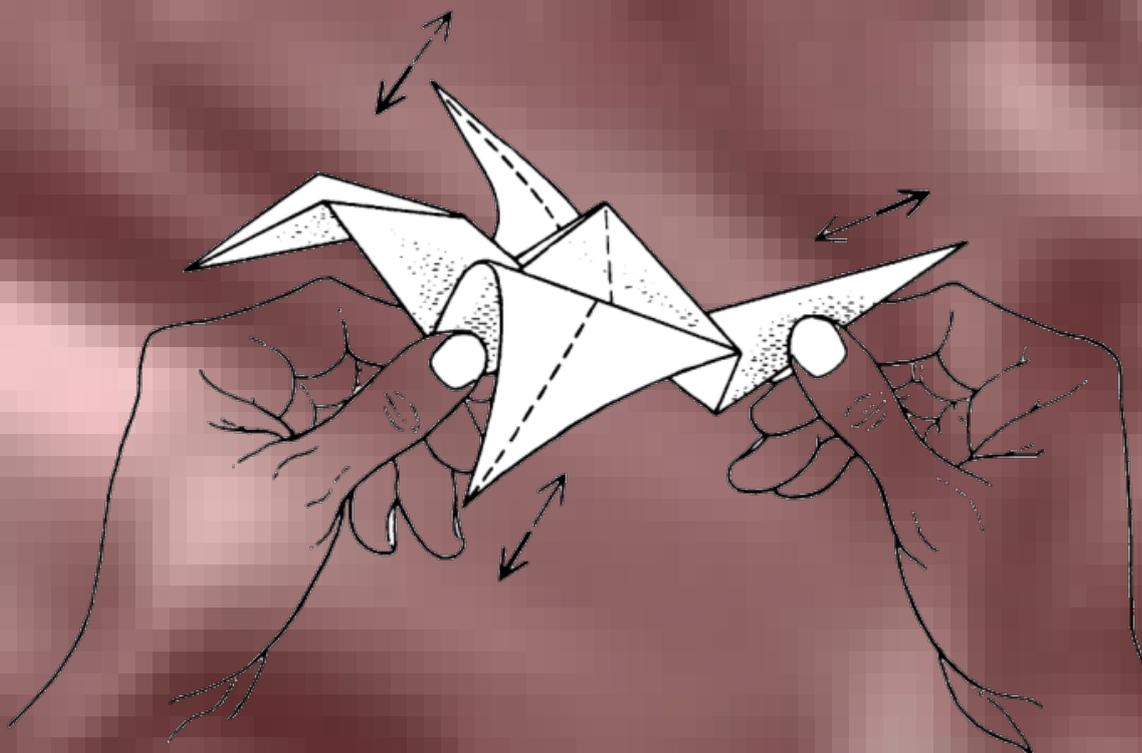


La geometria
prende tutta
un'altra piega



La notazione

Nel corso degli anni, l'origami ha sviluppato una notazione specifica per indicare le operazioni da svolgere; pur partendo da concetti molto semplici, la necessità di descrivere modelli complessi che richiedono molte piegature ha portato ad una stenografia (fortunatamente) standardizzata, ma piuttosto complessa.

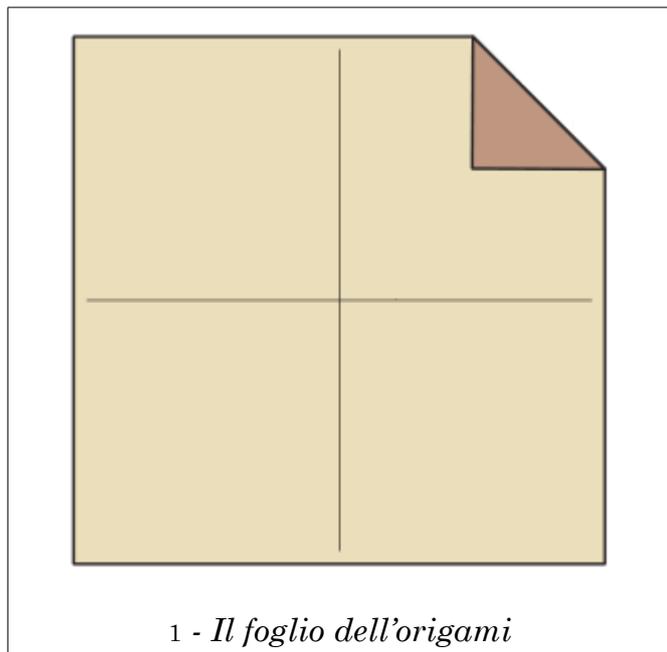
Le notazioni base

La prima immagine di una sequenza ci permette di solito di capire quale debba essere il formato del foglio di origine: infatti, anche se la grande maggioranza dei modelli prevedono di partire da un foglio quadrato, esistono modelli che partono da un foglio in formato ISO 216 A¹ o (ma questi sono decisamente rari) da un *doppio* quadrato.

Convenzionalmente, una faccia del foglio (quella all'inizio verso chi piega) è definita "bianca" o "chiara", mentre l'altra faccia è definita "colorata" o "scura".

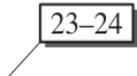
Nella figura a fianco, si vede un foglio (quadrato) per origami in cui l'angolo in alto a destra è stato piegato (con una *piega a valle*) per mostrare il lato colorato; sono inoltre presenti due piegature (una verticale e una orizzontale) che sono state riaperte.

Le azioni da compiere sono solitamente indicate da frecce:



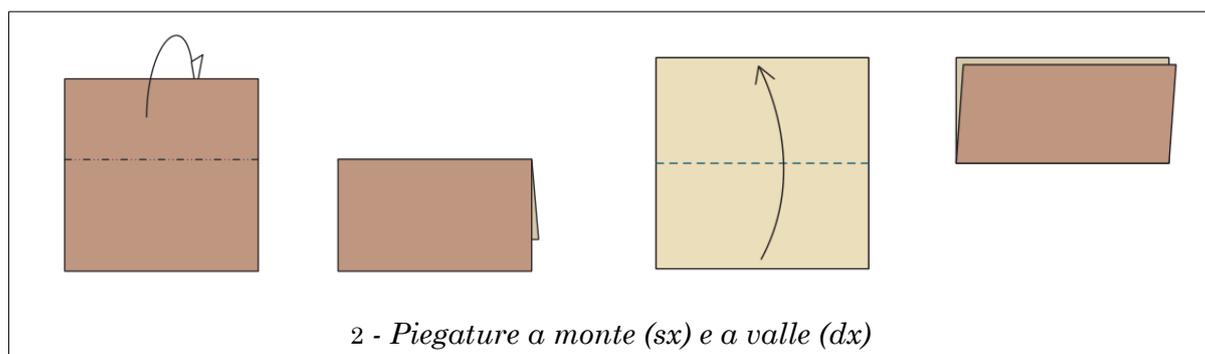
1 Il formato ISO216 A è sommariamente definibile come:

1. I lati del foglio sono in rapporto $\sqrt{2}$
2. Il formato A0 ha una superficie di 1 m².
3. Il formato A(n+1) si ottiene dividendo a metà parallelamente al lato minore il formato A_n.

Azione	Simbolo
Spingere (di solito su un vertice, per indicare la simultanea "chiusura" di più piegature)	
Ruotare il foglio orizzontalmente	
Ruotare il foglio verticalmente	
Ruotare il foglio nel piano del tavolo nella direzione indicata dalle frecce per la frazione indicata dell'angolo giro. Negli esempi, rotazione antioraria (in alto) e oraria (in basso) di 90°.	 
Guardare da questo punto di vista (un occhio stilizzato con una linea indicante la linea di vista).	
Ripetere i passi indicati nel rettangolo sul punto indicato dalla linea.	

Le piegature base

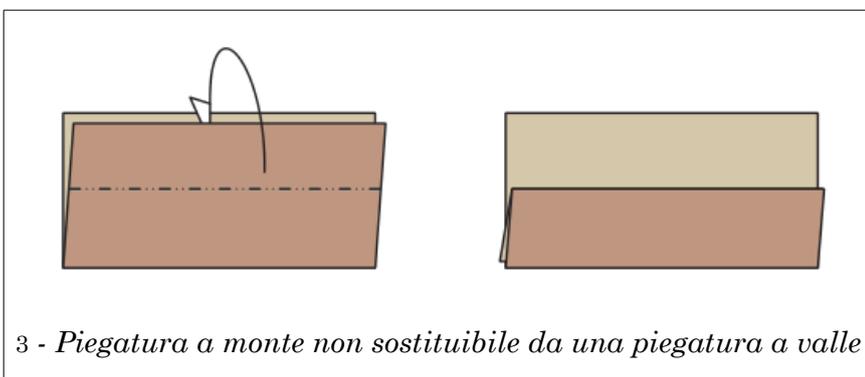
Da un punto di vista pratico, le piegature base dell'origami sono due: la *piegatura a valle* e la *piegatura a monte*.



La *piegatura a valle*, effettuata su un foglio non ancora piegato, prevede di lasciare una "valle" nella zona della piegatura: in figura, il simbolo utilizzato e il risultato finale. Di converso, una *piegatura a monte*, effettuata su un foglio, lascia un "monte" nella zona di piegatura.

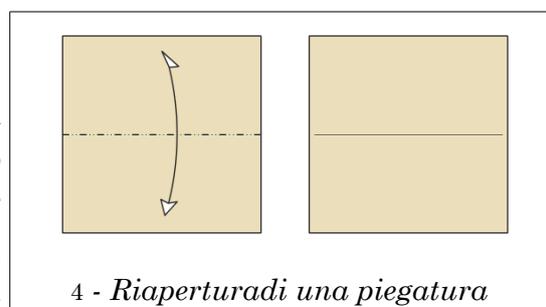
Si noti che le teste delle frecce, nei due casi, sono diverse.

In svariati testi, la piegatura a monte è riassunta nella frase "ruotare il foglio, effettuare una piegatura a valle e tornare alla posizione iniziale"; anche se nella maggior parte dei casi



questa procedura è giustificata (non è facile vedere "dove va a finire" il bordo che viene piegato, e questo è spesso un punto in cui è richiesta la massima precisione), in alcuni casi (ad esempio quando la piegatura a monte serve a fissare un'aletta in una tasca) questa sostituzione non è valida, come si vede dall'esempio in figura: la piegatura a monte non può essere trasformata in una piegatura a valle se non riaprendo il foglio, il che potrebbe non essere possibile.

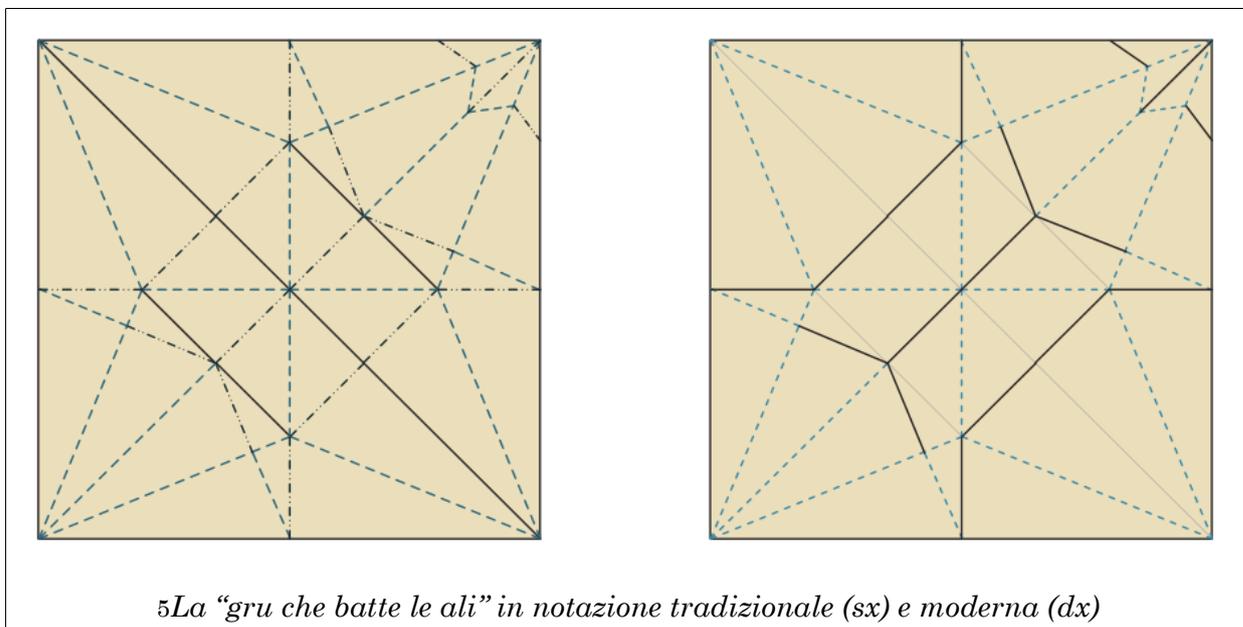
Formalmente, anche l'esecuzione della riapertura del modello dopo aver effettuato una piegatura è una piegatura: per risparmiare spazio, spesso viene indicata da una freccia a due punte: una indicante la piegatura effettuata (nella figura, una piegatura a monte), l'altra indicante la riapertura



Quando è richiesta una lunga serie di piegature che vanno successivamente riaperte, viene di solito fornito il disegno del foglio aperto con segnate le piegature: se le piegature sono tutte indicate da linee continue, il problema del decidere se una data piegatura sia a monte o a valle può non essere semplice². Esistono due modi per indicare il senso delle piegature: uno tradizionale e l'altro (sviluppato in [LNG01]) particolarmente utile per i modelli molto complessi. In entrambi le piegature a valle sono indicate da linee tratteggiate, ma mentre il modo tradizionale indica le piegature a monte attraverso linee a tratteggio punto-linea, il metodo moderno preferisce indicarle attraverso linee continue; in quest'ultimo, le piegature

² Nel 1996, Marshall Bern e Barry Hayes hanno dimostrato che decidere il "senso" delle piegature di un origami aperto è un problema NP-COMPLETO.

(sia a monte che a valle) che non saranno utilizzate come piegature nel modello finale (ad esempio, linee intermedie per ottenere punti critici per piegature successive) vengono indicate da linee più chiare. Per comprendere la differenza tra i due metodi, nella figura di seguito (da [LNG01]) sono date la versione tradizionale (a sinistra) e moderna (a destra) dello stesso modello (la "gru giapponese che batte le ali", tradizionale).



Data la ripetitività di molte sequenze di piegature (in particolare nei modelli artistici), alcune di queste sono state codificate e dotate di nomi particolarmente suggestivi (la "testa dell'usignolo", l'"orecchio del coniglio", la "zampa della rana",...), ma che sono semplicemente successioni delle piegature già viste: per una trattazione completa (ma con scarsissime appendici matematiche) si veda [LNG01].

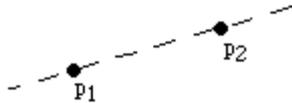
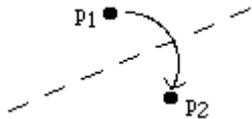
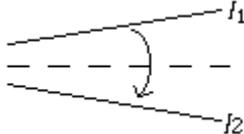
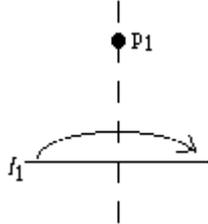
La formalizzazione

Si fanno risalire i primi tentativi di formalizzazione dell'origami agli anni Settanta, opera principalmente di Humiyaki Huzita: lo scopo era quello di catalogare tutte le possibili combinazioni di piegature e comprendere quali classi di numeri fossero costruibili combinando questi metodi in varie sequenze.

Nonostante si tratti della catalogazione di operazioni svolte su un foglio di carta, questi metodi sono diventati rapidamente noti come "Assiomi di Huzita".

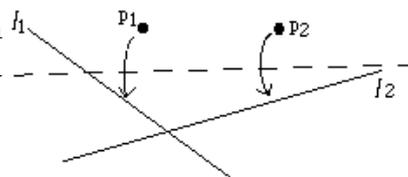
Gli assiomi di Huzita

Huzita identifica sei operazioni di base che permettono qualsiasi costruzione:

Num.	Assioma	Costruzione
1	Dati due punti p1 e p2 è possibile piegare lungo una linea che li connetta	
2	Dati due punti p1 e p2 , è possibile piegare p1 su p2	
3	Date due rette l1 e l2 , è possibile piegare l1 su l2	
4	Dato un punto p1 e una linea l1 , è possibile ottenere una piegatura passante per p1 e perpendicolare a l1	
5	Dati due punti p1 e p2 e una linea l1 , è possibile ottenere una piegatura passante per p2 che porti p1 su l1	

Num.	Assioma	Costruzione
------	---------	-------------

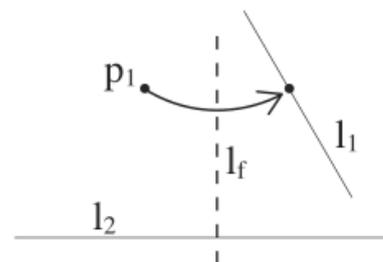
6 Dati due punti distinti p_1 e p_2 e due linee non parallele l_1 e l_2 , è possibile ottenere una piegatura che porti p_1 su l_1 e p_2 su l_2 .



Successivamente (2003), Hatori ha proposto di introdurre un ulteriore assioma, non ricavabile dai primi sei:

Num.	Assioma	Costruzione
------	---------	-------------

7 Dato un punto p_1 e due linee l_1 e l_2 , è possibile ottenere una piegatura perpendicolare a l_2 che porti p_1 su l_1 .



L'intero gruppo è diventato noto come "Assiomi di Huzita-Hatori"; si può dimostrare che questi assiomi sono *completi*, ossia definiscono tutte le operazioni che definiscono una singola piegatura come allineamento di punti e di linee¹.

Gli assiomi di costruibilità

Thomas Alperin, in [ALP01], ha definito una serie di assiomi non tanto in cerca di una formalizzazione dell'origami, ma per stabilire quali numeri complessi siano costruibili esattamente attraverso l'origami:

1. La linea che connette due punti costruibili è costruibile.
2. Il punto di coincidenza di due linee costruibili è un punto costruibile
3. La bisettrice perpendicolare di un segmento che connette due punti costruibili è costruibile
4. La bisettrice di qualsiasi angolo costruibile è costruibile
5. Data la linea costruibile l e i due punti costruibili P , Q , se esiste la linea passante per Q che porta P su l , allora questa linea è costruibile
6. Date le linee costruibili l , m e i punti costruibili P , Q , se esiste la linea che contemporaneamente porti P su l e Q su m , essa è costruibile.

¹ La dimostrazione per via algebrica è reperibile in [LNG01]

È facile vedere una certa qual corrispondenza tra gli assiomi di Alperin e quelli di Huzita-Hatori: la ragione della riformulazione in ordine e modo diverso nasce dal fatto che Alperin cerca di organizzare le sue costruzioni in modo gerarchico, costruendo insiemi di numeri sempre più ampi ad ogni inclusione di un nuovo assioma o, il che è la stessa cosa, risolvendo problemi non risolvibili con gli assiomi precedenti ad ogni nuova inclusione.

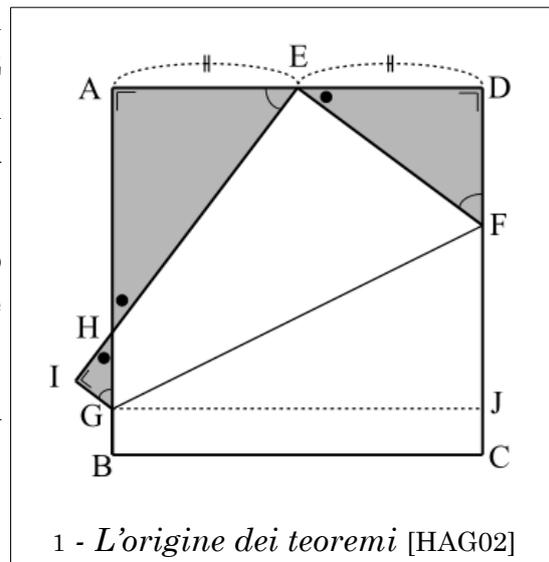
Riassumendo le conclusioni cui arriva Alperin², con i primi tre assiomi, agendo su tre punti costruibili, è possibile definire un campo algebrico; aggiungendo il quarto assioma, diventano possibili la bisezione degli angoli, tutte le costruzioni per cui è necessaria una riga e un regolo graduato (a scala unitaria) e tutti i reali algebrici; con il quinto assioma sono possibili tutte le costruzioni euclidee, ma in luogo del compasso viene utilizzato l'involuppo delle tangenti alla parabola; il sesto assioma, infine, utilizzando le intersezioni di due parabole e le loro tangenti mutue, permette l'estrazione di radici cubiche e la soluzione di equazioni di terzo e quarto grado.

I Teoremi di Haga

Kazuo Haga, studiando le piegature che portano un vertice basso del quadrato su un punto ben preciso del lato superiore, ha sviluppato una serie di costruzioni (successivamente definiti "Teoremi") che permettono alcune costruzioni abbastanza complesse.

La sua analisi³, dettagliatamente descritta in [HAG02], parte dalla considerazione che, se **E** è il punto medio del lato superiore, portare il vertice in basso a destra su **E** genera una serie di interessanti figure:

1. Il triangolo **EDF** è un triangolo pitagorico, con i lati in proporzione 3:4:5.
2. I triangoli **EDF**, **HAE**, **HIG** sono simili tra loro.

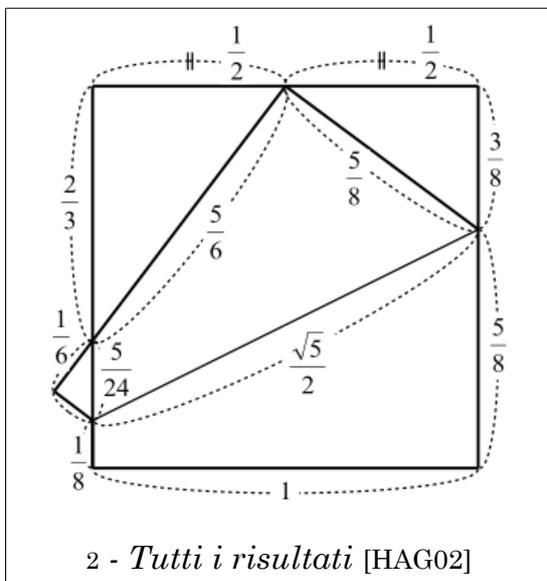


2 La dimostrazione rigorosa di queste affermazioni è in [ALP01]

3 Un racconto che mostra tutto l'entusiasmo di Haga per quella che lui ha chiamato *Origamics* si trova in [HAG01].

Da queste semplici considerazioni, ne sono nate altre che hanno portato a sviluppi inaspettati.

Primo teorema di Haga

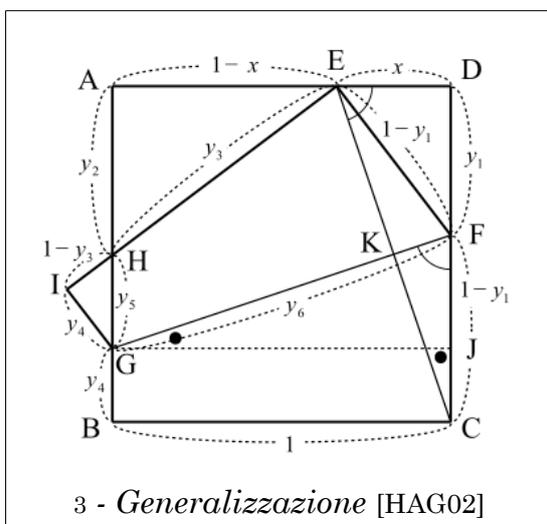


Portando l'angolo in basso a destra sul punto medio del lato superiore del quadrato, si ottengono le seguenti proporzioni (rif. Fig. precedente):

1. Il lato destro viene diviso dal punto **F** nella proporzione di 3:5
2. Il lato sinistro viene diviso dal punto **H** nella proporzione di 2:1
3. Il lato sinistro viene diviso dal punto **G** nella proporzione di 7:1
4. Il lato inferiore viene diviso dal punto **H** nella proporzione di 1:5

In realtà questa semplice piegatura sviluppa una pletora di divisioni notevoli del segmento unitario: un riepilogo è mostrato nella figura.

La prosecuzione dell'analisi di Haga si è basata sulla domanda: "Quali risultati si possono ottenere da divisioni diverse del lato superiore?".



Supponendo di aver diviso il lato superiore in x , si possono dedurre svariate relazioni.

Dal Teorema di Pitagora applicato al triangolo DEF , $x^2 + y_1^2 = (1 - y_1)^2$; quindi,

$$y_1 = \frac{1 - x^2}{2} = \frac{(1 + x)(1 - x)}{2} .$$

Essendo i triangoli AHE e DEF simili, si ha $y_1 / (1 - x) = x / y_2$; quindi,

$$y_2 = 2 \frac{x}{1 + x} .$$

Sempre dalla similitudine dei triangoli AHE e DEF , $y_2 / y_3 = x / (1 - y_1)$. Quindi

$$y_3 = \frac{1+x^2}{1+x}$$

Essendo FG e EC perpendicolari, i triangoli CKF e CDE , avendo anche in comune l'angolo in C , sono simili tra loro, e quindi gli angoli DEC e KFC sono congruenti. I due angoli indicati da un punto (in G e in C) sono uguali tra loro (in quanto oltre a FG e EC , anche GJ e CD sono perpendicolari tra loro), ma $GJ=CD$, e quindi i triangoli CDE e GJF sono congruenti. Quindi $FJ=x$, da cui:

$$y_4 = 1 - (y_1 + x) = \frac{(1-x)^2}{2}$$

Da $y_2 + y_4 + y_5 = 1$, si ha:

$$y_5 = 1 - \left(\frac{2x}{1+x} + \frac{(1-x)^2}{2} \right)$$

Infine, dal Teorema di Pitagora applicato al triangolo GJF ,

$$y_6 = \sqrt{x^2 + 1}$$

Nelle parole di Haga, "sin quando si guarda solo alle espressioni generali, è difficile restare impressionati da tutto questo; ma il calcolo delle frazioni ottenibili anche solo per le semplici divisioni binarie del segmento⁴ lascia stupefatti".

Da un punto di vista storico, Haga non ha pubblicizzato la sua analisi: infatti, questa è stata resa pubblica da Koji Fushimi nei *Mathematics Seminars* (#18-1, gennaio 1979), che ha definito il tutto come "Teorema di Haga".

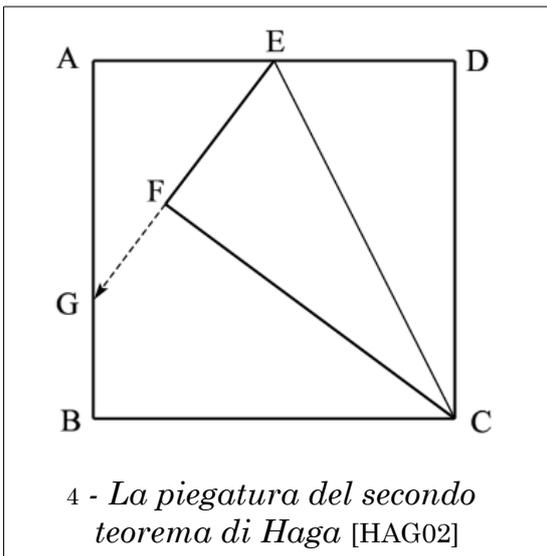
L'analisi da parte di Haga è però proseguita, rispetto a quanto visto: quindi, questa parte è diventata successivamente nota come "Primo Teorema di Haga".

Secondo Teorema di Haga

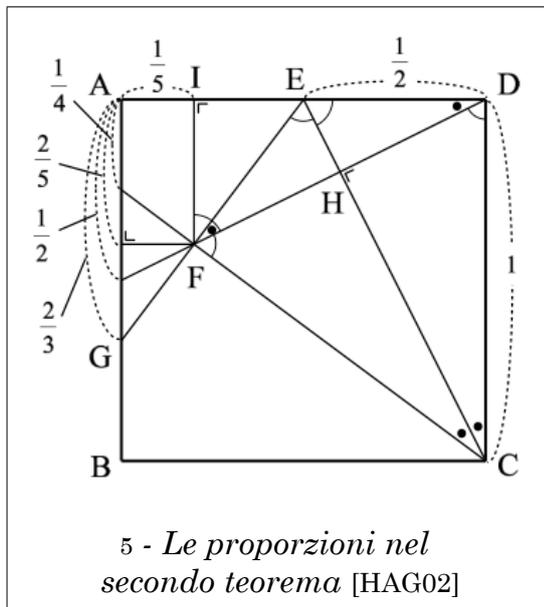
Il prolungamento del cateto minore del triangolo ottenuto dalla piegatura passante per il punto medio del lato superiore e dal vertice in basso a destra del quadrato divide il lato sinistro del quadrato in 1/3 e 2/3.

Il teorema è illustrato nella figura fianco: piegando tra E (punto medio del lato superiore) e C (vertice in basso a destra), il punto D viene portato in F ; la prosecuzione di EF incontra AB in G , e GB risulta 1/3 di AB .

4 Per la divisione (binaria e non) del segmento unitario, si veda [CFO02]



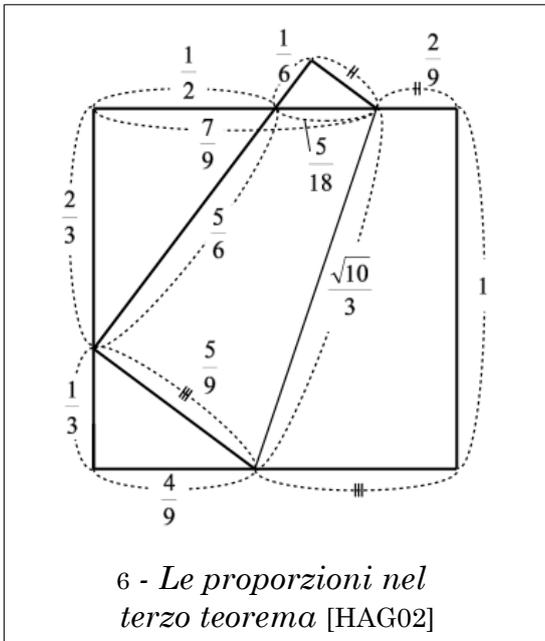
Nonostante il suo aspetto piuttosto semplice (e anche la dimostrazione non è particolarmente complessa), questo teorema nasconde alcune insospettite relazioni legate in particolare al punto indicato con F : un aneddoto attribuito ad Haga narra che pur avendo "intuito" che $GB = 1/3 AB$, lasciasse la dimostrazione ai suoi studenti del secondo anno di Biologia; uno di questi presentò la dimostrazione di tutti i rapporti presenti nella figura qui sotto.



Si vede che diventa molto semplice trovare la frazione di $1/5$ del lato del quadrato, frazione piuttosto sfuggente e difficile da ottenere attraverso altre vie.

L'analisi di Haga comunque non si ferma qui: esiste, da un punto di vista operativo, un ulteriore metodo univoco per piegare il foglio in modo tale che un punto del lato destro si trovi sulla bisettrice del lato superiore del quadrato: la piegatura non è univoca (qualsiasi punto del lato CD può essere portato nel punto E), e per definire in modo unico questa piegatura dobbiamo imporre una terza condizione: quella che il punto C si trovi sul lato AB . Questa piegatura è la costruzione alla base del terzo teorema di Haga.

Il Terzo Teorema di Haga



La piegatura che porta il vertice in basso a destra sul lato sinistro del quadrato in modo tale che il lato destro intercetti il punto medio del lato superiore, individua un punto sul lato sinistro che divide il lato nelle parti $1/3$ e $2/3$

Esattamente come nelle altre piegature, in realtà vengono individuate una serie di proporzioni tra i diversi segmenti, alcune delle quali sono tutt'altro che immediate da ottenere: un riassunto si trova nella figura qui a fianco.

Dividere un segmento

Uno dei problemi ricorrenti dell'origami richiede di dividere un lato del foglio (o due) in N parti, dove N è, genericamente, un intero; la divisione per una potenza di 2 non presenta problemi, ma per altri valori il problema può diventare complesso.

Divisioni binarie

Dividere un lato di un foglio (non necessariamente quadrato) in 2, 4, 8, ... parti non presenta particolari problemi se non, oltre un certo livello, quelli dati dall'inevitabile imprecisione delle piegature; raggruppando a m a m queste piegature possiamo costruire la frazione $m/2^n$ della lunghezza del lato¹. Evidentemente, questo metodo non è particolarmente efficiente, in quanto richiede, per ottenere un singolo punto, l'esecuzione di $2^n - 1$ piegature²; un metodo alternativo è però stato sviluppato in [BRN01], con la generazione di un algoritmo di rango n basato sulla notazione binaria.

Ricordiamo che dato un numero³ $m_{[2]}$, la divisione per un qualsiasi numero nella forma 2^n si può ottenere spostando la virgola verso sinistra di n posizioni e aggiungendo eventualmente degli zeri alla sinistra del numero e alla destra della virgola; questo significa che comunque le frazioni di questo tipo possono essere espresse come numeri decimali *finiti*, mentre ciò non è detto nel caso il denominatore non sia una potenza intera di 2.

Il metodo di Brunton per dividere un foglio secondo frazione binaria è condensabile in questa sequenza di istruzioni:

1. Trasformate la frazione in numero binario.

1 Qui e nel seguito, senza ripeterci, considereremo il lato pari a 1 (o, nel caso di fogli non quadrati, un lato pari a 1) e tutte le frazioni come frazioni comprese tra 0 e 1.

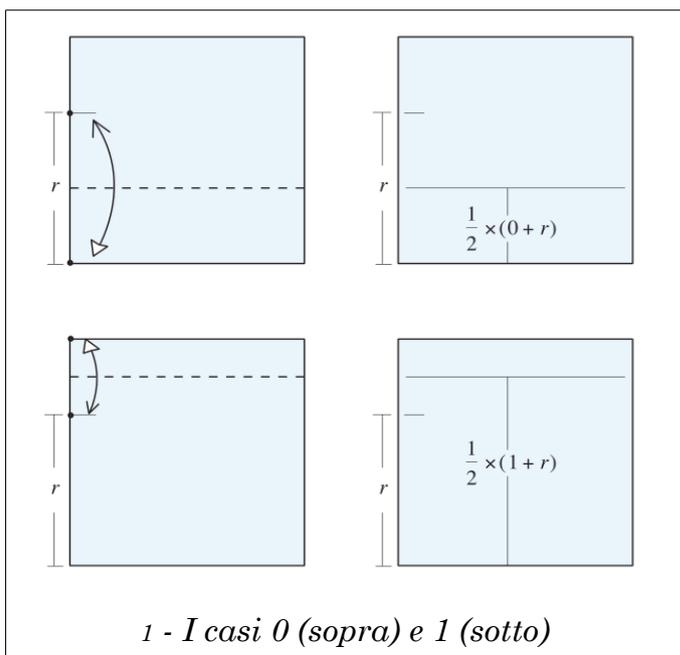
2 Il numero di piegature necessarie per risolvere con un determinato metodo un problema è detto *rango* del metodo: lo scopo di buona parte dell'origami (non solo matematico) è di minimizzare il rango per la risoluzione di un problema.

3 Con questa notazione intendiamo "il numero m scritto in notazione binaria".

2. Procedendo dal lato *destro* del numero ottenuto (che sarà sicuramente un 1), portate il lato *superiore* del foglio sul lato *inferiore*; marcate⁴ la piegatura e riaprite.
3. Prendendo poi la cifra alla sinistra di quella utilizzata:
 1. Se è un 1, portate il lato *superiore* del foglio sul segno ottenuto al passaggio precedente, marcate e riaprite
 2. Se è uno 0, portate il lato *inferiore* del foglio sul segno ottenuto nel passaggio precedente, marcate e riaprite
4. Se sono presenti ancora cifre nel numero, riprendete dal punto (3), in caso contrario fermatevi.

La dimostrazione della correttezza di questo metodo si basa sul metodo di Hörner, ben noto a chiunque abbia dovuto calcolare ripetutamente il valore di un polinomio all'interno di un programma. Supponiamo di voler ottenere la frazione $25/32$:

$$\begin{aligned} \frac{25}{32} &= 0,11001_{[2]} \\ &= 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2} \times \left(0 + \frac{1}{2} \times \left(0 + \frac{1}{2} \times (1) \right) \right) \right) \right) \end{aligned}$$



Da un punto di vista pratico, detto r un qualsiasi risultato intermedio, il nostro calcolo diventa la ripetizione dell'istruzione "Se la cifra è 0, moltiplica per $1/2$, altrimenti aggiungi 1 e moltiplica per $1/2$ ". Il fatto che il metodo di piegatura visto sopra sia l'implementazione di questo algoritmo è evidente dalla figura a fianco: avendo ottenuto al passo precedente il segno nella posizione r , applicare il metodo nei due casi ci permette di identificare il nuovo punto, e l'intero algoritmo è implementato con un numero di piegature pari al numero delle cifre

dell'espressione binaria del numero dato che, per costruzione, è pari a n .

4 Con questo termine si intende una piccola piegatura, da utilizzarsi solo come punto di riferimento nei passaggi successivi.

Se nella nostra frazione il numero a denominatore non è una potenza di 2, la nostra espressione in forma binaria diventa infinita; essendo però qualsiasi risultato di una divisione un numero *periodico*, possiamo quantomeno determinare l'algoritmo e ripeterlo sino alla precisione richiesta: ad esempio, essendo $1/5=0,\overline{0011}$, possiamo riassumere l'algoritmo come "piega due volte dall'alto, poi due volte dal basso, poi ricomincia da capo"⁵.

Frazioni razionali

Il fatto che si possa ottenere l'approssimazione di ogni frazione con il grado di precisione richiesto, anche se di estrema utilità nella pratica, è scarsamente soddisfacente dal punto di vista matematico; il metodo più utilizzato nell'origami "reale" è quello dell'incrocio delle diagonali.

Il metodo dell'incrocio delle diagonali

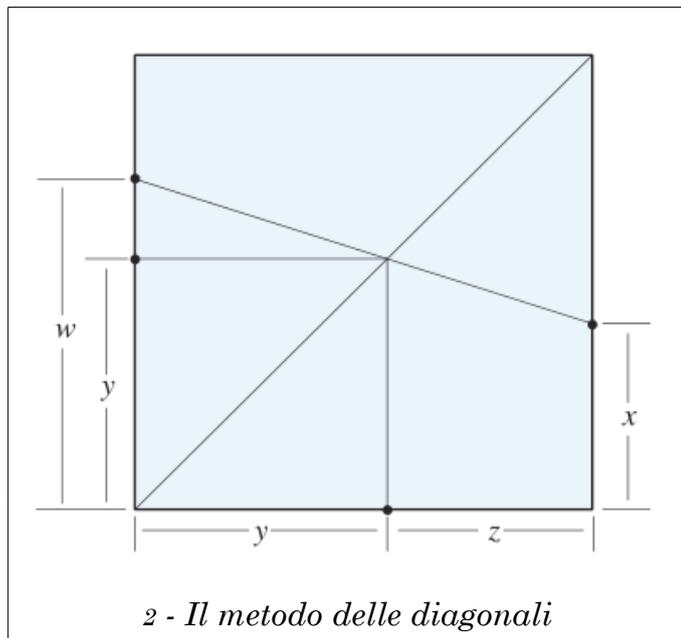
Partendo da un quadrato, tracciamo per prima cosa la diagonale che unisce l'angolo in basso a sinistra con quello in alto a destra.

Supponiamo quindi di poter costruire, marcandoli, i due punti a distanza rispettivamente w e x dal lato in basso del quadrato, e di tracciare la piegatura congiungente questi due punti.

Sempre considerando il lato unitario e considerando che $z=1-y$, possiamo ricavare che:

$$y = \frac{w}{1+w-x},$$

$$z = \frac{1-x}{1+w-x}$$



⁵ Il problema inverso (data la sequenza, trovare la frazione) si risolve applicando lo stesso metodo utilizzato in notazione decimale per ricavare dal numero periodico la frazione originale, ma qui il ruolo del 9 è giocato dall'1.

L'idea soggiacente al metodo che vogliamo utilizzare è quella di trovare due proporzioni iniziali w e x ragionevolmente facili da costruire (ad esempio, attraverso frazioni binarie) tali da poter costruire la frazione $y=a/b$ (o $z=1-(a/b)$).

Per fare questo, portiamo w e x nelle due frazioni $w=m/p$ e $x=n/p$, in cui m e n sono minori di p e p è una potenza di 2.

In questo modo, otteniamo:

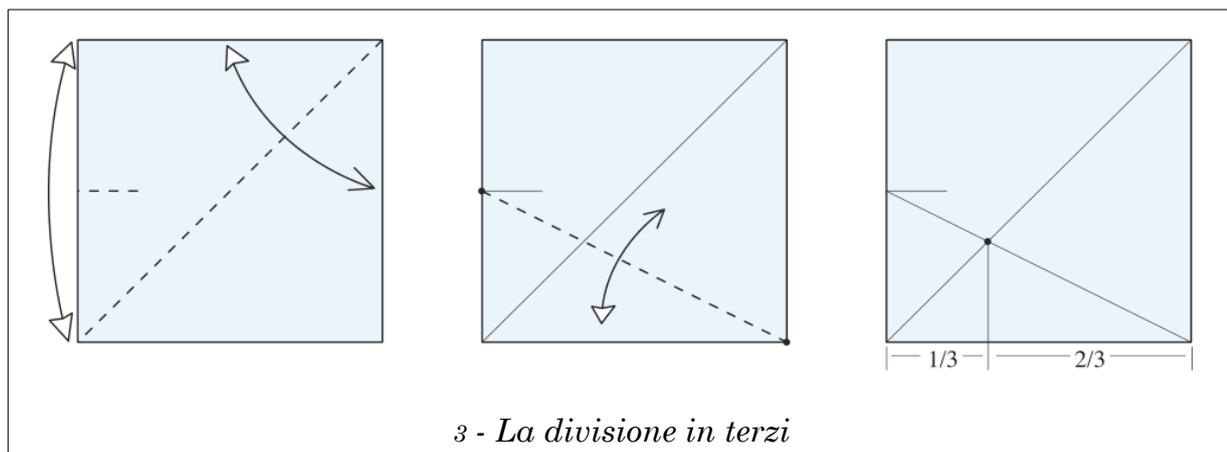
$$y = \frac{m}{p+m-n}$$
$$z = \frac{p-n}{p+m-n}$$

Ponendo quindi $y=a/b$ otteniamo il seguente algoritmo:

1. Sia p la potenza di 2 maggiore sia di a che di $b-a$.
2. Definiamo $m=a$, $n=p+a-b$.
3. Costruiamo i due punti $w=m/p$, $x=n/p$ sui lati rispettivamente sinistro e destro del quadrato, collegandoli con una piegatura.
4. Costruiamo la diagonale del quadrato da in basso a sinistra a in alto a destra.

Il punto di incrocio, opportunamente riportato su un lato, definisce la frazione a/b .

Per chiarire il metodo, consideriamo la divisione in terzi di un foglio: il metodo utilizzato in tutti gli uffici, pur avendo un rango decisamente basso (solo due piegature), non è molto soddisfacente dal punto di vista matematico. Se applichiamo il metodo dato, abbiamo $a/b=1/3$, e quindi $p=4$, $m=1$, $n=2$. Il che ci porta alla sequenza mostrata nella figura qui sotto.



Si noti che la divisione è applicabile anche a fogli genericamente rettangolari, quindi fornisce una divisione "da ufficio" più soddisfacente, anche se aumenta il rango della costruzione⁶.

È possibile calcolare, per le diverse divisioni, i valori dei diversi parametri e il rango del metodo.

Un metodo simile a quello illustrato prevede (anziché tracciare la diagonale del quadrato e quindi unire i due punti dai lati opposti con una piegatura) di identificare due punti opportuni (uno sul lato sinistro e uno sul lato destro del quadrato) e di tracciare le due piegature che uniscono questi punti all'angolo sulla base dal lato opposto.

$y=a/b$	$z=1-y$	w	x	rango
1/3	2/3	1/2	0	3
1/5	4/5	1/4	0	4
1/6	5/6	1/8	3/8	8
1/7	6/7	1/8	1/4	7
2/7	5/7	1/4	3/8	7
3/7	4/7	3/4	0	4
1/9	8/9	1/8	0	5
2/9	7/9	1/4	1/8	7
4/9	5/9	1/2	3/8	6
1/10	9/10	1/16	7/16	10
3/10	7/10	3/8	3/8	8

4 - Le diverse divisioni a confronto

Da un punto di vista operativo, la procedura diventa:

1. Sia p la potenza di 2 maggiore sia di a che di $b-a$.
2. Definiamo $m=a$, $n=b-a$.

⁶ Un divertente e famoso problema di matematica ricreativa relativo a questo metodo chiede per quali formati del foglio la diagonale del quadrato e quella del "mezzo quadrato" si incontrino a 90° . Lasciamo ai lettori la piacevole scoperta di quali siano.

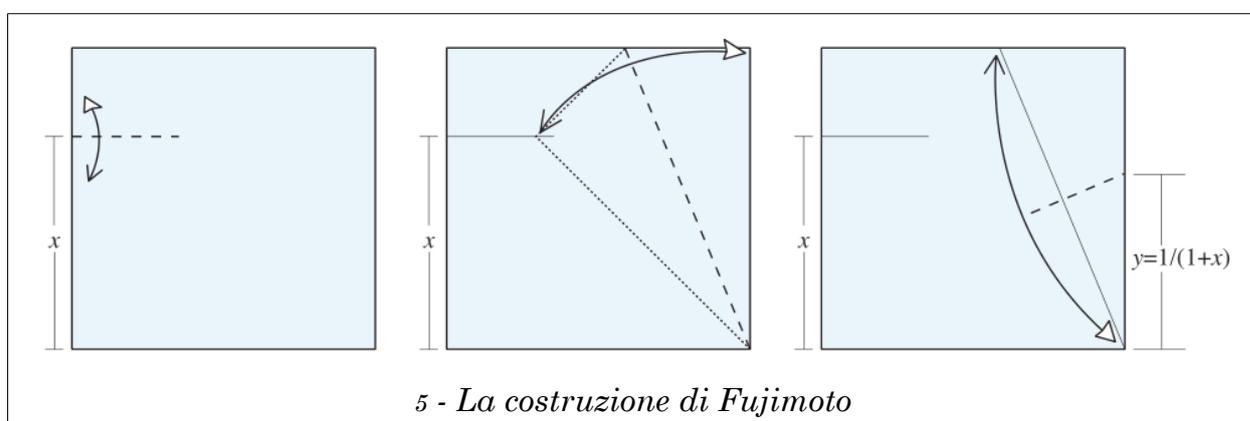
3. Costruiamo i due punti $w=m/p$, $x=n/p$ sui lati rispettivamente sinistro e destro del quadrato, utilizzando il metodo binario.
4. Colleghiamo i punti w e x con due piegature rispettivamente ai vertici destro e sinistro in basso del quadrato.

L'altezza del punto di incrocio dal lato in basso (o, alternativamente, della sua proiezione sulla base dal vertice in basso a destra) rappresenta la frazione richiesta.

Costruendo una tabella simile a quella vista prima, si verifica che, per qualsiasi valore della frazione, il rango dell'operazione non varia.

La costruzione di Fujimoto

Shuzo Fujimoto [FJM01] ha trovato un interessante metodo per una costruzione basata sui reciproci: in figura, si vede lo schema generale di costruzione.



La costruzione si basa sul fatto che, ottenuta una divisione x su un lato, è piuttosto semplice, attraverso le due operazioni indicate nella seconda e terza immagine, ottenere il reciproco di $(1+x)$: quindi, cercando il reciproco di un numero y , attraverso la costruzione della proporzione $(y-1)$ sul lato sinistro, diventa possibile costruire $1/(1+x-1)=1/y$.

Per ottenere la frazione a/b , sia come sopra $x=m/p$ la frazione binaria opportuna; dalla costruzione di Fujimoto si ricava che $y=p/(m+p)$. Prendendo per p il valore della più grande potenza di 2 minore di b e $m=b-p$, si ha che $y=p/b$, il che ci fornisce il denominatore cercato.

Essendo però p una potenza di 2, possiamo usare l'algoritmo binario per ridurre la frazione di un fattore a/p , ottenendo che $z=(a/p)y=(a/p)\times(p/b)=a/b$, che è il risultato cercato.

In pratica:

1. Definire p come la massima potenza di 2 minore di b .
2. Definire $x = (b-p)/p$.
3. Costruire x utilizzando il metodo delle frazioni binarie, estendendo la marcatura del suo valore.
4. Applicare la costruzione di Fujimoto ottenendo la frazione p/b sul lato destro.
5. Ridurre la distanza dal lato di base di un fattore a/p , sempre utilizzando il metodo delle frazioni binarie.

Il metodo di Fujimoto, pur presentando dei ranghi particolarmente interessanti, presenta il problema di richiedere delle piegature triangolari (la seconda immagine della sequenza) con dei triangoli molto acuti, che si rivelano molto complesse da eseguire con precisione; i due metodi (quello delle diagonali e quello di Fujimoto) sono per certi versi complementari, e quando uno di loro presenta passaggi difficilmente sormontabili, di solito l'altro è più semplice.

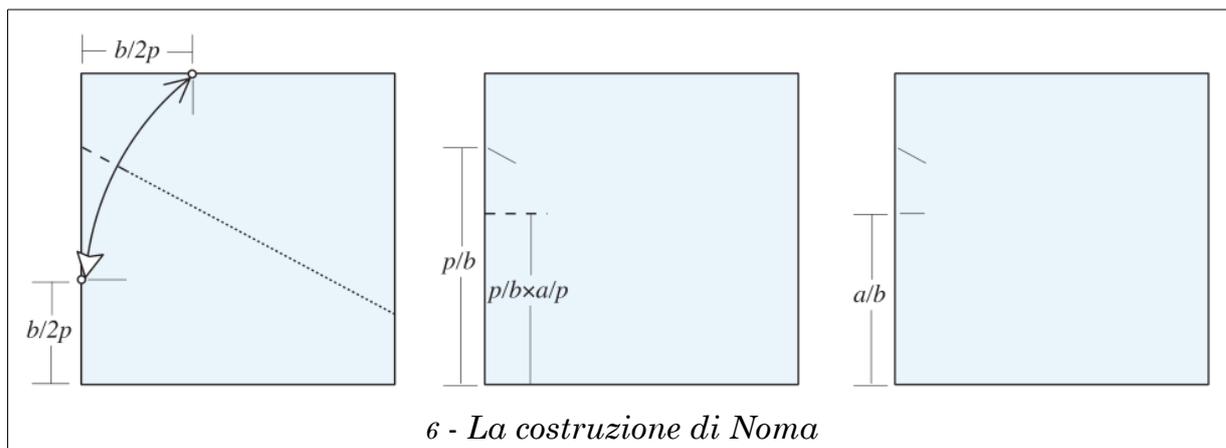
Potenziali irrealizzati?

Successivamente alla pubblicazione della costruzione di Fujimoto, negli specialisti di origami ha iniziato a farsi strada l'idea che in questi sistemi di costruzione esistesse un potenziale irrealizzato.

In sostanza, le azioni utilizzate sono due:

1. Il portare un punto su un lato su un altro punto sullo stesso lato.
2. Il portare un punto su un lato su un altro punto su un altro lato.

La prima ci ha portato alle frazioni binarie, ma non è detto che della seconda siano state esplorate tutte le possibilità. E questo, infatti, è stato quanto ha proposto Masamichi Noma: nella figura che segue, si vede il metodo.



L'algoritmo è:

1. Definite p come la più grande potenza di 2 minore di b .
2. Costruite le frazioni $w = b/2p$, $x = b/2p$ sui lati sinistro e superiore.
3. Portate il punto w sul punto x , tracciando la piegatura opportuna (incrocerà il lato sinistro del quadrato nel punto $y = p/b$).
4. Costruite la frazione a/p relativa a questo segmento.

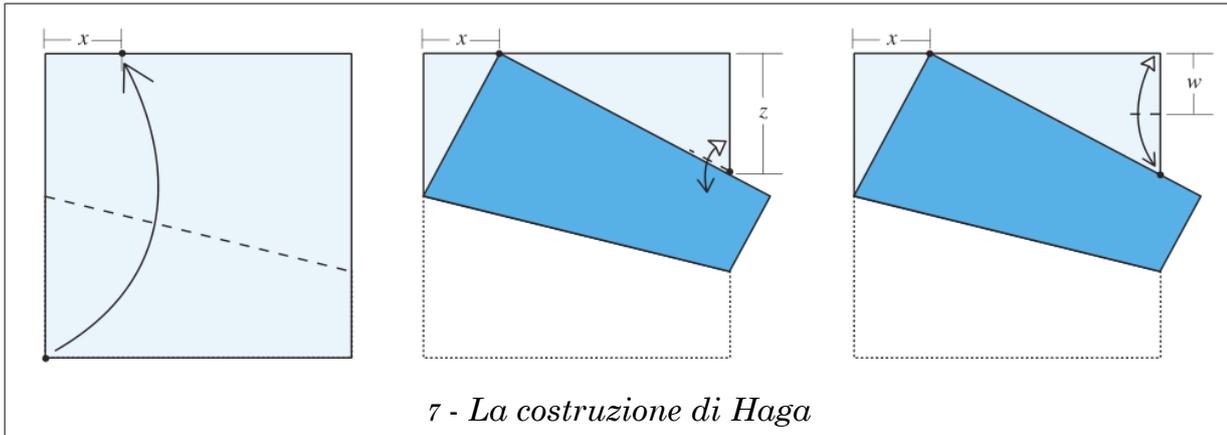
Il risultato è la frazione cercata a/b .

Nonostante la sua eleganza, il metodo ha un rango piuttosto alto: infatti, l'algoritmo di divisione binaria va applicato tre volte (sul lato sinistro, sul lato superiore e sul segmento risultante).

Il metodo di Haga

Un altro metodo per la divisione secondo parti razionali di un segmento è stato trovato da Kazuo Haga e pubblicato per la prima volta nel 1979. Questo metodo ha il pregio di non richiedere la riapertura del foglio dopo ogni piega.

Supponiamo, come negli altri casi, di aver ottenuto (sul lato superiore) una divisione di lunghezza x ; effettuando la piegatura indicata nella figura qui sotto, otteniamo:



$$z = \frac{2x}{1+x}$$

$$w = \frac{x}{1+x}$$

Quindi, secondo le usuali linee, il metodo si può esprimere come:

1. Sia p la più grande potenza di 2 minore di b .
2. Sia $m = p - b$.
3. Si costruisca con il metodo binario il punto $x = m/p$ sul lato superiore.
4. Piegare l'angolo in basso a sinistra sul lato superiore, portandolo in coincidenza del punto ottenuto.
5. Piegare l'angolo in alto a destra sul punto di incrocio tra il lato destro e il lato inferiore piegato⁷, ottenendo la distanza $y = p/b$.
6. Riducete il segmento ottenuto attraverso la frazione binaria a/p , ottenendo la divisione a/b .

Questo metodo è, di solito, più semplice del metodo di Noma e, se la piegatura diagonale non è schiacciata⁸, permette di ottenere la divisione senza impegnare con piegature la zona centrale del foglio.

⁷ Nella seconda figura dell'immagine, il punto viene identificato con una piccola piegatura.

⁸ Serve unicamente ad individuare il punto sul lato destro e, eseguendo la piccola piegatura indicata nella seconda immagine, non è necessario pressare la piegatura.

Numeri irrazionali

I metodi per l'ottenimento di frazioni irrazionali sono evidentemente metodi approssimati, ma anche qui, a prescindere dagli algoritmi basati sulla forza bruta quali ad esempio: "effettua 10 divisioni binarie, poi conta 591 unità dal lato sinistro"⁹, esistono dei metodi di costruzione piuttosto eleganti che permettono in molti casi di raggiungere l'approssimazione voluta.

Le frazioni continue

Una frazione continua (aritmetica) è un'espressione nella forma:

$$r = a + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots}}} = [a; b_1, b_2, b_3, \dots]$$

dove i vari b sono numeri interi positivi.

Un interessante teorema¹⁰ relativo alle frazioni continue sostiene che lo sviluppo in frazione continua di un qualsiasi intero sommato alla radice quadrata di un razionale è periodico, ossia nella sequenza delle b esiste una ripetitività.

Ottenere la ridotta della frazione continua di un numero irrazionale di cui siano note un certo numero di cifre dopo la virgola non è difficile, con l'aiuto di una calcolatrice anche non molto potente:

1. Scrivete la parte intera del numero.
2. Calcolate il reciproco della parte decimale
3. Ripetete i passi (1) e (2) sul numero ottenuto.

Ossia¹¹, ad esempio:

9 Il metodo fornisce una buona approssimazione dell'inverso della radice quadrata di 3, in quanto:

$$1/\sqrt{3} = 0,1001001111_{[2]} \approx \frac{591}{1024}$$

10 La dimostrazione si può trovare nel capitolo 3 di OLDS, *Frazioni Continue*, Zanichelli, Bologna, 1968 (Tr. it. di *Continued Fractions*, Yale University, 1963)

11 Nel calcolo delle ridotte di questa espressione sono riconoscibili molte delle approssimazioni "classiche" del valore; $3/1$, $22/7$, $333/106$, $335/116$, $104348/33215$, ...

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{293 + \frac{1}{10 + \dots}}}}$$

Le frazioni continue possono sembrare null'altro che una complicazione rispetto al troncamento dello sviluppo binario, ma hanno un indubbio pregio: ogni ridotta ha il minimo denominatore per un dato livello di precisione. Ad esempio, $22/7$ (seconda ridotta) è la miglior approssimazione di pigreco con denominatore minore di 106 (che sarà il denominatore della terza ridotta), e quindi approssima pigreco con una precisione di $1/106$ ¹².

Individuato il grado di precisione richiesto, calcolata la ridotta della frazione continua che la fornisce, una qualsiasi delle divisioni razionali viste precedentemente ci darà la divisione richiesta.

12 Motivo per cui, come recita una famosa battuta, nelle frazioni continue "meglio fermarsi subito prima di un numero grosso".

Problemi di geometria elementare

Iscrizione di un triangolo equilatero

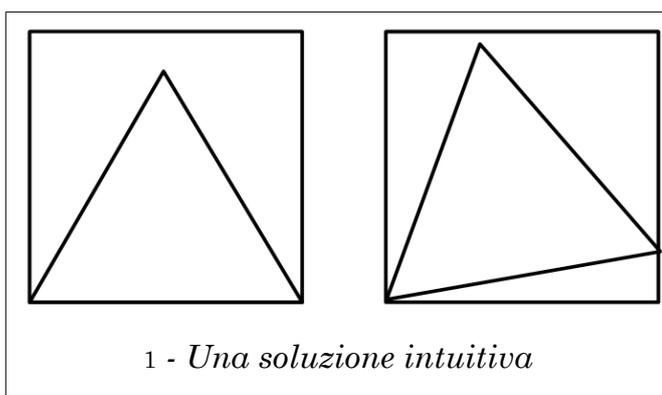
Iscrivere in un quadrato di lato unitario il triangolo equilatero di area massima.

Soluzioni tradizionali

Sono possibili due soluzioni tradizionali: una più intuitiva, l'altra più formale.

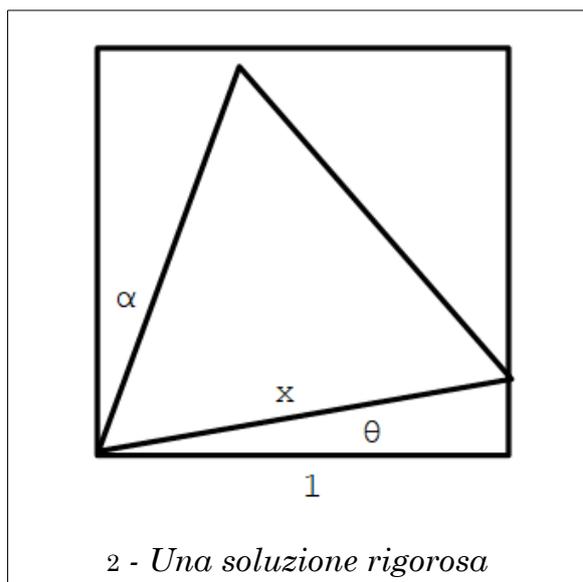
Soluzione intuitiva

L'approccio intuitivo suggerisce di affrontare il problema partendo da un triangolo equilatero avente base pari al lato del quadrato e coincidente con uno di essi; ruotando il triangolo con centro in uno dei vertici coincidenti con un vertice del quadrato e mantenendo l'altro vertice a contatto con il lato, si vede che la base del triangolo aumenta di dimensione:



continuando in questa rotazione, arriveremo ad un momento nel quale il vertice superiore del triangolo toccherà il vertice superiore del quadrato; proseguendo, l'area inizierà a diminuire, ripetendo all'inverso il movimento effettuato precedentemente rispetto al lato del quadrato sulla sinistra: il punto di massimo quindi si raggiunge quando il triangolo tocca sia il lato sulla destra che il lato superiore del quadrato: essendo la situazione rispetto al lato sulla sinistra e al lato in basso del quadrato *simmetrica*, si vede che i due angoli tra i lati del triangolo e i lati del quadrato in basso a sinistra devono essere pari a $(90^\circ - 60^\circ)/2 = 15^\circ$.

Soluzione rigorosa



Un metodo più rigoroso nel verificare che effettivamente l'angolo di 15° massimizza l'area del triangolo segue, nella prima parte, lo stesso procedimento visto sopra.

Se la base del triangolo è x , possiamo esprimere la sua altezza come:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

E quindi l'area come:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 .$$

Considerando ora che $\cos\theta = 1/x$, si ha:

$$x = \frac{1}{\cos(\theta)} = \sec\theta \quad , \text{ ossia l'area vale } A = \frac{\sqrt{3}}{4} \sec^2\theta .$$

Essendo, nell'intervallo $[0^\circ-15^\circ]$, la funzione coseno decrescente, la funzione secante sarà crescente, e così il suo quadrato: quindi, il massimo si avrà per $\theta = 15^\circ$.

La costruzione effettiva con riga e compasso richiede la costruzione di un angolo di 15° , ottenibile per bisezione di un angolo di 30° (ottenibile a sua volta per bisezione di un angolo di 60°).

Soluzione origami

La soluzione attraverso l'origami costruisce i risultati parziali della dimostrazione e arriva alla soluzione finale.

Costruzione di un triangolo equilatero

Procedendo attraverso la dimostrazione intuitiva, per prima cosa deve essere costruito un triangolo equilatero avente come base un lato del quadrato.

Partendo dal classico foglio quadrato dell'origami, se portiamo il vertice A sulla bisettrice verticale del foglio (sia questo il punto P), forzando la piegatura a passare per il punto B , si può dimostrare che la linea PB forma un angolo di 60° con la linea AB originale.

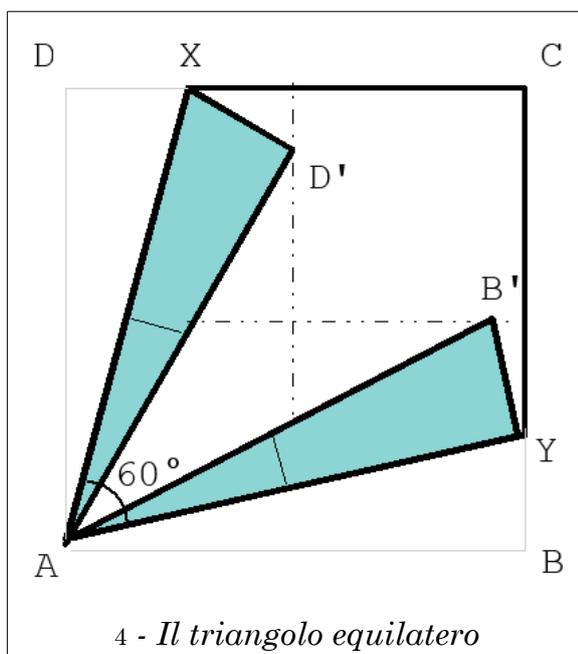
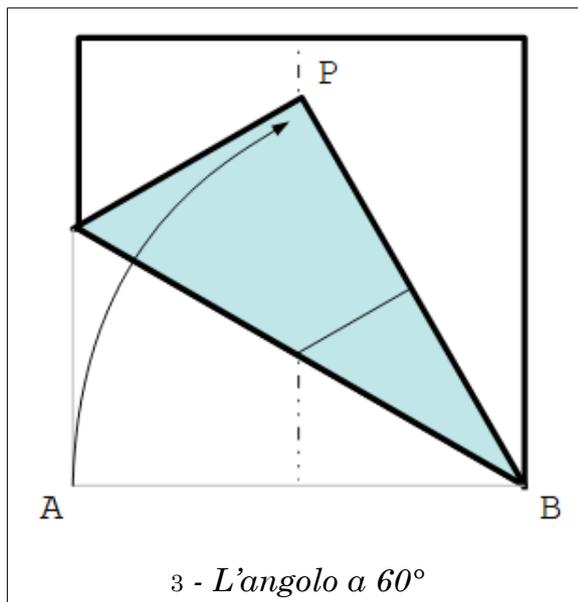
Infatti, si ha che $AB=BP=1$ per costruzione; ma esattamente la stessa costruzione è possibile dall'altro lato, portando il punto B sul punto P e forzando la piegatura a passare per il punto A , ottenendo un'immagine speculare della costruzione indicata in figura: quindi, $AB=BP=AP=1$: il triangolo APB è allora equilatero, e gli angoli ABP , BAP e APB sono pari a 60° .

Questo ci permette di costruire il triangolo che abbiamo visto nel primo passaggio della dimostrazione intuitiva: ma come costruire il triangolo con vertice in A inclinato di 15° ?

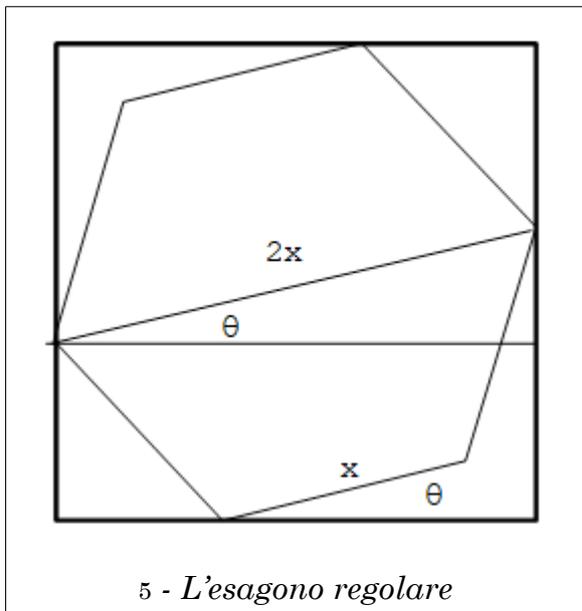
Si verifica facilmente che esistono versioni alternative per la costruzione del triangolo equilatero avente lato pari alla base del quadrato: ad esempio, portando entrambi i vertici superiori del quadrato sul punto P (imponendo alla piegatura dal lato sinistro di passare per A e a quella del lato destro di passare per B) viene generato lo stesso triangolo, ma in questo caso è *la parte esterna al triangolo ad essere di spessore doppio*: dovendo essere l'angolo tra il lato AP del triangolo e il lato verticale sinistro del quadrato pari a 30° ed essendo nella nostra costruzione questo angolo bisecato, l'angolo ottenuto ha un'ampiezza di 15° .

A questo punto, la costruzione del triangolo massimo è immediata: dovendo ottenere la stessa costruzione sul lato AB del quadrato, possiamo ripeterla ruotata di 90° , come indicato nella figura.

Non è difficile verificare che il triangolo è equilatero: infatti, l'angolo XAB ha un'ampiezza di 60° , risultando dalla sottrazione di due angoli di ampiezza 15° da un angolo retto; inoltre, $XA=AY$, in quanto parti equivalenti della medesima costruzione; il terzo lato del triangolo, non indicato nella figura, può essere ottenuto attraverso una piegatura passante per X e Y .



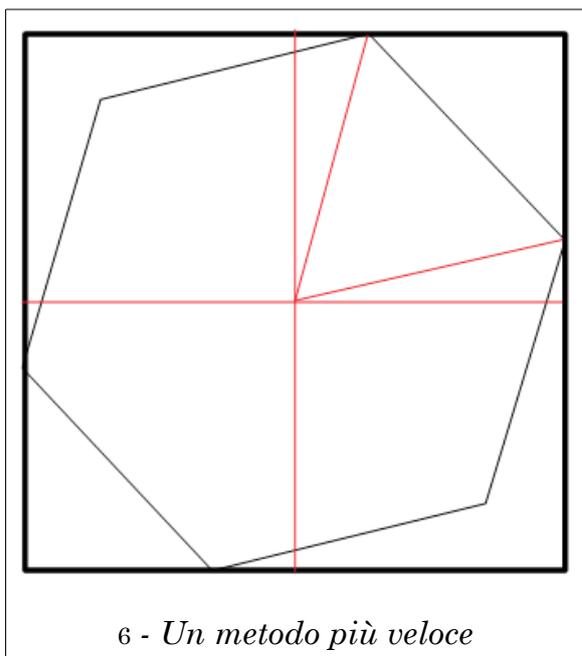
Inscrizione dell'esagono



Operando nello stesso modo, è possibile verificare che il massimo esagono iscrivibile nel quadrato ha un forte grado di parentela con il triangolo: dalla figura a fianco, infatti, con metodi simili a quelli visti precedentemente è possibile ricavare $\theta = 15^\circ$.

Alcune semplici considerazioni basate sul fatto che l'angolo θ è di 15° permettono di determinare che, nella figura qui a fianco, la distanza tra il vertice in alto a destra del quadrato e il vertice dell'esagono che tocca il lato destro deve valere $3/8$; essendo $3/8 = 1/4 + 1/8$, non è difficile, utilizzando il metodo binario di divisione del segmento¹,

ottenere il vertice dell'esagono: non solo, ma con lo stesso metodo è possibile ottenere il vertice sul lato superiore del quadrato, e da questo punto procedere per duplicazione del segmento.



Esiste però un metodo più veloce: considerando il disegno nella figura qui a fianco, la parte evidenziata in rosso, per quanto riguarda il quadrante in alto a destra, non è altro che la soluzione del problema del triangolo affrontato precedentemente: quindi, è sufficiente effettuare questa costruzione nel quarto superiore e riflettere il triangolo ottenuto per sei volte rispetto al proprio lato per ottenere l'intero esagono.

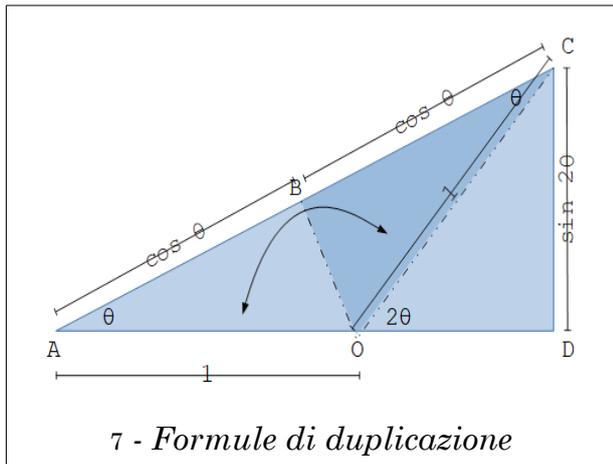
1 Si veda [CFO03] per un metodo generalizzato per ottenere divisioni binarie del segmento.

Formule trigonometriche di duplicazione dell'angolo

Una caratteristica interessante dell'utilizzo dell'origami nella geometria è la semplicità con la quale alcuni teoremi possono essere verificati, sia pur nel caso particolare: un esempio classico è la formula di duplicazione del seno trigonometrico, nella cui verifica l'origami ci evita la digressione relativa alla relazione tra gli angoli al centro e alla circonferenza sottendenti il medesimo arco.

Si parta da un generico triangolo rettangolo, e si eseguano le piegature indicate in figura: si porti l'angolo BAO sull'angolo BCO , portando a coincidere i segmenti AB e BC , e quindi si esegua la piegatura OC , riaprendo poi il tutto.

La verifica del fatto che $\angle COD = 2\theta$ solitamente passa dal considerare la circonferenza passante per A e C con centro in O , verificare che i due angoli sono angoli alla circonferenza e al centro sottendenti lo stesso arco e quindi il secondo è la metà del primo (e quest'ultimo, essendo un fatto piuttosto controintuitivo, di solito richiede un'ulteriore dimostrazione).



Attraverso l'origami, la cosa è decisamente più semplice: bisecando l'angolo COD (portando OD su OC) e quindi piegando in modo tale che OCD coincida con BCO , si verifica immediatamente l'assunto.

A questo punto, considerando il triangolo ACD , si ha:

$$\sin \theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos \theta + \cos \theta}, \text{ il che implica } \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta,$$

e, sempre attraverso ACD ,

$$\cos \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{\cos \theta + \cos \theta} \text{ il che implica } \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

che può essere trasformata nella forma usuale $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ utilizzando la relazione fondamentale.

Problemi impossibili

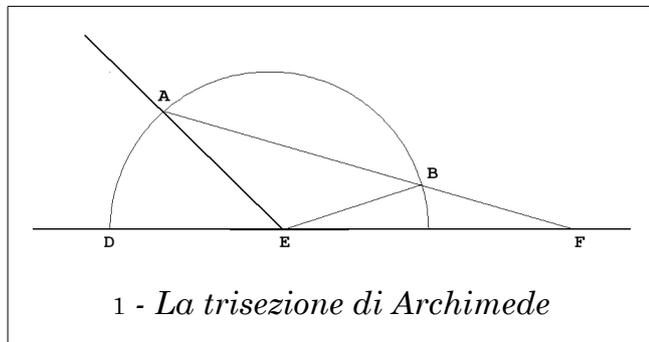
Alcuni problemi non risolubili con riga e compasso possono essere risolti facilmente attraverso la piegatura di un foglio di carta.

La trisezione dell'angolo

L'impossibilità della trisezione dell'angolo con riga e compasso nasce dal divieto, con questi strumenti, di spostare un segmento sin quando due punti ad una ben precisa distanza si trovino uno su una circonferenza e l'altro su una retta: uno dei più famosi "metodi" (attribuito ad Archimede) usa, in un modo molto sottile, questa operazione vietata.

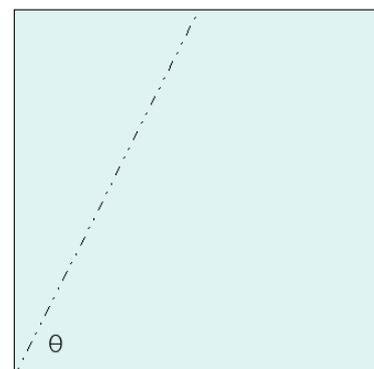
Infatti, come indicato in figura, sia AED l'angolo da trisecare: tracciato il semicerchio DAB di centro E , si sposti la linea passante per A sin quando la distanza BF è pari al raggio del semicerchio, ossia $BF=AE$.

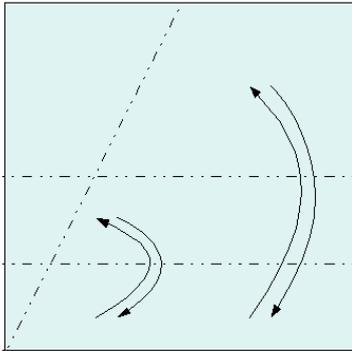
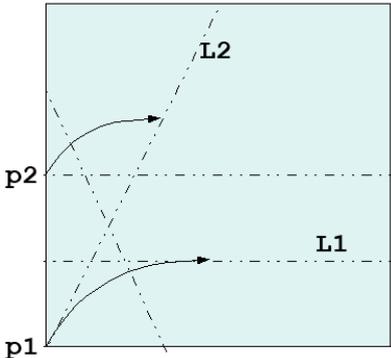
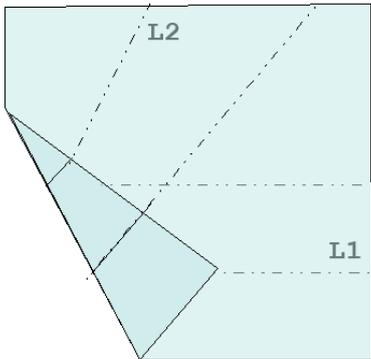
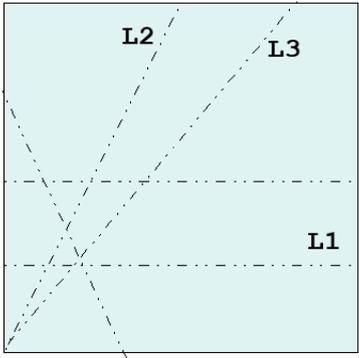
L'angolo BEF è allora pari ad un terzo dell'angolo AED .



Ma nell'origami, l'operazione è perfettamente lecita, ed esiste un metodo di trisezione piuttosto semplice.

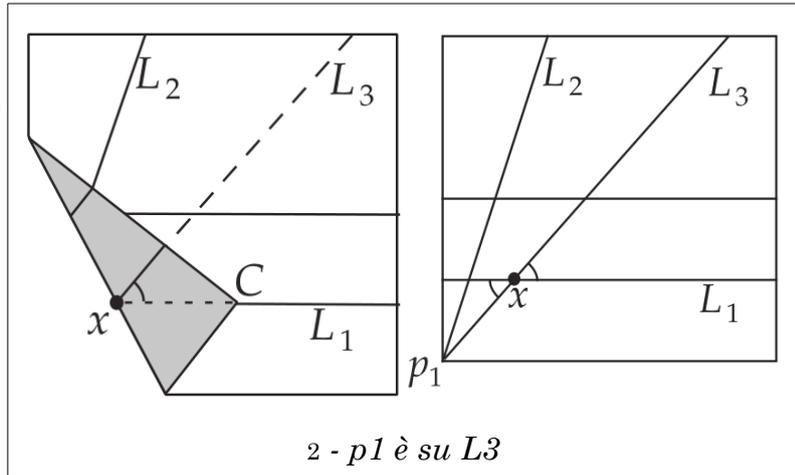
Sia dato l'angolo da trisecare con il vertice coincidente con l'angolo in basso a sinistra del quadrato e uno dei lati coincidente con la base del quadrato.



<p>Si divida a metà orizzontalmente il foglio, e si divida ulteriormente a metà la parte inferiore, riaprendo il foglio dopo ogni operazione</p>	
<p>Si portino, con una singola piegatura, il punto $p1$ sulla linea $L1$ e il punto $p2$ sulla linea $L2$</p>	
<p>I "dorsi" delle linee $L1$ e $L2$ sono ora diventati delle pieghe a monte: proseguire la parte dorsale di $L1$ verso l'angolo in alto a destra del quadrato e riaprire l'intero foglio.</p>	
<p>Proseguire la nuova piegatura (indicata con $L3$) sino all'angolo in basso a sinistra del foglio. L'angolo tra $L2$ e $L3$ è un terzo dell'angolo tra $L2$ e la base del quadrato.</p>	

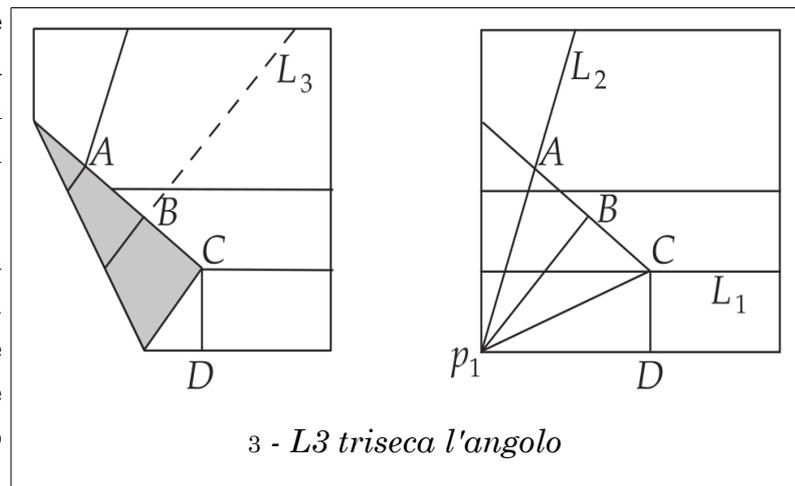
Prima di dimostrare che effettivamente l'angolo viene trisecato, dimostriamo che la prosecuzione di $L3$ incontra effettivamente il vertice del quadrato in basso a sinistra.

Sulla piegatura del penultimo passaggio, si vede facilmente che il segmento dal punto x al punto C si sovrappone a $L1$ e forma un angolo con $L3$ pari a quello che $L1$ forma con $L3$; riaprendo il foglio, il segmento $p1x$ forma con la parte sulla sinistra di $L1$ lo stesso angolo che $L3$ forma con $L1$, quindi $L3xp1$ è un angolo piatto e quindi i tre punti giacciono sulla stessa retta.



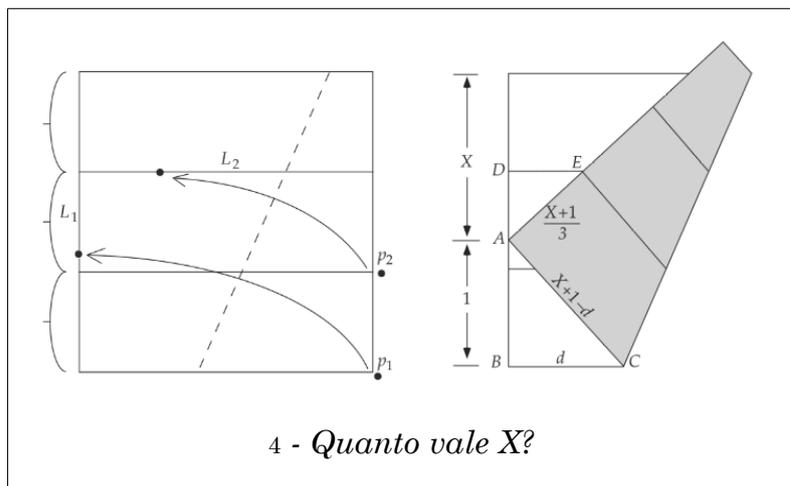
Per verificare che effettivamente $L3$ è la trisettrice dell'angolo, si considerino le due figure qui a fianco.

Consideriamo le posizioni di A , B e C mantenendole alla riapertura del foglio, e abbassiamo la perpendicolare da C sulla base del quadrato in D .



Dalla definizione dei tre punti A , B , C abbiamo che $AB=BC=CD$; ma i tre triangoli $Ap1B$, $Bp1C$ e $Dp1C$ sono retti ($p1B$ è perpendicolare a AC), e quindi i tre triangoli sono congruenti: questo dimostra che $L3$ triseca l'angolo dato.

La duplicazione del cubo



Consideriamo la piegatura indicata in figura, simile a quella utilizzata precedentemente per la trisezione dell'angolo.

Qui, il foglio è stato diviso in terzi, e quindi il punto $p2$ è stato portato sulla retta $L2$, mentre il punto $p1$ è stato portato sul lato sinistro del quadrato.

Si chiede di calcolare il valore di X , posta pari a 1 la parte restante del lato del quadrato.

Il Teorema di Pitagora applicato al triangolo ABC ci permette di stabilire che:

$$d = \frac{X^2 + 2X}{2X + 2} .$$

Inoltre, si vede che:

$$AD = X - \frac{X-1}{3} = \frac{2X-1}{3} .$$

Non è difficile dimostrare che ABC e ADE sono simili, quindi si ha:

$$\frac{d}{X+1-d} = \frac{2X-1}{X+1} \quad \text{che implica} \quad \frac{X^2+2X}{X^2+2X+2} = \frac{2X-1}{X+1}$$

che a sua volta implica:

$$X^3 + 3X^2 + 2X = 2X^3 + 2X - 2 .$$

Ossia, $X^3 = 2$: il segmento X rappresenta la radice cubica di 2, ossia la lunghezza dello spigolo di un cubo di volume doppio rispetto ad un cubo unitario.

Sezioni coniche

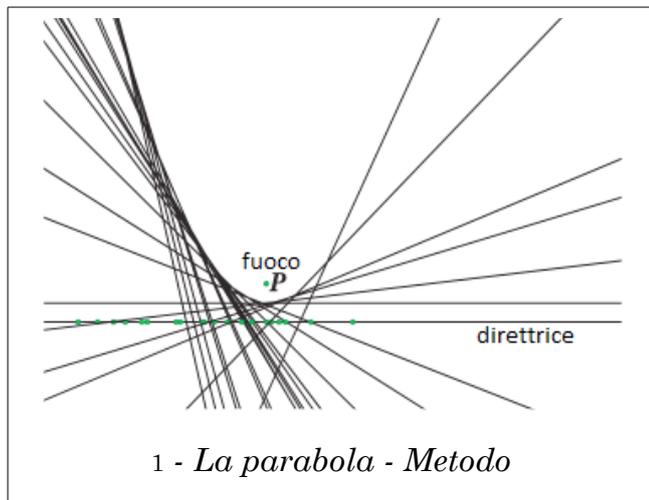
Con poche aggiunte ad un foglio di carta (non necessariamente quadrato), è possibile tracciare delle ottime approssimazioni delle sezioni coniche come involuppo delle rette tangenti.

Parabola

La parabola è il luogo dei punti equidistanti da una retta fissa detta direttrice e da un punto fisso detto fuoco.

Per tracciare la parabola attraverso le sue tangenti, è necessario definire la retta direttrice e il fuoco.

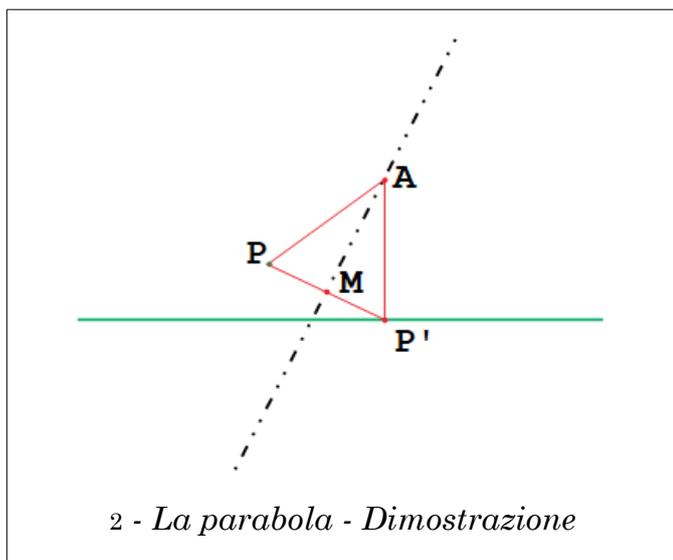
La costruzione procede, come da figura, portando il fuoco sulla direttrice ed effettuando la piegatura. La piegatura non è univoca, quindi effettuandone un buon numero si ottiene una buona approssimazione della parabola.



Per verificare che effettivamente la figura ottenuta è una parabola, consideriamo una sola delle linee di piegatura ottenute.

Nella figura a fianco, il fuoco P e la direttrice sono indicati in verde; quando portiamo il fuoco sulla direttrice nel punto P' , otteniamo la piegatura passante per M e per A .

A seguito della piegatura, il segmento PA coincide con il segmento AP' , e quindi i due segmenti sono uguali: ossia, la distanza del punto A da P è



pari alla sua distanza da P' . Ma questa non è altro che la definizione di punto appartenente alla parabola.

Più formalmente, se $A(x,y)$ è il punto ottenuto, il fuoco ha coordinate $P(0,c)$ e l'equazione della direttrice è $y = -c$, piegando P su P' abbiamo che il punto M è il punto medio di PP' , con coordinate $M(x/2,0)$. La pendenza di PP' è quindi:

$$\frac{c - (-c)}{-x}$$

e quindi la pendenza di MA è pari a $\frac{x}{2c}$.

Ma la pendenza della retta MA può essere calcolata anche attraverso i punti A e M :

$$\frac{y-0}{x-\frac{x}{2}} = \frac{2y}{x}$$

Uguagliando le due espressioni si ha $x^2 = 4cy$, ossia

$$y = \frac{x^2}{4c}$$

È interessante notare che questa derivazione ci permette di verificare che la piegatura è effettivamente una tangente alla parabola: infatti, derivando l'equazione della parabola, si ottiene $y' = \frac{x}{2c}$, che non è altro che l'equazione della nostra retta.

Tra le altre cose, questa costruzione permette di verificare molto facilmente le proprietà di riflessione della parabola, considerando la linea di piegatura e la prosecuzione di $P'A$ oltre la parabola.

Ellisse

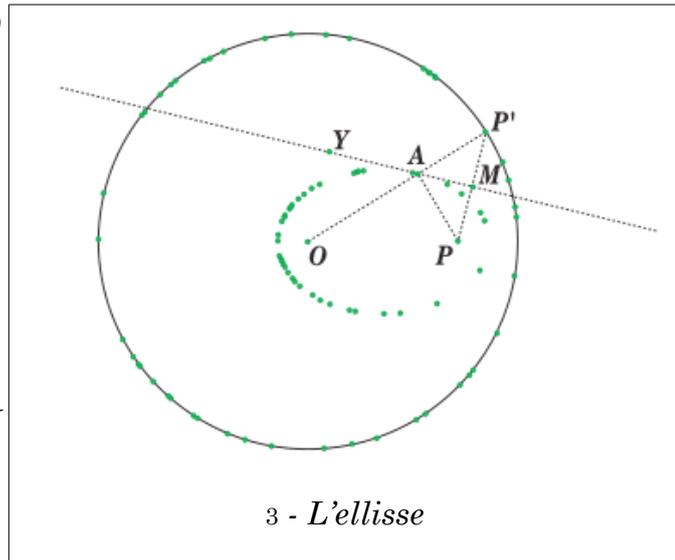
L'ellisse è il luogo dei punti per cui la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi è costante.

Qui, è necessario definire un cerchio (di cui il centro sarà uno dei fuochi) e un altro punto (l'altro fuoco) *interno* al cerchio.

La costruzione procede esattamente come nel caso dell'ellisse, con la sola differenza che anziché una retta, la "direttrice" qui è il cerchio tracciato.

Riferendoci alla figura a fianco, sia O il centro della circonferenza e l'origine di un sistema di riferimento cartesiano; sia P il punto scelto all'interno del cerchio (secondo fuoco) e YAM la piegatura ottenuta portando P' su P , con A punto sull'ellisse. Definendo poi le coordinate dei diversi punti: $P(a,b)$, $A(x,y)$, $O(0,0)$, $P(d,0)$, essendo M punto medio di PP' si ha:

$$M\left(\frac{a+d}{2}, \frac{b}{2}\right) .$$



Se tracciamo la congiungente tra P' e O , questa incrocerà la piegatura in un punto $A(x,y)$ ¹. Se la pendenza di PP' è pari a $\frac{b}{a-d}$, si ha che la pendenza di MA sarà pari a $\frac{d-a}{b}$, esprimibile anche come:

$$y - \frac{b}{2} = \frac{d-a}{b} \left(x - \frac{a+d}{2} \right) \quad [1]$$

Essendo P sul cerchio, deve essere $a^2 + b^2 = r^2$: se abbassiamo le perpendicolari all'asse x passanti per A e P , per la similitudine dei due triangoli rettangoli aventi come ipotenuse OA e OP , si ricava:

$$\begin{cases} \frac{a}{x} = \frac{r}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{b}{y} = \frac{r}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

e quindi:

$$\begin{cases} a = \frac{rx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ b = \frac{ry}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad [2]$$

Sostituendo i valori di a e b nell'equazione [1] e dopo una serie di semplificazioni, si ottiene:

¹ Al momento, non sappiamo ancora se questo punto appartiene o no all'ellisse: scopo della dimostrazione è dare una risposta affermativa a questo.

$$2r\sqrt{x^2+y^2}-2dx=r^2-d^2 \quad [3]$$

che, eliminando il radicale e raccogliendo i fattori comuni, diventa:

$$\frac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}{\frac{r^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{r^2-d^2}{4}}=1 \quad [4]$$

che, per quanto complicata, non è altro che l'equazione di un'ellisse con centro in $(d/2,0)$ e asse maggiore r .

La verifica che la piegatura è effettivamente una tangente all'ellisse non è semplicissima.

Derivando la [4], si ottiene:

$$\frac{2\left(x-\frac{d}{2}\right)}{\frac{r^2}{4}}+\frac{2yy'}{\frac{r^2-d^2}{4}}=0$$

risolubile in y' come:

$$y'=\frac{\left(x-\frac{d}{2}\right)(d^2-r^2)}{yr^2} .$$

Il coefficiente angolare della retta passante per P e P' vale $m(PP')=\frac{b-0}{a-d}$: se sostituiamo in questa espressione i valori ottenuti nella [2], si ha:

$$m(PP')=\frac{ry}{rx-d\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow m(MA)=\frac{rx-d\sqrt{x^2+y^2}}{ry}$$

Da [3], si ricava che

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{r^2-d^2+2dx}{2r}$$

moltiplicando per d , sottraendo rx e dividendo per ry entrambi i membri, si ha:

$$\frac{d\sqrt{x^2+y^2}-rx}{ry}=\frac{d(r^2-d^2+2dx)}{2r}-rx$$

e, riconoscendo nel primo membro $m(MA)$, semplificando il secondo membro si ricava:

$$y' = \frac{\left(x - \frac{d}{2}\right)(d^2 - r^2)}{r^2 y}$$

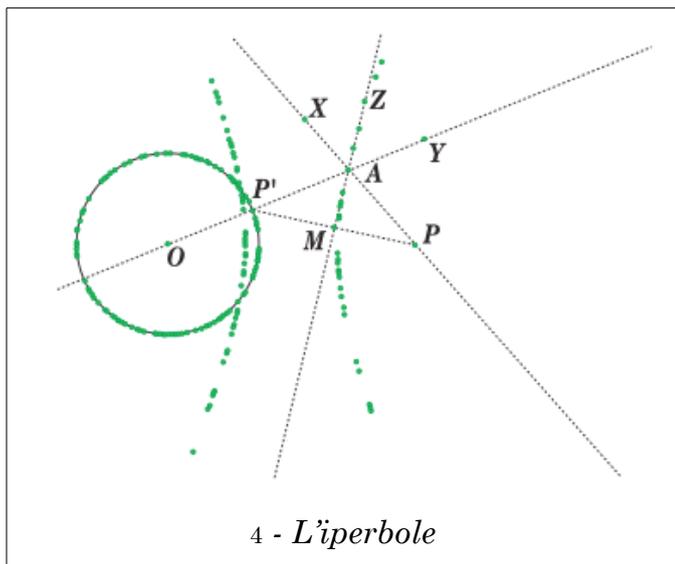
Ossia, la retta è effettivamente tangente all'ellisse nel punto A .

Iperbole

L'iperbole è il luogo dei punti per cui la differenza tra le distanze da due punti fissi detti fuochi è costante.

Le definizioni necessarie sono le stesse del caso dell'ellisse, ma qui il secondo fuoco va scelto all'esterno del cerchio.

Definiti il cerchio di centro O e il punto P esterno, portando P su P' si traccia la piegatura MA . Se tracciamo la linea OP' prolungandola sin quando incrocia la piegatura nel punto A , notiamo che $OA - AP' = r$, dove r è il raggio del cerchio.



La piegatura è la bisettrice perpendicolare del segmento PP' , quindi deve essere anche $AP = AP'$, il che impone l'ulteriore relazione $OA - AP = r$.

Essendo il raggio una costante, si ha che la differenza delle distanze di A da due punti fissi (O e P) è costante, quindi A giace sull'iperbole aventi fuochi in O e P .

Le coordinate di O , P , P' , M e A sono le stesse del caso dell'ellisse, con la sola differenza che $d^2 - r^2$ in questo caso è maggiore di zero: l'equazione [4] diventa allora:

$$\frac{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2}{\frac{r^2}{4}} - \frac{y^2}{\frac{d^2 - r^2}{4}} = 1$$

che è l'equazione di un'ellisse con centro $(d/2, 0)$ e asse trasverso coincidente con l'asse x .

La dimostrazione del fatto che la piegatura è una tangente all'iperbole segue esattamente gli stessi passi di quella dell'ellisse.

I poliedri

...build, borrow, buy (or steal) an icosahedron...

J. BAEZ, *This week findings in mathematical physics*, 239 (1998)

Tranne pochissimi casi più che altro trattati a livello teorico, la costruzione dei poliedri attraverso l'origami avviene definendo uno o più *unità* (o *moduli*) che, opportunamente ripetuti e uniti attraverso incastri l'uno all'altro, permettono la costruzione.

La definizione di "unità"

Glassner, in [GLS01], definisce formalmente il concetto di *unità* per la costruzione dei poliedri come "una figura origami di cui devono essere costruite diverse istanze che successivamente devono essere unite tra loro o con istanze di altre unità per formare modelli complessi".

Da un punto di vista strettamente operativo, l'unità è un sistema composto da un certo numero di *tasche*, *ali* e *lucchetti*:

Una **tasca** (*pocket*) è una fessura nell'unità la cui funzione è quella di trattenere un'ala.

Un'**ala** (*flap*) è una sporgenza dall'unità la cui funzione è quella (una volta inserita in una tasca) di unire l'unità ad un'altra¹.

Un **lucchetto** (*locktab*), se presente, è un'ulteriore sporgenza dall'ala la cui funzione è quella di bloccare l'ala nella tasca, garantendo maggior solidità al modello.

Se lo scopo è la costruzione di un poliedro, intuitivamente si possono concepire tre tipi di unità:

L'**unità faccia** rappresenta una singola faccia.

L'**unità spigolo** rappresenta un singolo spigolo e include almeno parte di ciascuna delle facce ai lati dello spigolo.

¹ O a sé stessa, per mantenerne la forma: si veda ad esempio l'unità triangolare di Fusé.

L'*unità vertice* rappresenta un singolo vertice e include almeno parte di ciascuno degli spigoli e di ciascuna delle facce che fanno capo a quel vertice.

Anche se soggette a un discreto numero di eccezioni, queste definizioni permettono comunque una buona comprensione dei diversi metodi di costruzione dei modelli; inoltre, se si conosce il tipo di unità utilizzato, è immediato stabilire quante ne siano necessarie per una data costruzione.

Le costruzioni di Fusé

Senza alcuna intenzione di esaustività, esaminiamo alcune delle unità di faccia più interessanti e utili per la costruzione dei solidi.

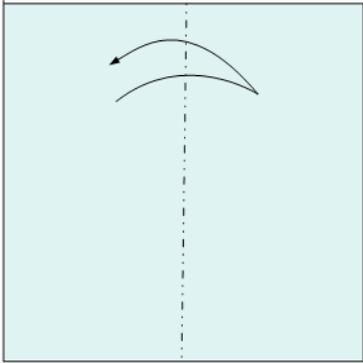
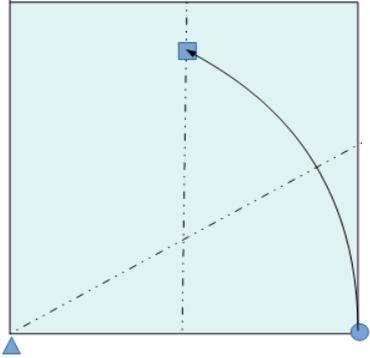
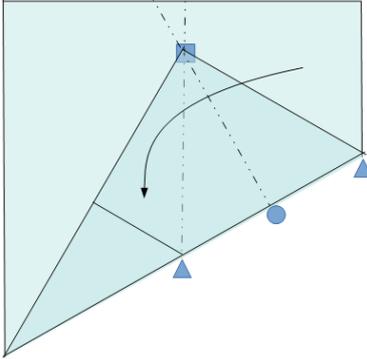
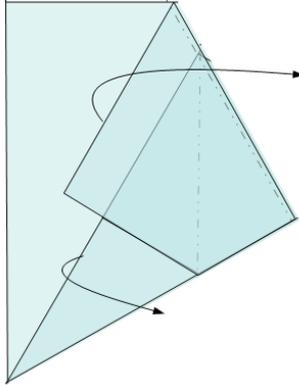
L'unità triangolare

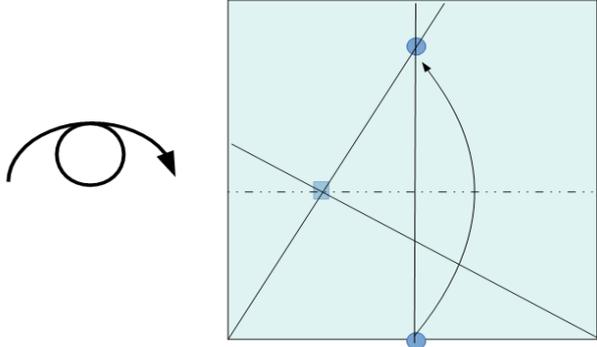
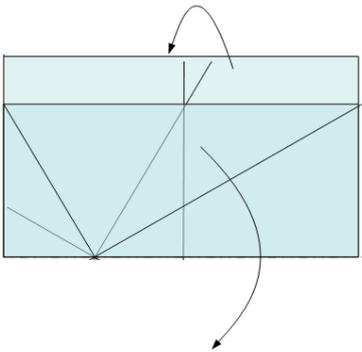
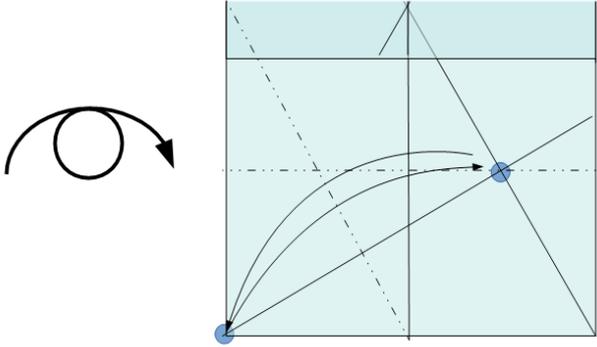
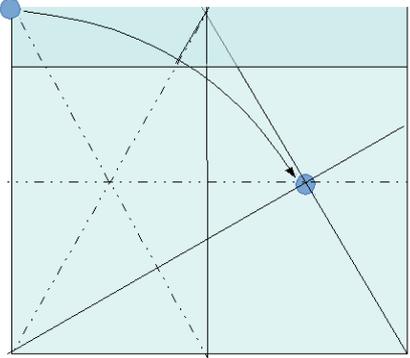
Questa unità ha il grosso pregio di una grande versatilità unita ad una discreta resistenza: praticamente qualsiasi solido composto di triangoli equilateri può essere costruito in modo ragionevolmente intuitivo, inclusi i poliedri stellati; ha la caratteristica di non avere ali, in quanto il ruolo dell'ala è giocato da un'altra componente².

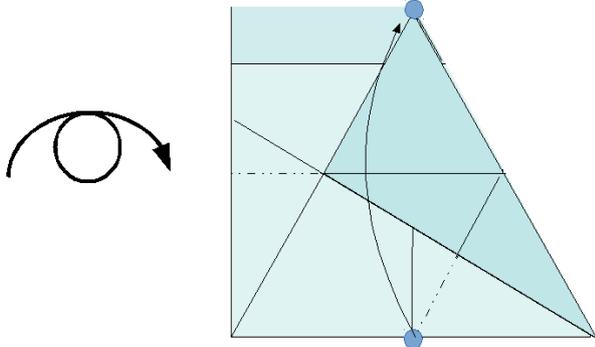
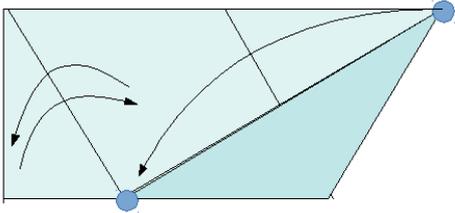
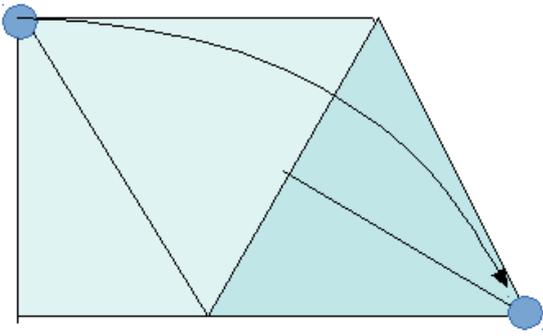
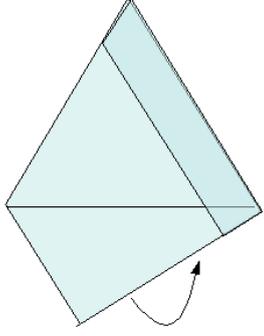
Sono necessarie un numero di unità pari al numero delle facce e un numero di componenti di legame pari al numero degli spigoli del poliedro che si intende costruire.

2 Formalmente questa componente non può essere definita "unità" in quanto pur contenendo uno spigolo non include parte delle facce che confluiscono su di esso.

Costruzione dell'unità triangolare

<p>Piegare il foglio a metà verticalmente e riaprirlo.</p>	
<p>Portare l'angolo in basso a destra (cerchio) sulla bisettrice del foglio in modo tale che la piegatura passi per l'angolo in basso a sinistra (triangolo). Il cerchio coincide con il quadrato.</p>	
<p>Piegare in modo tale che l'angolo indicato dal cerchio sia a 90° e la piegatura passi per il quadrato. I due triangoli vengono a coincidere, come i segmenti triangolo/cerchio e cerchio/triangolo.</p>	
<p>Riaprire completamente il foglio.</p>	

<p>Capovolgere il foglio orizzontalmente (si noti che le pieghe a valle presenti sono diventate pieghe a monte) e portare i due punti indicati dai cerchi a coincidere (la piegatura passa per l'incrocio indicato dal quadrato).</p>	
<p>Piegare la parte superiore sporgente con <i>piegata a monte</i> e riaprire l'ala inferiore.</p>	
<p>Capovolgere il modello orizzontalmente, portare i due cerchi a coincidere e riaprire.</p>	
<p>Portare i due cerchi a coincidere (la piegatura è la semidiagonale del rettangolo sulla sinistra).</p>	

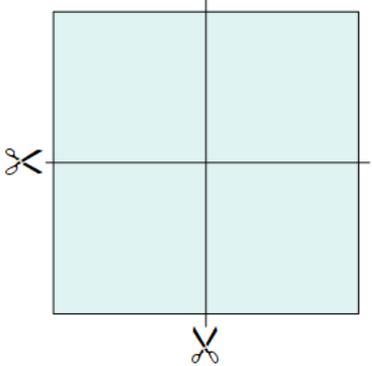
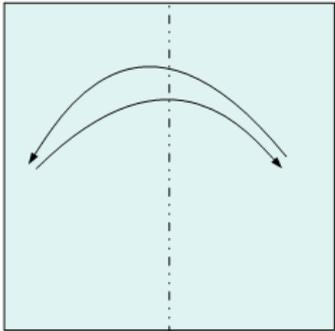
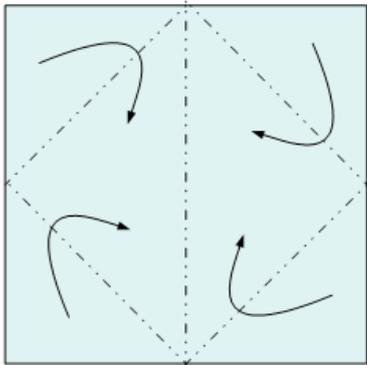
<p>Capovolgere il modello orizzontalmente e portare i due cerchi a coincidere.</p>	
<p>Piegare e riaprire l'ala sulla sinistra; portare i due cerchi a coincidere, piegando.</p>	
<p>Portare i due punti a coincidere (l'immagine è ingrandita rispetto alle precedenti).</p>	
<p>Ripiegare <i>all'interno del modello</i> (nella tasca che è stata creata) l'ala inferiore, ottenendo il modulo triangolare.</p>	

Questo modello ha tre tasche, una per lato, e permette di costruire tutti i solidi basati su triangoli equilateri: ne devono essere costruiti un numero pari al numero delle facce triangolari presenti nel solido.

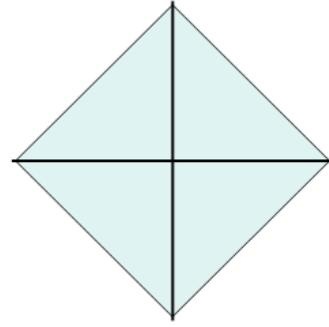
Costruzione dell'unità di legame

L'unità di legame (*link unit*) nella costruzione di Fusé è nascosta all'interno delle tasche, e connette due unità triangolari tra di loro. Gioca il ruolo dello spigolo (pur non essendo definibile come unità di spigolo, considerato che non contribuisce a nessuna faccia): ne saranno necessarie un numero pari al numero degli spigoli.

La costruzione inizia con un'operazione piuttosto inusuale nell'origami.

<p>Tagliare un quadrato di lato pari a quello dell'unità di faccia in quattro quadrati; le operazioni che seguono vanno eseguite su ogni quadrato ottenuto, ciascuno dei quali genererà un'unità di legame.</p>	
<p>Piegare a metà verticalmente il quadrato e riaprire.</p>	
<p>Piegare i quattro angoli del quadrato sul centro.</p>	

L'unità è pronta (verrà usata con l'altro lato verso l'esterno, sul quale compare una piegatura a monte che rappresenta lo spigolo).

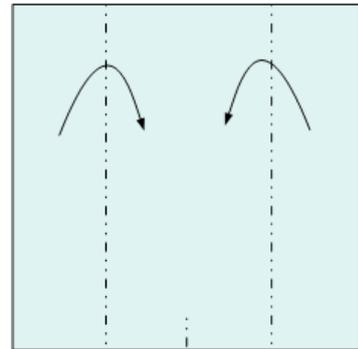


L'unità quadrata

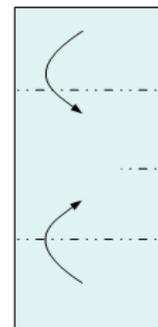
Questa costruzione ha la caratteristica di poter essere utilizzata anche in altri modelli che prevedono di impiegare dei quadrati, avendo il lato uguale a quello del triangolo.

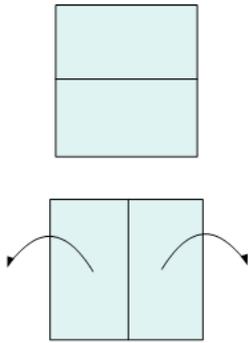
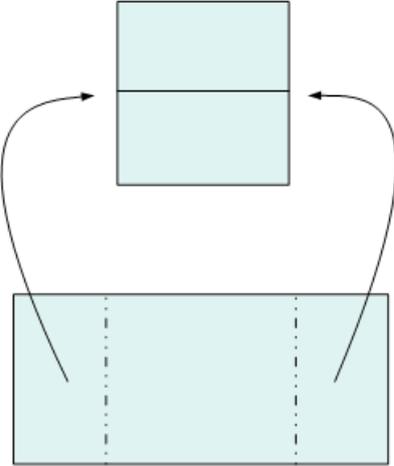
Come elemento di giunzione è quindi possibile utilizzare lo stesso visto prima o, per velocizzare la costruzione, il semplice quarto di foglio piegato del secondo passaggio.

Piegare i due quarti esterni verticali sui due quarti interni (la metà del lato di base è stata solo marcata senza completare la piegatura).



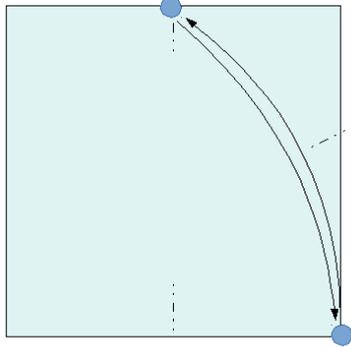
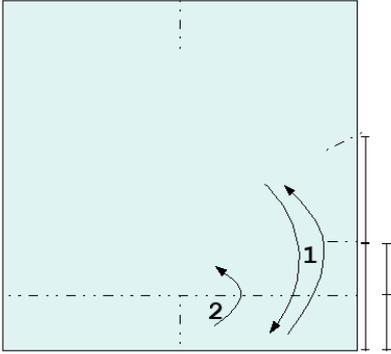
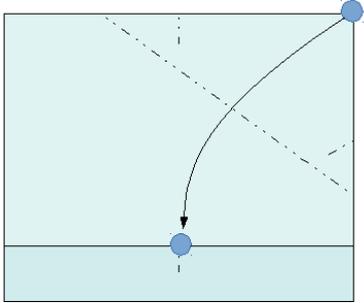
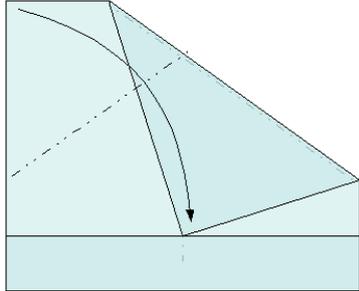
Portare il quarto inferiore sul secondo quarto dal basso, e il quarto superiore sul secondo quarto dall'alto.

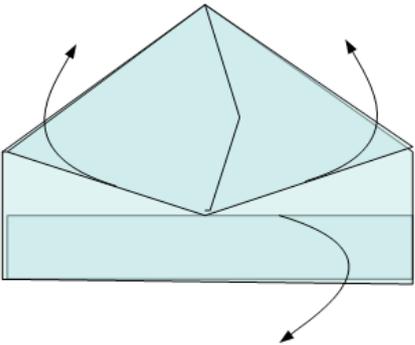
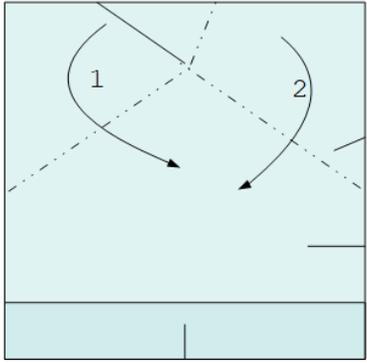
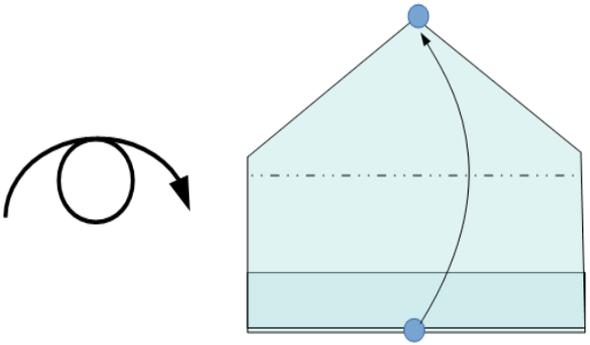
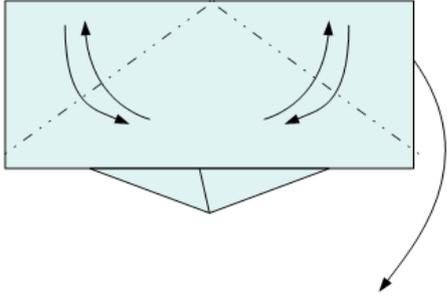


<p>Date due unità di questo tipo, una va riaperta.</p>	
<p>Le ali del modulo aperto vanno inserite nelle tasche dell'altro modulo.</p>	

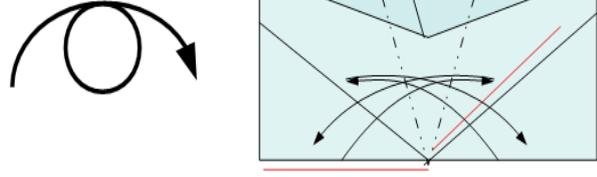
L'unità pentagonale

Per completezza, forniamo qui la costruzione dell'unità pentagonale; purtroppo, nonostante sia una delle più semplici unità di questo tipo, ha il difetto di essere incompatibile con le unità triangolari e quadrate: non solo, ma le costruzioni risultano scarsamente stabili, avendo solo due tasche. Ha comunque interesse costruttivo in quanto ogni faccia ha le proprie ali, senza necessità di unità di legame.

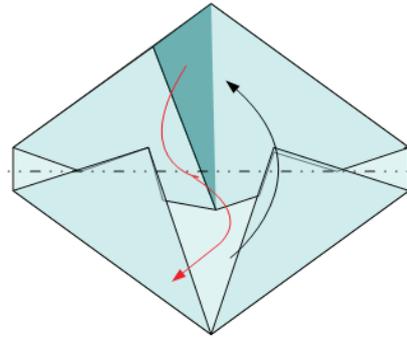
<p>Dividere a metà verticalmente il foglio, marcando solo i punti sui lati; portare l'angolo in basso a destra sulla divisione del lato superiore, marcare il punto sulla destra e riaprire.</p>	
<p>Portare l'angolo inferiore destro sulla marca appena ottenuta, marcare e riaprire (1). Portare l'angolo inferiore destro sulla nuova marca e piegare l'intero foglio (2).</p>	
<p>Portare i due cerchi a coincidere, mantenendo la piegatura.</p>	
<p>Effettuare la medesima piegatura dall'altro lato.</p>	

<p>Riaprire completamente il modello.</p>	
<p>Piegare nell'ordine indicato dalle frecce. Il lato sinistro, piegato, è al di sotto del lato destro.</p>	
<p>Ruotare il modello, portare i due cerchi a coincidere e piegare. Si noti che la piega risultante <i>non</i> coincide con i vertici del pentagono; dal lato basso, sotto la piegatura, spunterà un angolo del modello.</p>	
<p>Piegare i due angoli superiori secondo la punta del pentagono e riaprire. Riaprire anche la piega della figura precedente.</p>	

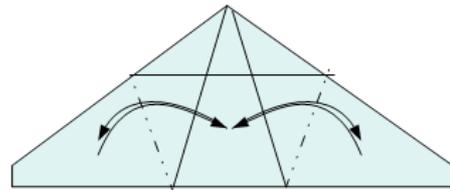
Capovolgere il modello; portare le due linee evidenziate in rosso a coincidere e riaprire; ripetere l'operazione dall'altro lato. Le piegature risultanti sono le due pieghe a valle a forma di "V" al centro del modello.



Piegare a metà orizzontalmente, portando l'ala indicata in colore più scuro all'interno della tasca inferiore sinistra (movimento indicato dalla freccia rossa).



Piegare l'ala sinistra in modo tale che gli estremi della piegatura risultante coincidano con gli estremi delle due piegature già presenti (la parte sulla sinistra del lato obliquo viene a coincidere con la piegatura orizzontale), riaprire e ripetere sul lato destro: il pentagono che sarà la faccia del solido è identificato dalle piegature.



Il modulo ottenuto ha due ali (le parti alla sinistra e alla destra del pentagono) e due tasche (sui lati superiori del pentagono); la base del pentagono è chiusa.

Equazioni di terzo grado

Utilizzando il Metodo di Lill, è possibile ottenere via origami una soluzione reale di un'equazione di terzo grado.

Il Metodo di Lill

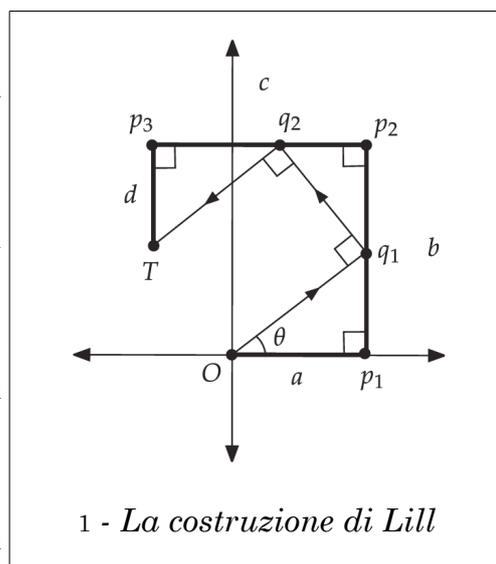
Il Metodo di Lill¹ è un metodo grafico che permette di trovare una soluzione reale di un'equazione polinomiale (a coefficienti reali) di qualsiasi grado; di seguito, esporremo prima il metodo, fornendone poi la dimostrazione, limitandoci al caso dell'equazione di terzo grado.

Sia data l'equazione (a coefficienti reali e, per ora, tutti positivi)

$$a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$$

Partendo dall'origine:

1. tracciamo un segmento di lunghezza **a** in direzione degli *x* positivi
2. ruotiamo in senso antiorario di 90° e tracciamo un segmento di lunghezza **b** in direzione degli *y* positivi
3. ruotiamo in senso antiorario di 90° e tracciamo un segmento di lunghezza **c** in direzione degli *x* negativi
4. ruotiamo in senso antiorario di 90° e tracciamo un segmento di lunghezza **d** in direzione degli *y* negativi



Il risultato è rappresentato in figura dalla spezzata a bordo più spesso: se qualche valore è negativo, si inverte la relativa direzione di percorrenza. Se qualche coefficiente ha valore nullo si effettua ugualmente la rotazione ma non il movimento.

¹ Eduard Lill (Brüx, Boemia, 1830 -- Görz, 1900): capitano del genio dell'esercito austro-ungarico, ingegnere, matematico.

Costruiamo (se possibile) la spezzata Oq_1q_2T indicata in figura a bordo più tenue, curando che gli angoli in q_1 e in q_2 siano angoli retti: la spezzata deve iniziare nell'origine e terminare nel punto finale della spezzata a bordo più spesso².

Se θ è l'angolo formato da Oq_1 con l'asse delle x , allora una delle soluzioni dell'equazione è:

$$x = -\tan \theta .$$

Per prima cosa, notiamo che tutti i triangoli della figura sono simili. Quindi, sarà:

$$\theta = q_1 O p_1 = q_2 q_1 p_2 = T q_2 p_3$$

Possiamo dunque utilizzare uno qualsiasi di questi triangoli per esprimere il valore di $\tan \theta$: per quanto riguarda il triangolo $O p_1 q_1$, si ha:

$$-x = \tan \theta = \frac{p_1 q_1}{a} = \frac{b - q_1 p_2}{a} \quad \text{il che implica} \quad q_1 p_2 = a x + b$$

Per quanto riguarda il triangolo $q_1 p_2 q_2$, si ha:

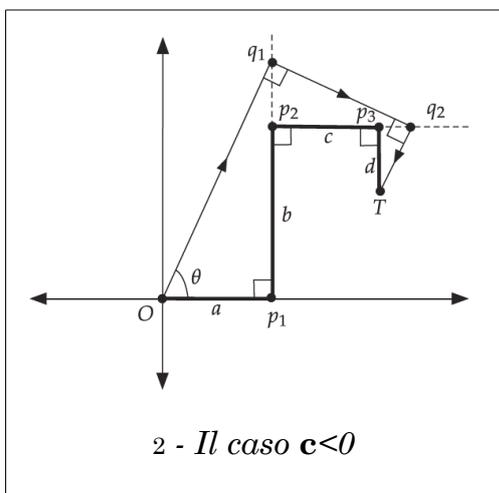
$$-x = \tan \theta = \frac{p_2 q_2}{q_1 p_2} = \frac{c - p_3 q_2}{a x + b} \quad \text{il che implica} \quad p_3 q_2 = x(a x + b) + c$$

Per quanto riguarda il triangolo $q_2 p_3 T$, si ha:

$$-x = \tan \theta = \frac{d}{p_3 q_2} = \frac{d}{x(a x + b) + c} \quad \text{il che implica}$$

$$0 = x(x(a x + b) + c) + d = a x^3 + b x^2 + c x + d$$

e quindi x è radice dell'equazione.



La dimostrazione vista qui sopra è fortemente dipendente dall'aver considerato tutti i coefficienti positivi: se, ad esempio, il coefficiente di primo grado c fosse minore di zero, la costruzione si modificherebbe come indicato in figura qui a fianco, e i calcoli, pur portando allo stesso risultato, ne risulterebbero modificati.

Seguendo le stesse linee, si possono dimostrare i diversi casi con altri coefficienti minori o uguali a zero o la correttezza del metodo anche per equazioni di grado superiore³.

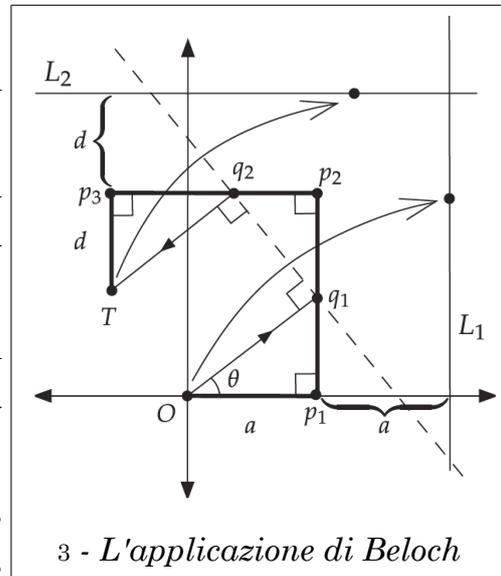
2 Si noti che *non* sono riflessioni.

L'applicazione con l'origami

Nel metodo di Lill non è semplice costruire la spezzata Oq_1q_2T , anche se esistono⁴ dei solutori meccanici in grado di risolverla: ci viene però in aiuto l'origami, con una elegante costruzione scoperta da Margherita Beloch⁵ e basata sul sesto assioma di Huzita–Hatori.

La costruzione procede come in figura:

1. Si riportino (tracciandoli o piegando) i segmenti di lunghezza a, b, c, d .
2. Ad una distanza a dal punto p_1 e dal lato opposto ad O si tracci una perpendicolare all'asse x : sia essa L_1 .
3. Ad una distanza d dal punto p_3 e dal lato opposto ad O si tracci una perpendicolare all'asse y : sia essa L_2 .
4. Si porti il punto T su L_2 e, contemporaneamente, il punto O su L_1 , piegando.



La piegatura contiene al suo interno il segmento q_2q_1 : non è necessario tracciare la parte restante della spezzata, in quanto $\theta = \angle q_2q_1p_2$.

3 La costruzione procede perfettamente identica, nel senso che il coefficiente e verrà costruito con la stessa regola di a , e avanti di questo passo: questi casi però non sono costruibili via origami.

4 O meglio, esistevano: questi artifici, come il metodo, sembrano caduti completamente nel dimenticatoio.

5 Margherita Piazzolla Beloch (Frascati, 12 luglio 1879 -- 28 settembre 1976), allieva di Guido Castelnuovo.

Bibliografia

Codice	Dati
[ALP01]	ALPERIN, Roger – A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers – New York J. Math, 6, pp. 119-133, 2000
[BRN01]	BRUNTON, James – Mathematical Exercises in Paper Folding – Mathematics in School, v.2, #4 – 1973
[CFOxx]	CLERICO, Rodolfo, FABBRI, Piero, ORTENZIO, Francesca – 1 – La notazione, 2 – La formalizzazione, 3 – Dividere un segmento, 4 – Problemi di geometria elementare, 5 – Problemi impossibili, 6 – Sezioni coniche, 7 – I poliedri, 8 – Equazioni di terzo grado. Liberamente scaricabili dal sito <i>Rudi Mathematici</i> www.rudimathematici.com
[FJM01]	FUJIMOTO, Suzo – Invitation to Creative Origami Playing – Edizione giapponese in lingua inglese – Asahi Culture Centre – 1982
[FSE01]	FUSÉ, Tomoko – Unit Polyhedoron (<i>sic!</i>) Origami – Japan Publication Trading Co. Ltd – Senza ind. anno.
[GLS01]	GLASSER, Andrew – Origami Platonic Solids, in "IEEE Computer Graphics and Applications", Jul 1996, pp 85-91 – IEEE, 1996
[HAGxx]	1 – Folding Paper and Enjoy Math, in "3rd Int. Meeting of Origami Sciences, Mathematics and Education" – Thomas Hull, 2002 2 – Origamics – Mathematical Explorations through Paper Folding (Trad. dall'originale giapponese) – World Scientific – 2008
[HLL01]	HULL, Thomas – Project Origami (2nd Edition) – CRC Press – 2013
[LNGxx]	1 – Origami Design Secrets – CRC Press – 2002 2 – Origami Geometric Constructions – Senza ind. editore – 1996

