ \tilde{r} \neq 100 + 14 * v \\ \tilde{r} \neq 106 + 22 * v \\ \tilde{r} \neq 120 + 26 * v \\ \tilde{r} \neq 123 + 37 * v \\ \tilde{r} \neq 135 + 37 * v \\ \tilde{r} \neq \{118, 127, 181, 196, 400, 421, 673, 820\} \end{cases}$$

Dunque, in questa sequenza finita, si contano solo 233 $M(\tilde{r})$ i quali non hanno (almeno) un $pr < 1009$ che divide tutte gli elementi dell'insieme $r = \text{costante}$, e questi sono

103, 109, 112, 115, 121, 124, 130, 133, 139, 145, 151, 154, 157, 163, 166, 169, 175, 178, 187, 190, 193, 199, 202, 205, 208, 211, 214, 217, 220, 223, 229, 232, 235, 241, 244, 247, 256, 259, 262, 265, 274, 277, 280, 283, 286, 289, 292, 295, 298, 301, 307, 313, 316, 319, 322, 325, 331, 334, 337, 340, 343, 346, 349, 355, 358, 361, 364, 367, 373, 376, 379, 385, 388, 391, 397, 403, 409, 412, 415, 418, 424, 427, 430, 433, 439, 442, 445, 448, 451, 454, 457, 460, 463, 466, 469, 472, 475, 481, 487, 490, 496, 499, 508, 511, 514, 517, 523, 526, 529, 532, 535, 538, 541, 544, 547, 550, 553, 556, 559, 565, 571, 574, 577, 580, 583, 586, 589, 592, 595, 598, 601, 607, 610, 613, 619, 622, 625, 628, 631, 637, 643, 649, 652, 655, 658, 661, 664, 667, 670, 676, 679, 682, 685, 694, 697, 703, 706, 709, 712, 721, 724, 733, 736, 739, 742, 745, 748, 751, 754, 757, 760, 763, 769, 775, 778, 781, 784, 787, 790, 793, 799, 802, 805, 808, 811, 817, 823, 829, 835, 841, 844, 847, 850, 853, 859, 862, 865, 868, 871, 877, 880, 883, 886, 889, 892, 895, 901, 904, 907, 910, 913, 916, 919, 922, 925, 928, 931, 934, 943, 946, 955, 958, 961, 967, 970, 973, 976, 979, 985, 988, 991, 994, 997.

Considerando la sequenza circolare canonica delimitata da $d(r) = 3$, facendo a meno di usare l'analisi degli schemi sui più piccoli pr_j , siamo in grado di escludere la maggior parte degli elementi della sequenza, limitando il sottoinsieme dei termini candidati-primi a meno dell'11.1% del totale. Infatti, risulta: $\frac{56039-1176}{139950-2936} \approx 0.4004189$ e $\frac{137014}{494550} \approx 0.2770478$. Ciò sottende una percentuale di termini candidati-primi pari a $0.4004189 * 0.2770478 * 100 = 11.0935\%$.

Nel caso della sequenza circolare estesa a 1386450 termini, la percentuale è addirittura inferiore alla precedente (ben al di sotto dell'11%)⁶.

A questo punto, potremmo modificare leggermente la nostra sequenza finita, senza alterare le sue proprietà rappresentative. Poniamo in ordine crescente i 1386450 elementi della (2). Evitando di soffermarci sui dettagli, è chiaro che, per un dato r , i primi termini del corrispondente sottoinsieme della sequenza iniziano con una coppia di zeri. Infatti, essi sono composti da due cifre in meno rispetto alla maggior parte degli altri "colleghi" (in breve, per un dato valore del parametro r).

⁶ Abbiamo preso in considerazione il vincolo sui candidati numeri primi che impone la congruenza in $(\text{mod } 10)$ a $\{1, 3, 7, 9\}$.

Completata tale operazione, sappiamo già che il risultato non muterà, poiché l'ordine del sottoinsieme r_i non viene intaccato, in virtù della massima discrepanza (tra una coppia di elementi di questo insieme) di due cifre, giacché ogni incremento unitario di r aggiunge 3 nuove cifre al *termine canonico* associato al precedente valore di r . Risulta anche superfluo specificare che la numerosità dei candidati-primi non varia in maniera apprezzabile, al pari delle considerazioni già espresse circa i “fattori primi fissi”.

Si ricordi che il criterio alla base delle precedenti relazioni è generale: ad esempio, fissando $r \in [1000, 9999]$, variano unicamente le leggi lineari che descrivono la periodicità dei fattori fissi; tuttavia il concetto sopravvivrà al nuovo $d(r)$. Il solo vincolo da rispettare è quello per cui $d(r)$ deve essere costante.

A questo punto, potremmo estendere ancora una volta la sequenza delle permutazioni circolari delle cifre menzionata prima, definendone un'altra in possesso delle medesime caratteristiche ma nella quale, al termine di ogni insieme di permutazioni, si aggiunge solo una nuova cifra.

Partendo dall'illimitata sequenza consecutiva estesa 1, 12, 123, ..., 123456789, 1234567891, 12345678910, 123456789101, ... consideriamo l'insieme di tutte le permutazioni circolari di ognuno di questi termini, proprio come già fatto partendo dalla sequenza circolare canonica. Potremmo altresì ripetere la stessa procedura per alcune altre sequenze di Smarandache (ad esempio quella *ribaltata* [A000422](#) [1-10]). Facendo riferimento alla sequenza estesa alle permutazioni circolari delle cifre, dovremmo trasporre gli stessi quesiti introdotti da Ripà [7]: i risultati appaiono abbastanza interessanti. Evitando di togliere il piacere della scoperta, se scegliamo per esempio la sequenza consecutiva estesa appena descritta, possiamo solo anticipare che essa contiene effettivamente dei termini primi [11] (ciò non necessita di un'analisi approfondita). Infatti, i più piccoli termini sono ([A176942](#))

$Sm'_10 := 1234567891,$

$Sm'_{14} := 12345678910111,$

$Sm'_{24} := 123456789101112131415161,$

$Sm'_{235} := 12345...1101111121131141,$

$Sm'_{2804} := 12345...96696796896997097,$

$Sm'_{4347} := 12345...1359136013611362136313,$

Ecc. (Si noti che Sm'_n consta esattamente di n cifre).

Considerando la sequenza circolare allargata a tutte le permutazioni circolari delle cifre, è chiaro che il risultato illustrato nella prima sezione resta valido ricordando che, $\forall n' > n$, se $1_2_3_..._f_{(n'-1)}_f_n$ è divisibile per pr_j e anche $1_2_3_..._f_{(n'-1)}_f_n$ lo è, allora $f_{(n'+1)}_..._f_{(n'-1)}_f_n_1_2_3_..._f_{(n'-1)}_f_n$ risulta parimenti divisibile per pr_j (e ovviamente anche pr_j è un fattore primo di $f_{(n'+1)}_..._f_{(n'-1)}_f_n$). Si tratta di una proprietà generale di ogni numero, non solo concernente quelli appartenenti all'insieme della sequenza consecutiva estesa: prendendo T' (una qualsiasi sequela di t' cifre concatenate che include pr_j nella sua fattorizzazione) e T'' (un'altra stringa composta da t'' cifre e divisibile per lo stesso pr_j), T'_T'' e T''_T' sono entrambe divisibili per pr_j .

Se diamo un'occhiata alla sequenza costruita partendo dalle permutazioni circolari delle cifre della sequenza consecutiva estesa (1, 12, 123, ..., 123456789, 1234567891, 12345678910, 123456789101, ...), possiamo facilmente individuare molteplici insiemi di ordinamenti che risultano tutti divisibili per il medesimo pr_j . Così $1_2_3_..._1005_1006_1007_1$ e le restanti 2921 permutazioni circolari delle sue cifre sono divisibili per $pr_4=7$ e $pr_5=11$, mentre ogni permutazione circolare delle cifre di $1_2_3_..._36_37_3$ è divisibile per 7, 11 e 13.

La sezione 3 contiene ulteriori spunti su questo argomento.

§3. ALCUNE OSSERVAZIONI E PRECISAZIONI

Potremmo studiare cosa accade, fissato il consueto intervallo $d(r)=3$, allargando l'insieme delle permutazioni circolari delle cifre dei 900 termini appartenenti alla sequenza consecutiva canonica alle permutazioni circolari delle cifre dei 2698 elementi che compongono la sequenza consecutiva estesa⁷. Pertanto, $\bar{a}_1:=1234\dots9899100$, $\bar{a}_2:=234\dots98991001$, $\bar{a}_{11}:=0111213\dots98991001234567891$, $\bar{a}_{4153381}:=1234\dots997998999$ e $\bar{a}_{4156269}:=91234\dots99799899$: approssimativamente, soltanto un terzo dei termini appartenenti a questa sequenza fanno parte di quella formata dalle permutazioni circolari delle cifre della sequenza consecutiva canonica, anche se il lemma 2.3 resta comunque soddisfatto. In questo caso, troveremo nuovi fattori fissi non inclusi nella *versione breve* della sequenza, per esempio $pr_{17}:=59$ (risultante dalle permutazioni circolari delle cifre di $1234\dots1121131$), unito ad altri fattori primi che abbiamo già incontrato, come $pr_5=11$ (il quale è un fattore fisso per $1234\dots10710810$).

Ciò nonostante, sorge un problema: non è possibile disporre i termini in ordine ascendente, pena la perdita di validità del lemma 2.3. Inoltre, alcuni $\bar{a}_j$ sono coincidenti e le loro posizioni all'interno della sequenza non potrebbero essere identificate univocamente: ad esempio $\bar{a}_{101470}:=1234\dots1981992$ è uguale sia a $\bar{a}_{102450}:=01234\dots1981992$ sia a $\bar{a}_{102941}:=001234\dots1981992$.

I fattori primi ≥ 7 che dividono tutti i termini della sequenza generale (illimitata), costruita utilizzando le permutazioni circolari delle cifre della sequenza consecutiva estesa, esistono a partire dai numeri lunghi almeno 16 cifre (tutte le permutazioni circolari delle cifre 1234567891011121 sono divisibili per 17) senza alcuna limitazione superiore. Ciò è testimoniato dall'esempio che abbiamo appena introdotto: ognuna delle 2922 permutazioni circolari della stringa $1234\dots1005100610071$ è divisibile per $pr=11$ e possiamo dire lo stesso per le permutazioni circolari degli elementi composti da $2922+44*v$ cifre, per $v=0,1,2,3,\dots,817$. In questo caso, il periodo di $pr=11$ risulta identico a quello associato alla sequenza derivata da un valore intero di $r \in [1000, 9999]$, per $d(p)=d(r)=4$ e $pr=11$.

La considerazione di cui sopra ci guida alla seguente osservazione, riguardante tutte le sottosequenze costruite (come descritto in precedenza) dalla versione estesa della sequenza consecutiva.

Partendo dalla sequenza che include ogni permutazione circolare di quella consecutiva estesa $(1,12,123,\dots,123456789,1234567891,12345678910,1234456789101,\dots)$, dato il valore di $d(r)$ e quello iniziale $\bar{a}_j$, otteniamo esattamente " $d(r)$ " sottosequenze interrotte (una delle quali – la circolare canonica – è completa). Per queste sottosequenze, rimangono ancora valide la maggior parte delle proprietà illustrate nella sezione 1, oltre al teorema 2.2.

In conclusione, potremmo dare libero sfogo all'immaginazione e riproporre una parte dei quesiti [6-9] dipanati (completamente o parzialmente) da Ripà [7] alle nuove sequenze disegnate *ex novo* partendo dalle considerazioni scritte in queste pagine: siamo pertanto liberi di definire una nuova sequenza ottenuta selezionando solo le cifre dispari di quella circolare (prendendo in considerazione tutte le variazioni che abbiamo fin qui illustrato) più numerose altre sulla stessa falsariga.

⁷ Essa si costruisce, come già spiegato, aggiungendo solo una cifra proveniente dalla sequenza canonica alla fine dell'elemento precedente.

§4. VARI SCHEMI RELATIVI ALLA SEQUENZA CIRCOLARE DI SMARANDACHE

Ecco una ristretta raccolta di strutture modulari concernenti alcuni pr_j che dividono i corrispondenti termini della sequenza circolare canonica (1,12,21,123,231,312,...).

Nelle figure sottostanti, ogni casella scura indica un elemento della sequenza che è divisibile per il dato pr – si ricordi che il generico termine può essere scritto come $(p+1)_{(p+2)} \dots (r-1)_{r-1_2_3 \dots (p-1)_p}$.

Tali schemi presentano sovente delle regolarità intrinseche, dipendenti *in primis* dalla scelta di pr_j (un chiaro esempio è rappresentato da $pr_6:=13$).

$Pr_4:=7$

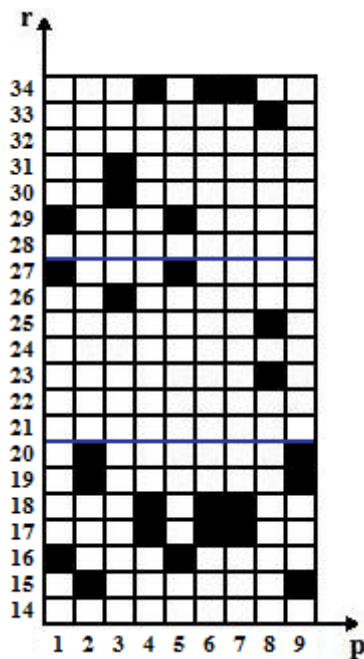


Figura 6: $d(r)=2$, $d(p)=1$.

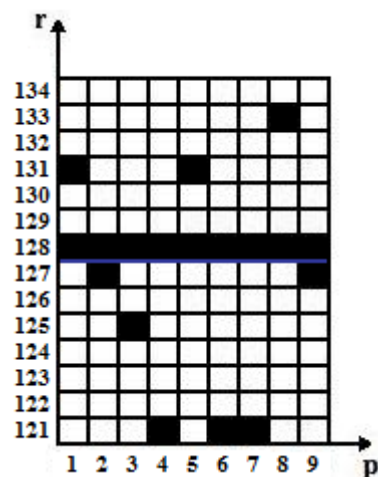


Figura 7: $d(r)=3$, $d(p)=1$.

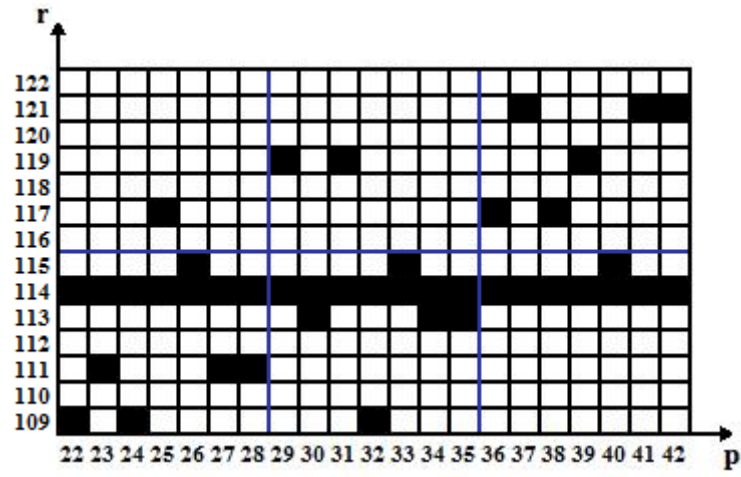


Figura 8: $d(r)=3$, $d(p)=2$.

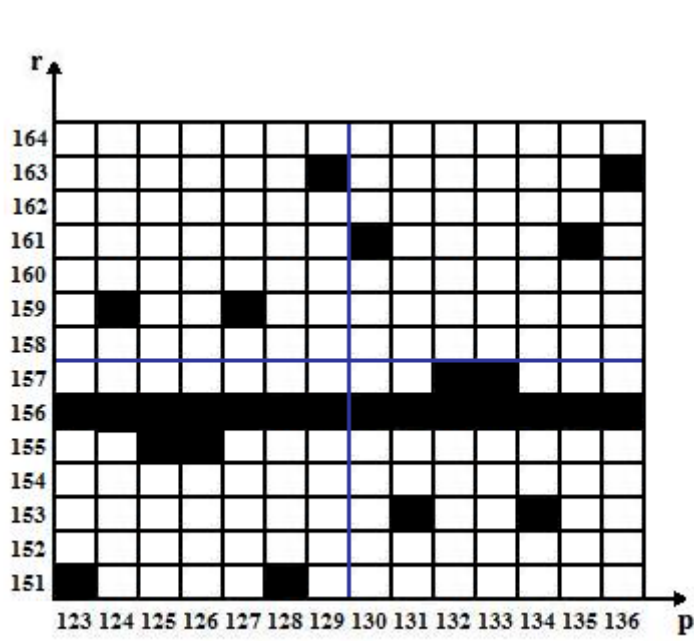


Figura 9: $d(r)=3$, $d(p)=3$.

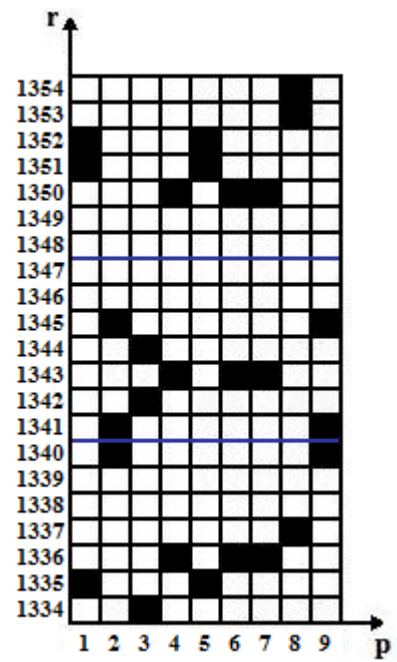


Figura 10: $d(r)=4$, $d(p)=1$.

$\text{Pr}_5:=11$

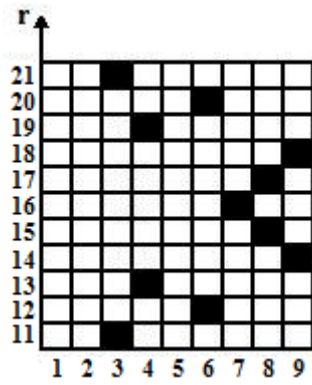


Figura 11: $d(r)=2$, $d(p)=1$.

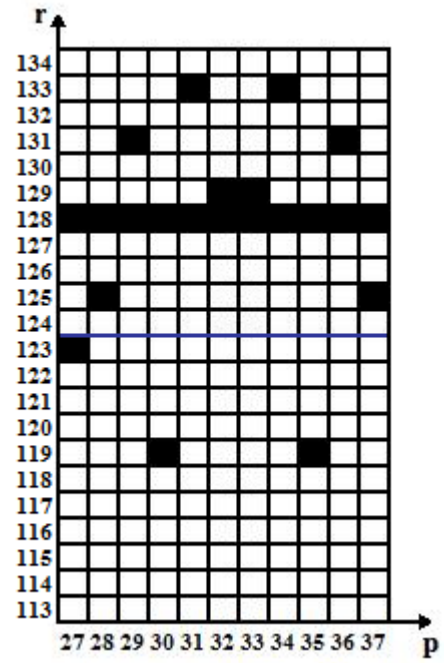


Figura 12: $d(r)=3$, $d(p)=2$.

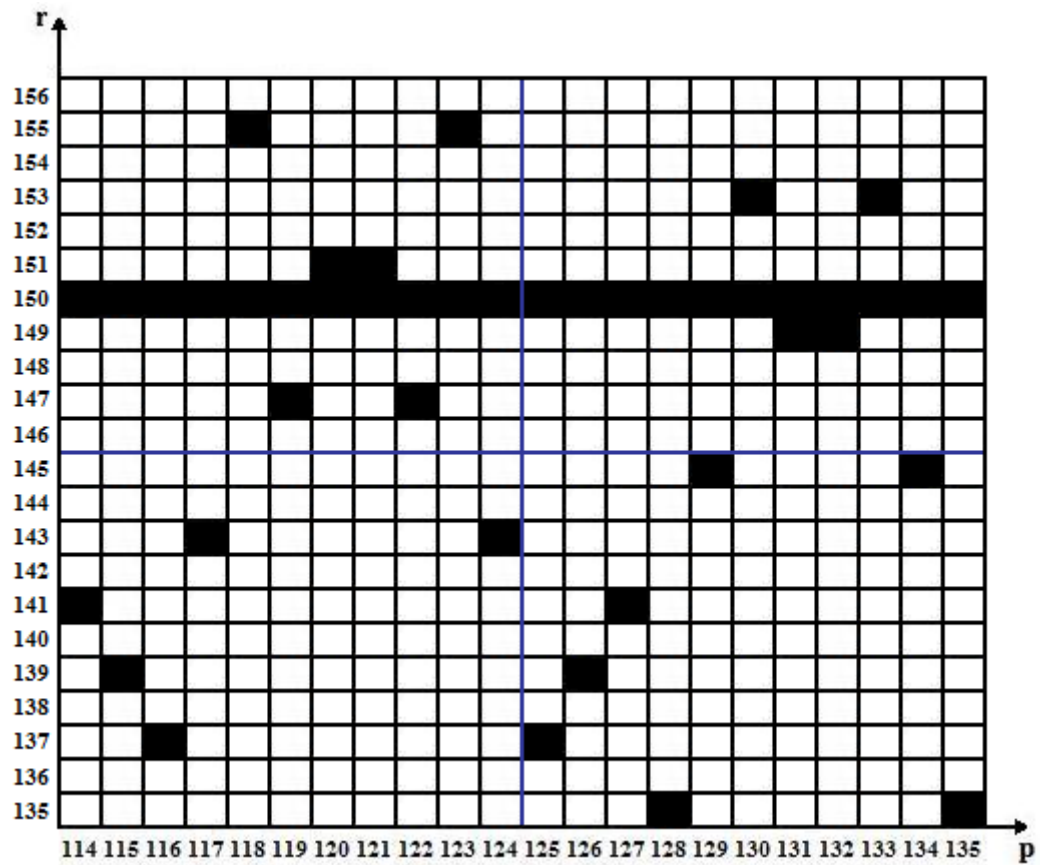


Figura 13: $d(r)=3$, $d(p)=3$.

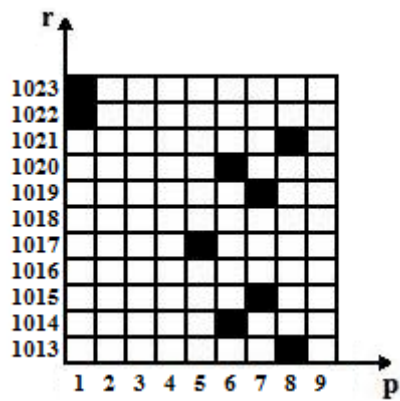


Figura 14: $d(r)=4$, $d(p)=1$.

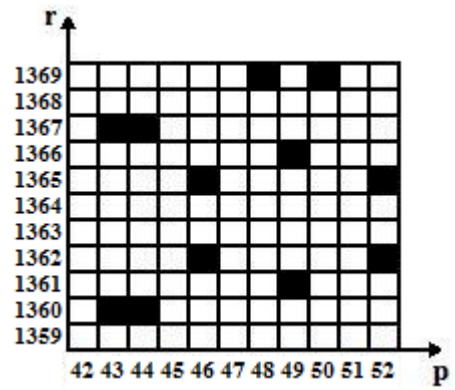


Figura 15: $d(r)=4$, $d(p)=2$.

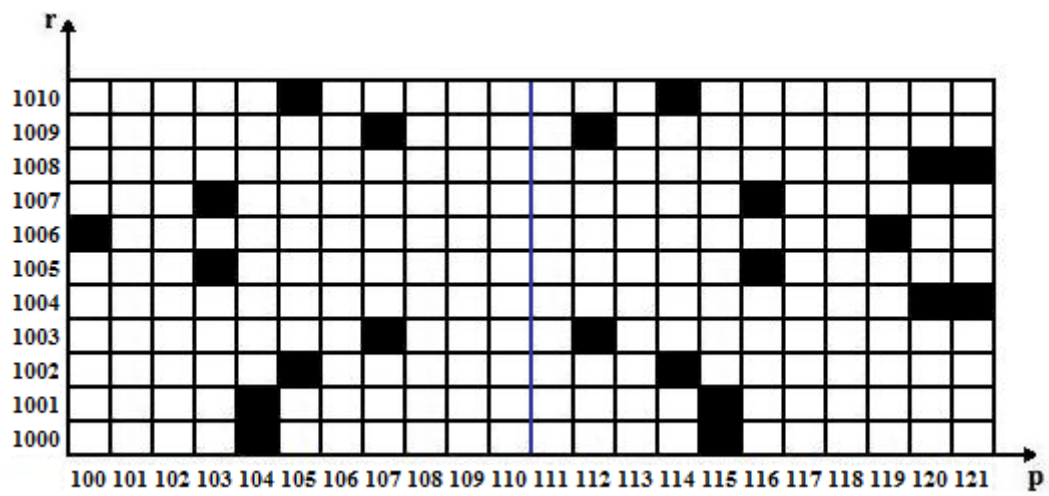


Figura 16: $d(r)=4$, $d(p)=3$.

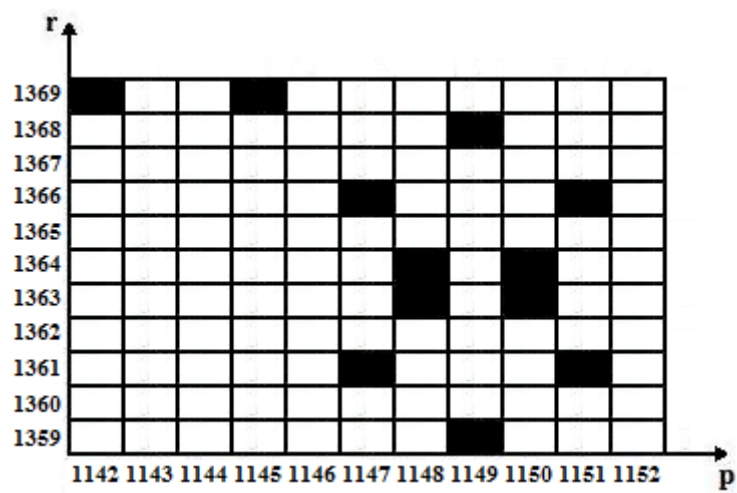


Figura 17: $d(r)=4$, $d(p)=4$.

$$\Pr_6:=13$$

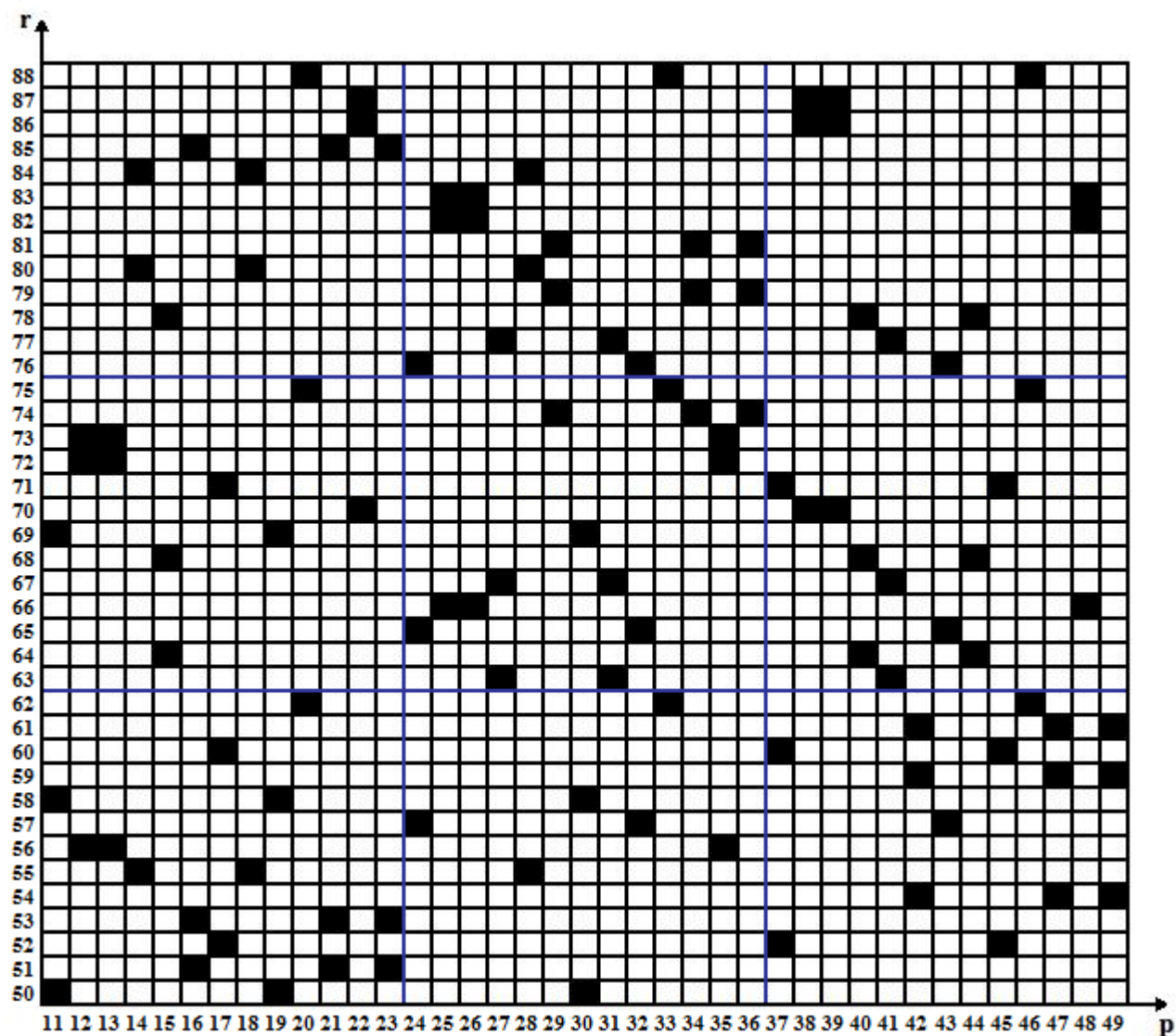


Figura 18: $d(r)=2$, $d(p)=2$.

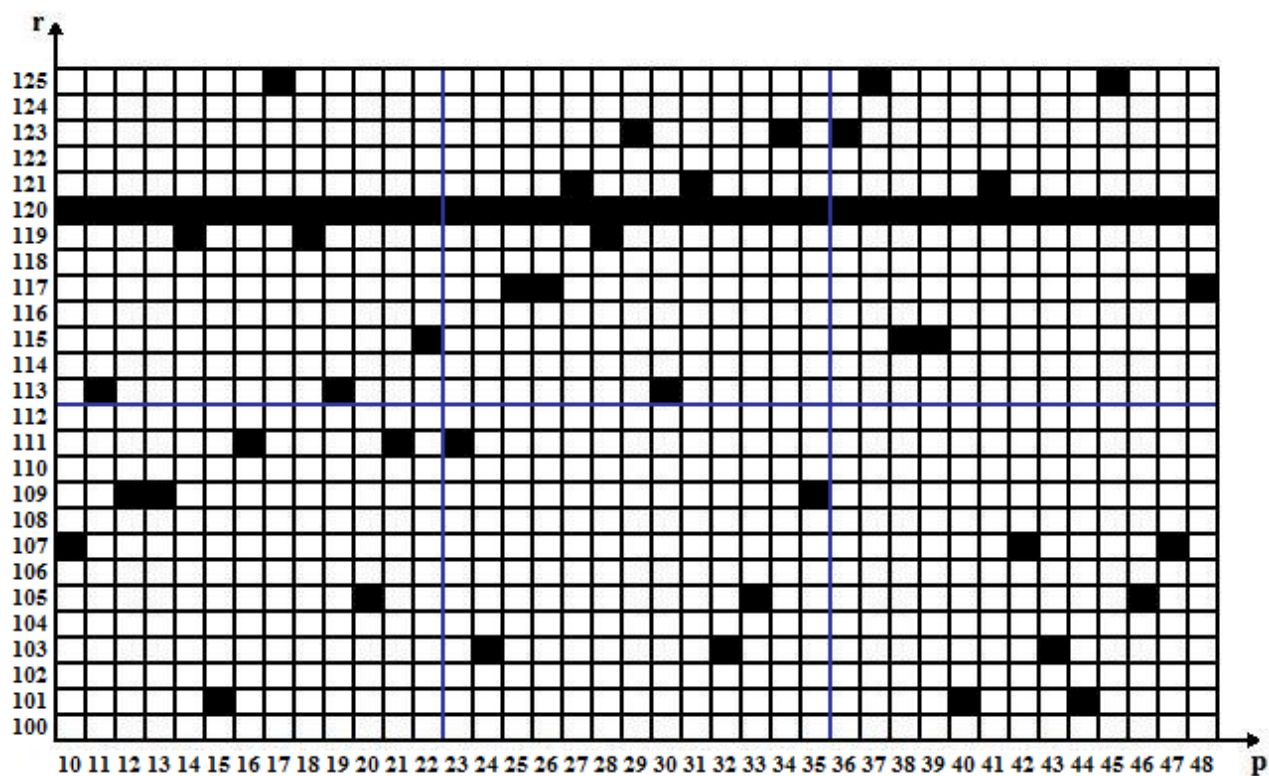


Figura 19: $d(r)=3$, $d(p)=2$.

$$d(r)=3, d(p)=3$$

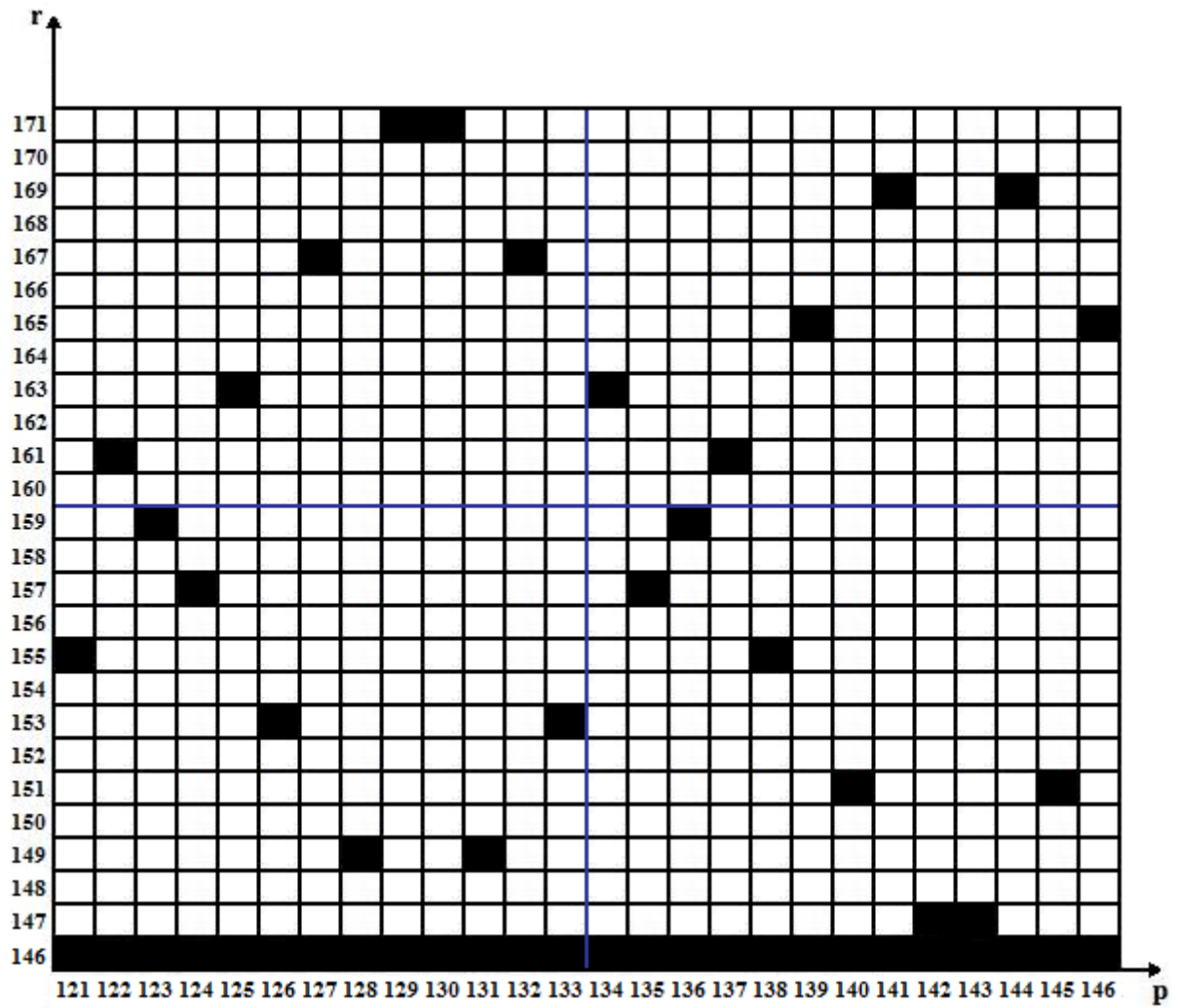


Figura 20: $d(r)=3, d(p)=3$.

$$\mathbf{Pr}_{12}:=37$$

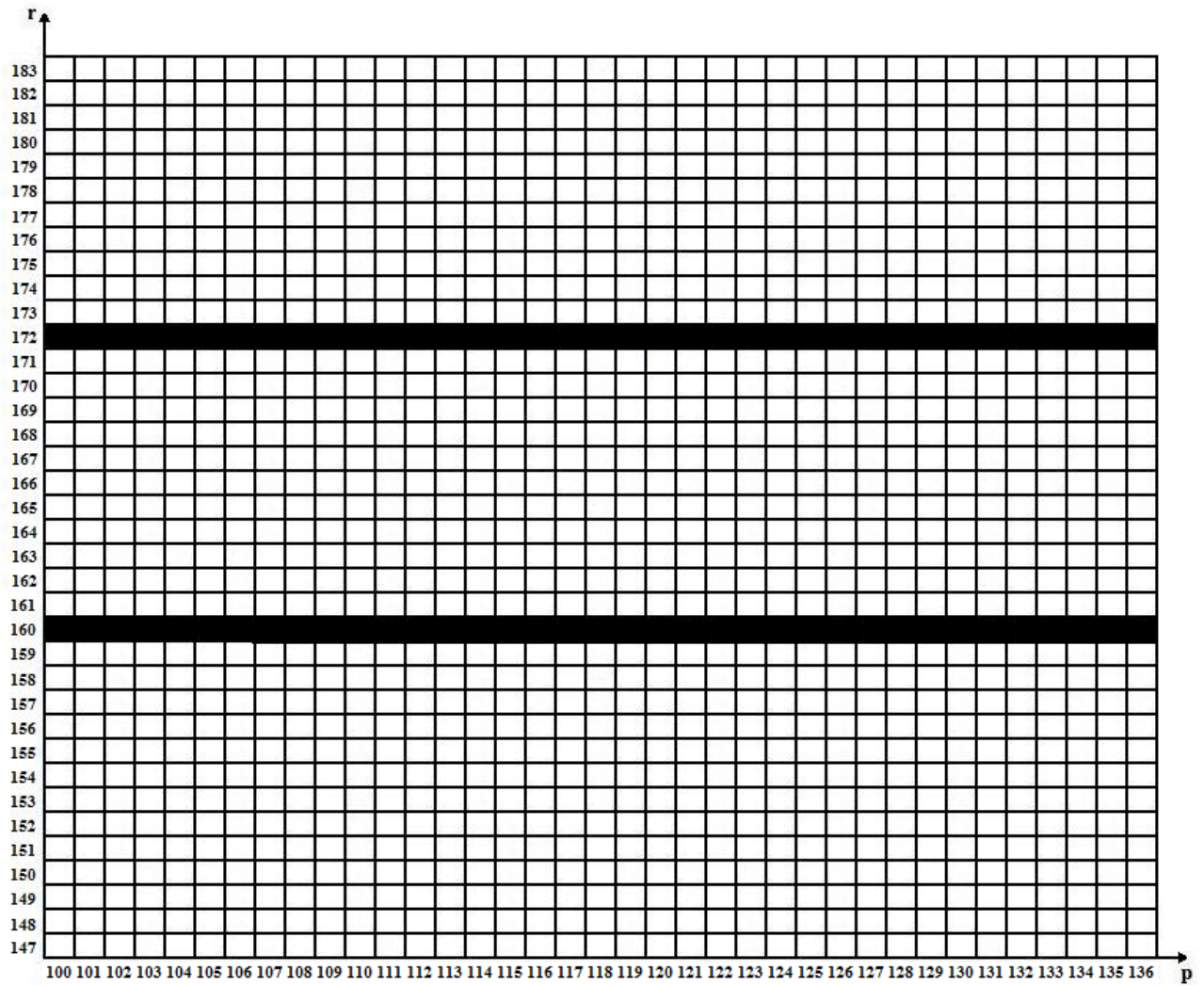


Figura 21: $d(r)=3$, $d(p)=3$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] C. Ashbacher, Pluckings from the Tree of Smarandache Sequences and Functions, American research press, 1998.
- [2] D. M. Bressoud, Factorization and Primality Testing, Springer-Verlag, NY, 1989.
- [3] J. L. Chabert and É. Barbin, A history of algorithms, Springer, 1994.
- [4] R. Courant and H. Robbins, What is mathematics?, Oxford University Press, 1996 (second edition).
- [5] C. Dumitrescu and V. Seleacu, Some Notions and Questions in Number Theory, Vol. 1, Erhus Publ., Glendale, 1994.
- [6] K. Kashihara, Comments and topics on Smarandache's notions and problems, Erhus Univ. Press, 1996, 25.
- [7] M. Ripà, On prime factors in old and new sequences of integers, <http://vixra.org/abs/1101.0092>, 2011.
- [8] N. J. A. Sloane, The Online Encyclopedia of Integer Sequences, <http://www.research.att.com/~njas/sequences>, 2011.
- [9] F. Smarandache, Only problems, not solutions!, Xiquan Publ. House, Phoenix-Chicago, 1993 (fourth edition).
- [10] F. Smarandache, Properties of the Numbers, University of Craiova Archives, Arizona State University Special Collections, Tempe, AZ, 1975.
- [11] R. W. Stephan, Factors and Primes in Two Smarandache Sequences, Smarandache Notions Journal, Vol. 9, No. 1-2, 1998 (second edition).
- [12] M. Vassilev-Missana and K. Atanassov, Some Smarandache problems, Hexis, 2004.

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11B50; Secondary 65Q30, 11Y05, 11Y11.

(Sono interessate le sequenze [A000040](#), [A000422](#), [A001292](#), [A007376](#), [A007908](#), [A176942](#), [A180346](#), [A181073](#), [A181129](#) e [A181373](#).)