Operatori funzionali vettoriali

vector functional operators

dr.ing Alberto Sacchi
ing.sacchi@alice.it - Sviluppo Progetti Avanzati – R&D Dept

Introduzione (Introduction)

E' opinione diffusa che la Matematica non definisca la natura degli enti di cui è costituita bensì esclusivamente quali operazioni siano ammesse con gli stessi.
La matematica moderna è interessata principalmente a problemi di linguaggio formale e di rigore logico; la ontologia dei simboli (esterna al linguaggio stesso) non è rilevante.
Ne consegue che il significato geometrico degli stessi operatori funzionali vettoriali è individuabile solo in alcuni casi specifici, non sempre generalizzabili.
E' peraltro innegabile che la modellazione geometrica di tali operatori rende immediatamente comprensibile lo scopo per cui sono stati introdotti ed a quali concetti possono fornire supporto matematico.

It 'widely believed that mathematics does not define the nature of its entities but only what transactions are permitted with them.
Modern mathematics is interested mainly in the formal language and logical rigor; the ontology of symbols (external to the language itself) is not relevant.
It follows that the geometric meaning of the same vector functional operators is detectable only in some specific cases, not always generalizable.
The geometric modeling of these operators makes readily understandable the purpose for which they were introduced and what concepts can provide mathematical support.

Sintesi (Abstract)

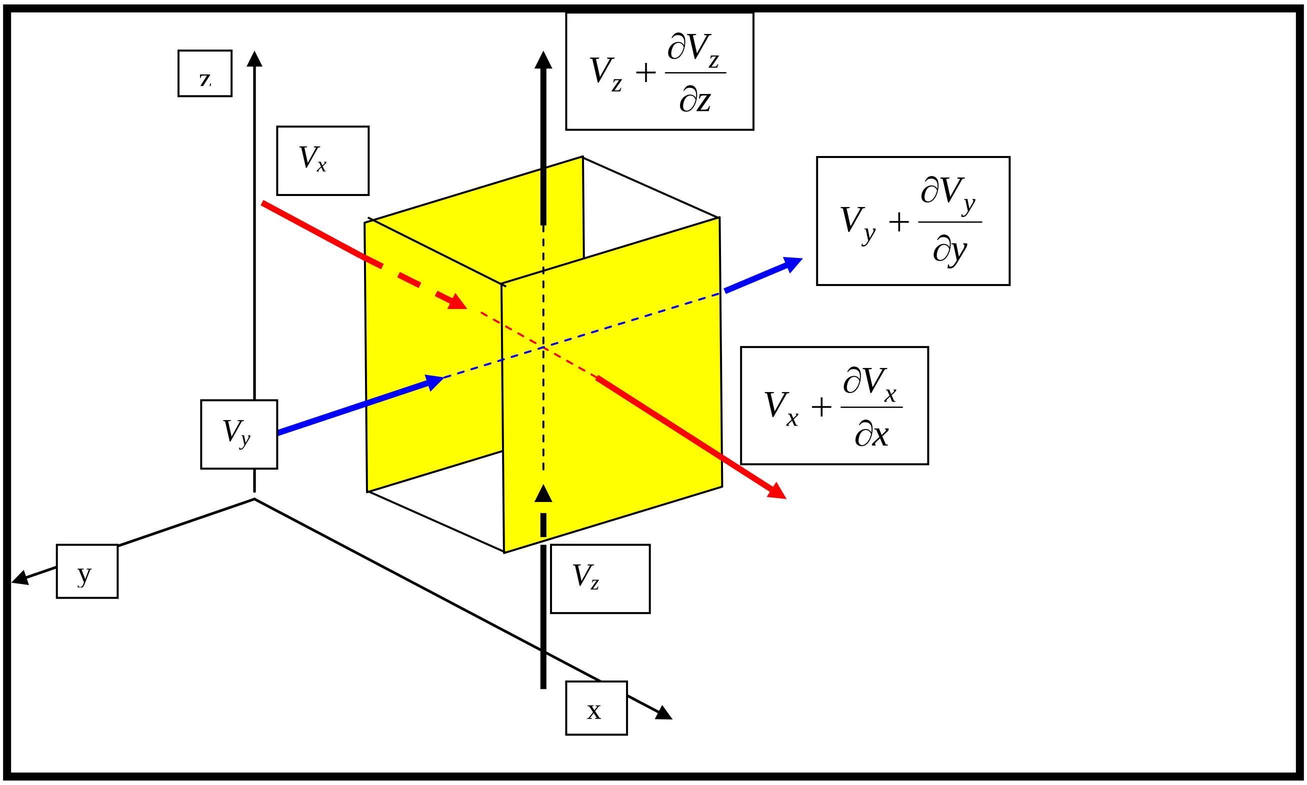
Modelli fisici da cui derivano le espressioni matematiche definenti gli operatori funzionali vettoriali Divergenza, Gradiente e Rotore
Geometric models from which are derived mathematical expressions that define the vector operators.

Parole chiave (Keyword)

Flusso, Solenoidale, Scalare, Vettore, Componente rotazionale.
Flow, Solenoid, Scalar, Vector, Rotational component

Divergenza del vettore V(x,y,z); divV= $\nabla.\overline{V}$

L'operatore Divergenza trasforma un vettore in uno scalare.
Si consideri un cubo elementare di dimensioni dxdydz e sia **V(x,y,z)** una grandezza dipendente dalle variabili x.y.z.
Ad esempio V può rappresentare la velocità di un fluido il cui flusso attraverso una superficie rappresenta una portata..



La differenza tra il flusso di V_x entrante ed uscente dalle facce normali all'asse x, detta Σ= dx.dy = dx.dz = dy.dz la superficie di una faccia del cubo elementare, è:

$$\Sigma V_x - \Sigma(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x}) = 0 \quad \text{ossia : } -\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0$$

dove $\frac{\partial V_x}{\partial x}$ rappresenta la variazione del modulo di V_x lungo lo spigolo dx del cubo.

Analogamente per V_y e V_z :

$$-\frac{\partial V_y}{\partial y} \qquad -\frac{\partial V_z}{\partial z}$$

La differenza complessiva tra flusso entrante ed uscente dalle 6 facce del cubo è allora:

$$div\overline{V} = -\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right)$$

Il segno meno (div negativa) indica che il flusso uscente è superiore al flusso entrante: ciò significa che all'interno del cubo esiste una "sorgente" di V

Nel caso in cui la divergenza avesse segno positivo il flusso entrante risulterebbe superiore a quello uscente ammettendosi conseguentemente l'esistenza di un "pozzo" interno al cubo in cui parte del flusso verrebbe assorbito.

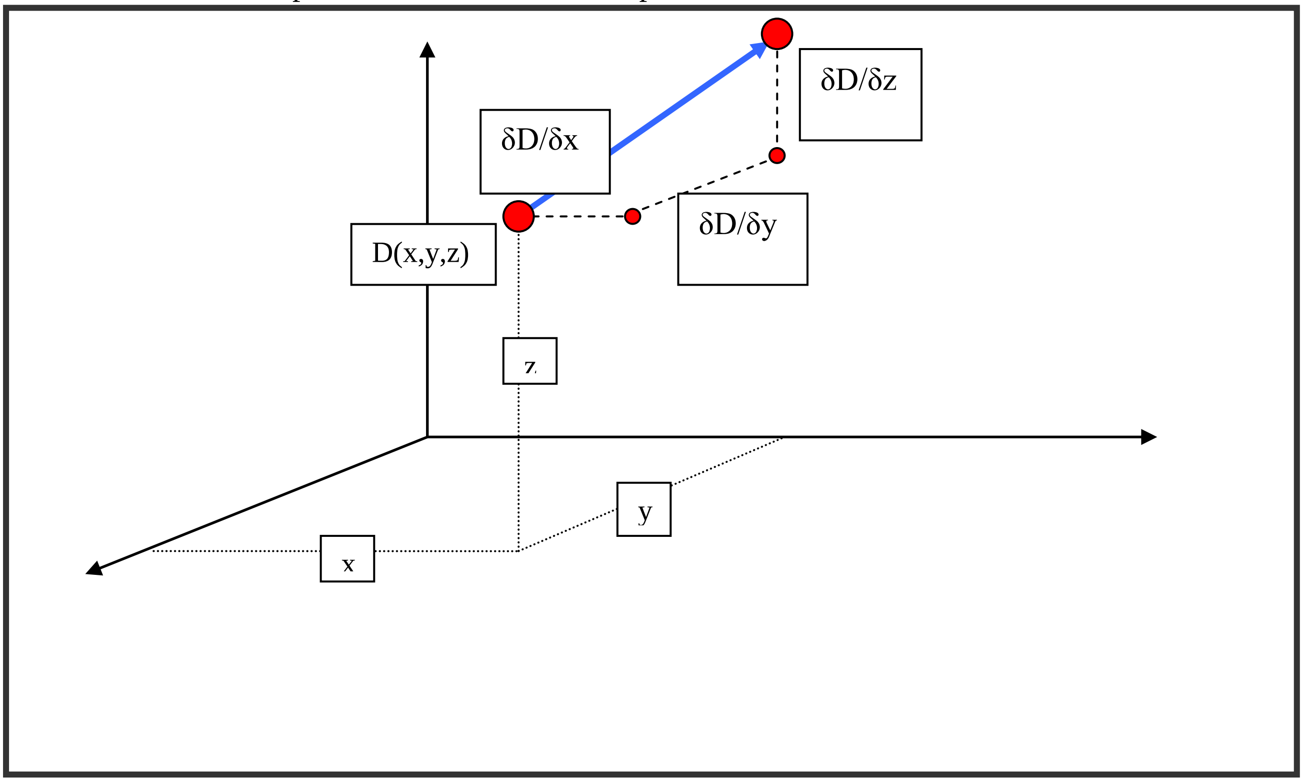
Divergenza nulla significa campo “liscio” cioè privo di ”sorgenti “ e/o “pozzi” (campo solenoidale).

Gradiente dello scalare D(x,y,z); grad D = ∇D

L’operatore Gradiente trasforma uno scalare in un vettore.
Si consideri uno spazio cartesiano 3D in cui un parametro scalare sia funzione della posizione.

D = f(x,y,z)

Ad esempio si può immaginare un corpo solido avente densità variabile punto per punto oppure un locale in cui la temperatura sia funzione della posizione.



Detti **i,j,k** i versori degli assi x,y,z, il vettore che identifica lo spostamento complessivo della quantità scalare D ha come componenti:

δD/δx **i** δD/δy **j** δD/δz**k**

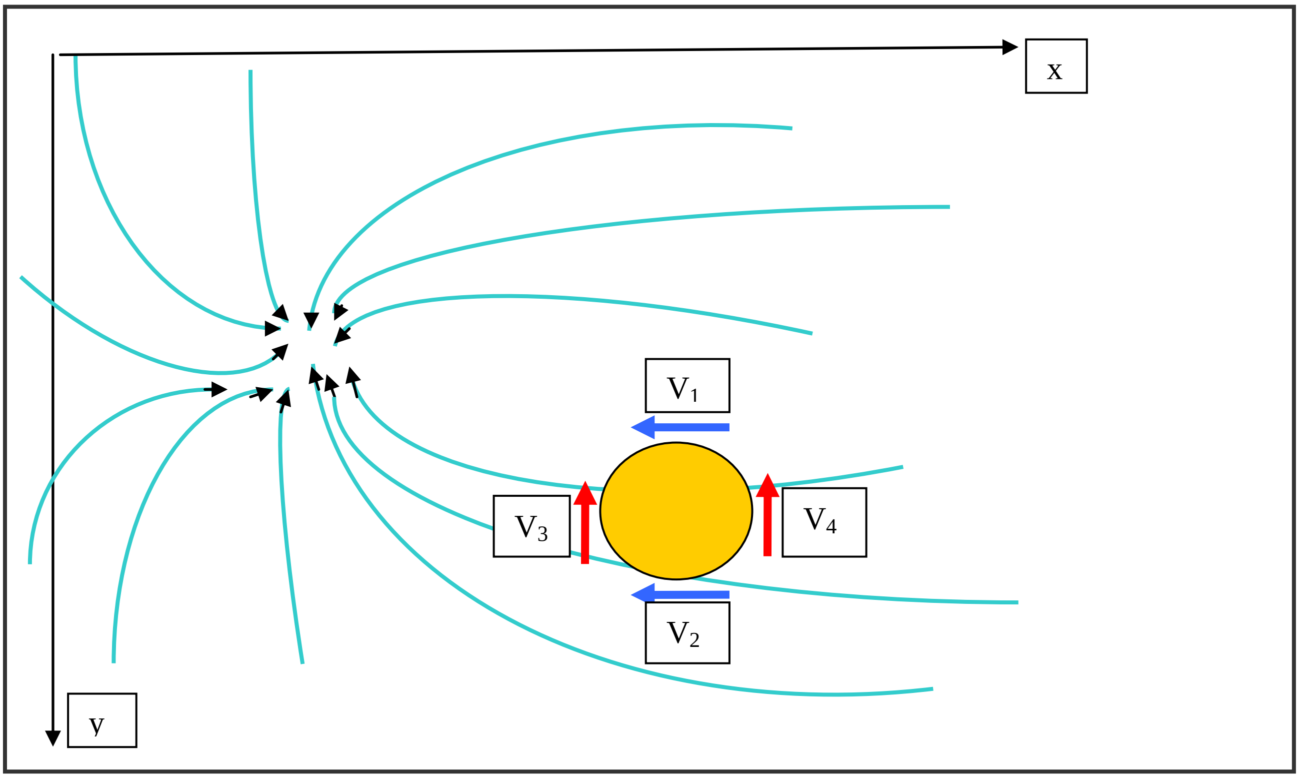
La variazione complessiva di D è quindi:

$$\text{grad D} = \frac{\partial D}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial D}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial D}{\partial z}\bar{k}$$

Il grad di uno scalare D è quindi un vettore che rappresenta la variazione complessiva di D suddivisa nelle tre direzioni dello spazio ortonormale.

Rotore del vettore V

Il rotore di un vettore **V** rappresenta la componente rotazionale di **V** e si può derivare dal calcolo della rotazione pura di un disco (di diametro infinitesimo) immerso in una corrente fluida convergente in un punto.
Tipico esempio il flusso di una vasca d'acqua in prossimità di un punto di scarico



Sia dato un disco di diametro dx immerso in una corrente fluida di velocità V.

$V_1 = V_x$ impone una rotazione antioraria al disco
$V_2 = V_x + \delta V_x/\delta y$ impone una rotazione oraria la disco
$V_3 = V_y$ impone una rotazione oraria al disco
$V_4 = V_y + \delta V_y/\delta x$ impone una rotazione antioraria al disco

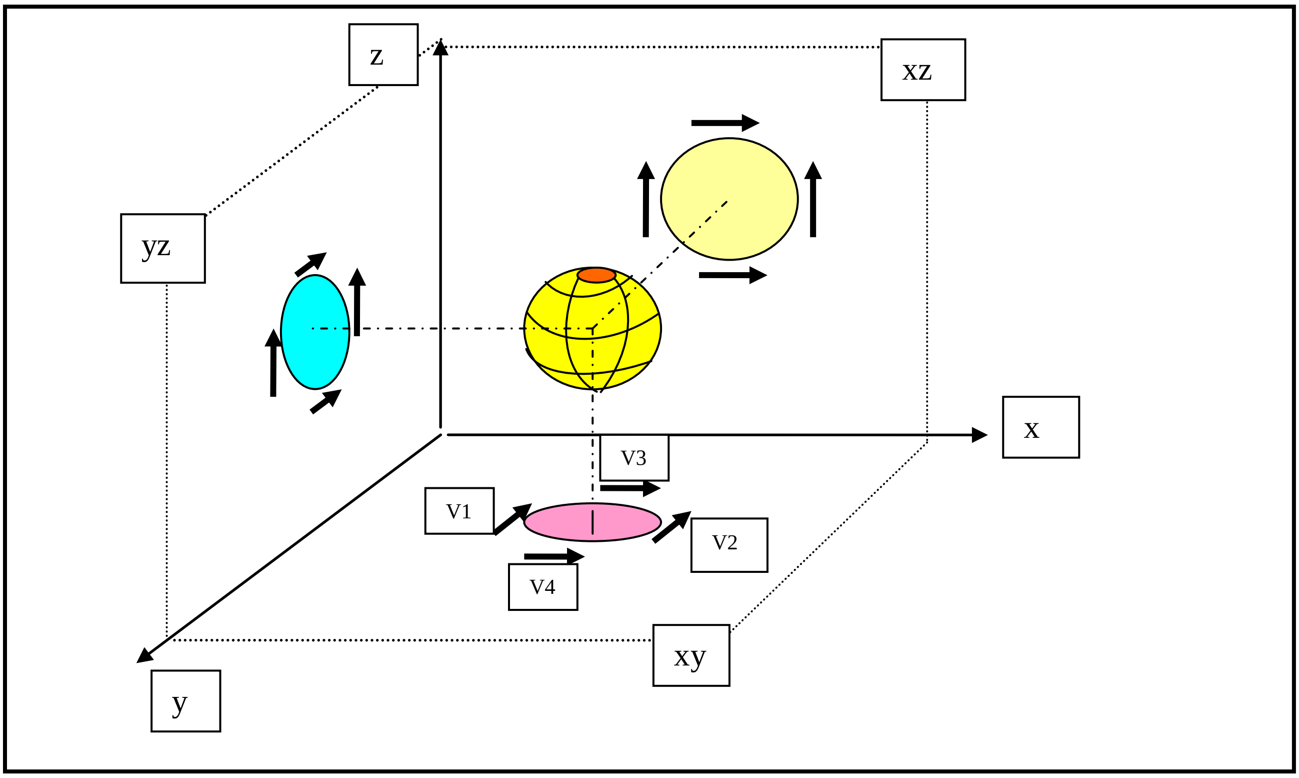
La rotazione netta è quindi:

$$(V_1 - V_2) + (V_3 - V_4) = \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x}$$

tale relazione è riferita ad uno spazio 2D (piano euclideo). Sostituendo in disco con una sfera 3D ed analizzando l'identica situazione per i piani xz ed yz si ha:

$$\text{Rot } \mathbf{V} = \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial Vx}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\bar{k} + \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\bar{j}$$

Come è facilmente verificabile dalla proiezione di una sfera sui piani xy, xz ed yz.
Le dimensioni infinitesime del disco consentono di considerare operatore Rot come riferito ad un punto (solo intuitivamente corrispondente al centro del disco)



Rot.V rappresenta quindi la componente rotativa dello spostamento locale di un campo vettoriale

Teorema della divergenza (Teorema di Ostrogradskij)

Il flusso del vettore ***V*** *attraverso la superficie chiusa S coincide con l'integrale della divergenza di* ***V*** *svolto nel volume W di cui la superficie S è frontiera.*

$$\int_W \nabla.\overline{V}dW = \oint_S \overline{V}dS$$

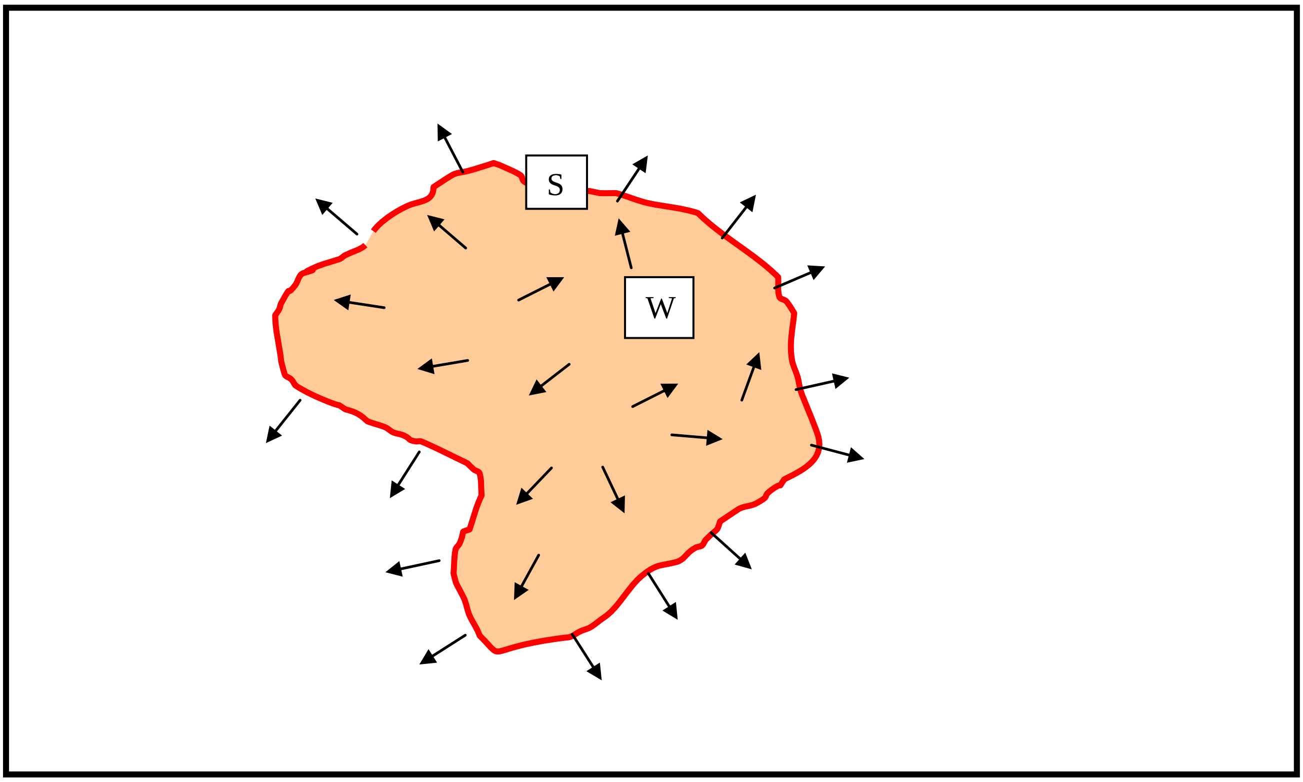
- Sia **V** un vettore riferito ad un fenomeno fisico vettoriale $\mathbf{A}_V$ (velocità, accelerazione gravitazionale, quantità di moto, ecc.) e sia:
- V il modulo di **V** ovvero la misura quantitativa di **Av** (m/s per velocità, m/s^2 per g, kgm/s per mv).
- ∇.**V** la differenza tra i flussi di **V** entrante ed uscente da uno qualsiasi punto del volume W

Ne segue che:

$$\int_W \nabla.\overline{V}dW$$

rappresenta il flusso di **V** globalmente entrante (od uscente) dal volume W od anche:
il valore quantitativo di $\mathbf{A}_v$ entrante (od uscente) dal volume W

Il Principio di continuità di A_v (conservazione della massa, della quantità di moto, dell'energia, ecc.) garantisce che **il valore quantitativo di A_v entrante (od uscente) dal volume W** attraversi necessariamente la frontiera S di W cioè $\oint_S \overline{V} ds$



Bibliografia (bibliography)

Jess H. Brewer, *Divergence of a Vector Field*, su *Vector Calculus*, 7 aprile 1999

Eric W. Weisstein, *Gradiente*, in *MathWorld*, Wolfram Research

Kaplan, W. "The Curl of a Vector Field." §3.5 in *Advanced Calculus, 4th ed*. Reading, MA: Addison-Wesley.

Morse, P. M. and Feshbach, H. "Curl." In *Methods of Theoretical Physics, Part I*. New York: McGraw-Hill