Sommario

$$(\pi_c)_n = Area_n = 2^n \sqrt[1]{2-\sqrt[2]{2+\sqrt[3]{2+\sqrt[4]{2+\ldots\ldots\ldots\sqrt[n-1]{2+\sqrt[n]{2}}}}}}$$

1.1 Serie convergente a π

$$(\pi_{modificato})_n = \frac{4}{3}\cdot(\pi_c)_n - \frac{1}{3}\cdot(\pi_c)_{n-1}$$

$$(\pi_{modificato})_n < \pi$$

2.1 Binomio di potenziamento

Introduzione

C'è sempre una (almeno) domanda ed una motivazione alla base di una ricerca. La mia prima domanda è stata semplicemente: – *perché non me la trovo io una successione convergente a π che consenta di determinarne il valore attraverso il calcolo eseguito da un semplice software piuttosto che inserire, banalmente, detto valore in una costante di programmazione?* - Si vede bene come la motivazione, potente spinta verso un qualsivoglia traguardo, non potesse essere di ordine pratico ma dovesse essere ricondotta ad altro; va infatti ricercata nella mia passione, per la creazione di software, che aveva avuto origine quando lo strumento di sviluppo era, a quel tempo, il GW Basic; quindi, essendo uno sviluppatore autodidatta, tutto ciò è stato mosso puramente da semplice diletto.

Trovata la successione *convergente a π*, mi sono posto un secondo problema: – *un valore numerico che esprima una misura (o un rapporto fra lunghezze come nel caso del π) ha senso se accompagnato dall'indicazione della sua precisione, cioè dall'errore commesso nella sua valutazione* –. Infatti, non avrebbe alcun significato indicare un π con cento cifre dopo la virgola se già il secondo decimale risultasse sbagliato; tale approssimazione sarebbe assolutamente incomprensibile. A questo interrogativo un software, che ha l'ambizione di calcolare un valore irrazionale come il π, riesce facilmente a dare una risposta. Questa seconda domanda, anche se banale, ha però avuto il pregio di veicolare il terzo e, a mio avviso, più importante quesito: - *riesco a "visualizzare" (*) l'errore che si commette (e si riduce) ad ogni progressivo calcolo con la serie trovata? Perché, se la risposta fosse affermativa, potrebbe essere possibile ridurre l'entità di questo errore dovuta al numero finito delle iterazioni di calcolo* – Si notano, nella formulazione della precedente domanda, diversi ostacoli che si frappongono al *miglioramento* della precisione del valore di π a parità del numero dei loop di calcolo eseguiti.

È proprio a questo *miglioramento* che si riferisce il termine usato di "***potenziamento***" per il calcolo del π. L'obiettivo raggiunto, e ciò non era scontato, ha consentito di trovare un semplice ***binomio*** capace, grossomodo, di raddoppiare il numero di cifre corrette alle quali si era pervenuti arrestando l'operazione all'ennesima radice della serie trovata.

Come si vedrà, la soluzione del terzo quesito, che ha portato alla formulazione del binomio, è stata possibile grazie alla fortunata scoperta di una fondamentale proprietà geometrica che si avrà modo di incontrare nello *studio degli errori* (CAP. 2) che si trova nella II^{a} parte di questa (*fruttuosa*) ricerca.

Dedico la ricerca alla mia famiglia

L'autore
Franco Meneghin

(*) Per me la rappresentazione grafica è un elemento fondamentale ai fini della comprensione e soluzione di un problema; capisco, altresì, che i matematici, capaci di ben altro con le loro astrazioni, non possano che sorridere per questa mia "affermazione".

Per chi vuole stampare la ricerca per farne un fascicoletto ho riportato nella parte finale del documento la copertina, la prima e l'ultima pagina.

CAP. 1 Serie convergente a π

La prima assunzione qui utilizzata per ricavare l'espressione della serie convergente a **π** è che il del raggio sia unitario in modo che l'area del cerchio (approssimato da poligoni regolari) coincida con il **π.**
Le **Aree** " $Area_n$ " dei poligoni regolari *(v. Fig. 1, 2, 3, 4)* sotto calcolate convergono, per tale motivo, al valore **π.**

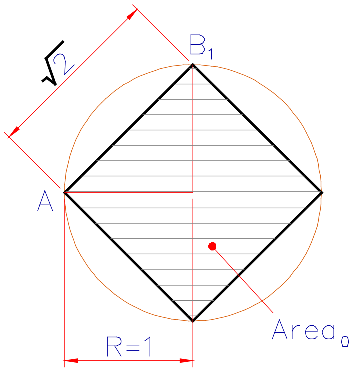


Fig. 1

n = 0 (nessun calcolo)

0. $Area_0 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = \boxed{2}$ (… 2)

$AB_1 = \sqrt{2}$

fine n=0

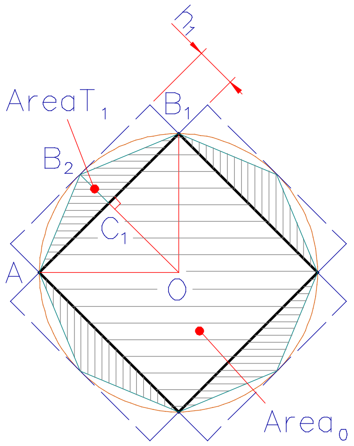


Fig. 2

n = 1 (primo calcolo)

$$\overline{AB_1} = \sqrt{2}$$

$$\overline{AC_1} = \frac{1}{2}\overline{AB_1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$h_1 \equiv \overline{C_1B_2} = 1 - \overline{C_1O} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$AreaT_1 = \frac{\overline{AB_1}}{2}h_1 = \overline{AC_1}\cdot h_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{4}$$

1. $\color{red}{Area_1} = Area_0 + 4 \cdot AreaT_1 = \cancel{2} + \cancel{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{2-\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} = \boxed{2 \cdot \sqrt{2}}$ (… 2,83)

$$\overline{AB_2} = \sqrt{\overline{AC_1}^2 + h_1^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\sqrt{2}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

fine n=1

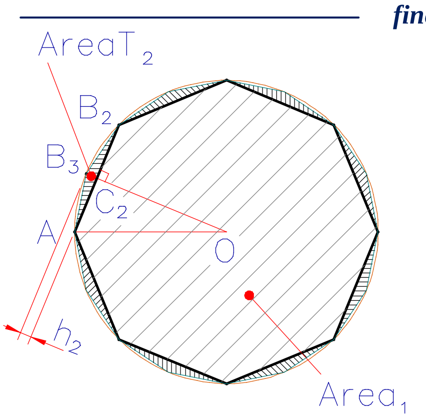


Fig. 3

n = 2 (secondo calcolo)

$$\overline{AB_2} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\overline{AC_2} = \frac{1}{2}\overline{AB_2} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\overline{C_2O} = \sqrt{1^2 - \overline{AC_2}^2} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4-2+\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$h_2 \equiv \overline{C_2B_3} = 1 - \overline{C_2O} = 1-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$AreaT_2 = h_2 \cdot \overline{AC_2} = \left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

$$AreaT_2 = h_2 \cdot \overline{AC_2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{4-2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$Area_2 = Area_1 + 8 \cdot AreaT_2 = 2\cdot\sqrt{2} + 8\cdot\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \cancel{2\sqrt{2}} + 4\sqrt{2-\sqrt{2}} \cancel{-2\cdot\sqrt{2}}$$

2. $\color{red}{Area_2} = \boxed{4\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ (… 3,06)

$$\overline{AB_3} = \sqrt{\overline{AC_2}^2 + h_2^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}+1+\frac{2+\sqrt{2}}{4}-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\overline{AB_3} = \sqrt{\frac{1}{2}-\cancel{\frac{\sqrt{2}}{4}}+1+\frac{1}{2}+\cancel{\frac{\sqrt{2}}{4}}-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

fine n=2

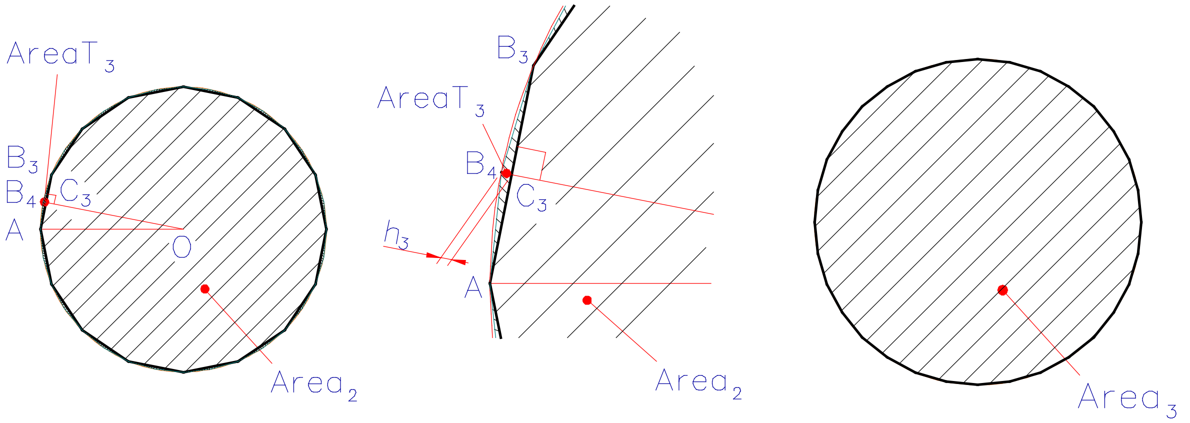


Fig. 4

(Immagine con soli 32 lati)

n = 3 (terzo calcolo)

$$\overline{AB_3} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\overline{AC_3} = \frac{1}{2}\overline{AB_3} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\overline{C_3O} = \sqrt{1^2-\overline{AC_3}^2} = \sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{4-2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\overline{C_3O} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$h_3 \equiv \overline{C_3B_4} = 1-\overline{C_3O} = 1-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$AreaT_3 = h_3\cdot\overline{AC_3} = \left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\right)$$

$$AreaT_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}-\frac{1}{4}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$AreaT_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}-\frac{1}{4}\sqrt{4-\left(2+\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}-\frac{1}{4}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$Area_3 = Area_2+16\cdot AreaT_3 = Area_2+16\cdot AreaT_3 = 4\sqrt{2-\sqrt{2}}+16\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}-\frac{1}{4}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$

3. $$Area_3 = \cancel{4\sqrt{2-\sqrt{2}}}+16\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}-\cancel{\frac{1}{4}\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right) = \boxed{8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$ (… 3,12)

È evidente la convergenza dell'$Area_n$, per cui è facile verificare come il valore di π ($Area_\infty$) si ottenga con l'approssimazione dipendente dal numero di lati del poligono inscritto nel cerchio.

*"**n**" è il numero di $\sqrt{\ }$ (radici quadrate) che sono state utilizzate.*

4. $$(\pi_c)_n = Area_n = 2^n\,{}_{1}\!\sqrt{2-{}_{2}\!\sqrt{2+{}_{3}\!\sqrt{2+{}_{4}\!\sqrt{2+\ldots\ldots\ldots{}_{n-1}\!\sqrt{2+{}_{n}\!\sqrt{2}}}}}}$$

Si osservi che il numero di lati N_L del poligono regolare è: $N_L=2^{(n+2)}$

Es.: con n = 5 il cerchio è approssimato da un poligono regolare di $N_L=2^{(n+2)}=2^{(5+2)}=128$ lati.

$$(\pi_c)_5 = Area_5 = 2^5\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} = 3{,}1403$$

Confronto con l'elegante formula di Leibniz:

$$\pi = 4\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\cdots\right)$$

Per il confronto sulla velocità di calcolo (si dispone di un computer da 2,8 GHz e di un software realizzato appositamente) si vuole cercare la mole di lavoro che deve essere svolta da un PC per ottenere un risultato con un grado di *precisione* pari a 0,0000001.

Si può verificare che per ottenere quanto proposto con la *formula* di ***Leibniz*** vengono richieste **9.999.996** somme in un tempo di circa 28 secondi. Il valore ottenuto è:

π = 3,141592**5**5 *(il valore corretto è π = 3,141592653…)*

Con la *formula 4.* sono sufficienti **12** loop (v. sotto) per ottenere **π** = 3,141592**5**7 con un tempo di calcolo trascurabile; il risultato è immediato!

Il software per calcolare il π con la serie di "n" LOOP comprende (*per la formula 4. precedentemente ricavata*) le seguenti istruzioni:

```
…. omissis
…. omissis
'---------------------- inizializzazione variabili ----------------------------
Errore = 1                              ' per entrare nel primo Loop
A = 0                                   ' Sqr(2)
PG = 0
intero = 0
Approssimazione = 0,0000001
'---------------------Fine inizializzazione variabili -------------------------

Do While Errore > Approssimazione       ' inizio Loop
' Istruzioni per la ricerca di PG, secondo la formula 4.  (la formula dei poligoni).
intero = intero + 1
PG = (2 ^ intero) * Sqr(2 - A)
A = Sqr(2 + A)
Errore = Abs(PiGreco - PG)              ' controllo errore in valore assoluto
Loop                                    ' continua il loop finchè la condizione in "Do
                                        ' While" è vera.
…. omissis
…. omissis
```

fine

CAP. 2 Pi Greco modificato - $\pi_{modificato}$

Lo studio che segue porterà al sorprendente *potenziamento* della formula 4. del Pi Greco $(\pi_c)_n$ – “pi greco calcolato” con “n” radici quadrate – riuscendo con un semplice algoritmo a raddoppiare, all’incirca, il suo numero di cifre corrette *(v. Tab. 2)*.
Il valore calcolato di Pi Greco $(\pi_c)_n$ ha senso, infatti, quando se ne conoscano anche i limiti *entro* i quali è contenuto; determinata l’ampiezza δ_n di tale approssimazione si potranno successivamente dedurre, quindi, le cifre corrette!
Il valore reale di π è pertanto compreso fra $(\pi_c)_n$ e $(\pi_c)_n + \delta_n$. Riducendo l’ampiezza δ_n si aumenta la precisione del valore calcolato $(\pi_c)_n$ ***(v.** Tab. 1**)***.

5. $(\pi_c)_n < \pi < (\pi_c)_n + \delta_n$

- L’ampiezza **δ** e l’errore **E_R, E_T**

Non conoscendo l’area del cerchio (π) non si conoscono neppure i due errori, in eccesso **E_R** e difetto **E_T** *(v. paragrafo CGF)*.
Si conosce, invece, la somma **$E_R+E_T = \delta$**
δ_n, ovviamente, coincide con l’**area dei triangoli** relativa al calcolo di ordine **n**.
Il massimo valore di **δ_n**, in relazione al numero **n** di radici, si calcola con la formula che segue;

$$Area\ totale\ Triangoli\ isosceli: AT_n \equiv \delta_n$$

$$AreaT_n = 2^{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt[1]{2-\sqrt[2]{2+\sqrt[3]{2+\sqrt[4]{2+\ldots\ldots\sqrt[n-1]{2+\sqrt[n]{2}}}}}} - \frac{1}{4}\sqrt[1]{2-\sqrt[2]{2+\sqrt[3]{2+\sqrt[4]{2+\ldots\ldots\sqrt[n-1]{2}}}}}\right)$$

$$\delta_n = 2^n\cdot\sqrt[1]{2-\sqrt[2]{2+\sqrt[3]{2+\sqrt[4]{2+\ldots\ldots\sqrt[n-1]{2+\sqrt[n]{2}}}}}} - 2^{n-1}\cdot\sqrt[1]{2-\sqrt[2]{2+\sqrt[3]{2+\sqrt[4]{2+\ldots\ldots\sqrt[n-1]{2}}}}}$$

6. $$\boxed{\delta_n \equiv (\pi_c)_n - (\pi_c)_{n-1}}$$

Tab. 1

π =	**3,14159265**

n (numero di loop) =	0	1	2	3	4	5
NL =	4	8	16	32	64	128
(π calcolato) < π	2	2,82843	3,06147	3,12145	3,13655	3,14033
Errore reale [π - (π calcolato)] =		0,31317	0,08013	0,02015	0,00504	0,00126
AT ≡ δ =		**0,82843**	**0,23304**	**0,05998**	**0,01510**	**0,00378**
AR =2·AT =		1,65685	0,46608	0,11996	0,03021	0,00757

Es.:

Per n = 4 si confrontino i dati ottenuti (*formule 4, 5, 6*) con quelli della tabella (*Tab. 1*).

$$(\pi_c)_4 < \pi < (\pi_c)_4 + \delta_4 \quad oppure: \quad (\pi_c)_{4-1} + AT_4 < \pi < (\pi_c)_{4-1} + AR_4$$

$$3{,}13655 < \pi < 3{,}13655 + 0{,}01510 \quad oppure: \quad 3{,}12145 + 0{,}01510 < \pi < 3{,}12145 + 0{,}03021$$

$$3{,}13655 < \pi < 3{,}15166$$

(v. Fig. 5)

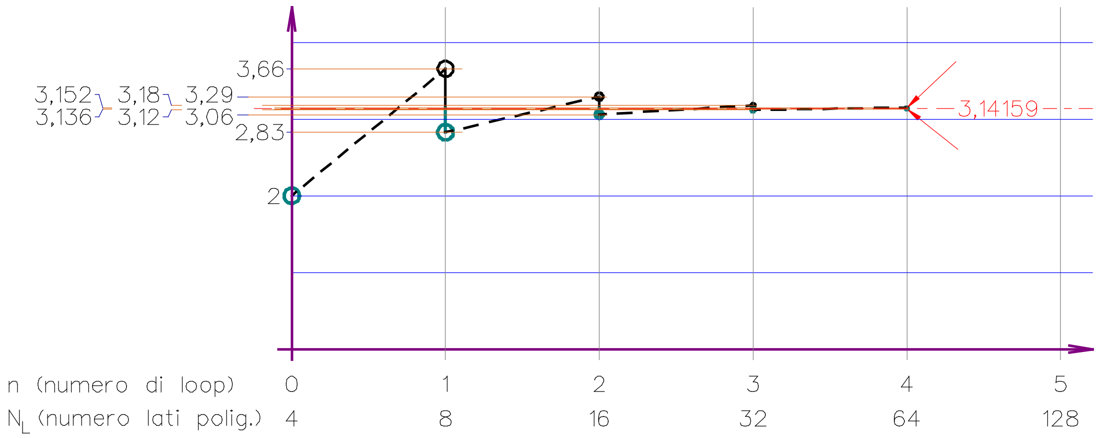


Fig. 5

- Caratteristica Geometrica Fondamentale (CGF)

Il nuovo sviluppo si basa su una caratteristica geometrica *insospettata*, *notata* osservando come l'errore commesso approssimando l'**area del cerchio** (coincide col valore π essendo r = 1) con **rettangoli** (sempre più piccoli e di base pari alla lunghezza della corda …) corrisponda all'area $\mathbf{E_R}$ mentre l'errore commesso dall'approssimazione con **triangoli** corrisponda all'area $\mathbf{E_T}$ (*Fig. 6, 7, 8, 9, 10*).
È risultato fondamentale, nello studio dell'**errore**, scoprire che il rapporto fra gli errori $\mathbf{E_R/E_T}$ tende ad un valore costante al tendere di n all'infinito.
Si è così pervenuti, da queste semplici osservazioni di tipo geometrico, ad un sostanziale quanto inatteso miglioramento della precisione del $(\pi_c)_n$.

Caso n = 0

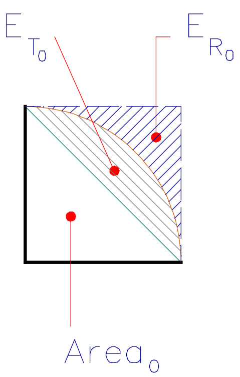


Fig. 6

$$E_{R_0} = 0{,}752 \cdot E_{T_0}$$

Caso n = 1

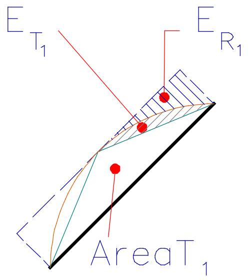


Fig. 7

$$E_{R_1} = 1,645 \cdot E_{T_1}$$

Caso n = 2 *(scala 2:1)*

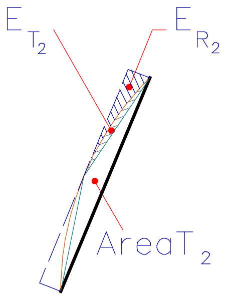


Fig. 8

$$E_{R_2} = 1,908 \cdot E_{T_2}$$

Caso n = 3 *(scala 4:1)* *(scala 8:1)*

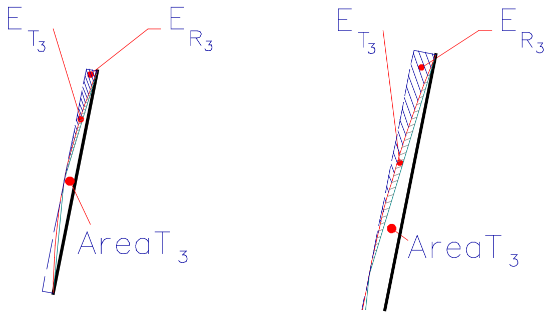


Fig. 9

$$E_{R_3} = 1,977 \cdot E_{T_3}$$

Caso n = 4 => $E_{R_4} = 1,994 \cdot E_{T_4}$

Caso n = 5 => $E_{R_5} = 1,9986 \cdot E_{T_5}$

7. Caso **n** $\rightarrow \infty$ => $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{E_{R_n}}{E_{T_n}} = 2}$

Questo importantissimo limite ha come conseguenza che:

$E_{T_n} > E_{T_\infty} = \frac{\delta}{3}$

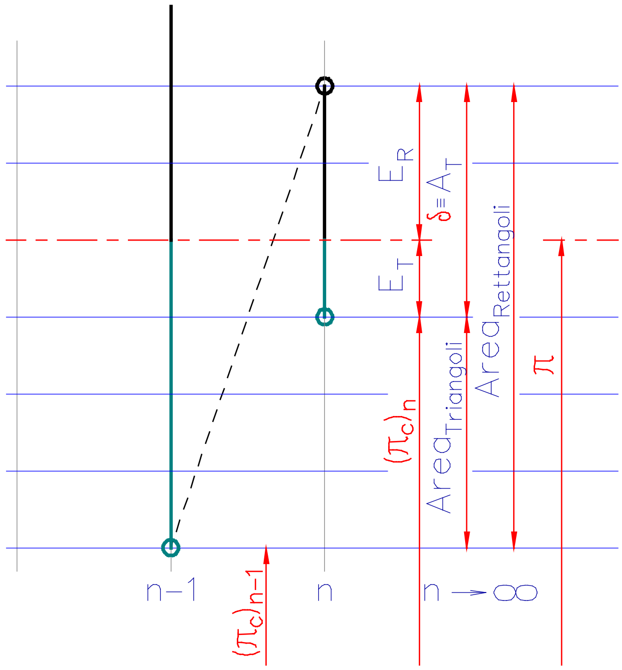


Fig. 10

Ed ecco il potente algoritmo, *strumento di calcolo* sorprendentemente semplice:

8. $$\boxed{\begin{aligned} &\left(\pi_{modificato}\right)_n = \left(\pi_c\right)_n + \frac{\delta_n}{3} \\ &\left(\pi_{modificato}\right)_n = \frac{4}{3}\cdot\left(\pi_c\right)_n - \frac{1}{3}\cdot\left(\pi_c\right)_{n-1} \\ &\left(\pi_{modificato}\right)_n < \pi \end{aligned}}$$

- Conclusioni

Dalla tabella della pagina seguente (*Tab. 2*) si nota che la precisione del $\pi_{modificato}$ è costituita da un numero di cifre corrette *almeno* doppio rispetto al numero di zeri dopo la virgola della correzione **δ/3**.
Il grado di precisione lo si desume dalle *cifre invarianti* fra l'ultimo $\pi_{modificato}$ e quello immediatamente precedente. Lo stesso si può dire per $(\pi_c)_n$.

FINE

Tab. 2

Pi Greco:

Valutazione dell'approssimazione, calcolo dell'errore, correzione

Data di verifica della teoria: 14/08/2010

π = **3,14159265358979**

n (numero di loop) =	0	1	2	3	4	5	6	7	8
N_L =	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
(π calcolato) < π	2	2,82842712474619	3,06146745892072	3,12144515225805	3,13654849054594	3,14033115695474	3,14127725093276	3,14151380114415	3,14157294036788
Errore reale [π - (π calcolato)] =		0,31316552884360	0,08012519466908	0,02014750133174	0,00504416304385	0,00126149663505	0,00031540265704	0,00007885244565	0,00001971322191
AT ≡ δ =		**0,82842712474619**	**0,23304033417453**	**0,05997769333734**	**0,01510333828789**	**0,00378266640880**	**0,00094609397802**	**0,00023655021139**	**0,00005913922374**
AR =2·AT =		1,65685424949238	0,46608066834906	0,11995538667467	0,03020667657578	0,00756533281760	0,00189218795604	0,00047310042278	0,00011827844747
δ/3		**0,27614237491540**	**0,07768011139151**	**0,01999256444578**	**0,00503444609596**	**0,00126088880293**	**0,00031536465934**	**0,00007885007046**	**0,00001971307458**
(π modificato) < π		3,10456949966159	3,13914757031223	3,14143771670383	3,14158293664190	3,14159204575767	3,14159261559210	3,14159265121461	3,14159265344246
Errore reale [π - (π modificato)]=		0,03702315392821	0,00244508327757	0,00015493688596	0,00000971694789	0,00000060783212	0,00000003799770	0,00000000237518	0,00000000014733

Esempi di calcoli tabulati con valori (π calcolato)$_n$ di ordine "n", (δ)$_n$ errore di ordine "n", (π modificato)$_n$ pi greco **potenziato** di ordine "n"

APPENDICE ## Il π calcolato con la trigonometria.

La formula per il calcolo del Pi Greco l'ho ricavata il 13 gennaio 2010 ed a fine 2011 (dopo due anni) scopro (finalmente!) che era già nota da tempo, ottenuta tramite la trigonometria. È stata una fortuita scoperta perché mi trovavo in una grande libreria a curiosare quando la mia attenzione è stata catturata dal titolo "La favolosa storia della radice quadrata di 2" di un libro che riportava in copertina una grande radice di due (*).
La successione che converge a **π**, si diceva nel volume, è stata ricavata dallo studio del **$\cos(\pi/2^k)$** al tendere di k all'infinito! Non c'era la dimostrazione che, peraltro, non è stata difficile da ottenere. Infatti si ricava da note funzioni trigonometriche e la procedura per arrivare alla serie cercata la propongo di seguito:

1. $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta)$
2. $\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-sen^2(\alpha)$ (duplicazione: ponendo β = α)
3. $\cos(\alpha)=\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ (bisezione: ponendo 2α = α)

- $$\cos(\alpha)=\left[1-sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]-sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=1-2\cdot sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$
  $$\boxed{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}}$$

- $$\cos(\alpha)=\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\left[1-\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]=2\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1$$
  $$\boxed{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}}$$

Caso 1)

α = 90°

$$sen(45°)=\sqrt{\frac{1-\cos(90°)}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos(45°)=\sqrt{\frac{1+\cos(90°)}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(*) Editore Bollati Boringhieri – autore Benoît Rittaud pag. 392

Caso 2)

α = 45°

$$sen(22{,}5°)=\sqrt{\frac{1-\cos(45°)}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\cos(22{,}5°)=\sqrt{\frac{1+\cos(45°)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Caso 3)

α = 22,5°

$$sen(11{,}25°)=\sqrt{\frac{1-\cos(22{,}5°)}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\cos(11{,}25°)=\sqrt{\frac{1+\cos(22{,}5°)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

….è, ora, del tutto evidente come proceda lo sviluppo della serie.

Il doppio del ***sen(11,5°)*** rappresenta la lunghezza di uno dei 16 lati (***l_n***) del poligono regolare inscritto nel cerchio di raggio ***r = 1*** e di circonferenza ***c = 2 π***.
Il poligono approssima sempre meglio la circonferenza quanto più il numero ***n*** dei suoi lati tende all'infinito.

$$2\cdot\pi>16\cdot l_{16}=16\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\pi>8\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\pi=\lim_{n\to\infty}2^n\cdot\sqrt[1]{2-\sqrt[2]{2+......\sqrt[n]{2}}}$$

(c.v.d.)

Il metodo geometrico da me seguito ha potuto portare, a differenza del metodo trigonometrico sopra esposto, all'individuazione del **binomio 2.1 pag.1** che impiegato nella fase finale potenzia il calcolo del π e che con una semplice operazione in *pochi istanti* riesce, quindi, a determinare un numero di cifre corrette almeno doppio di quelle appena trovate con la formula **1.1 pag.1** ottenute, magari, dopo aver fatto lavorare un super computer per *giornate intere*. È chiaro, quindi, cosa ciò comporti: una forte riduzione dei tempi di calcolo, di un computer, a parità di precisione ottenuta.
… e allora glielo vogliamo dare un aiuto anche al Super Computer?
F.M.

Quaderno **2**

Stampato:
febbraio 2012

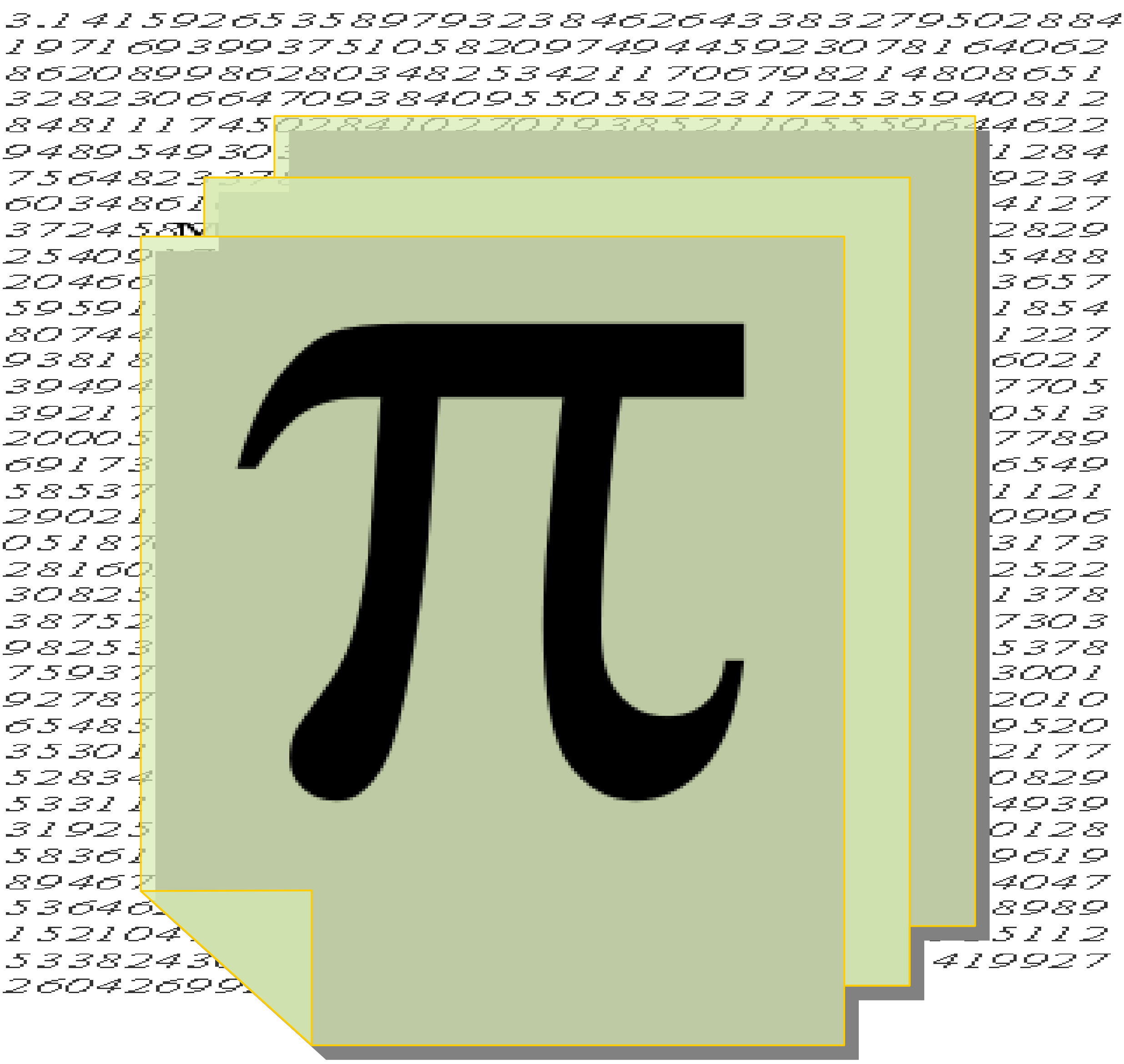
2012

Collana: GLI APPUNTI

(monografie)

Ing.
Franco Meneghin

Docente di Discipline Meccaniche all'I.I.S. di Vittorio Veneto – TV



ALLA RICERCA DEL PI GRECO

La stessa formula conseguita con metodo trigonometrico è qui ottenuta in modo diverso attraverso l'approccio geometrico. La ricerca sul π si snoda anche attraverso un varco aperto dalla scoperta di una particolare caratteristica geometrica i cui sviluppi hanno riservato alla fine una piacevole sorpresa!

Metodo dei triangoli per trovare il valore di

...anche Pitagora (*) l'avrebbe potuto calcolare.

(*) Pitagora [(Samo ?), c. 575 a.C. – Metaponto, c. 495 a.C.]

π

=3.14_15926535897932384626433832795028_
_8419716939937510582097494459230781640_
_6286208998628034825342117067982148086_
_5132823066470938409550582231725359408_
_1284811174502841027019385211055596446_
_2294895493038196442881097566593344612_
_8475648233786783165271201909145686692_
_3460348610454326648213393607260249141_
_2737245870066063155881748815209209628_
_2925409171536436789259036001133053054_
_8820466521844695194151160943305727036_
_5759591953092186117381932611793105118_
_5480744623799627495673518857527248912_
_2793818301194912983367336440566430860_
_2139494639522473719070217986094370277_
_0539217176293176752384674818467669405_
_1320005681271452635608277857713427577_
_8969173371787214684409012249534301465_
_4958537105079227968925892354201995611_
_2129021960864034418159813629774771309_
_9605187072113499999837278049951059731_
_7328160963185950244594553469083026425_
_2230825334468503526193118817101000313_
_7838752886587533208381420617177661473_
_0398253490428755468731159562863882353_
_7875937519577818577805321712268066130_
_0192787661119590921642019893809525720_
_1065485863288659365338182796823030195_
_2035301852968995773622599413891249721_
_7752834791315155748572424541506959508_
_2953311686172785588907509881754637649_
_3931925506040092770167113900984882401_
_2858361603563707660104710181942955596_
_1989467678374494482553797747268471040_
_4753646208046842590694912933136770289_
_8915210475216205696602405803815019351_
…………