Numeri nello spazio n dimensionale

Nicola D'Alfonso

Ricercatore indipendente
nicola.dalfonso@hotmail.com

Sommario

Questo paper introduce i numeri nello spazio n dimensionale. Vale a dire, se nella prima dimensione abbiamo i numeri reali e nella seconda i numeri complessi, nelle successive dimensioni avremo i numeri completi qui definiti.

Keywords: *numeri complessi, numeri completi, numeri reali, spazio n dimensionale, estensione dei numeri*

1 Introduzione

Definition 1.1. *Viene definito numero reale r(a) la posizione della retta R che si raggiunge a partire da quella unitaria attraverso operazioni di traslazione di posizioni.*

Possiamo osservare in proposito la figura 1 nella pagina seguente.
La retta R che compare nella figura viene definita retta dei numeri reali.

Theorem 1.2. *I numeri reali possono essere espressi nel seguente modo:*

$$r(a) = a$$

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata e deriva dalla corrispondenza biunivoca tra l'operazione di traslazione di valore (a) e le posizioni (a) della retta R dei reali. □

Per maggiori informazioni sui numeri reali si consulti [1, chapter 1].

Definition 1.3. *Viene definito numero complesso $c(t, \theta)$ la posizione del piano RI che si raggiunge a partire da quella unitaria attraverso operazioni di traslazione di posizioni e di rotazione piana di rette.*

Possiamo osservare in proposito la figura 2 nella pagina successiva.
Da notare che il valore $c(t, \theta)$ viene raggiunto dalla posizione unitaria della retta R prima traslandola di modulo t, e poi ruotando la retta R dell'angolo θ nel piano RI.
La retta I che compare nella figura viene definita retta dei numeri immaginari, e assieme alla retta R dei numeri reali individua il piano RI dei numeri complessi.

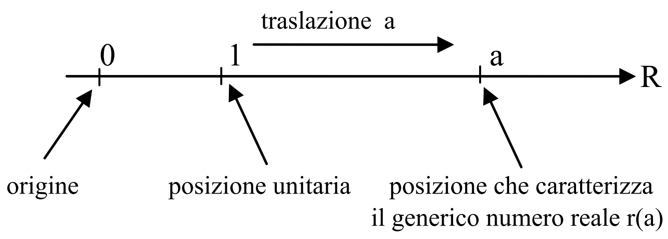

Figura 1: Rappresentazione cartesiana dei numeri reali

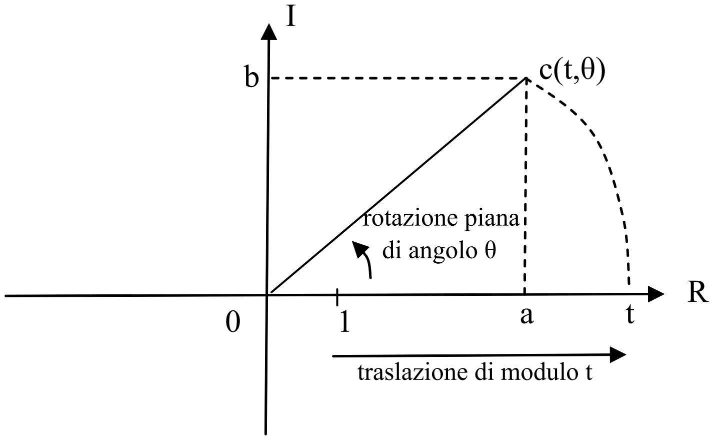

Figura 2: Rappresentazione cartesiana dei numeri complessi

Theorem 1.4. *I numeri complessi possono essere espressi nel seguente modo:*

$$c(t, \theta) = t \cdot [\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)]$$

Dimostrazione. Facendo riferimento alle relazioni trigonometriche evidenziate nella figura 3 a fronte si ottiene proprio il risultato aspettato. □

Definition 1.5. *Il simbolo t che indica la distanza di un numero complesso $c(t, \theta)$ dall'origine è definito modulo.*

Theorem 1.6. *Il modulo t possiede la seguente proprietà:*

$$t = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Dimostrazione. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo individuabile nella figura 3 nella pagina successiva possiamo ottenere la relazione:

$$t^2 = a^2 + b^2$$

da cui deriva quella precedente. □

Definition 1.7. *Il simbolo θ che esprime la rotazione che deve subire la retta R per allinearsi alla retta che congiunge $c(t, \theta)$ all'origine è definita fase piana.*

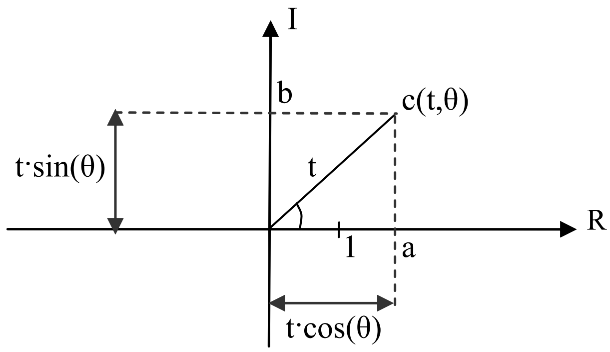

Figura 3: Rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi

Theorem 1.8. *La fase piana θ possiede la seguente proprietà:*

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Dimostrazione. Facendo riferimento sempre allo stesso triangolo della figura 3 possiamo ottenere la relazione:

$$\frac{b}{a} = \tan(\theta)$$

da cui deriva quella precedente. □

Theorem 1.9. *I numeri complessi possono essere espressi nel seguente modo:*

$$c(t,\theta) = t \cdot [\cos(\theta + k \cdot 360) + i \cdot \sin(\theta + k \cdot 360)] \quad \textit{per } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$$

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata e deriva dalla periodicità delle funzioni sin() e cos(). □

Theorem 1.10. *I numeri complessi possono essere espressi nel seguente modo:*

$$c(t,\theta) = c(a,b) = a + i \cdot b$$

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata e deriva dalla corrispondenza biunivoca tra le operazioni di traslazione e rotazione di valori (t,θ) e le posizioni (a,b) del piano RI dei complessi. □

Per maggiori informazioni sui numeri complessi si consulti [1, chapter 3].

Il passaggio dalla prima dimensione dei numeri reali alla seconda dimensione dei numeri complessi ha richiesto un'operazione di rotazione. Estendendo ulteriormente questo procedimento sarà possibile introdurre i numeri n dimensionali e definire le loro operazioni.

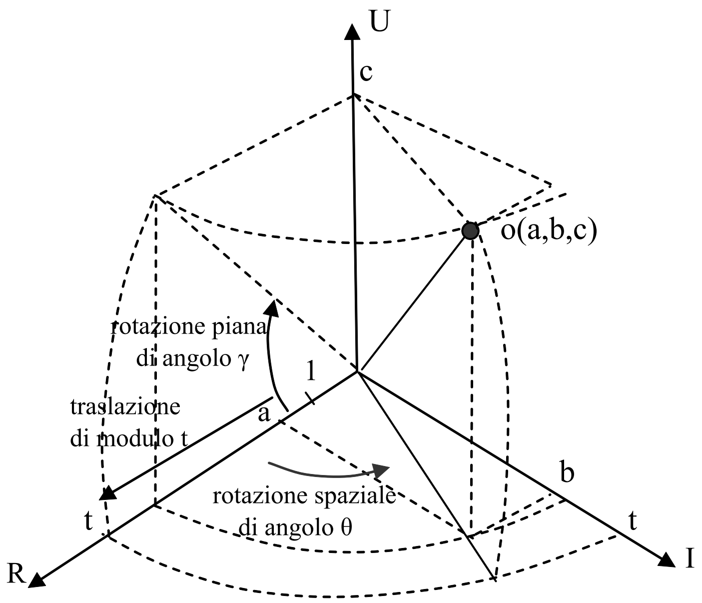

Figura 4: Rappresentazione cartesiana dei numeri completi

2 Numeri nello spazio a tre dimensioni

2.1 Introduzione ai numeri completi

Definition 2.1. *Viene definito numero completo $o(t, \theta, \gamma)$ la posizione dello spazio RIU che si raggiunge a partire da quella unitaria attraverso operazioni di traslazione di posizioni, di rotazione piana di rette e rotazione spaziale di piani.*

Possiamo osservare in proposito la figura 4.

Da notare che la posizione $o(t, \theta, \gamma)$ viene raggiunta dalla posizione unitaria della retta R prima traslandola di modulo t, poi ruotando la retta R dell'angolo γ nel piano RU, e infine ruotando il piano RU dell'angolo θ nello spazio RIU.

La retta U che compare nella figura viene definita retta dei numeri uscenti, e assieme alla retta R dei numeri reali e alla retta I dei numeri immaginari individua lo spazio RIU dei numeri completi.

Theorem 2.2. *I numeri completi possono essere espressi nel seguente modo:*

$$o(t, \theta, \gamma) = t \cdot \{[\cos(\gamma) \cdot \cos(\theta)] + i \cdot [\cos(\gamma) \cdot \sin(\theta)] + u \cdot [\sin(\gamma)]\}$$

Dimostrazione. Facendo riferimento alle relazioni trigonometriche evidenziate nella figura 5 a fronte si ottengono proprio le relazioni cercate. □

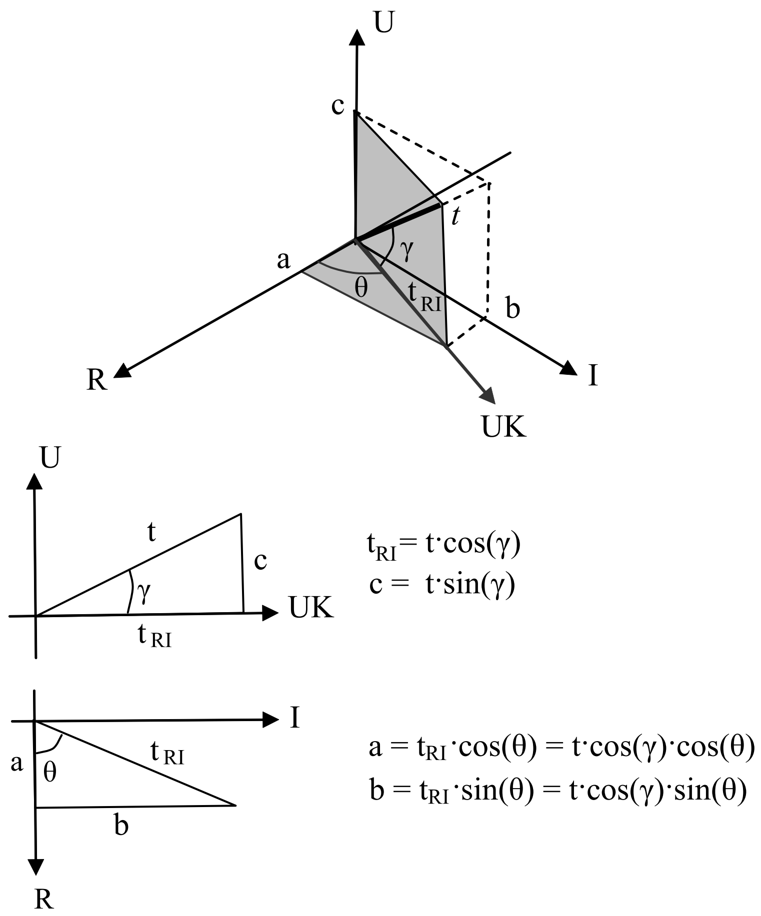

Figura 5: Rappresentazione trigonometrica dei numeri completi

Definition 2.3. *Il simbolo t che indica la distanza di un numero completo $o(t, \theta, \gamma)$ dall'origine è definito modulo.*

Theorem 2.4. *Il modulo t possiede la seguente proprietà:*

$$t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Dimostrazione. Applicando il teorema di Pitagora ai due triangoli di figura 5 possiamo ottenere le seguenti relazioni:

$$t^2 = t_{RI}^2 + c^2$$

$$t_{RI}^2 = a^2 + b^2$$

dalle quali deriva quella precedente. □

Definition 2.5. *Il simbolo γ che esprime la rotazione che deve subire la retta R per allinearsi alla proiezione che ha nel piano RU la retta che congiunge $o(t, \theta, \gamma)$ all'origine è definita fase piana.*

Theorem 2.6. *La fase piana γ possiede la seguente proprietà:*

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Dimostrazione. Facendo riferimento al primo triangolo della figura 5 nella pagina precedente possiamo scrivere:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{t_{RI}}\right)$$

mentre facendo riferimento al secondo triangolo scriveremo:

$$t_{RI}^2 = a^2 + b^2$$

dalle cui espressioni deriva direttamente la relazione cercata. □

Definition 2.7. *Il simbolo θ che esprime la rotazione che deve subire la retta R per allinearsi alla proiezione che ha nel piano RI la retta che congiunge $o(t, \theta, \gamma)$ all'origine è definita fase spaziale.*

Theorem 2.8. *La fase spaziale θ possiede la seguente proprietà:*

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Dimostrazione. Facendo riferimento al secondo triangolo della figura 5 nella pagina precedente possiamo ottenere la relazione:

$$\frac{b}{a} = \tan(\theta)$$

da cui deriva quella precedente. □

Theorem 2.9. *I numeri completi possono essere espressi nel seguente modo:*

$$\begin{aligned} o(t,\theta,\gamma) = t \cdot \{&[\cos(\gamma + j\cdot 360)\cdot\cos(\theta + k\cdot 360)] + \\ &+ i\cdot[\cos(\gamma + j\cdot 360)\cdot\sin(\theta + k\cdot 360)] + u\cdot[\sin(\gamma + j\cdot 360)]\} \end{aligned}$$

$$per \begin{cases} j = 0, \pm1, \pm2, \pm3\dots \\ k = 0, \pm1, \pm2, \pm3\dots \end{cases}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata e deriva dalla periodicità delle funzioni sin() e cos(). □

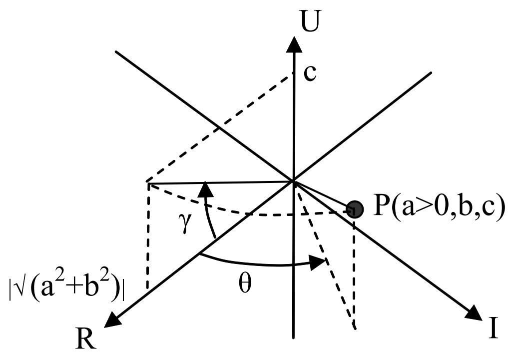

Figura 6: Fasi che identificano le posizioni del semispazio R^+IU secondo la rappresentazione standard

Definition 2.10. *I numeri completi non appartenenti alla retta U vengono definiti in rappresentazione standard se dotati delle fasi θ e γ che soddisfano le convenzioni introdotte qui di seguito.*

Per le posizioni P(a,b,c) del semispazio R^+IU non appartenenti ai piani RI, RU, IU le fasi della rappresentazione standard saranno quelle indicate nella figura 6.

Le fasi mostrate in figura possono essere determinate servendosi delle formule:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{|\sqrt{a^2+b^2}|}\right)$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Per le posizioni P(a,b,c) del semispazio R^-IU non appartenenti ai piani RI, RU, IU le fasi della rappresentazione standard saranno quelle indicate nella figura 7 nella pagina successiva.

Le fasi mostrate in figura possono essere determinate servendosi delle formule:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{|\sqrt{a^2+b^2}|}\right)$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Da notare che la fase piana γ non è calcolata con la formula:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{-|\sqrt{a^2+b^2}|}\right)$$

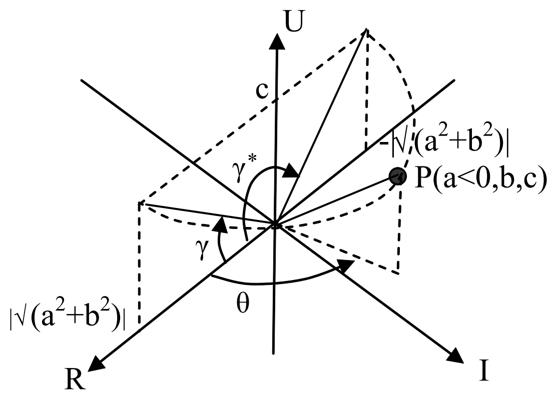

Figura 7: Fasi che identificano le posizioni del semispazio $R^{-}IU$ secondo la rappresentazione standard

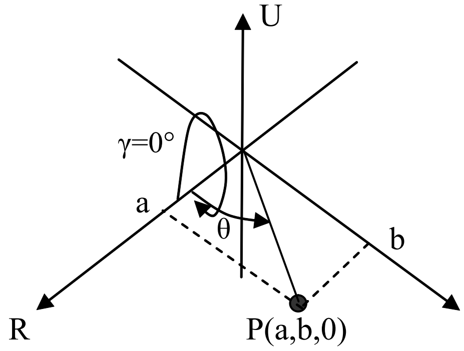

Figura 8: Fasi che identificano le posizioni del piano RI secondo la rappresentazione standard

perché ad essa corrisponderebbe il valore γ^{*}.

Per le posizioni P(a,b,c) del piano RI non appartenenti alle rette R e I le fasi della rappresentazione standard saranno quelle indicate nella figura 8.

Le fasi mostrate in figura possono essere determinate servendosi delle formule:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Per le posizioni P(a,b,c) del semipiano $R^{+}U$ non appartenenti alle rette R e U le fasi della rappresentazione standard saranno quelle indicate nella figura 9 nella pagina successiva.

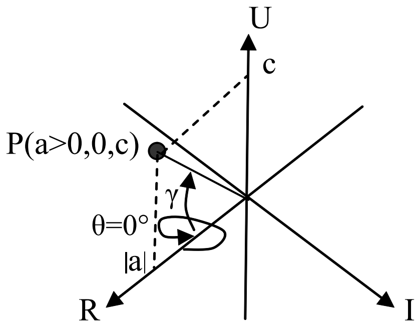

Figura 9: Fasi che identificano le posizioni del semipiano $R^{+}U$ secondo la rappresentazione standard

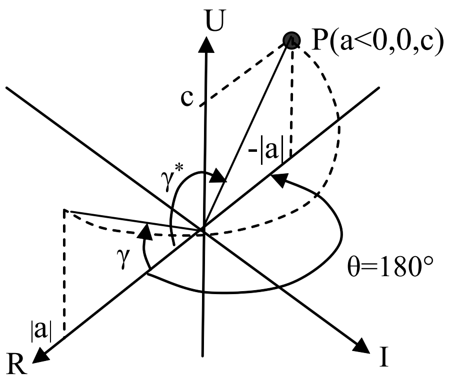

Figura 10: Fasi che identificano le posizioni del semipiano $R^{-}U$ secondo la rappresentazione standard

Le fasi mostrate in figura possono essere determinate servendosi delle formule:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{|a|}\right)$$
$$\theta = 0^\circ$$

Per le posizioni P(a,b,c) del semipiano $R^{-}U$ non appartenenti alle rette R e U le fasi della rappresentazione standard saranno quelle indicate nella figura 10.

Le fasi mostrate in figura possono essere determinate servendosi delle formule:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{|a|}\right)$$
$$\theta = 180^\circ$$

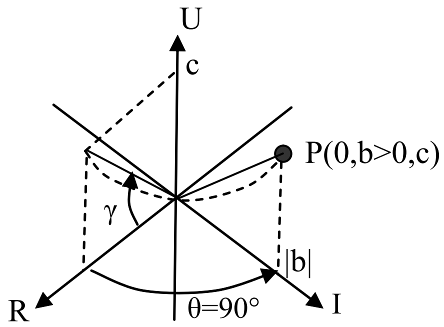

Figura 11: Fasi che identificano le posizioni del semipiano I^+U secondo la rappresentazione standard

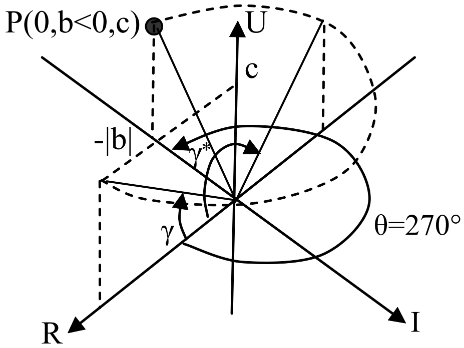

Figura 12: Fasi che identificano le posizioni del semipiano I^-U secondo la rappresentazione standard

Da notare che la fase piana γ non è calcolata con la formula:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{-|a|}\right)$$

perché ad essa corrisponderebbe il valore γ^*.

Per le posizioni P(a,b,c) del semipiano I^+U non appartenenti alle rette I e U le fasi della rappresentazione standard saranno quelle indicate nella figura 11.

Le fasi mostrate in figura possono essere determinate servendosi delle formule:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{|b|}\right)$$
$$\theta = 90°$$

Per le posizioni P(a,b,c) del semipiano I^-U non appartenenti alle rette I e U le fasi della rappresentazione standard saranno quelle indicate nella figura 12.

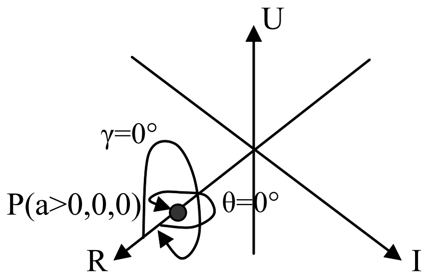

Figura 13: Fasi che identificano le posizioni della semiretta R^+ secondo la rappresentazione standard

Le fasi mostrate in figura possono essere determinate servendosi delle formule:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{|b|}\right)$$
$$\theta = 270°$$

Da notare che la fase piana γ non è calcolata con la formula:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{-|b|}\right)$$

perché ad essa corrisponderebbe il valore γ^*.

Per le posizioni P(a,b,c) della semiretta R^+ le fasi della rappresentazione standard saranno quelle indicate nella figura 13.

Le fasi mostrate in figura possono essere determinate servendosi delle formule:

$$\gamma = 0°$$
$$\theta = 0°$$

Per le posizioni P(a,b,c) della semiretta R^- le fasi della rappresentazione standard saranno quelle indicate nella figura 14 nella pagina seguente.

Le fasi mostrate in figura possono essere determinate servendosi delle formule:

$$\gamma = 0°$$
$$\theta = 180°$$

Per le posizioni P(a,b,c) della semiretta I^+ le fasi della rappresentazione standard saranno quelle indicate nella figura 15 nella pagina successiva.

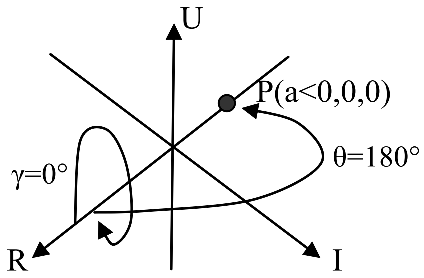

Figura 14: Fasi che identificano le posizioni della semiretta R^- secondo la rappresentazione standard

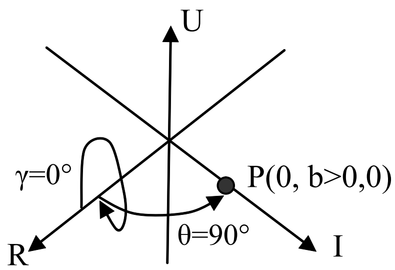

Figura 15: Fasi che identificano le posizioni della semiretta I^+ secondo la rappresentazione standard

Le fasi mostrate in figura possono essere determinate servendosi delle formule:

$$\gamma = 0°$$
$$\theta = 90°$$

Per le posizioni P(a,b,c) della semiretta I^- le fasi della rappresentazione standard saranno quelle indicate nella figura 16 a fronte.

Le fasi mostrate in figura possono essere determinate servendosi delle formule:

$$\gamma = 0°$$
$$\theta = 270°$$

Theorem 2.11. *La rappresentazione standard di un numero completo di coordinate (a,b,c) non giacente sulla retta U richiede di assegnare alla radice algebrica $\sqrt{a^2+b^2}$ la seguente soluzione positiva:*

$$\sqrt{a^2+b^2} = \left|\sqrt{a^2+b^2}\,\right|$$

Dimostrazione. Nel caso delle rappresentazioni standard precedentemente esaminate (che coprono tutte le regioni dello spazio RIU ad esclusione della retta

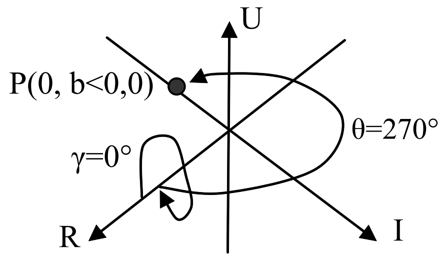

Figura 16: Fasi che identificano le posizioni della semiretta I^- secondo la rappresentazione standard

U) la fase γ assume i valori previsti dalla formula:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

quando si assegna alla radice algebrica $\sqrt{a^2+b^2}$ le sue sole soluzioni positive. E questo dimostra immediatamente la tesi. □

Definition 2.12. *I numeri completi non appartenenti alla retta U vengono definiti in rappresentazione complementare se dotati di fasi ottenute dai valori θ e γ della rappresentazione standard attraverso quelle sostituzioni che permettono di individuare le stesse posizioni.*

Theorem 2.13. *Chiamate θ e γ le fasi che permettono ad un numero completo non appartenente alla retta U e in rappresentazione standard di identificare una qualsiasi posizione dello spazio RIU, un insieme alternativo di fasi in grado di individuare la stessa posizione è quello avente valori $(\theta + 180°)$ e $(180° - \gamma)$.*

Dimostrazione. Poiché valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
&\cos(180° - \gamma) \cdot \cos(\theta + 180°) = \cos(\gamma) \cdot \cos(\theta)\\
&\cos(180° - \gamma) \cdot \sin(\theta + 180°) = \cos(\gamma) \cdot \sin(\theta)\\
&\sin(180° - \gamma) = \sin(\gamma)
\end{aligned}$$

possiamo scrivere:

$o(t, \theta, \gamma) = o(t, \theta{+}180°, 180°{-}\gamma)$

dimostrando la tesi. □

Theorem 2.14. *I numeri completi non appartenenti alla retta U sono in rappresentazione complementare se dotati di fasi ottenute sostituendo i valori θ e γ della rappresentazione standard con i valori $(\theta + 180°)$ e $(180° - \gamma)$.*

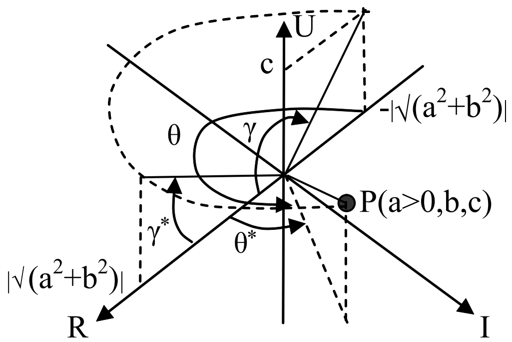

Figura 17: Fasi che identificano le posizioni del semispazio R^+IU secondo la rappresentazione complementare

Dimostrazione. La definizione dei numeri completi in rappresentazione complementare e il teorema 2.13 provano immediatamente la tesi. □

Facendo riferimento a quanto visto per le rappresentazioni standard, le convenzioni adottate per le fasi delle rappresentazioni complementari saranno quelle indicate qui di seguito.

Per le posizioni P(a,b,c) del semispazio R^+IU non appartenenti ai piani RI, RU, IU le fasi della rappresentazione complementare saranno quelle indicate nella figura 17.

Le fasi mostrate in figura possono essere determinate servendosi delle formule:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{-|\sqrt{a^2+b^2}|}\right)$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{-b}{-a}\right)$$

Da notare che la fase piana γ e la fase spaziale θ non sono calcolate con le formule:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{|\sqrt{a^2+b^2}|}\right)$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

perché a queste corrisponderebbero i valori γ^* e θ^*.

Per le posizioni P(a,b,c) del semispazio R^-IU non appartenenti ai piani RI, RU, IU le fasi della rappresentazione complementare saranno quelle indicate nella figura 18 a fronte.

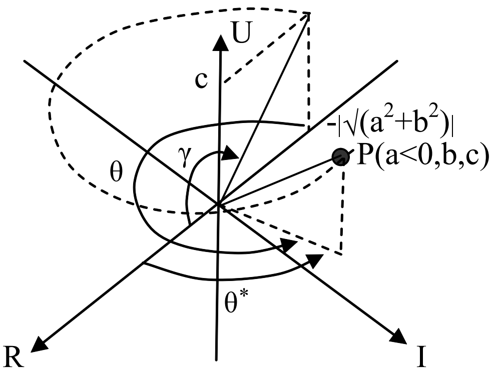

Figura 18: Fasi che identificano le posizioni del semispazio $R^{-}IU$ secondo la rappresentazione complementare

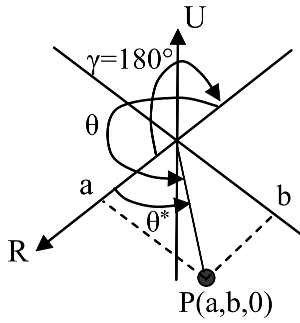

Figura 19: Fasi che identificano le posizioni del piano RI secondo la rappresentazione complementare

Le fasi mostrate in figura possono essere determinate servendosi delle formule:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{-|\sqrt{a^2+b^2}|}\right)$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{-b}{-a}\right)$$

Da notare che la fase spaziale θ non è calcolata con la formula:

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

perché ad essa corrisponderebbe il valore θ^*.

Per le posizioni P(a,b,c) del piano RI non appartenenti alle rette R e I le fasi della rappresentazione complementare saranno quelle indicate nella figura 19.

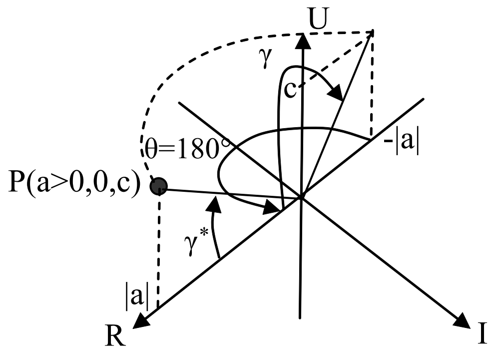

Figura 20: Fasi che identificano le posizioni del semipiano R^+U secondo la rappresentazione complementare

Le fasi mostrate in figura possono essere determinate servendosi delle formule:

$$\gamma = 180°$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{-b}{-a}\right)$$

Da notare che la fase spaziale θ non è calcolata con la formula:

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

perché ad essa corrisponderebbe il valore θ^*.

Per le posizioni P(a,b,c) del semipiano R^+U non appartenenti alle rette R e U le fasi della rappresentazione complementare saranno quelle indicate nella figura 20.

Le fasi mostrate in figura possono essere determinate servendosi delle formule:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{-|a|}\right)$$
$$\theta = 180°$$

Da notare che la fase piana γ non è calcolata con la formula:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{|a|}\right)$$

perché ad essa corrisponderebbe il valore γ^*.

Per le posizioni P(a,b,c) del semipiano R^-U non appartenenti alle rette R e U le fasi della rappresentazione complementare saranno quelle indicate nella figura 21 nella pagina successiva.

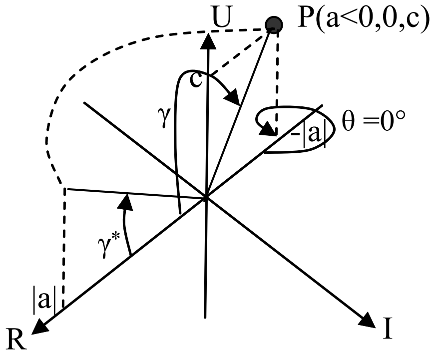

Figura 21: Fasi che identificano le posizioni del semipiano $R^{-}U$ secondo la rappresentazione complementare

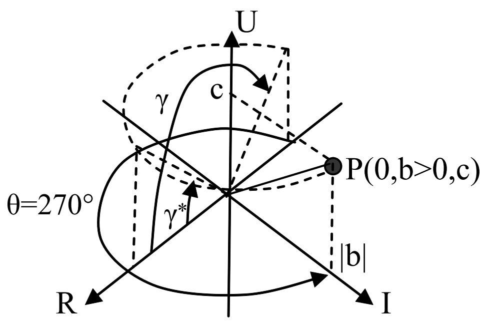

Figura 22: Fasi che identificano le posizioni del semipiano $I^{+}U$ secondo la rappresentazione complementare

Le fasi mostrate in figura possono essere determinate servendosi delle formule:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{-|a|}\right)$$
$$\theta = 0°$$

Da notare che la fase piana γ non è calcolata con la formula:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{|a|}\right)$$

perché ad essa corrisponderebbe il valore γ^{*}.

Per le posizioni P(a,b,c) del semipiano $I^{+}U$ non appartenenti alle rette I e U le fasi della rappresentazione complementare saranno quelle indicate nella figura 22.

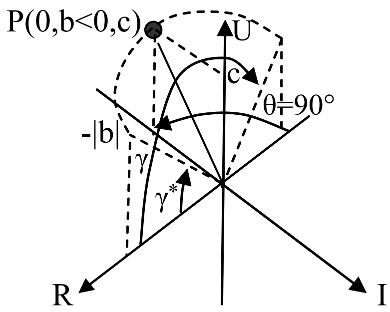

Figura 23: Fasi che identificano le posizioni del semipiano I^-U secondo la rappresentazione complementare

Le fasi mostrate in figura possono essere determinate servendosi delle formule:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{-|b|}\right)$$
$$\theta = 270°$$

Da notare che la fase piana γ non è calcolata con la formula:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{|b|}\right)$$

perché ad essa corrisponderebbe il valore γ^*.

Per le posizioni P(a,b,c) del semipiano I^-U non appartenenti alle rette I e U le fasi della rappresentazione complementare saranno quelle indicate nella figura 23.

Le fasi mostrate in figura possono essere determinate servendosi delle formule:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{-|b|}\right)$$
$$\theta = 90°$$

Da notare che la fase piana γ non è calcolata con la formula:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{|b|}\right)$$

perché ad essa corrisponderebbe il valore γ^*.

Per le posizioni P(a,b,c) della semiretta R^+ le fasi della rappresentazione complementare saranno quelle indicate nella figura 24 a fronte.

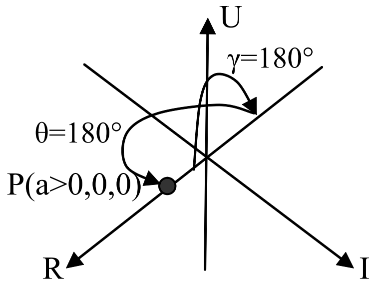

Figura 24: Fasi che identificano le posizioni della semiretta R^+ secondo la rappresentazione complementare

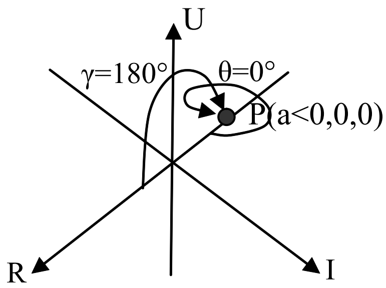

Figura 25: Fasi che identificano le posizioni della semiretta R^- secondo la rappresentazione complementare

Le fasi mostrate in figura possono essere determinate servendosi delle formule:

$$\gamma = 180^\circ$$
$$\theta = 180^\circ$$

Per le posizioni P(a,b,c) della semiretta R^- le fasi della rappresentazione complementare saranno quelle indicate nella figura 25.

Le fasi mostrate in figura possono essere determinate servendosi delle formule:

$$\gamma = 180^\circ$$
$$\theta = 0^\circ$$

Per le posizioni P(a,b,c) della semiretta I^+ le fasi della rappresentazione complementare saranno quelle indicate nella figura 26 nella pagina seguente.

Le fasi mostrate in figura possono essere determinate servendosi delle formule:

$$\gamma = 180^\circ$$
$$\theta = 270^\circ$$

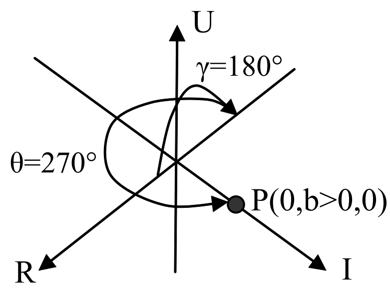

Figura 26: Fasi che identificano le posizioni della semiretta I^+ secondo la rappresentazione complementare

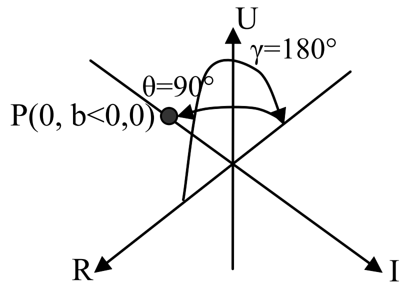

Figura 27: Fasi che identificano le posizioni della semiretta I^- secondo la rappresentazione complementare

Per le posizioni P(a,b,c) della semiretta I^- le fasi della rappresentazione complementare saranno quelle indicate nella figura 27.

Le fasi mostrate in figura possono essere determinate servendosi delle formule:

$$\gamma = 180^\circ$$
$$\theta = 90^\circ$$

Theorem 2.15. *La rappresentazione complementare di un numero completo di coordinate (a,b,c) non giacente sulla retta U richiede di assegnare alla radice algebrica* $\sqrt{a^2+b^2}$ *la seguente soluzione negativa:*

$$\sqrt{a^2+b^2} = -\left|\sqrt{a^2+b^2}\,\right|$$

Dimostrazione. Nel caso delle rappresentazioni complementari precedentemente esaminate (che coprono tutte le regioni dello spazio RIU ad esclusione della retta U) la fase γ assume i valori previsti dalla formula:

$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

quando si assegna alla radice algebrica $\sqrt{a^2+b^2}$ le sue sole soluzioni negative. E questo dimostra immediatamente la tesi. □

Theorem 2.16. *Ciascuna posizione della retta U corrisponde ad un numero completo per ogni valore assegnabile alla fase spaziale θ.*

Dimostrazione. Assegnando all'espressione dei numeri completi i valori $\gamma = \pm 90°$ che caratterizzano i numeri uscenti della retta U:

$$o(t, \theta, \pm 90°) = t \cdot \{[\cos(\pm 90°) \cdot \cos(\theta)] + i \cdot [\cos(\pm 90°) \cdot \sin(\theta)] + u \cdot [\sin(\pm 90°)]\}$$

si ottiene uno stesso risultato indipendentemente dal valore della fase spaziale θ:

$$o(t, \theta, \pm 90°) = t \cdot u \cdot [\sin(\pm 90°)] = \pm t \cdot u$$

dimostrando la tesi. □

Definition 2.17. *I numeri completi appartenenti alla retta U vengono definiti in rappresentazione standard se dotati di una fase spaziale θ pari a zero.*

Definition 2.18. *I numeri completi appartenenti alla retta U vengono definiti in rappresentazione complementare se dotati di una fase spaziale θ diversa da zero.*

Dal momento che i valori non nulli della fase spaziale sono illimitati, saranno illimitate anche le rappresentazioni complementari legate ai numeri completi appartenenti alla retta U.

Theorem 2.19. *I numeri completi non possono essere espressi nel seguente modo:*

$$o(a, b, c) = a + i \cdot b + u \cdot c$$

ovvero:

$$o(t, \theta, \gamma) \neq o(a, b, c) = a + i \cdot b + u \cdot c$$

Dimostrazione. La dimostrazione deriva dal fatto che non c'è alcuna corrispondenza biunivoca tra le operazioni di traslazione e rotazione di valori (t, θ, γ) e le posizioni (a,b,c) dello spazio RIU, come sancito dall'esistenza delle rappresentazioni complementari (teorema 2.14). □

Data l'impossibilità di associare i numeri completi alle singole posizioni dello spazio, potremo comunque esprimerli in funzione delle loro coordinate (a,b,c) a patto di esplicitare anche le fasi coinvolte.

Detto in altre parole dovremo servirci della seguente notazione:

$$o(a, b, c)_{(t,\theta,\gamma)} = a_{(t)} + i \cdot b_{(\theta)} + u \cdot c_{(\gamma)}$$

dove i valori di t, θ, γ se non già indicati, dovranno essere riferiti a quelli che caratterizzano la rappresentazione standard.

È comunque possibile introdurre una notazione più sintetica indicando quale rappresentazione sia associata alle coordinate (a,b,c) o, nel caso dei numeri uscenti, il valore della fase spaziale θ. In pratica per la rappresentazione standard avremo:

$$o(a, b, c)_{(S)} = (a + i \cdot b + u \cdot c)_{(S)}$$

per la rappresentazione complementare:

$$o(a, b, c)_{(C)} = (a + i \cdot b + u \cdot c)_{(C)}$$

e infine per i numeri uscenti:

$$o(a, b, c)_{(\theta)} = u \cdot c_{(\theta)}$$

Mentre qualsiasi altra notazione del seguente tipo:

$$o(a, b, c) = a + i \cdot b + u \cdot c$$

priva cioè delle informazioni sufficienti a risalire ai valori delle fasi θ e γ sarà in grado di rappresentare solamente le posizioni dello spazio RIU, ma non i numeri completi.

2.2 Addizione

Definition 2.20. *Nello spazio RIU viene definita addizione tra le due posizioni $o_1(a_1, b_1, c_1)$ e $o_2(a_2, b_2, c_2)$ la posizione $o_{1+2}(a_{1+2}, b_{1+2}, c_{1+2})$ rappresentata anche con il simbolo $o_1(a_1, b_1, c_1) + o_2(a_2, b_2, c_2)$ che soddisfa la seguente condizione:*

$$o_{1+2}(a_{1+2}, b_{1+2}, c_{1+2}) = o_{1+2}(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$$

Questa condizione equivale a prendere la posizione dello spazio RIU dotata delle seguenti coordinate:

$$a_{1+2} = a_1 + a_2$$
$$b_{1+2} = b_1 + b_2$$
$$c_{1+2} = c_1 + c_2$$

Possiamo osservare in proposito la figura 28 a fronte.

Va sottolineato come l'addizione non sia definita in termini di traslazioni e rotazioni e questo significa che deve essere considerata un'operazione che agisce sulle posizioni, e non sui numeri completi. Se ad una e due dimensioni ciò non accade è dovuto al fatto che in tali ambiti c'è una corrispondenza biunivoca tra posizioni e numeri reali e complessi.

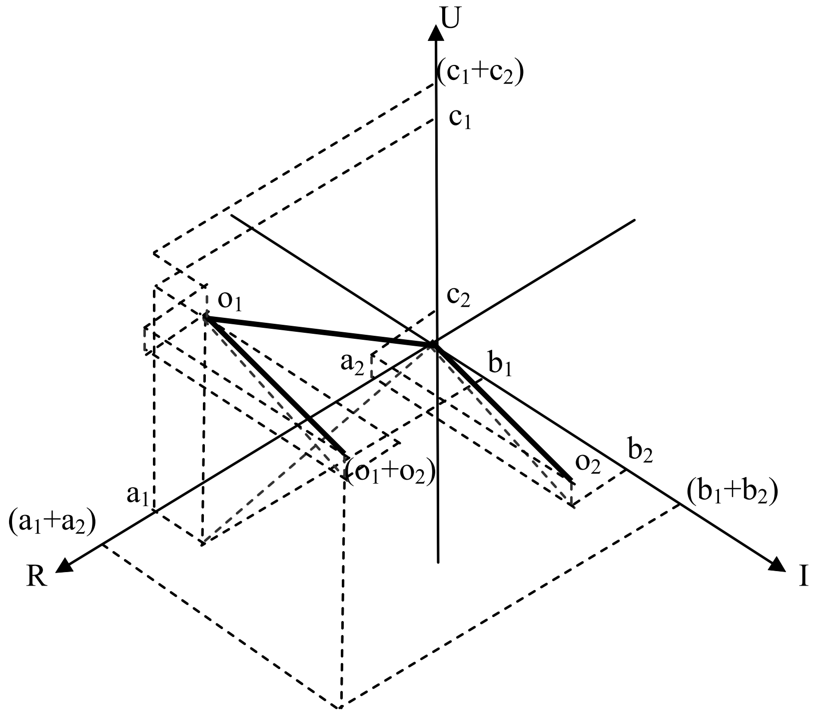

Figura 28: Rappresentazione dell'addizione tra due numeri completi

Poiché l'addizione agisce sulle posizioni la notazione da utilizzare per i vari termini coinvolti sarà la seguente:

$$o(a, b, c) = a + i \cdot b + u \cdot c$$

Per integrare l'operazione di addizione agente sulle posizioni con le altre operazioni agenti sui numeri completi sarà sufficiente fare riferimento al numero completo che si ottiene assegnando alla somma le fasi della rappresentazione standard.

Theorem 2.21. *Risulta neutra rispetto all'addizione la posizione 0, ovvero per:*

$$o_2(a_2, b_2, c_2) = 0$$

si ha:

$$o_1(a_1, b_1, c_1) + o_2(a_2, b_2, c_2) = o_1(a_1, b_1, c_1)$$

Dimostrazione. Essendo a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 dei numeri reali possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} a_{1+2} &= a_1 + a_2 = a_1 + 0 = a_1 \\ b_{1+2} &= b_1 + b_2 = b_1 + 0 = b_1 \\ c_{1+2} &= c_1 + a_2 = c_1 + 0 = c_1 \end{aligned}$$

dimostrando la tesi. □

Theorem 2.22. *Risulta opposta rispetto all'addizione la posizione opposta rispetto all'origine, ovvero per:*

$$o_2(a_2, b_2, c_2) = o_2(-a_1, -b_1, -c_1)$$

si ha:

$$o_1(a_1, b_1, c_1) + o_2(a_2, b_2, c_2) = 0$$

Dimostrazione. Essendo a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 dei numeri reali possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} a_{1+2} &= a_1 + a_2 = a_1 - a_1 = 0 \\ b_{1+2} &= b_1 + b_2 = b_1 - b_1 = 0 \\ c_{1+2} &= c_1 + a_2 = c_1 - c_1 = 0 \end{aligned}$$

dimostrando la tesi. □

Theorem 2.23. *Vale la proprietà commutativa, ovvero:*

$$o_1(a_1, b_1, c_1) + o_2(a_2, b_2, c_2) = o_2(a_2, b_2, c_2) + o_1(a_1, b_1, c_1)$$

Dimostrazione. Essendo a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 dei numeri reali possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} a_{1+2} &= a_1 + a_2 \\ b_{1+2} &= b_1 + b_2 \\ c_{1+2} &= c_1 + c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2+1} &= a_2 + a_1 = a_1 + a_2 \\ b_{2+1} &= b_2 + b_1 = b_1 + b_2 \\ c_{2+1} &= c_2 + c_1 = c_1 + c_2 \end{aligned}$$

dimostrando la tesi. □

Theorem 2.24. *Valgono le proprietà associative e dissociative, ovvero per:*

$$o_2(a_2, b_2, c_2) = o_3(a_3, b_3, c_3) + o_4(a_4, b_4, c_4)$$

si ha:

$$o_1(a_1, b_1, c_1) + o_2(a_2, b_2, c_2) = [o_1(a_1, b_1, c_1) + o_3(a_3, b_3, c_3)] + o_4(a_4, b_4, c_4)$$
$$[o_1(a_1, b_1, c_1) + o_3(a_3, b_3, c_3)] + o_4(a_4, b_4, c_4) = o_1(a_1, b_1, c_1) + o_2(a_2, b_2, c_2)$$

Dimostrazione. Essendo a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2,a_3,b_3,c_3,a_4,b_4,c_4 dei numeri reali possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} a_{1+2} &= a_1 + a_2 = a_1 + (a_3 + a_4) = (a_1 + a_3) + a_4 = a_{(1+3)+4} \\ b_{1+2} &= b_1 + b_2 = b_1 + (b_3 + b_4) = (b_1 + b_3) + b_4 = b_{(1+3)+4} \\ c_{1+2} &= c_1 + c_2 = c_1 + (c_3 + c_4) = (c_1 + c_3) + c_4 = c_{(1+3)+4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{(1+3)+4} &= (a_1 + a_3) + a_4 = a_1 + (a_3 + a_4) = a_1 + a_2 = a_{1+2} \\ b_{(1+3)+4} &= (b_1 + b_3) + b_4 = b_1 + (b_3 + b_4) = b_1 + b_2 = b_{1+2} \\ c_{(1+3)+4} &= (c_1 + c_3) + c_4 = c_1 + (c_3 + c_4) = c_1 + a_2 = c_{1+2} \end{aligned}$$

dimostrando la tesi. □

2.3 Sottrazione

Definition 2.25. *Nello spazio RIU viene definita sottrazione tra le due posizioni $o_1(a_1, b_1, c_1)$ e $o_2(a_2, b_2, c_2)$ la posizione $o_{1-2}(a_{1-2}, b_{1-2}, c_{1-2})$ rappresentata anche con il simbolo $o_1(a_1, b_1, c_1) - o_2(a_2, b_2, c_2)$ che soddisfa la seguente condizione:*

$$o_{1-2}(a_{1(1-2)}, a_{2(1-2)}, \ldots, a_{n(1-2)}) + o(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}) = o(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})$$

Questa condizione definisce la sottrazione come operazione inversa rispetto alla addizione, ed equivale a richiedere:

$$\begin{aligned} a_{1-2} &= a_1 - a_2 \\ b_{1-2} &= b_1 - b_2 \\ c_{1-2} &= c_1 - c_2 \end{aligned}$$

Va sottolineato come la sottrazione non sia definita in termini di traslazioni e rotazioni e questo significa che deve essere considerata un'operazione che agisce sulle posizioni, e non sui numeri completi. Se ad una e due dimensioni ciò non accade è dovuto al fatto che in tali ambiti c'è una corrispondenza biunivoca tra posizioni e numeri reali e complessi.

Poiché ad essere coinvolte sono le posizioni la notazione da utilizzare per i vari termini coinvolti sarà la seguente:

$$o(a, b, c) = a + i \cdot b + u \cdot c$$

Per integrare l'operazione di sottrazione agente sulle posizioni con le altre operazioni agenti sui numeri completi sarà sufficiente fare riferimento al numero completo che si ottiene assegnando alla differenza le fasi della rappresentazione standard.

Theorem 2.26. *Risulta neutra rispetto alla sottrazione la posizione 0, ovvero per:*

$$o_2(a_2, b_2, c_2) = 0$$

si ha:

$$o_1(a_1, b_1, c_1) - o_2(a_2, b_2, c_2) = o_1(a_1, b_1, c_1)$$

Dimostrazione. Essendo a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 dei numeri reali possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} a_{1-2} &= a_1 - a_2 = a_1 - 0 = a_1 \\ b_{1-2} &= b_1 - b_2 = b_1 - 0 = b_1 \\ c_{1-2} &= c_1 - a_2 = c_1 - 0 = c_1 \end{aligned}$$

dimostrando la tesi. □

Theorem 2.27. *Risulta identica rispetto alla sottrazione la stessa posizione, ovvero per:*

$$o_2(a_2, b_2, c_2) = o_2(a_1, b_1, c_1)$$

si ha:

$$o_1(a_1, b_1, c_1) - o_2(a_2, b_2, c_2) = 0$$

Dimostrazione. Essendo a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 dei numeri reali possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
a_{1-2} &= a_1 - a_2 = a_1 - a_1 = 0 \\
b_{1-2} &= b_1 - b_2 = b_1 - b_1 = 0 \\
c_{1-2} &= c_1 - a_2 = c_1 - c_1 = 0
\end{aligned}$$

dimostrando la tesi. □

Theorem 2.28. *Vale la proprietà invariantiva, ovvero:*

$$\begin{aligned}
o_1(a_1, b_1, c_1) - o_2(a_2, b_2, c_2) =& [o_1(a_1, b_1, c_1) + o_3(a_3, b_3, c_3)] + \\
& - [o_2(a_2, b_2, c_2) + o_3(a_3, b_3, c_3)] \\
o_1(a_1, b_1, c_1) - o_2(a_2, b_2, c_2) =& [o_1(a_1, b_1, c_1) - o_3(a_3, b_3, c_3)] + \\
& - [o_2(a_2, b_2, c_2) - o_3(a_3, b_3, c_3)]
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Essendo a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2,a_3,b_3,c_3 dei numeri reali possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
a_{1-2} &= a_1 - a_2 \\
b_{1-2} &= b_1 - b_2 \\
c_{1-2} &= c_1 - c_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{(1+3)-(2+3)} &= (a_1 + a_3) - (a_2 + a_3) = a_1 + a_3 - a_2 - a_3 = a_1 - a_2 \\
b_{(1+3)-(2+3)} &= (b_1 + b_3) - (b_2 + b_3) = b_1 + b_3 - b_2 - b_3 = b_1 - b_2 \\
c_{(1+3)-(2+3)} &= (c_1 + c_3) - (c_2 + c_3) = c_1 + c_3 - c_2 - c_3 = c_1 - c_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{(1-3)-(2-3)} &= (a_1 - a_3) - (a_2 - a_3) = a_1 - a_3 - a_2 + a_3 = a_1 - a_2 \\
b_{(1-3)-(2-3)} &= (b_1 - b_3) - (b_2 - b_3) = b_1 - b_3 - b_2 + b_3 = b_1 - b_2 \\
c_{(1-3)-(2-3)} &= (c_1 - c_3) - (c_2 - c_3) = c_1 - c_3 - c_2 + c_3 = c_1 - c_2
\end{aligned}$$

dimostrando la tesi. □

Theorem 2.29. *Vale la proprietà di equivalenza addizione sottrazione, ovvero:*

$$\begin{aligned}
o_1(a_1, b_1, c_1) + o_2(a_2, b_2, c_2) &= o_1(a_1, b_1, c_1) - [-o_2(a_2, b_2, c_2)] \\
o_1(a_1, b_1, c_1) - o_2(a_2, b_2, c_2) &= o_1(a_1, b_1, c_1) + [-o_2(a_2, b_2, c_2)]
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Essendo a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 dei numeri reali possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} a_{1+2} &= a_1 + a_2 \\ b_{1+2} &= b_1 + b_2 \\ c_{1+2} &= c_1 + c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{1-(-2)} &= a_1 - (-a_2) = a_1 + a_2 \\ b_{1-(-2)} &= b_1 - (-b_2) = b_1 + b_2 \\ c_{1-(-2)} &= c_1 - (-c_2) = c_1 + c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{1-2} &= a_1 - a_2 \\ b_{1-2} &= b_1 - b_2 \\ c_{1-2} &= c_1 - c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{1+(-2)} &= a_1 + (-a_2) = a_1 - a_2 \\ b_{1+(-2)} &= b_1 + (-b_2) = b_1 - b_2 \\ c_{1+(-2)} &= c_1 + (-c_2) = c_1 - c_2 \end{aligned}$$

dimostrando la tesi. □

2.4 Moltiplicazione

Definition 2.30. *Nello spazio RIU viene definita moltiplicazione tra due numeri completi $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ e $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ il numero $o_{1\cdot 2}(t_{1\cdot 2}, \theta_{1\cdot 2}, \gamma_{1\cdot 2})$ rappresentato anche con il simbolo $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1) \cdot o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ che soddisfa la seguente condizione:*

$$o_{1\cdot 2}(t_{1\cdot 2}, \theta_{1\cdot 2}, \gamma_{1\cdot 2}) = o_{1\cdot 2}(t_1 \cdot t_2, \theta_1 + \theta_2, \gamma_1 + \gamma_2)$$

Questa condizione definisce l'operazione della moltiplicazione, ed equivale a richiedere:

$$\begin{aligned} t_{1\cdot 2} &= t_1 \cdot t_2 \\ \theta_{1\cdot 2} &= \theta_1 + \theta_2 \\ \gamma_{1\cdot 2} &= \gamma_1 + \gamma_2 \end{aligned}$$

Possiamo osservare in proposito la figura 29 nella pagina successiva.

Theorem 2.31. *Nel caso in cui $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ e $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ sono in rappresentazione standard, e non appartengono alla retta U, la loro moltiplicazione*

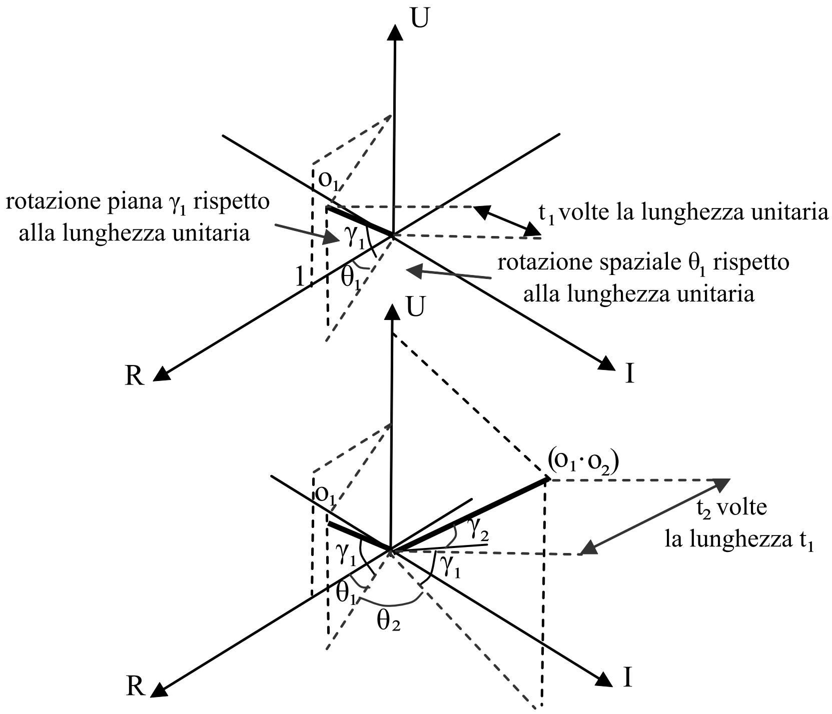

Figura 29: Rappresentazione della moltiplicazione tra due numeri completi

potrà essere espressa nel seguente modo:

$$o_{1\cdot 2}(a_{1\cdot 2}, b_{1\cdot 2}, c_{1\cdot 2})_{(t_{1\cdot 2},\theta_{1\cdot 2},\gamma_{1\cdot 2})} = a_{1\cdot 2(t_1\cdot t_2)} + i \cdot b_{1\cdot 2(\theta_1+\theta_2)} + u \cdot c_{1\cdot 2(\gamma_1+\gamma_2)}$$

dove:

$$a_{1\cdot 2} = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) \cdot \left(1 - \frac{c_1 \cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right| \cdot \left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right|}\right)$$

$$b_{1\cdot 2} = (b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2) \cdot \left(1 - \frac{c_1 \cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right| \cdot \left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right|}\right)$$

$$c_{1\cdot 2} = c_1 \cdot \left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right| + c_2 \cdot \left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right|$$

Dimostrazione. La moltiplicazione tra due numeri completi, come sappiamo, soddisfa la seguente formula:

$$o_{1\cdot 2}(t_{1\cdot 2}, \theta_{1\cdot 2}, \gamma_{1\cdot 2}) = t_1 \cdot t_2 \cdot \{[\cos(\gamma_1 + \gamma_2) \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2)] + \\ + i \cdot [\cos(\gamma_1 + \gamma_2) \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)] + u \cdot [\sin(\gamma_1 + \gamma_2)]\}$$

mentre per i moduli e le fasi coinvolte varranno le seguenti relazioni:

$$
\begin{aligned}
t &= \sqrt{a^2+b^2+c^2} \\
\gamma &= \arctan\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\
\theta &= \arctan\left(\frac{b}{a}\right)
\end{aligned}
$$

Ne consegue che le coordinate che stiamo cercando potranno essere scritte nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
a_{1\cdot 2} =& \sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot\cos\left[\arctan\left(\frac{c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\right)+\right.\\
&\left.+\arctan\left(\frac{c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\right)\right]\cdot\cos\left[\arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right)+\arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{1\cdot 2} =& \sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot\cos\left[\arctan\left(\frac{c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\right)+\right.\\
&\left.+\arctan\left(\frac{c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\right)\right]\cdot\sin\left[\arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right)+\arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{1\cdot 2} =& \sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot\sin\left[\arctan\left(\frac{c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\right)+\right.\\
&\left.+\arctan\left(\frac{c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Per proseguire con la dimostrazione è necessario servirsi delle seguenti relazioni trigonometriche notevoli:

$$
\begin{aligned}
&\cos(x+y) = \cos(x)\cdot\cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y) \\
&\sin(x+y) = \sin(x)\cdot\cos(y) + \cos(x)\cdot\sin(y) \\
&\cos\left[\arctan\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right] = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2}} \\
&\sin\left[\arctan\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right] = \sqrt{\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}} \\
&\cos\left[\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right] = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}} \\
&\sin\left[\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right] = \sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2}}
\end{aligned}
$$

Per determinare il valore della coordinata $a_{1\cdot 2}$ i passaggi da svolgere saranno i seguenti:

$$\begin{aligned}
a_{1\cdot 2} =&\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot\left(\sqrt{\frac{a_1^2+b_1^2}{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}\cdot\sqrt{\frac{a_2^2+b_2^2}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}+\right.\\
&\left.-\sqrt{\frac{c_1^2}{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}\cdot\sqrt{\frac{c_2^2}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{a_1^2}{a_1^2+b_1^2}}\cdot\sqrt{\frac{a_2^2}{a_2^2+b_2^2}}+\right.\\
&\left.-\sqrt{\frac{b_1^2}{a_1^2+b_1^2}}\cdot\sqrt{\frac{b_2^2}{a_2^2+b_2^2}}\right)=\\
=&\left(\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}-\sqrt{c_1^2}\cdot\sqrt{c_2^2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2}-\sqrt{b_1^2}\cdot\sqrt{b_2^2}}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\right)=\\
=&\left(\sqrt{a_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2}-\sqrt{b_1^2}\cdot\sqrt{b_2^2}\right)-\sqrt{c_1^2}\cdot\sqrt{c_2^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{a_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2}-\sqrt{b_1^2}\cdot\sqrt{b_2^2}}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\right)=\\
=&\left(\sqrt{a_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2}-\sqrt{b_1^2}\cdot\sqrt{b_2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{\sqrt{c_1^2}\cdot\sqrt{c_2^2}}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\right)
\end{aligned}$$

Per determinare il valore della coordinata $b_{1\cdot 2}$ i passaggi da svolgere saranno i seguenti:

$$\begin{aligned}
b_{1\cdot 2} =&\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot\left(\sqrt{\frac{a_1^2+b_1^2}{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}\cdot\sqrt{\frac{a_2^2+b_2^2}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}+\right.\\
&\left.-\sqrt{\frac{c_1^2}{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}\cdot\sqrt{\frac{c_2^2}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{b_1^2}{a_1^2+b_1^2}}\cdot\sqrt{\frac{a_2^2}{a_2^2+b_2^2}}+\right.\\
&\left.+\sqrt{\frac{a_1^2}{a_1^2+b_1^2}}\cdot\sqrt{\frac{b_2^2}{a_2^2+b_2^2}}\right)=\\
=&\left(\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}-\sqrt{c_1^2}\cdot\sqrt{c_2^2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2}+\sqrt{a_1^2}\cdot\sqrt{b_2^2}}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\right)=\\
=&\left(\sqrt{b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2}+\sqrt{a_1^2}\cdot\sqrt{b_2^2}\right)-\sqrt{c_1^2}\cdot\sqrt{c_2^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2}+\sqrt{a_1^2}\cdot\sqrt{b_2^2}}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\right)=\\
=&\left(\sqrt{b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2}+\sqrt{a_1^2}\cdot\sqrt{b_2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{\sqrt{c_1^2}\cdot\sqrt{c_2^2}}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\right)
\end{aligned}$$

Per determinare il valore della coordinata $c_{1\cdot 2}$ i passaggi da svolgere saranno

i seguenti:

$$c_{1\cdot 2} = \sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot\left(\sqrt{\frac{c_1^2}{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}\cdot\sqrt{\frac{a_2^2+b_2^2}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{a_1^2+b_1^2}{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}\cdot\sqrt{\frac{c_2^2}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right)=\sqrt{c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\sqrt{c_2^2}\cdot\sqrt{a_1^2+b_1^2}$$

Queste relazioni hanno validità generale, nel preciso senso che sono in grado di coprire anche i casi in cui i coefficienti a,b,c siano nulli (purché si rimanga nell'ambito di numeri completi non situati sulla retta U). La loro principale particolarità è però quella di avere al loro interno molte radici nella forma $\sqrt{x^2}$.

Poiché il radicando x^2 è sempre positivo sappiamo che l'operazione di radice algebrica qui considerata è lecita, e quindi sarà in grado di assumere come risultato due valori opposti: uno positivo e uno negativo. Questo significa che dal punto di vista matematico otterremo una relazione in grado di soddisfare la regola della moltiplicazione per ciascuna possibile combinazione di segni attribuibili alle radici coinvolte.

Ad esempio se per convenzione assegniamo alle radici sempre il valore positivo otteniamo il seguente risultato:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$
$$\sqrt{b^2} = |b|$$
$$\sqrt{c^2} = |c|$$

a cui corrisponderanno delle relazioni in grado di soddisfare la regola della moltiplicazione in funzione del modulo delle coordinate coinvolte. Questo significa che numeri completi distinti saranno in grado di produrre uno stesso risultato della moltiplicazione se le loro coordinate avranno lo stesso modulo.

Volendo individuare delle relazioni che soddisfano la regola della moltiplicazione in funzione delle effettive coordinate possedute dai numeri completi coinvolti, dovremo assegnare alle radici lo stesso segno dei coefficienti situati al loro interno:

$$\sqrt{a^2} = a$$
$$\sqrt{b^2} = b$$
$$\sqrt{c^2} = c$$

Le relazioni ottenute saranno le seguenti:

$$\begin{aligned} a_{1\cdot 2} &= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) \cdot \left(1 - \frac{c_1 \cdot c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\right) \\ b_{1\cdot 2} &= (b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2) \cdot \left(1 - \frac{c_1 \cdot c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\right) \\ c_{1\cdot 2} &= c_1 \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + c_2 \cdot \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dal momento che i numeri completi coinvolti sono in rappresentazione standard, secondo quanto stabilito dal teorema 2.11 dovremo far valere le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \sqrt{a_1^2 + b_1^2} &= \left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\right| \\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2} &= \left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,\right| \end{aligned}$$

che unite a quelle indicate dalle formule (2.1), dimostrano la tesi. □

A titolo esemplificativo del teorema appena dimostrato, supponiamo di dover moltiplicare i numeri completi in rappresentazione standard aventi coordinate: $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 1$.

Il loro modulo potrà essere calcolato nel seguente modo:

$$t_1 = t_2 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

mentre per le loro fasi dovremo fare riferimento alle formule legate alla rappresentazione standard:

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \gamma_2 &= \arctan\left(\frac{c_1}{\left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\right|}\right) = \arctan\left(\frac{c_2}{\left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,\right|}\right) = \\ &= \arctan\left(\frac{1}{|\sqrt{2}|}\right) \simeq 35,26^\circ \\ \theta_1 = \theta_2 &= \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right) = \arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ \end{aligned}$$

Applicando la regola della moltiplicazione otteniamo come risultato il numero completo avente i seguenti valori del modulo e delle fasi:

$$\begin{aligned} t_{1\cdot 2} &= t_1 \cdot t_2 = 3 \\ \gamma_{1\cdot 2} &= \gamma_1 + \gamma_2 \simeq 70,52^\circ \\ \theta_{1\cdot 2} &= \theta_1 + \theta_2 = 90^\circ \end{aligned}$$

e le seguenti coordinate:

$$a_{1\cdot 2} = t_{1\cdot 2} \cdot \cos(\gamma_{1\cdot 2}) \cdot \cos(\theta_{1\cdot 2}) = 3 \cdot \cos(\simeq 70,52°) \cdot \cos(90°) = 0$$
$$b_{1\cdot 2} = t_{1\cdot 2} \cdot \cos(\gamma_{1\cdot 2}) \cdot \sin(\theta_{1\cdot 2}) = 3 \cdot \cos(\simeq 70,52°) \cdot \sin(90°) = 1$$
$$c_{1\cdot 2} = t_{1\cdot 2} \cdot \sin(\gamma_{1\cdot 2}) = 3 \cdot \sin(\simeq 70,52°) = 2 \cdot \sqrt{2}$$

A questo punto possiamo verificare come le formule del precedente teorema facciano effettivamente giungere allo stesso risultato:

$$\begin{aligned}
a_{1\cdot 2} =&(a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) \cdot \left(1 - \frac{c_1 \cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right| \cdot \left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|}\right) = \\
=&(1-1) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0 \\
b_{1\cdot 2} =&(b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2) \cdot \left(1 - \frac{c_1 \cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right| \cdot \left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|}\right) = \\
=&(1+1) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 \\
c_{1\cdot 2} =&c_1 \cdot \left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right| + c_2 \cdot \left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right| = 1 \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Theorem 2.32. *Nel caso in cui $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ e $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ sono in rappresentazione complementare, e non appartengono alla retta U, la loro moltiplicazione potrà essere espressa nel seguente modo:*

$$o_{1\cdot 2}(a_{1\cdot 2}, b_{1\cdot 2}, c_{1\cdot 2})_{(t_{1\cdot 2}, \theta_{1\cdot 2}, \gamma_{1\cdot 2})} = a_{1\cdot 2(t_1 \cdot t_2)} + i \cdot b_{1\cdot 2(\theta_1+\theta_2)} + u \cdot c_{1\cdot 2(\gamma_1+\gamma_2)}$$

dove:

$$\begin{aligned}
a_{1\cdot 2} &= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) \cdot \left(1 - \frac{c_1 \cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right| \cdot \left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|}\right) \\
b_{1\cdot 2} &= (b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2) \cdot \left(1 - \frac{c_1 \cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right| \cdot \left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|}\right) \\
c_{1\cdot 2} &= -c_1 \cdot \left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right| - c_2 \cdot \left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right|
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Dal momento che i numeri completi coinvolti sono in rappresentazione complementare, secondo quanto stabilito dal teorema 2.15 dovremo far valere le seguenti relazioni:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2} = -\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right|$$
$$\sqrt{a_2^2+b_2^2} = -\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|$$

che unite a quelle indicate dalle formule (2.1), dimostrano la tesi. □

A titolo esemplificativo del teorema appena dimostrato, supponiamo di dover moltiplicare i numeri completi in rappresentazione complementare aventi coordinate: $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 1$.

Il loro modulo potrà essere calcolato nel seguente modo:

$$t_1 = t_2 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

mentre per le loro fasi dovremo fare riferimento alle formule legate alla rappresentazione complementare:

$$\begin{aligned}\gamma_1 = \gamma_2 &= \arctan\left(\frac{c_1}{-\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right|}\right) = \arctan\left(\frac{c_2}{-\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|}\right) = \\ &= \arctan\left(\frac{1}{-|\sqrt{2}|}\right) \simeq 144,73^\circ \\ \theta_1 = \theta_2 &= \arctan\left(\frac{-b_1}{-a_1}\right) = \arctan\left(\frac{-b_2}{-a_2}\right) = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = 225^\circ\end{aligned}$$

Applicando la regola della moltiplicazione otteniamo come risultato il numero completo avente i seguenti valori del modulo e delle fasi:

$$\begin{aligned}t_{1\cdot 2} &= t_1 \cdot t_2 = 3 \\ \gamma_{1\cdot 2} &= \gamma_1 + \gamma_2 \simeq 289,46^\circ \\ \theta_{1\cdot 2} &= \theta_1 + \theta_2 = 450^\circ = 90^\circ\end{aligned}$$

e le seguenti coordinate:

$$\begin{aligned}a_{1\cdot 2} &= t_{1\cdot 2} \cdot \cos(\gamma_{1\cdot 2}) \cdot \cos(\theta_{1\cdot 2}) = 3 \cdot \cos(\simeq 289,46^\circ) \cdot \cos(90^\circ) = 0 \\ b_{1\cdot 2} &= t_{1\cdot 2} \cdot \cos(\gamma_{1\cdot 2}) \cdot \sin(\theta_{1\cdot 2}) = 3 \cdot \cos(\simeq 289,46^\circ) \cdot \sin(90^\circ) = 1 \\ c_{1\cdot 2} &= t_{1\cdot 2} \cdot \sin(\gamma_{1\cdot 2}) = 3 \cdot \sin(\simeq 289,46^\circ) = -2 \cdot \sqrt{2}\end{aligned}$$

A questo punto possiamo verificare come le formule del precedente teorema facciano effettivamente giungere allo stesso risultato:

$$\begin{aligned}a_{1\cdot 2} &= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) \cdot \left(1 - \frac{c_1 \cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right| \cdot \left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|}\right) = \\ &= (1-1) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0 \\ b_{1\cdot 2} &= (b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2) \cdot \left(1 - \frac{c_1 \cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right| \cdot \left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|}\right) = \\ &= (1+1) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 \\ c_{1\cdot 2} &= -c_1 \cdot \left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right| - c_2 \cdot \left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right| = -1 \cdot \sqrt{2} - 1 \cdot \sqrt{2} = -2 \cdot \sqrt{2}\end{aligned}$$

Theorem 2.33. *Nel caso in cui $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ è in rappresentazione standard mentre $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ è in rappresentazione complementare, ed entrambe non appartengono alla retta U, la loro moltiplicazione potrà essere espressa nel seguente modo:*

$$o_{1\cdot 2}(a_{1\cdot 2}, b_{1\cdot 2}, c_{1\cdot 2})_{(t_{1\cdot 2}, \theta_{1\cdot 2}, \gamma_{1\cdot 2})} = a_{1\cdot 2(t_1\cdot t_2)} + i \cdot b_{1\cdot 2(\theta_1+\theta_2)} + u \cdot c_{1\cdot 2(\gamma_1+\gamma_2)}$$

dove:

$$a_{1\cdot 2} = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) \cdot \left(1 + \frac{c_1 \cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right| \cdot \left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|}\right)$$

$$b_{1\cdot 2} = (b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2) \cdot \left(1 + \frac{c_1 \cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right| \cdot \left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|}\right)$$

$$c_{1\cdot 2} = c_2 \cdot \left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right| - c_1 \cdot \left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|$$

Dimostrazione. Dal momento che il primo fattore è in rappresentazione standard, secondo quanto stabilito dal teorema 2.11 dovremo far valere le seguenti relazioni:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2} = \left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right|$$

mentre essendo il secondo fattore in rappresentazione complementare in riferimento al teorema 2.15 varranno le seguenti relazioni:

$$\sqrt{a_2^2+b_2^2} = -\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|$$

che unite a quelle indicate dalle formule (2.1), dimostrano la tesi. □

A titolo esemplificativo del teorema appena dimostrato, supponiamo di dover moltiplicare il numero completo in rappresentazione standard avente coordinate: $a_1 = b_1 = c_1 = 1$ e quello in rappresentazione complementare avente le medesime coordinate: $a_2 = b_2 = c_2 = 1$.

Il loro modulo potrà essere calcolato nel seguente modo:

$$t_1 = t_2 = \sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2} = \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2} = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$$

mentre per le loro fasi dovremo fare riferimento sia alle formule legate alla rappresentazione standard che a quella complementare:

$$\gamma_1 = \arctan\left(\frac{c_1}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,\right|}\right) = \arctan\left(\frac{1}{|\sqrt{2}|}\right) \simeq 35,26°$$
$$\gamma_2 = \arctan\left(\frac{c_2}{-\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\,\right|}\right) = \arctan\left(\frac{1}{-|\sqrt{2}|}\right) \simeq 144,73°$$
$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = 45°$$
$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{-b_2}{-a_2}\right) = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = 225°$$

Applicando la regola della moltiplicazione otteniamo come risultato il numero completo avente i seguenti valori del modulo e delle fasi:

$$t_{1\cdot 2} = t_1 \cdot t_2 = 3$$
$$\gamma_{1\cdot 2} = \gamma_1 + \gamma_2 = 180°$$
$$\theta_{1\cdot 2} = \theta_1 + \theta_2 = 270°$$

e le seguenti coordinate:

$$a_{1\cdot 2} = t_{1\cdot 2} \cdot \cos(\gamma_{1\cdot 2}) \cdot \cos(\theta_{1\cdot 2}) = 3 \cdot \cos(180°) \cdot \cos(270°) = 0$$
$$b_{1\cdot 2} = t_{1\cdot 2} \cdot \cos(\gamma_{1\cdot 2}) \cdot \sin(\theta_{1\cdot 2}) = 3 \cdot \cos(180°) \cdot \sin(270°) = 3$$
$$c_{1\cdot 2} = t_{1\cdot 2} \cdot \sin(\gamma_{1\cdot 2}) = 3 \cdot \sin(180°) = 0$$

A questo punto possiamo verificare come le formule del precedente teorema facciano effettivamente giungere allo stesso risultato:

$$a_{1\cdot 2} = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) \cdot \left(1 + \frac{c_1 \cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,\right| \cdot \left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\,\right|}\right) =$$
$$= (1-1) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 0$$
$$b_{1\cdot 2} = (b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2) \cdot \left(1 + \frac{c_1 \cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,\right| \cdot \left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\,\right|}\right) =$$
$$= (1+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3$$
$$c_{1\cdot 2} = c_2 \cdot \left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right| - c_1 \cdot \left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right| = 1 \cdot \sqrt{2} - 1 \cdot \sqrt{2} = 0$$

Theorem 2.34. *Nel caso in cui $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ è in rappresentazione complementare mentre $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ è in rappresentazione standard, ed entrambe* *non appartengono alla retta U, la loro moltiplicazione potrà essere espressa nel seguente modo:*

$$o_{1\cdot 2}(a_{1\cdot 2}, b_{1\cdot 2}, c_{1\cdot 2})_{(t_{1\cdot 2},\theta_{1\cdot 2},\gamma_{1\cdot 2})} = a_{1\cdot 2(t_1\cdot t_2)} + i \cdot b_{1\cdot 2(\theta_1+\theta_2)} + u \cdot c_{1\cdot 2(\gamma_1+\gamma_2)}$$

dove:

$$a_{1\cdot 2} = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) \cdot \left(1 + \frac{c_1 \cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right| \cdot \left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right|}\right)$$

$$b_{1\cdot 2} = (b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2) \cdot \left(1 + \frac{c_1 \cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right| \cdot \left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right|}\right)$$

$$c_{1\cdot 2} = c_1 \cdot \left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right| - c_2 \cdot \left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right|$$

Dimostrazione. Dal momento che il primo fattore è in rappresentazione complementare, secondo quanto stabilito dal teorema 2.15 dovremo far valere le seguenti relazioni:

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = -\left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right|$$

mentre essendo il secondo fattore in rappresentazione standard in riferimento al teorema 2.11 varranno le seguenti relazioni:

$$\sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right|$$

che unite a quelle indicate dalle formule (2.1), dimostrano la tesi. □

A titolo esemplificativo del teorema appena dimostrato, supponiamo di dover moltiplicare il numero completo in rappresentazione complementare avente coordinate: $a_1 = b_1 = c_1 = 1$ e quello in rappresentazione standard avente le medesime coordinate: $a_2 = b_2 = c_2 = 1$.

Il loro modulo potrà essere calcolato nel seguente modo:

$$t_1 = t_2 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

mentre per le loro fasi dovremo fare riferimento sia alle formule legate alla rappresentazione standard che a quella complementare:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \arctan\left(\frac{c_1}{-\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right|}\right) = \arctan\left(\frac{1}{-|\sqrt{2}|}\right) \simeq 144,73^\circ \\
\gamma_2 &= \arctan\left(\frac{c_2}{\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|}\right) = \arctan\left(\frac{1}{|\sqrt{2}|}\right) \simeq 35,26^\circ \\
\theta_1 &= \arctan\left(\frac{-b_1}{-a_1}\right) = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = 225^\circ \\
\theta_2 &= \arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ
\end{aligned}$$

Applicando la regola della moltiplicazione otteniamo come risultato il numero completo avente i seguenti valori del modulo e delle fasi:

$$\begin{aligned}
t_{1\cdot 2} &= t_1 \cdot t_2 = 3 \\
\gamma_{1\cdot 2} &= \gamma_1 + \gamma_2 = 180^\circ \\
\theta_{1\cdot 2} &= \theta_1 + \theta_2 = 270^\circ
\end{aligned}$$

e le seguenti coordinate:

$$\begin{aligned}
a_{1\cdot 2} &= t_{1\cdot 2} \cdot \cos(\gamma_{1\cdot 2}) \cdot \cos(\theta_{1\cdot 2}) = 3 \cdot \cos(180^\circ) \cdot \cos(270^\circ) = 0 \\
b_{1\cdot 2} &= t_{1\cdot 2} \cdot \cos(\gamma_{1\cdot 2}) \cdot \sin(\theta_{1\cdot 2}) = 3 \cdot \cos(180^\circ) \cdot \sin(270^\circ) = 3 \\
c_{1\cdot 2} &= t_{1\cdot 2} \cdot \sin(\gamma_{1\cdot 2}) = 3 \cdot \sin(180^\circ) = 0
\end{aligned}$$

A questo punto possiamo verificare come le formule del precedente teorema facciano effettivamente giungere allo stesso risultato:

$$\begin{aligned}
a_{1\cdot 2} &= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) \cdot \left(1 + \frac{c_1 \cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right| \cdot \left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|}\right) = \\
&= (1-1) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 0 \\
b_{1\cdot 2} &= (b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2) \cdot \left(1 + \frac{c_1 \cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right| \cdot \left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|}\right) = \\
&= (1+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3 \\
c_{1\cdot 2} &= c_1 \cdot \left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right| - c_2 \cdot \left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right| = 1 \cdot \sqrt{2} - 1 \cdot \sqrt{2} = 0
\end{aligned}$$

Theorem 2.35. *Nel caso in cui solo $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ appartiene alla retta U mentre $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ è in rappresentazione standard, la loro moltiplicazione*

potrà essere espressa nel seguente modo:

$$o_{1\cdot 2}(a_{1\cdot 2}, b_{1\cdot 2}, c_{1\cdot 2})_{(t_{1\cdot 2},\theta_{1\cdot 2},\gamma_{1\cdot 2})} = a_{1\cdot 2(t_1\cdot t_2)} + i \cdot b_{1\cdot 2(\theta_1+\theta_2)} + u \cdot c_{1\cdot 2(\gamma_1+\gamma_2)}$$

dove:

$$a_{1\cdot 2} = -(c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_2 \cdot \cos(\theta_1) - b_2 \cdot \sin(\theta_1)}{|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,|}$$
$$b_{1\cdot 2} = -(c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_2 \cdot \sin(\theta_1) + b_2 \cdot \cos(\theta_1)}{|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,|}$$
$$c_{1\cdot 2} = c_1 \cdot \left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,\right|$$

Dimostrazione. La moltiplicazione tra due numeri completi, come sappiamo, soddisfa la seguente formula:

$$\begin{aligned} o_{1\cdot 2}(t_{1\cdot 2}, \theta_{1\cdot 2}, \gamma_{1\cdot 2}) = t_1 \cdot t_2 \cdot \{[\cos(\gamma_1+\gamma_2) \cdot \cos(\theta_1+\theta_2)]+ \\ + i \cdot [\cos(\gamma_1+\gamma_2) \cdot \sin(\theta_1+\theta_2)] + u \cdot [\sin(\gamma_1+\gamma_2)]\} \end{aligned}$$

Dal momento che $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ appartiene alla retta U avrà i seguenti valori di modulo e fasi:

$$t_1 = \sqrt{c_1^2}$$
$$\gamma_1 = \operatorname{sign}(c_1) \cdot 90°$$
$$\theta_1 \text{ conosciuto } \neq \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right)$$

diversamente da $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ che avrà invece i seguenti valori:

$$t_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}$$
$$\gamma_2 = \arctan\left(\frac{c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\right)$$
$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right)$$

Ne consegue che le coordinate che stiamo cercando potranno essere scritte

nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
a_{1\cdot 2} =& \sqrt{c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot \cos\left[\operatorname{sign}(c_1) \cdot 90^\circ + \arctan\left(\frac{c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\right)\right] \cdot \\
& \cdot \cos\left[\theta_1 + \arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right)\right] \\
b_{1\cdot 2} =& \sqrt{c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot \cos\left[\operatorname{sign}(c_1) \cdot 90^\circ + \arctan\left(\frac{c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\right)\right] \cdot \\
& \cdot \sin\left[\theta_1 + \arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right)\right] \\
c_{1\cdot 2} =& \sqrt{c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot \sin\left[\operatorname{sign}(c_1) \cdot 90^\circ + \arctan\left(\frac{c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Per proseguire con la dimostrazione è necessario servirsi delle seguenti relazioni trigonometriche notevoli:

$$
\begin{aligned}
&\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y) \\
&\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y) \\
&\cos\left[\arctan\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\right] = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + c^2}} \\
&\sin\left[\arctan\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\right] = \sqrt{\frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}} \\
&\cos\left[\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right] = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2}} \\
&\sin\left[\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right] = \sqrt{\frac{b^2}{a^2 + b^2}} \\
&\cos\left[\operatorname{sign}(x) \cdot 90^\circ + y\right] = -\operatorname{sign}(x) \cdot sin(y) \\
&\sin\left[\operatorname{sign}(x) \cdot 90^\circ + y\right] = \operatorname{sign}(x) \cdot cos(y)
\end{aligned}
$$

Per determinare il valore della coordinata $a_{1\cdot 2}$ i passaggi da svolgere saranno i seguenti:

$$
\begin{aligned}
a_{1\cdot 2} &= -\operatorname{sign}(c_1) \cdot \sqrt{c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot \sqrt{\frac{c_2^2}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \cdot \\
&\quad \cdot \left[\sqrt{\frac{a_2^2}{a_2^2 + b_2^2}} \cdot \cos(\theta_1) - \sqrt{\frac{b_2^2}{a_2^2 + b_2^2}} \cdot \sin(\theta_1)\right] = \\
&= -\operatorname{sign}(c_1) \cdot \sqrt{c_1^2} \cdot \sqrt{c_2^2} \cdot \frac{\sqrt{a_2^2} \cdot \cos(\theta_1) - \sqrt{b_2^2} \cdot \sin(\theta_1)}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}
\end{aligned}
$$

Per determinare il valore della coordinata $b_{1\cdot 2}$ i passaggi da svolgere saranno i seguenti:

$$b_{1\cdot 2} = -\operatorname{sign}(c_1) \cdot \sqrt{c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot \sqrt{\frac{c_2^2}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \cdot$$
$$\cdot \left[\sqrt{\frac{a_2^2}{a_2^2 + b_2^2}} \cdot \sin(\theta_1) + \sqrt{\frac{b_2^2}{a_2^2 + b_2^2}} \cdot \cos(\theta_1) \right] =$$
$$= -\operatorname{sign}(c_1) \cdot \sqrt{c_1^2} \cdot \sqrt{c_2^2} \cdot \frac{\sqrt{a_2^2} \cdot \sin(\theta_1) + \sqrt{b_2^2} \cdot \cos(\theta_1)}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Per determinare il valore della coordinata $c_{1\cdot 2}$ i passaggi da svolgere saranno i seguenti:

$$c_{1\cdot 2} = \operatorname{sign}(c_1) \cdot \sqrt{c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot \sqrt{\frac{a_2^2 + b_2^2}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} = \operatorname{sign}(c_1) \cdot \sqrt{c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

Queste relazioni hanno validità generale, nel preciso senso che sono in grado di coprire anche i casi in cui i coefficienti a_2,b_2,c_2 siano nulli (purché $o_2(a_2, b_2, c_2)$ rimanga nell'ambito dei numeri completi non situati sulla retta U).

Volendo individuare delle relazioni che soddisfano la regola della moltiplicazione in funzione delle effettive coordinate nei numeri completi coinvolti dovremo adottare per tutti i coefficienti a,b,c la convenzione $\sqrt{x^2} = x$, tranne che per c_1 per il quale dovrà valere la convenzione $\sqrt{x^2} = |x|$. La ragione è presto detta e dipende dal fatto che se applichiamo anche per c_1 la solita convenzione, avremo:

$$\operatorname{sign}(c_1) \cdot \sqrt{c_1^2} = |c_1|$$

e quindi un risultato della moltiplicazione che dipenderà dal modulo della coordinata c_1. Imponendo invece $\sqrt{x^2} = |x|$ avremo:

$$\operatorname{sign}(c_1) \cdot \sqrt{c_1^2} = c_1$$

e quindi un risultato della moltiplicazione che dipenderà dall'effettivo valore di tale coordinata.

Le relazioni ottenute saranno le seguenti:

$$\begin{aligned} a_{1\cdot 2} &= -(c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_2 \cdot \cos(\theta_1) - b_2 \cdot \sin(\theta_1)}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \\ b_{1\cdot 2} &= -(c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_2 \cdot \sin(\theta_1) + b_2 \cdot \cos(\theta_1)}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \\ c_{1\cdot 2} &= c_1 \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dal momento che il numero $o_2(a_2, b_2, c_2)$ è in rappresentazione standard, secondo quanto stabilito dal teorema 2.11 dovremo far valere la seguente relazione:

$$\sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,\right|$$

che unita a quelle indicate dalle formule (2.2), dimostrano la tesi. □

A titolo esemplificativo del teorema appena dimostrato, supponiamo di dover moltiplicare il numero uscente di coordinata $c_1 = 1$ e fase $\theta_1 = 30°$ con un numero completo in rappresentazione standard avente coordinate: $a_2 = 1$, $b_2 = -1$, $c_2 = 1$.

Il loro modulo potrà essere calcolato nel seguente modo:

$$t_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} = \sqrt{c_1^2} = \sqrt{1} = 1$$
$$t_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

mentre per le loro fasi nel caso del numero uscente abbiamo:

$$\gamma_1 = \text{sign}\,(c_1) \cdot 90° = 90°$$
$$\theta_1 = 30°$$

mentre nel caso del numero completo dovremo fare riferimento alle formule legate alla rappresentazione standard:

$$\gamma_2 = \arctan\left(\frac{c_2}{\left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,\right|}\right) = \arctan\left(\frac{1}{|\sqrt{2}|}\right) \simeq 35,26°$$
$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right) = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -45°$$

Applicando la regola della moltiplicazione otteniamo come risultato il numero completo avente i seguenti valori del modulo e delle fasi:

$$t_{1\cdot 2} = t_1 \cdot t_2 = \sqrt{3}$$
$$\gamma_{1\cdot 2} = \gamma_1 + \gamma_2 \simeq 125,26°$$
$$\theta_{1\cdot 2} = \theta_1 + \theta_2 = -15°$$

e le seguenti coordinate:

$$a_{1\cdot 2} = t_{1\cdot 2} \cdot \cos(\gamma_{1\cdot 2}) \cdot \cos(\theta_{1\cdot 2}) = \sqrt{3} \cdot \cos(\simeq 125,26°) \cdot \cos(-15°) \simeq -0,97$$
$$b_{1\cdot 2} = t_{1\cdot 2} \cdot \cos(\gamma_{1\cdot 2}) \cdot \sin(\theta_{1\cdot 2}) = \sqrt{3} \cdot \cos(\simeq 125,26°) \cdot \sin(-15°) \simeq 0,26$$
$$c_{1\cdot 2} = t_{1\cdot 2} \cdot \sin(\gamma_{1\cdot 2}) = \sqrt{3} \cdot \sin(\simeq 125,26°) = \sqrt{2}$$

A questo punto possiamo verificare come le formule del precedente teorema facciano effettivamente giungere allo stesso risultato:

$$a_{1\cdot 2} = -(c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_2 \cdot \cos(\theta_1) - b_2 \cdot \sin(\theta_1)}{\left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right|} = -\frac{\cos(30°) + \sin(30°)}{\left|\sqrt{2}\right|} \simeq -0,97$$
$$b_{1\cdot 2} = -(c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_2 \cdot \sin(\theta_1) + b_2 \cdot \cos(\theta_1)}{\left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right|} = -\frac{\sin(30°) - \cos(30°)}{\left|\sqrt{2}\right|} \simeq 0,26$$
$$c_{1\cdot 2} = c_1 \cdot \left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right| = \sqrt{2}$$

Theorem 2.36. *Nel caso in cui solo $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ appartiene alla retta U mentre $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ è in rappresentazione complementare, la loro moltiplicazione potrà essere espressa nel seguente modo:*

$$o_{1\cdot 2}(a_{1\cdot 2}, b_{1\cdot 2}, c_{1\cdot 2})_{(t_{1\cdot 2}, \theta_{1\cdot 2}, \gamma_{1\cdot 2})} = a_{1\cdot 2(t_1 \cdot t_2)} + i \cdot b_{1\cdot 2(\theta_1+\theta_2)} + u \cdot c_{1\cdot 2(\gamma_1+\gamma_2)}$$

dove:

$$a_{1\cdot 2} = (c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_2 \cdot \cos(\theta_1) - b_2 \cdot \sin(\theta_1)}{\left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right|}$$
$$b_{1\cdot 2} = (c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_2 \cdot \sin(\theta_1) + b_2 \cdot \cos(\theta_1)}{\left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right|}$$
$$c_{1\cdot 2} = -c_1 \cdot \left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right|$$

Dimostrazione. Dal momento che il numero $o_2(a_2, b_2, c_2)$ è in rappresentazione complementare, secondo quanto stabilito dal teorema 2.15 dovremo far valere la seguente relazione:

$$\sqrt{a_2^2 + b_2^2} = -\left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right|$$

che unita a quelle indicate dalle formule (2.2), dimostrano la tesi. □

A titolo esemplificativo del teorema appena dimostrato, supponiamo di dover moltiplicare il numero uscente di coordinata $c_1 = 1$ e fase $\theta_1 = 30°$ con un numero completo in rappresentazione complementare avente coordinate: $a_2 = 1$, $b_2 = -1$, $c_2 = 1$.

Il loro modulo potrà essere calcolato nel seguente modo:

$$t_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} = \sqrt{c_1^2} = \sqrt{1} = 1$$
$$t_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

mentre per le loro fasi nel caso del numero uscente abbiamo:

$$\gamma_1 = \text{sign}\,(c_1) \cdot 90° = 90°$$
$$\theta_1 = 30°$$

mentre nel caso del numero completo dovremo fare riferimento alle formule legate alla rappresentazione complementare:

$$\gamma_2 = \arctan\left(\frac{c_2}{-\left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,\right|}\right) = \arctan\left(\frac{1}{-|\sqrt{2}|}\right) \simeq 144,74°$$
$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{-b_2}{-a_2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = 135°$$

Applicando la regola della moltiplicazione otteniamo come risultato il numero completo avente i seguenti valori del modulo e delle fasi:

$$t_{1\cdot 2} = t_1 \cdot t_2 = \sqrt{3}$$
$$\gamma_{1\cdot 2} = \gamma_1 + \gamma_2 \simeq 234,74°$$
$$\theta_{1\cdot 2} = \theta_1 + \theta_2 = 165°$$

e le seguenti coordinate:

$$a_{1\cdot 2} = t_{1\cdot 2} \cdot \cos(\gamma_{1\cdot 2}) \cdot \cos(\theta_{1\cdot 2}) = \sqrt{3} \cdot \cos(\simeq 234,74°) \cdot \cos(165°) \simeq 0,97$$
$$b_{1\cdot 2} = t_{1\cdot 2} \cdot \cos(\gamma_{1\cdot 2}) \cdot \sin(\theta_{1\cdot 2}) = \sqrt{3} \cdot \cos(\simeq 234,74°) \cdot \sin(165°) \simeq -0,26$$
$$c_{1\cdot 2} = t_{1\cdot 2} \cdot \sin(\gamma_{1\cdot 2}) = \sqrt{3} \cdot \sin(\simeq 234,74°) = -\sqrt{2}$$

A questo punto possiamo verificare come le formule del precedente teorema facciano effettivamente giungere allo stesso risultato:

$$a_{1\cdot 2} = (c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_2 \cdot \cos(\theta_1) - b_2 \cdot \sin(\theta_1)}{\left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,\right|} = \frac{\cos(30°) + \sin(30°)}{\left|\sqrt{2}\,\right|} \simeq 0,97$$
$$b_{1\cdot 2} = (c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_2 \cdot \sin(\theta_1) + b_2 \cdot \cos(\theta_1)}{\left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,\right|} = \frac{\sin(30°) - \cos(30°)}{\left|\sqrt{2}\,\right|} \simeq -0,26$$
$$c_{1\cdot 2} = -c_1 \cdot \left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,\right| = -\sqrt{2}$$

Theorem 2.37. *Nel caso in cui solo $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ appartiene alla retta U mentre $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ è in rappresentazione standard, la loro moltiplicazione*

potrà essere espressa nel seguente modo:

$$o_{1\cdot2}(a_{1\cdot2}, b_{1\cdot2}, c_{1\cdot2})_{(t_{1\cdot2},\theta_{1\cdot2},\gamma_{1\cdot2})} = a_{1\cdot2(t_1\cdot t_2)} + i \cdot b_{1\cdot2(\theta_1+\theta_2)} + u \cdot c_{1\cdot2(\gamma_1+\gamma_2)}$$

dove:

$$a_{1\cdot2} = -(c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_1 \cdot \cos(\theta_2) - b_1 \cdot \sin(\theta_2)}{|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,|}$$
$$b_{1\cdot2} = -(c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_1 \cdot \sin(\theta_2) + b_1 \cdot \cos(\theta_2)}{|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,|}$$
$$c_{1\cdot2} = c_2 \cdot \left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\right|$$

Dimostrazione. La moltiplicazione tra due numeri completi, come sappiamo, soddisfa la seguente formula:

$$o_{1\cdot2}(t_{1\cdot2}, \theta_{1\cdot2}, \gamma_{1\cdot2}) = t_1 \cdot t_2 \cdot \{[\cos(\gamma_1 + \gamma_2) \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2)] + \\ + i \cdot [\cos(\gamma_1 + \gamma_2) \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)] + u \cdot [\sin(\gamma_1 + \gamma_2)]\}$$

Dal momento che $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ appartiene alla retta U avrà i seguenti valori di modulo e fasi:

$$t_2 = \sqrt{c_2^2}$$
$$\gamma_2 = \mathrm{sign}(c_2) \cdot 90°$$
$$\theta_2 \text{ conosciuto } \neq \arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right)$$

diversamente da $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ che avrà invece i seguenti valori:

$$t_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$$
$$\gamma_1 = \arctan\left(\frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}\right)$$
$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right)$$

Ne consegue che le coordinate che stiamo cercando potranno essere scritte

nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
a_{1\cdot 2} =& \sqrt{c_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{c_2^2} \cdot \cos\left[\arctan\left(\frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}\right) + \operatorname{sign}(c_2) \cdot 90^\circ\right] \cdot \\
& \cdot \cos\left[\arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right) + \theta_2\right] \\
b_{1\cdot 2} =& \sqrt{c_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{c_2^2} \cdot \cos\left[\arctan\left(\frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}\right) + \operatorname{sign}(c_2) \cdot 90^\circ\right] \cdot \\
& \cdot \sin\left[\arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right) + \theta_2\right] \\
c_{1\cdot 2} =& \sqrt{c_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{c_2^2} \cdot \sin\left[\arctan\left(\frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}\right) + \operatorname{sign}(c_2) \cdot 90^\circ\right]
\end{aligned}
$$

Per proseguire con la dimostrazione è necessario servirsi delle seguenti relazioni trigonometriche notevoli:

$$
\begin{aligned}
&\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y) \\
&\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y) \\
&\cos\left[\arctan\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right] = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2}} \\
&\sin\left[\arctan\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right] = \sqrt{\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}} \\
&\cos\left[\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right] = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}} \\
&\sin\left[\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right] = \sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2}} \\
&\cos\left[x + \operatorname{sign}(y) \cdot 90^\circ\right] = -\operatorname{sign}(y) \cdot sin(x) \\
&\sin\left[x + \operatorname{sign}(y) \cdot 90^\circ\right] = \operatorname{sign}(y) \cdot cos(x)
\end{aligned}
$$

Per determinare il valore della coordinata $a_{1\cdot 2}$ i passaggi da svolgere saranno i seguenti:

$$
\begin{aligned}
a_{1\cdot 2} =& -\operatorname{sign}(c_2) \cdot \sqrt{c_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{c_2^2} \cdot \sqrt{\frac{c_1^2}{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} \cdot \\
& \cdot \left[\sqrt{\frac{a_1^2}{a_1^2 + b_1^2}} \cdot \cos(\theta_2) - \sqrt{\frac{b_1^2}{a_1^2 + b_1^2}} \cdot \sin(\theta_2)\right] = \\
=& -\operatorname{sign}(c_2) \cdot \sqrt{c_1^2} \cdot \sqrt{c_2^2} \cdot \frac{\sqrt{a_1^2} \cdot \cos(\theta_2) - \sqrt{b_1^2} \cdot \sin(\theta_2)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}
\end{aligned}
$$

Per determinare il valore della coordinata $b_{1\cdot 2}$ i passaggi da svolgere saranno i seguenti:

$$\begin{aligned} b_{1\cdot 2} = & - \operatorname{sign}(c_2) \cdot \sqrt{c_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{c_2^2} \cdot \sqrt{\frac{c_1^2}{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} \cdot \\ & \cdot \left[\sqrt{\frac{b_1^2}{a_1^2 + b_1^2}} \cdot \cos(\theta_2) + \sqrt{\frac{a_1^2}{a_1^2 + b_1^2}} \cdot \sin(\theta_2) \right] = \\ = & - \operatorname{sign}(c_2) \cdot \sqrt{c_1^2} \cdot \sqrt{c_2^2} \cdot \frac{\sqrt{b_1^2} \cdot \cos(\theta_2) + \sqrt{a_1^2} \cdot \sin(\theta_2)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \end{aligned}$$

Per determinare il valore della coordinata $c_{1\cdot 2}$ i passaggi da svolgere saranno i seguenti:

$$c_{1\cdot 2} = \operatorname{sign}(c_2) \cdot \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{c_2^2} \cdot \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \operatorname{sign}(c_2) \cdot \sqrt{c_2^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

Queste relazioni hanno validità generale, nel preciso senso che sono in grado di coprire anche i casi in cui i coefficienti a_1,b_1,c_1 siano nulli (purché $o_1(a_1, b_1, c_1)$ rimanga nell'ambito dei numeri completi non situati sulla retta U).

Volendo individuare delle relazioni che soddisfano la regola della moltiplicazione in funzione delle effettive coordinate nei numeri completi coinvolti dovremo adottare per tutti i coefficienti a,b,c la convenzione $\sqrt{x^2} = x$, tranne che per c_2 per il quale dovrà valere la convenzione $\sqrt{x^2} = |x|$. La ragione è presto detta e dipende dal fatto che se applichiamo anche per c_2 la solita convenzione, avremo:

$$\operatorname{sign}(c_2) \cdot \sqrt{c_2^2} = |c_2|$$

e quindi un risultato della moltiplicazione che dipenderà dal modulo della coordinata c_2. Imponendo invece $\sqrt{x^2} = |x|$ avremo:

$$\operatorname{sign}(c_2) \cdot \sqrt{c_2^2} = c_2$$

e quindi un risultato della moltiplicazione che dipenderà dall'effettivo valore di tale coordinata.

Le relazioni ottenute saranno le seguenti:

$$\begin{aligned} a_{1\cdot 2} &= -(c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_1 \cdot \cos(\theta_2) - b_1 \cdot \sin(\theta_2)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \\ b_{1\cdot 2} &= -(c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_1 \cdot \sin(\theta_2) + b_1 \cdot \cos(\theta_2)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \\ c_{1\cdot 2} &= c_2 \cdot \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dal momento che il numero $o_1(a_1, b_1, c_1)$ è in rappresentazione standard, secondo quanto stabilito dal teorema 2.11 dovremo far valere la seguente relazione:

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\right|$$

che unita a quelle indicate dalle formule (2.3), dimostrano la tesi. □

A titolo esemplificativo del teorema appena dimostrato, supponiamo di dover moltiplicare il numero numero completo in rappresentazione standard avente coordinate: $a_1 = 1$, $b_1 = -1$, $c_1 = 1$ con un uscente di coordinata $c_2 = 1$ e fase $\theta_2 = 30°$.

Il loro modulo potrà essere calcolato nel seguente modo:

$$\begin{aligned} t_1 &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3} \\ t_2 &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} = \sqrt{c_2^2} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

mentre per le loro fasi nel caso del numero uscente abbiamo:

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \operatorname{sign}(c_2) \cdot 90° = 90° \\ \theta_2 &= 30° \end{aligned}$$

mentre nel caso del numero completo dovremo fare riferimento alle formule legate alla rappresentazione standard:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \arctan\left(\frac{c_1}{\left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\right|}\right) = \arctan\left(\frac{1}{|\sqrt{2}|}\right) \simeq 35,26° \\ \theta_1 &= \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right) = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -45° \end{aligned}$$

Applicando la regola della moltiplicazione otteniamo come risultato il numero completo avente i seguenti valori del modulo e delle fasi:

$$\begin{aligned} t_{1\cdot 2} &= t_1 \cdot t_2 = \sqrt{3} \\ \gamma_{1\cdot 2} &= \gamma_1 + \gamma_2 \simeq 125,26° \\ \theta_{1\cdot 2} &= \theta_1 + \theta_2 = -15° \end{aligned}$$

e le seguenti coordinate:

$$\begin{aligned} a_{1\cdot 2} &= t_{1\cdot 2} \cdot \cos(\gamma_{1\cdot 2}) \cdot \cos(\theta_{1\cdot 2}) = \sqrt{3} \cdot \cos(\simeq 125,26°) \cdot \cos(-15°) \simeq -0,97 \\ b_{1\cdot 2} &= t_{1\cdot 2} \cdot \cos(\gamma_{1\cdot 2}) \cdot \sin(\theta_{1\cdot 2}) = \sqrt{3} \cdot \cos(\simeq 125,26°) \cdot \sin(-15°) \simeq 0,26 \\ c_{1\cdot 2} &= t_{1\cdot 2} \cdot \sin(\gamma_{1\cdot 2}) = \sqrt{3} \cdot \sin(\simeq 125,26°) = \sqrt{2} \end{aligned}$$

A questo punto possiamo verificare come le formule del precedente teorema facciano effettivamente giungere allo stesso risultato:

$$a_{1\cdot 2} = -(c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_1 \cdot \cos(\theta_2) - b_1 \cdot \sin(\theta_2)}{|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,|} = -\frac{\cos(30^\circ) + \sin(30^\circ)}{|\sqrt{2}\,|} \simeq -0,97$$
$$b_{1\cdot 2} = -(c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_1 \cdot \sin(\theta_2) + b_1 \cdot \cos(\theta_2)}{|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,|} = -\frac{\sin(30^\circ) - \cos(30^\circ)}{|\sqrt{2}\,|} \simeq 0,26$$
$$c_{1\cdot 2} = c_2 \cdot \left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right| = \sqrt{2}$$

Theorem 2.38. *Nel caso in cui solo $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ appartiene alla retta U mentre $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ è in rappresentazione complementare, la loro moltiplicazione potrà essere espressa nel seguente modo:*

$$o_{1\cdot 2}(a_{1\cdot 2}, b_{1\cdot 2}, c_{1\cdot 2})_{(t_{1\cdot 2}, \theta_{1\cdot 2}, \gamma_{1\cdot 2})} = a_{1\cdot 2(t_1 \cdot t_2)} + i \cdot b_{1\cdot 2(\theta_1 + \theta_2)} + u \cdot c_{1\cdot 2(\gamma_1 + \gamma_2)}$$

dove:

$$a_{1\cdot 2} = (c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_1 \cdot \cos(\theta_2) - b_1 \cdot \sin(\theta_2)}{|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,|}$$
$$b_{1\cdot 2} = (c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_1 \cdot \sin(\theta_2) + b_1 \cdot \cos(\theta_2)}{|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,|}$$
$$c_{1\cdot 2} = -c_2 \cdot \left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right|$$

Dimostrazione. Dal momento che il numero $o_1(a_1, b_1, c_1)$ è in rappresentazione complementare, secondo quanto stabilito dal teorema 2.15 dovremo far valere la seguente relazione:

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = -|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,|$$

che unita a quelle indicate dalle formule (2.3), dimostrano la tesi. □

A titolo esemplificativo del teorema appena dimostrato, supponiamo di dover moltiplicare un numero completo in rappresentazione complementare avente coordinate: $a_2 = 1$, $b_2 = -1$, $c_2 = 1$ con il numero uscente di coordinata $c_1 = 1$ e fase $\theta_1 = 30^\circ$.

Il loro modulo potrà essere calcolato nel seguente modo:

$$t_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$
$$t_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} = \sqrt{c_2^2} = \sqrt{1} = 1$$

mentre per le loro fasi nel caso del numero uscente abbiamo:

$$\gamma_2 = \mathrm{sign}(c_2) \cdot 90^\circ = 90^\circ$$
$$\theta_2 = 30^\circ$$

mentre nel caso del numero completo dovremo fare riferimento alle formule legate alla rappresentazione complementare:

$$\gamma_2 = \arctan\left(\frac{c_1}{-|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,|}\right) = \arctan\left(\frac{1}{-|\sqrt{2}|}\right) \simeq 144,74°$$
$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{-b_1}{-a_1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = 135°$$

Applicando la regola della moltiplicazione otteniamo come risultato il numero completo avente i seguenti valori del modulo e delle fasi:

$$t_{1\cdot 2} = t_1 \cdot t_2 = \sqrt{3}$$
$$\gamma_{1\cdot 2} = \gamma_1 + \gamma_2 \simeq 234,74°$$
$$\theta_{1\cdot 2} = \theta_1 + \theta_2 = 165°$$

e le seguenti coordinate:

$$a_{1\cdot 2} = t_{1\cdot 2} \cdot \cos(\gamma_{1\cdot 2}) \cdot \cos(\theta_{1\cdot 2}) = \sqrt{3} \cdot \cos(\simeq 234,74°) \cdot \cos(165°) \simeq 0,97$$
$$b_{1\cdot 2} = t_{1\cdot 2} \cdot \cos(\gamma_{1\cdot 2}) \cdot \sin(\theta_{1\cdot 2}) = \sqrt{3} \cdot \cos(\simeq 234,74°) \cdot \sin(165°) \simeq -0,26$$
$$c_{1\cdot 2} = t_{1\cdot 2} \cdot \sin(\gamma_{1\cdot 2}) = \sqrt{3} \cdot \sin(\simeq 234,74°) = -\sqrt{2}$$

A questo punto possiamo verificare come le formule del precedente teorema facciano effettivamente giungere allo stesso risultato:

$$a_{1\cdot 2} = (c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_1 \cdot \cos(\theta_2) - b_1 \cdot \sin(\theta_2)}{|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,|} = \frac{\cos(30°) + \sin(30°)}{|\sqrt{2}\,|} \simeq 0,97$$
$$b_{1\cdot 2} = (c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_1 \cdot \sin(\theta_2) + b_1 \cdot \cos(\theta_2)}{|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,|} = \frac{\sin(30°) - \cos(30°)}{|\sqrt{2}\,|} \simeq -0,26$$
$$c_{1\cdot 2} = -c_2 \cdot \left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right| = -\sqrt{2}$$

Theorem 2.39. *Nel caso in cui sia $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ che $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ appartengono alla retta U, la loro moltiplicazione potrà essere espressa nel seguente modo:*

$$o_{1\cdot 2}(a_{1\cdot 2}, b_{1\cdot 2}, c_{1\cdot 2})_{(t_{1\cdot 2}, \theta_{1\cdot 2}, \gamma_{1\cdot 2})} = a_{1\cdot 2(t_1 \cdot t_2)} + i \cdot b_{1\cdot 2(\theta_1+\theta_2)} + u \cdot c_{1\cdot 2(\gamma_1+\gamma_2)}$$

dove:

$$a_{1\cdot 2} = -(c_1 \cdot c_2) \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2)$$
$$b_{1\cdot 2} = -(c_1 \cdot c_2) \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)$$
$$c_{1\cdot 2} = 0$$

Dimostrazione. La moltiplicazione tra due numeri completi, come sappiamo, soddisfa la seguente formula:

$$\begin{aligned}o_{1\cdot 2}(t_{1\cdot 2},\theta_{1\cdot 2},\gamma_{1\cdot 2}) = t_1\cdot t_2\cdot\{[&\cos(\gamma_1+\gamma_2)\cdot\cos(\theta_1+\theta_2)]+\\ +i\cdot[\cos(\gamma_1+\gamma_2)\cdot\sin(\theta_1+\theta_2)]&+u\cdot[\sin(\gamma_1+\gamma_2)]\}\end{aligned}$$

Dal momento che $o_1(t_1,\theta_1,\gamma_1)$ e $o_2(t_2,\theta_2,\gamma_2)$ appartengono alla retta U avranno i seguenti valori di modulo e fasi:

$$\begin{aligned}&t_1=\sqrt{c_1^2}\\ &t_2=\sqrt{c_2^2}\\ &\gamma_1=\operatorname{sign}(c_1)\cdot 90°\\ &\gamma_2=\operatorname{sign}(c_2)\cdot 90°\\ &\theta_1 \text{ conosciuto } \neq\arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right)\\ &\theta_2 \text{ conosciuto } \neq\arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right)\end{aligned}$$

Ne consegue che le coordinate che stiamo cercando potranno essere scritte nel seguente modo:

$$\begin{aligned}a_{1\cdot 2}&=\sqrt{c_1^2}\cdot\sqrt{c_2^2}\cdot\cos[\operatorname{sign}(c_1)\cdot 90°+\operatorname{sign}(c_2)\cdot 90°]\cdot\cos(\theta_1+\theta_2)\\ b_{1\cdot 2}&=\sqrt{c_1^2}\cdot\sqrt{c_2^2}\cdot\cos[\operatorname{sign}(c_1)\cdot 90°+\operatorname{sign}(c_2)\cdot 90°]\cdot\sin(\theta_1+\theta_2)\\ c_{1\cdot 2}&=\sqrt{c_1^2}\cdot\sqrt{c_2^2}\cdot\sin[\operatorname{sign}(c_1)\cdot 90°+\operatorname{sign}(c_2)\cdot 90°]\end{aligned}$$

Considerando che quando c_1 e c_2 hanno segni concordi si ottiene:

$$\begin{aligned}&\cos[\operatorname{sign}(c_1)\cdot 90°+\operatorname{sign}(c_2)\cdot 90°]=\cos(\pm 180°)=-1=-\operatorname{sign}(c_1)\cdot\operatorname{sign}(c_2)\\ &\sin[\operatorname{sign}(c_1)\cdot 90°+\operatorname{sign}(c_2)\cdot 90°]=\sin(\pm 180°)=0\end{aligned}$$

e che quando hanno segni discordi si ottiene:

$$\begin{aligned}&\cos[\operatorname{sign}(c_1)\cdot 90°+\operatorname{sign}(c_2)\cdot 90°]=\cos(\pm 0°)=1=-\operatorname{sign}(c_1)\cdot\operatorname{sign}(c_2)\\ &\sin[\operatorname{sign}(c_1)\cdot 90°+\operatorname{sign}(c_2)\cdot 90°]=\sin(\pm 0°)=0\end{aligned}$$

potremo scrivere:

$$\begin{aligned}&a_{1\cdot 2}=-\operatorname{sign}(c_1)\cdot\operatorname{sign}(c_2)\cdot\sqrt{c_1^2}\cdot\sqrt{c_2^2}\cdot\cos(\theta_1+\theta_2)\\ &b_{1\cdot 2}=-\operatorname{sign}(c_1)\cdot\operatorname{sign}(c_2)\cdot\sqrt{c_1^2}\cdot\sqrt{c_2^2}\cdot\sin(\theta_1+\theta_2)\\ &c_{1\cdot 2}=0\end{aligned}$$

Volendo individuare delle relazioni che soddisfano la regola della moltiplicazione in funzione delle effettive coordinate nei numeri completi coinvolti dovremo adottare per i coefficienti c_1,c_2 la convenzione $\sqrt{x^2} = |x|$. Infatti in questo modo otteniamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(c_1) \cdot \sqrt{c_1^2} &= c_1 \\ \operatorname{sign}(c_2) \cdot \sqrt{c_2^2} &= c_2 \end{aligned}$$

e quindi un risultato della moltiplicazione che dipenderà dall'effettivo di tali coordinate. La relazione che otteniamo seguendo queste convenzioni dimostra la tesi. $\square$

A titolo esemplificativo del teorema appena dimostrato, supponiamo di dover moltiplicare un numero uscente di coordinata $c_1 = 1$ e fase $\theta_1 = 30°$ con il numero uscente di coordinata $c_2 = 1$ e fase $\theta_2 = 30°$.

Il loro modulo potrà essere calcolato nel seguente modo:

$$\begin{aligned} t_1 &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} = \sqrt{c_1^2} = \sqrt{1} = 1 \\ t_2 &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} = \sqrt{c_2^2} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

mentre per le loro fasi abbiamo:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \operatorname{sign}(c_1) \cdot 90° = 90° \\ \gamma_2 &= \operatorname{sign}(c_2) \cdot 90° = 90° \\ \theta_1 &= 30° \\ \theta_2 &= 30° \end{aligned}$$

Applicando la regola della moltiplicazione otteniamo come risultato il numero completo avente i seguenti valori del modulo e delle fasi:

$$\begin{aligned} t_{1\cdot 2} &= t_1 \cdot t_2 = 1 \\ \gamma_{1\cdot 2} &= \gamma_1 + \gamma_2 = 180° \\ \theta_{1\cdot 2} &= \theta_1 + \theta_2 = 60° \end{aligned}$$

e le seguenti coordinate:

$$\begin{aligned} a_{1\cdot 2} &= t_{1\cdot 2} \cdot \cos(\gamma_{1\cdot 2}) \cdot \cos(\theta_{1\cdot 2}) = 1 \cdot \cos(180°) \cdot \cos(60°) = -\frac{1}{2} \\ b_{1\cdot 2} &= t_{1\cdot 2} \cdot \cos(\gamma_{1\cdot 2}) \cdot \sin(\theta_{1\cdot 2}) = 1 \cdot \cos(180°) \cdot \sin(60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ c_{1\cdot 2} &= t_{1\cdot 2} \cdot \sin(\gamma_{1\cdot 2}) = 1 \cdot \sin(180°) = 0 \end{aligned}$$

A questo punto possiamo verificare come le formule del precedente teorema facciano effettivamente giungere allo stesso risultato:

$$
\begin{aligned}
&a_{1\cdot 2} = -(c_1 \cdot c_2) \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) = -\cos(60°) = -\frac{1}{2} \\
&b_{1\cdot 2} = -(c_1 \cdot c_2) \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) = -\sin(60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&c_{1\cdot 2} = 0
\end{aligned}
$$

Theorem 2.40. *Risulta nullo rispetto alla moltiplicazione il numero 0, ovvero per:*

$$o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2) = 0$$

si ha:

$$o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1) \cdot o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2) = 0$$

Dimostrazione. Essendo t_1,θ_1,γ_1,t_2,θ_2,γ_2 dei numeri reali possiamo scrivere:

$$
\begin{aligned}
&t_{1\cdot 2} = t_1 \cdot t_2 = t_1 \cdot 0 = 0 \\
&\theta_{1\cdot 2} = \theta_1 + \theta_2 = \theta_1 + \textit{indeterminato} = \textit{indeterminato} \\
&\gamma_{1\cdot 2} = \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_1 + \textit{indeterminato} = \textit{indeterminato}
\end{aligned}
$$

dimostrando la tesi. □

Theorem 2.41. *Risulta neutro rispetto alla moltiplicazione il numero completo $1_{(S)}$, ovvero per:*

$$o_2(a_2, b_2, c_2)_{(S)} = 1_{(S)}$$

si ha:

$$o_1(a_1, b_1, c_1)_{(t_1,\theta_1,\gamma_1)} \cdot o_2(a_2, b_2, c_2)_{(S)} = o_1(a_1, b_1, c_1)_{(t_1,\theta_1,\gamma_1)}$$

Dimostrazione. Essendo t_1,θ_1,γ_1,t_2,θ_2,γ_2 dei numeri reali possiamo scrivere:

$$
\begin{aligned}
&t_{1\cdot 2} = t_1 \cdot t_2 = t_1 \cdot 1 = t_1 \\
&\theta_{1\cdot 2} = \theta_1 + \theta_2 = \theta_1 + 0 = \theta_1 \\
&\gamma_{1\cdot 2} = \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_1 + 0 = \gamma_1
\end{aligned}
$$

dimostrando la tesi. □

Theorem 2.42. *Risulta inverso rispetto alla moltiplicazione il numero completo che identifica la posizione inversa rispetto all'origine, ovvero per:*

$$o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2) = o_2(\frac{1}{t_1}, -\theta_1, -\gamma_1)$$

si ha:

$$o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1) \cdot o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2) = 1_{(S)}$$

Dimostrazione. Essendo t_1,θ_1,γ_1,t_2,θ_2,γ_2 dei numeri reali possiamo scrivere:

$$t_{1\cdot 2} = t_1 \cdot t_2 = t_1 \cdot \frac{1}{t_1} = 1$$
$$\theta_{1\cdot 2} = \theta_1 + \theta_2 = \theta_1 - \theta_1 = 0$$
$$\gamma_{1\cdot 2} = \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_1 - \gamma_1 = 0$$

dimostrando la tesi. □

Theorem 2.43. *Vale la proprietà commutativa, ovvero:*

$$o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1) \cdot o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2) = o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2) \cdot o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$$

Dimostrazione. Essendo t_1,θ_1,γ_1,t_2,θ_2,γ_2 dei numeri reali possiamo scrivere:

$$t_{1\cdot 2} = t_1 \cdot t_2$$
$$\theta_{1\cdot 2} = \theta_1 + \theta_2$$
$$\gamma_{1\cdot 2} = \gamma_1 + \gamma_2$$

$$t_{2\cdot 1} = t_2 \cdot t_1 = t_1 \cdot t_2$$
$$\theta_{2\cdot 1} = \theta_2 + \theta_1 = \theta_1 + \theta_2$$
$$\gamma_{2\cdot 1} = \gamma_2 + \gamma_1 = \gamma_1 + \gamma_2$$

dimostrando la tesi. □

Theorem 2.44. *Valgono le proprietà associative e dissociative, ovvero per:*

$$o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2) = o_3(t_3, \theta_3, \gamma_3) + o_4(t_4, \theta_4, \gamma_4)$$

si ha:

$$[o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1) \cdot o_3(t_3, \theta_3, \gamma_3)] \cdot o_4(t_4, \theta_4, \gamma_4) = o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1) \cdot o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$$
$$o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1) \cdot o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2) = [o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1) \cdot o_3(t_3, \theta_3, \gamma_3)] \cdot o_4(t_4, \theta_4, \gamma_4)$$

Dimostrazione. Essendo t_1,θ_1,γ_1,t_2,θ_2,γ_2,t_3,θ_3,γ_3,t_4,θ_4,γ_4 dei numeri reali possiamo scrivere:

$$t_{(1\cdot 3)\cdot 4} = (t_1 \cdot t_3) \cdot t_4 = t_1 \cdot (t_3 \cdot t_4)$$
$$\theta_{(1\cdot 3)\cdot 4} = (\theta_1 + \theta_3) + \theta_4 = \theta_1 + (\theta_3 + \theta_4)$$
$$\gamma_{(1\cdot 3)\cdot 4} = (\gamma_1 + \gamma_3) + \gamma_4 = \gamma_1 + (\gamma_3 + \gamma_4)$$

$$t_{1\cdot 2} = t_1 \cdot t_2 = t_1 \cdot (t_3 \cdot t_4)$$
$$\theta_{1\cdot 2} = \theta_1 + \theta_2 = \theta_1 + (\theta_3 + \theta_4)$$
$$\gamma_{1\cdot 2} = \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_1 + (\gamma_3 + \gamma_4)$$

dimostrando la tesi. □

Theorem 2.45. *Non vale la proprietà distributiva rispetto all'addizione, ovvero per:*

$$o_2(t_2,\theta_2,\gamma_2) = o_3(t_3,\theta_3,\gamma_3) + o_4(t_4,\theta_4,\gamma_4)$$

si ha:

$$o_1(t_1,\theta_1,\gamma_1)\cdot o_2(t_2,\theta_2,\gamma_2) \neq [o_1(t_1,\theta_1,\gamma_1)\cdot o_3(t_3,\theta_3,\gamma_3)] + [o_1(t_1,\theta_1,\gamma_1)\cdot o_4(t_4,\theta_4,\gamma_4)]$$

Dimostrazione. Facendo riferimento alla situazione descritta dal teorema 2.31 e considerando che a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2, a_3,b_3,c_3,a_4,b_4,c_4 sono numeri reali, possiamo scrivere:

$$c_{1\cdot 2} = c_1 \cdot \left|\sqrt{(a_2^2+b_2^2)}\,\right| + c2 \cdot \left|\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}\,\right|$$

$$\begin{aligned}
c_{(1\cdot 3)+(1\cdot 4)} =& \left[c_1 \cdot \left|\sqrt{(a_3^2+b_3^2)}\,\right| + c_3 \cdot \left|\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}\,\right|\right] + \\
&+ \left[c_1 \cdot \left|\sqrt{(a_4^2+b_4^2)}\,\right| + c_4 \cdot \left|\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}\,\right|\right] = \\
=& c_1 \cdot \left[\left|\sqrt{(a_3^2+b_3^2)}\,\right| + \left|\sqrt{(a_4^2+b_4^2)}\,\right|\right] + (c_3+c_4) \cdot \left|\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}\,\right| = \\
=& c_1 \cdot \left[\left|\sqrt{(a_3^2+b_3^2)}\,\right| + \left|\sqrt{(a_4^2+b_4^2)}\,\right|\right] + c_2 \cdot \left|\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}\,\right| \neq c_{1\cdot 2}
\end{aligned}$$

dimostrando la tesi. □

Theorem 2.46. *Non vale la proprietà distributiva rispetto alla sottrazione, ovvero per:*

$$o_2(t_2,\theta_2,\gamma_2) = o_3(t_3,\theta_3,\gamma_3) - o_4(t_4,\theta_4,\gamma_4)$$

si ha:

$$o_1(t_1,\theta_1,\gamma_1)\cdot o_2(t_2,\theta_2,\gamma_2) \neq [o_1(t_1,\theta_1,\gamma_1)\cdot o_3(t_3,\theta_3,\gamma_3)] - [o_1(t_1,\theta_1,\gamma_1)\cdot o_4(t_4,\theta_4,\gamma_4)]$$

Dimostrazione. Facendo riferimento alla situazione descritta dal teorema 2.31 e considerando che a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2, a_3,b_3,c_3,a_4,b_4,c_4 sono numeri reali, possiamo scrivere:

$$c_{1\cdot 2} = c_1 \cdot \left|\sqrt{(a_2^2+b_2^2)}\,\right| + c2 \cdot \left|\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}\,\right|$$

$$\begin{aligned}
c_{(1\cdot 3)-(1\cdot 4)} =& \left[c_1 \cdot \left|\sqrt{(a_3^2+b_3^2)}\,\right| + c3 \cdot \left|\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}\,\right|\right] + \\
&- \left[c_1 \cdot \left|\sqrt{(a_4^2+b_4^2)}\,\right| + c4 \cdot \left|\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}\,\right|\right] = \\
=& c_1 \cdot \left[\left|\sqrt{(a_3^2+b_3^2)}\,\right| - \left|\sqrt{(a_4^2+b_4^2)}\,\right|\right] + (c_3-c_4) \cdot \left|\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}\,\right| = \\
=& c_1 \cdot \left[\left|\sqrt{(a_3^2+b_3^2)}\,\right| - \left|\sqrt{(a_4^2+b_4^2)}\,\right|\right] + c_2 \cdot \left|\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}\,\right| \neq c_{1\cdot 2}
\end{aligned}$$

dimostrando la tesi. □

2.5 Divisione

Definition 2.47. *Nello spazio RIU viene definita divisione tra due numeri completi* $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ *e* $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ *il numero* $o_{\frac{1}{2}}(a_{\frac{1}{2}}, \theta_{\frac{1}{2}}, \gamma_{\frac{1}{2}})$ *rappresentato anche con il simbolo* $\frac{o_1(t_1,\theta_1,\gamma_1)}{o_2(t_2,\theta_2,\gamma_2)}$ *che soddisfa le seguenti condizioni:*

1. $o_{\frac{1}{2}}(t_{\frac{1}{2}}, \theta_{\frac{1}{2}}, \gamma_{\frac{1}{2}}) \cdot o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2) = o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$

2. $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2) \neq 0$

La prima condizione definisce la divisione come operazione inversa rispetto alla moltiplicazione, ed equivale a richiedere che:

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{t_1}{t_2}$$
$$\theta_{\frac{1}{2}} = \theta_1 - \theta_2$$
$$\gamma_{\frac{1}{2}} = \gamma_1 - \gamma_2$$

La seconda condizione trae la sua giustificazione nella necessità di definire la divisione in modo univoco. Infatti quando essa non vale, l'espressione:

$$o_{\frac{1}{2}}(t_{\frac{1}{2}}, \theta_{\frac{1}{2}}, \gamma_{\frac{1}{2}}) \cdot 0 = 0$$

oltre a richiedere un dividendo $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ a sua volta nullo, si troverebbe ad essere soddisfatta da più valori di $o_{\frac{1}{2}}(t_{\frac{1}{2}}, \theta_{\frac{1}{2}}, \gamma_{\frac{1}{2}})$.

Theorem 2.48. *Nel caso in cui* $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ *e* $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ *sono in rappresentazione standard, e non appartengono alla retta U, la loro divisione potrà essere espressa nel seguente modo:*

$$o_{\frac{1}{2}}(a_{\frac{1}{2}}, b_{\frac{1}{2}}, c_{\frac{1}{2}})_{(t_{\frac{1}{2}},\theta_{\frac{1}{2}},\gamma_{\frac{1}{2}})} = a_{\frac{1}{2}(\frac{t_1}{t_2})} + i \cdot b_{\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)} + u \cdot c_{\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2)}$$

dove:

$$a_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot (a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) \cdot \left(1 + \frac{c_1 \cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right| \cdot \left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right|}\right)$$
$$b_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot (b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2) \cdot \left(1 + \frac{c_1 \cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right| \cdot \left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right|}\right)$$
$$c_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot \left[c_1 \cdot \left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right| - c_2 \cdot \left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right|\right]$$

Dimostrazione. La divisione tra due numeri completi, come sappiamo, soddisfa la seguente formula:

$$o_{\frac{1}{2}}(t_{\frac{1}{2}}, \theta_{\frac{1}{2}}, \gamma_{\frac{1}{2}}) = \frac{t_1}{t_2} \cdot \{[\cos(\gamma_1 - \gamma_2) \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)] + \\ + i \cdot [\cos(\gamma_1 - \gamma_2) \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)] + u \cdot [\sin(\gamma_1 - \gamma_2)]\}$$

mentre per i moduli e le fasi coinvolte varranno le seguenti relazioni:

$$t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Ne consegue che le coordinate che stiamo cercando potranno essere scritte nel seguente modo:

$$a_{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \cdot \cos\left[\arctan\left(\frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}\right) - \arctan\left(\frac{c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\right)\right] \cdot \\ \cdot \cos\left[\arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right) - \arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right)\right]$$

$$b_{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \cdot \cos\left[\arctan\left(\frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}\right) - \arctan\left(\frac{c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\right)\right] \cdot \\ \cdot \sin\left[\arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right) - \arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right)\right]$$

$$c_{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \cdot \sin\left[\arctan\left(\frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}\right) - \arctan\left(\frac{c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\right)\right]$$

Per proseguire con la dimostrazione è necessario servirsi delle seguenti relazioni trigonometriche notevoli:

$$\begin{aligned}
&\cos(x-y) = \cos(x)\cdot\cos(y) + \sin(x)\cdot\sin(y)\\
&\sin(x-y) = \sin(x)\cdot\cos(y) - \cos(x)\cdot\sin(y)\\
&\cos\left[\arctan\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right] = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2}}\\
&\sin\left[\arctan\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right] = \sqrt{\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}}\\
&\cos\left[\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right] = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}}\\
&\sin\left[\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right] = \sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2}}
\end{aligned}$$

Per determinare il valore della coordinata $a_{\frac{1}{2}}$ i passaggi da svolgere saranno

i seguenti:

$$a_{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{a_1^2+b_1^2}{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} \cdot \sqrt{\frac{a_2^2+b_2^2}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{c_1^2}{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} \cdot \sqrt{\frac{c_2^2}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{a_1^2}{a_1^2+b_1^2}} \cdot \sqrt{\frac{a_2^2}{a_2^2+b_2^2}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{b_1^2}{a_1^2+b_1^2}} \cdot \sqrt{\frac{b_2^2}{a_2^2+b_2^2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2} \cdot \left(\sqrt{a_1^2+b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2} + \sqrt{c_1^2} \cdot \sqrt{c_2^2} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\sqrt{a_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2} + \sqrt{b_1^2} \cdot \sqrt{b_2^2}}{\sqrt{a_1^2+b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2} \cdot \left[\left(\sqrt{a_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2} + \sqrt{b_1^2} \cdot \sqrt{b_2^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{c_1^2} \cdot \sqrt{c_2^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{a_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2} + \sqrt{b_1^2} \cdot \sqrt{b_2^2}}{\sqrt{a_1^2+b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2}} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2} \cdot \left(\sqrt{a_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2} + \sqrt{b_1^2} \cdot \sqrt{b_2^2} \right) \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{c_1^2} \cdot \sqrt{c_2^2}}{\sqrt{a_1^2+b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2}} \right)$$

Per determinare il valore della coordinata $b_{\frac{1}{2}}$ i passaggi da svolgere saranno i seguenti:

$$b_{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{a_1^2+b_1^2}{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} \cdot \sqrt{\frac{a_2^2+b_2^2}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{c_1^2}{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} \cdot \sqrt{\frac{c_2^2}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{b_1^2}{a_1^2+b_1^2}} \cdot \sqrt{\frac{a_2^2}{a_2^2+b_2^2}} + \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{a_1^2}{a_1^2+b_1^2}} \cdot \sqrt{\frac{b_2^2}{a_2^2+b_2^2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2} \cdot \left(\sqrt{a_1^2+b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2} + \sqrt{c_1^2} \cdot \sqrt{c_2^2} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\sqrt{b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2} - \sqrt{a_1^2} \cdot \sqrt{b_2^2}}{\sqrt{a_1^2+b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2} \cdot \left[\left(\sqrt{b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2} - \sqrt{a_1^2} \cdot \sqrt{b_2^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{c_1^2} \cdot \sqrt{c_2^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2} - \sqrt{a_1^2} \cdot \sqrt{b_2^2}}{\sqrt{a_1^2+b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2}} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2} \cdot \left(\sqrt{b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2} - \sqrt{a_1^2} \cdot \sqrt{b_2^2} \right) \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{c_1^2} \cdot \sqrt{c_2^2}}{\sqrt{a_1^2+b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2}} \right)$$

Per determinare il valore della coordinata $c_{\frac{1}{2}}$ i passaggi da svolgere saranno

i seguenti:

$$c_{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{c_1^2}{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} \cdot \sqrt{\frac{a_2^2+b_2^2}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} + \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{a_1^2+b_1^2}{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} \cdot \sqrt{\frac{c_2^2}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2} \cdot \left[\sqrt{c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2} - \sqrt{c_2^2} \cdot \sqrt{a_1^2+b_1^2} \right]$$

Queste relazioni hanno validità generale, nel preciso senso che sono in grado di coprire anche i casi in cui i coefficienti a,b,c siano nulli (purché si rimanga nell'ambito di numeri completi non situati sulla retta U dei numeri uscenti). L'unica limitazione in questo senso è data dalla necessità di evitare la seguente situazione:

$$a_2^2+b_2^2+c_2^2 = 0$$

il che conferma l'impossibilità di dividere un numero completo $o(t,\theta,\gamma)$ per lo zero (caratterizzato proprio dai valori a_2, b_2, c_2 che rendono vera la suddetta espressione).

Volendo individuare delle relazioni che soddisfano la regola della divisione in funzione delle effettive coordinate coinvolte, dovremo assegnare alle radici lo stesso segno dei coefficienti situati al loro interno:

$$\sqrt{a^2} = a$$
$$\sqrt{b^2} = b$$
$$\sqrt{c^2} = c$$

Le relazioni ottenute saranno le seguenti:

$$\begin{aligned} a_{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2} \cdot (a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) \cdot \left(1 + \frac{c_1 \cdot c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2}} \right) \\ b_{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2} \cdot (b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2) \cdot \left(1 + \frac{c_1 \cdot c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2}} \right) \\ c_{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2} \cdot \left[c_1 \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2} + c_2 \cdot \sqrt{a_1^2+b_1^2} \right] \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dal momento che i numeri completi coinvolti sono in rappresentazione standard, secondo quanto stabilito dal teorema 2.11 dovremo far valere le seguenti relazioni:

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \left| \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \right|$$
$$\sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \left| \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \right|$$

che unite a quelle indicate dalle formule (2.4), dimostrano la tesi. □

A titolo esemplificativo del teorema appena dimostrato, supponiamo di dover dividere i numeri completi in rappresentazione standard aventi coordinate: $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 1$.

Il loro modulo potrà essere calcolato nel seguente modo:

$$t_1 = t_2 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

mentre per le loro fasi dovremo fare riferimento alle formule legate alla rappresentazione standard:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 = \gamma_2 &= \arctan\left(\frac{c_1}{\left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right|}\right) = \arctan\left(\frac{c_2}{\left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right|}\right) = \\
&= \arctan\left(\frac{1}{|\sqrt{2}|}\right) \simeq 35,26^\circ \\
\theta_1 = \theta_2 &= \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right) = \arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ
\end{aligned}$$

Applicando la regola della divisione otteniamo come risultato il numero completo avente i seguenti valori del modulo e delle fasi:

$$\begin{aligned}
t_{\frac{1}{2}} &= \frac{t_1}{t_2} = 1 \\
\gamma_{\frac{1}{2}} &= \gamma_1 - \gamma_2 = 0^\circ \\
\theta_{\frac{1}{2}} &= \theta_1 - \theta_2 = 0^\circ
\end{aligned}$$

e le seguenti coordinate:

$$\begin{aligned}
a_{\frac{1}{2}} &= t_{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\gamma_{\frac{1}{2}}) \cdot \cos(\theta_{\frac{1}{2}}) = 1 \cdot \cos(0^\circ) \cdot \cos(0^\circ) = 1 \\
b_{\frac{1}{2}} &= t_{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\gamma_{\frac{1}{2}}) \cdot \sin(\theta_{\frac{1}{2}}) = 1 \cdot \cos(0^\circ) \cdot \sin(0^\circ) = 0 \\
c_{\frac{1}{2}} &= t_{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\gamma_{\frac{1}{2}}) = 1 \cdot \sin(0^\circ) = 0
\end{aligned}$$

A questo punto possiamo verificare come le formule del precedente teorema facciano effettivamente giungere allo stesso risultato:

$$\begin{aligned}
a_{\frac{1}{2}} =& \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot(a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2)\cdot\left(1+\frac{c_1\cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right|\cdot\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|}\right)=\\
=& \frac{1}{3}\cdot(1+1)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)=1\\
b_{\frac{1}{2}} =& \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot(b_1\cdot a_2-a_1\cdot b_2)\cdot\left(1+\frac{c_1\cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right|\cdot\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|}\right)=\\
=& \frac{1}{3}\cdot(1-1)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)=0\\
c_{\frac{1}{2}} =& \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot\left[c_1\cdot\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|-c_2\cdot\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right|\right]=\\
=& \frac{1}{3}\cdot[1\cdot\sqrt{2}-1\cdot\sqrt{2}]=0
\end{aligned}$$

Theorem 2.49. *Nel caso in cui $o_1(t_1,\theta_1,\gamma_1)$ e $o_2(t_2,\theta_2,\gamma_2)$ sono in rappresentazione complementare, e non appartengono alla retta U, la loro divisione potrà essere espressa nel seguente modo:*

$$o_{\frac{1}{2}}(a_{\frac{1}{2}},b_{\frac{1}{2}},c_{\frac{1}{2}})_{(t_{\frac{1}{2}},\theta_{\frac{1}{2}},\gamma_{\frac{1}{2}})}=a_{\frac{1}{2}(\frac{t_1}{t_2})}+i\cdot b_{\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)}+u\cdot c_{\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2)}$$

dove:

$$\begin{aligned}
a_{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot(a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2)\cdot\left(1+\frac{c_1\cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right|\cdot\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|}\right)\\
b_{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot(b_1\cdot a_2-a_1\cdot b_2)\cdot\left(1+\frac{c_1\cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right|\cdot\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|}\right)\\
c_{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot\left[c_2\cdot\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right|-c_1\cdot\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|\right]
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Dal momento che i numeri completi coinvolti sono in rappresentazione complementare, secondo quanto stabilito dal teorema 2.15 dovremo far valere le seguenti relazioni:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}=-\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right|$$
$$\sqrt{a_2^2+b_2^2}=-\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|$$

che unite a quelle indicate dalle formule (2.4), dimostrano la tesi. □

A titolo esemplificativo del teorema appena dimostrato, supponiamo di dover moltiplicare i numeri completi in rappresentazione complementare aventi coordinate: $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 1$.

Il loro modulo potrà essere calcolato nel seguente modo:

$$t_1 = t_2 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

mentre per le loro fasi dovremo fare riferimento alle formule legate alla rappresentazione complementare:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 = \gamma_2 &= \arctan\left(\frac{c_1}{-\left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\right|}\right) = \arctan\left(\frac{c_2}{-\left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,\right|}\right) = \\
&= \arctan\left(\frac{1}{-|\sqrt{2}|}\right) \simeq 144,73^\circ \\
\theta_1 = \theta_2 &= \arctan\left(\frac{-b_1}{-a_1}\right) = \arctan\left(\frac{-b_2}{-a_2}\right) = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = 225^\circ
\end{aligned}$$

Applicando la regola della divisione otteniamo come risultato il numero completo avente i seguenti valori del modulo e delle fasi:

$$\begin{aligned}
t_{\frac{1}{2}} &= \frac{t_1}{t_2} = 1 \\
\gamma_{\frac{1}{2}} &= \gamma_1 - \gamma_2 = 0^\circ \\
\theta_{\frac{1}{2}} &= \theta_1 - \theta_2 = 0^\circ
\end{aligned}$$

e le seguenti coordinate:

$$\begin{aligned}
a_{\frac{1}{2}} &= t_{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\gamma_{\frac{1}{2}}) \cdot \cos(\theta_{\frac{1}{2}}) = 1 \cdot \cos(0^\circ) \cdot \cos(0^\circ) = 1 \\
b_{\frac{1}{2}} &= t_{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\gamma_{\frac{1}{2}}) \cdot \sin(\theta_{\frac{1}{2}}) = 1 \cdot \cos(0^\circ) \cdot \sin(0^\circ) = 0 \\
c_{\frac{1}{2}} &= t_{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\gamma_{\frac{1}{2}}) = 1 \cdot \sin(0^\circ) = 0
\end{aligned}$$

A questo punto possiamo verificare come le formule del precedente teorema

facciano effettivamente giungere allo stesso risultato:

$$\begin{aligned}
a_{\frac{1}{2}} =& \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot(a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2)\cdot\left(1+\frac{c_1\cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,\right|\cdot\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\,\right|}\right)=\\
=&\frac{1}{3}\cdot(1+1)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)=1\\
b_{\frac{1}{2}} =& \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot(b_1\cdot a_2-a_1\cdot b_2)\cdot\left(1+\frac{c_1\cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,\right|\cdot\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\,\right|}\right)=\\
=&\frac{1}{3}\cdot(1-1)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)=0\\
c_{\frac{1}{2}} =& \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot\left[c_2\cdot\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,\right|-c_1\cdot\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\,\right|\right]=\\
=&\frac{1}{3}\cdot[1\cdot\sqrt{2}-1\cdot\sqrt{2}]=0
\end{aligned}$$

Theorem 2.50. *Nel caso in cui $o_1(t_1,\theta_1,\gamma_1)$ è in rappresentazione standard mentre $o_2(t_2,\theta_2,\gamma_2)$ è in rappresentazione complementare, ed entrambe non appartengono alla retta U, la loro divisione potrà essere espressa nel seguente modo:*

$$o_{\frac{1}{2}}(a_{\frac{1}{2}},b_{\frac{1}{2}},c_{\frac{1}{2}})_{(t_{\frac{1}{2}},\theta_{\frac{1}{2}},\gamma_{\frac{1}{2}})}=a_{\frac{1}{2}(\frac{t_1}{t_2})}+i\cdot b_{\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)}+u\cdot c_{\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2)}$$

dove:

$$\begin{aligned}
a_{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot(a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2)\cdot\left(1-\frac{c_1\cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,\right|\cdot\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\,\right|}\right)\\
b_{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot(b_1\cdot a_2-a_1\cdot b_2)\cdot\left(1-\frac{c_1\cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,\right|\cdot\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\,\right|}\right)\\
c_{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot\left[-c_1\cdot\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\,\right|-c_2\cdot\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,\right|\right]
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Dal momento che il dividendo è in rappresentazione standard, secondo quanto stabilito dal teorema 2.11 dovremo far valere le seguenti relazioni:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}=\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\,\right|$$

mentre essendo il divisore in rappresentazione complementare in riferimento al teorema 2.15 varranno le seguenti relazioni:

$$\sqrt{a_2^2+b_2^2}=-\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\,\right|$$

che unite a quelle indicate dalle formule (2.4), dimostrano la tesi. □

A titolo esemplificativo del teorema appena dimostrato, supponiamo di dover moltiplicare il numero completo in rappresentazione standard avente coordinate: $a_1 = b_1 = c_1 = 1$ e quello in rappresentazione complementare avente le medesime coordinate: $a_2 = b_2 = c_2 = 1$.

Il loro modulo potrà essere calcolato nel seguente modo:

$$t_1 = t_2 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

mentre per le loro fasi dovremo fare riferimento alle formule legate alla rappresentazione complementare:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \arctan\left(\frac{c_1}{\left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right|}\right) = \arctan\left(\frac{1}{|\sqrt{2}|}\right) \simeq 35,26^\circ \\
\gamma_2 &= \arctan\left(\frac{c_2}{-\left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right|}\right) = \arctan\left(\frac{1}{-|\sqrt{2}|}\right) \simeq 144,73^\circ \\
\theta_1 &= \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ \\
\theta_2 &= \arctan\left(\frac{-b_2}{-a_2}\right) = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = 225^\circ
\end{aligned}$$

Applicando la regola della divisione otteniamo come risultato il numero completo avente i seguenti valori del modulo e delle fasi:

$$\begin{aligned}
t_{\frac{1}{2}} &= \frac{t_1}{t_2} = 1 \\
\gamma_{\frac{1}{2}} &= \gamma_1 - \gamma_2 \simeq -109,47^\circ \\
\theta_{\frac{1}{2}} &= \theta_1 - \theta_2 = -180^\circ
\end{aligned}$$

e le seguenti coordinate:

$$\begin{aligned}
a_{\frac{1}{2}} &= t_{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\gamma_{\frac{1}{2}}) \cdot \cos(\theta_{\frac{1}{2}}) = 1 \cdot \cos(\simeq -109,47^\circ) \cdot \cos(-180^\circ) = \frac{1}{3} \\
b_{\frac{1}{2}} &= t_{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\gamma_{\frac{1}{2}}) \cdot \sin(\theta_{\frac{1}{2}}) = 1 \cdot \cos(\simeq -109,47^\circ) \cdot \sin(-180^\circ) = 0 \\
c_{\frac{1}{2}} &= t_{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\gamma_{\frac{1}{2}}) = 1 \cdot \sin(\simeq -109,47^\circ) = \frac{-2 \cdot \sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

A questo punto possiamo verificare come le formule del precedente teorema

facciano effettivamente giungere allo stesso risultato:

$$a_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot(a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2)\cdot\left(1-\frac{c_1\cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right|\cdot\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot(1+1)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$$
$$b_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot(b_1\cdot a_2-a_1\cdot b_2)\cdot\left(1-\frac{c_1\cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right|\cdot\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot(1-1)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=0$$
$$c_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot\left[-c_1\cdot\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|-c_2\cdot\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right|\right]=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot[-1\cdot\sqrt{2}-1\cdot\sqrt{2}]=\frac{-2\cdot\sqrt{2}}{3}$$

Theorem 2.51. *Nel caso in cui $o_1(t_1,\theta_1,\gamma_1)$ è in rappresentazione complementare mentre $o_2(t_2,\theta_2,\gamma_2)$ è in rappresentazione standard, ed entrambe non appartengono alla retta U, la loro divisione potrà essere espressa nel seguente modo:*

$$o_{\frac{1}{2}}(a_{\frac{1}{2}},b_{\frac{1}{2}},c_{\frac{1}{2}})_{(t_{\frac{1}{2}},\theta_{\frac{1}{2}},\gamma_{\frac{1}{2}})} = a_{\frac{1}{2}(\frac{t_1}{t_2})}+i\cdot b_{\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)}+u\cdot c_{\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2)}$$

dove:

$$a_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot(a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2)\cdot\left(1-\frac{c_1\cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right|\cdot\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|}\right)$$
$$b_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot(b_1\cdot a_2-a_1\cdot b_2)\cdot\left(1-\frac{c_1\cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right|\cdot\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|}\right)$$
$$c_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot\left[c_1\cdot\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|+c_2\cdot\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right|\right]$$

Dimostrazione. Dal momento che il dividendo è in rappresentazione complementare, secondo quanto stabilito dal teorema 2.15 dovremo far valere le seguenti relazioni:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}=-\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right|$$

mentre essendo il divisore in rappresentazione standard in riferimento al teorema 2.11 varranno le seguenti relazioni:

$$\sqrt{a_2^2+b_2^2}=\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|$$

che unite a quelle indicate dalle formule (2.4), dimostrano la tesi. □

A titolo esemplificativo del teorema appena dimostrato, supponiamo di dover moltiplicare il numero completo in rappresentazione complementare avente coordinate: $a_1 = b_1 = c_1 = 1$ e quello in rappresentazione standard avente le medesime coordinate: $a_2 = b_2 = c_2 = 1$.

Il loro modulo potrà essere calcolato nel seguente modo:

$$t_1 = t_2 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

mentre per le loro fasi dovremo fare riferimento sia alle formule legate alla rappresentazione standard che a quella complementare:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \arctan\left(\frac{c_1}{-\left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\right|}\right) = \arctan\left(\frac{1}{-|\sqrt{2}|}\right) \simeq 144,73^\circ \\
\gamma_2 &= \arctan\left(\frac{c_2}{\left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,\right|}\right) = \arctan\left(\frac{1}{|\sqrt{2}|}\right) \simeq 35,26^\circ \\
\theta_1 &= \arctan\left(\frac{-b_1}{-a_1}\right) = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = 225^\circ \\
\theta_2 &= \arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ
\end{aligned}$$

Applicando la regola della divisione otteniamo come risultato il numero completo avente i seguenti valori del modulo e delle fasi:

$$\begin{aligned}
t_{\frac{1}{2}} &= \frac{t_1}{t_2} = 1 \\
\gamma_{\frac{1}{2}} &= \gamma_1 - \gamma_2 \simeq 109,47^\circ \\
\theta_{\frac{1}{2}} &= \theta_1 - \theta_2 = 180^\circ
\end{aligned}$$

e le seguenti coordinate:

$$\begin{aligned}
a_{\frac{1}{2}} &= t_{\frac{1}{2}} \cdot \cos\left(\gamma_{\frac{1}{2}}\right) \cdot \cos\left(\theta_{\frac{1}{2}}\right) = 1 \cdot \cos\left(\simeq 109,47^\circ\right) \cdot \cos\left(180^\circ\right) = \frac{1}{3} \\
b_{\frac{1}{2}} &= t_{\frac{1}{2}} \cdot \cos\left(\gamma_{\frac{1}{2}}\right) \cdot \sin\left(\theta_{\frac{1}{2}}\right) = 1 \cdot \cos\left(\simeq 109,47^\circ\right) \cdot \sin\left(180^\circ\right) = 0 \\
c_{\frac{1}{2}} &= t_{\frac{1}{2}} \cdot \sin\left(\gamma_{\frac{1}{2}}\right) = 1 \cdot \sin\left(\simeq 109,47^\circ\right) = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

A questo punto possiamo verificare come le formule del precedente teorema

facciano effettivamente giungere allo stesso risultato:

$$a_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot(a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2)\cdot\left(1-\frac{c_1\cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right|\cdot\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot(1+1)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$$
$$b_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot(b_1\cdot a_2-a_1\cdot b_2)\cdot\left(1-\frac{c_1\cdot c_2}{\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right|\cdot\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot(1-1)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=0$$
$$c_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot\left[c_1\cdot\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|+c_2\cdot\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right|\right]=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot[1\cdot\sqrt{2}+1\cdot\sqrt{2}]=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}$$

Theorem 2.52. *Nel caso in cui solo $o_1(t_1,\theta_1,\gamma_1)$ appartiene alla retta U mentre $o_2(t_2,\theta_2,\gamma_2)$ è in rappresentazione standard, la loro divisione potrà essere espressa nel seguente modo:*

$$o_{\frac{1}{2}}(a_{\frac{1}{2}},b_{\frac{1}{2}},c_{\frac{1}{2}})_{(t_{\frac{1}{2}},\theta_{\frac{1}{2}},\gamma_{\frac{1}{2}})} = a_{\frac{1}{2}(\frac{t_1}{t_2})}+i\cdot b_{\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)}+u\cdot c_{\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2)}$$

dove:

$$a_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot(c_1\cdot c_2)\cdot\frac{a_2\cdot\cos(\theta_1)+b_2\cdot\sin(\theta_1)}{\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|}$$
$$b_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot(c_1\cdot c_2)\cdot\frac{a_2\cdot\sin(\theta_1)-b_2\cdot\cos(\theta_1)}{\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|}$$
$$c_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\cdot c_1\cdot\left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|$$

Dimostrazione. La divisione tra due numeri completi, come sappiamo, soddisfa la seguente formula:

$$o_{\frac{1}{2}}(t_{\frac{1}{2}},\theta_{\frac{1}{2}},\gamma_{\frac{1}{2}}) = \frac{t_1}{t_2}\cdot\{[\cos(\gamma_1-\gamma_2)\cdot\cos(\theta_1-\theta_2)]+$$
$$+i\cdot[\cos(\gamma_1-\gamma_2)\cdot\sin(\theta_1-\theta_2)]+u\cdot[\sin(\gamma_1-\gamma_2)]\}$$

Dal momento che $o_1(t_1,\theta_1,\gamma_1)$ appartiene alla retta U avrà i seguenti valori di modulo e fasi:

$$t_1 = \sqrt{c_1^2}$$
$$\gamma_1 = \operatorname{sign}(c_1)\cdot 90°$$
$$\theta_1 \text{ conosciuto } \neq \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right)$$

diversamente da $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ che avrà invece i seguenti valori:

$$
\begin{aligned}
t_2 &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \\
\gamma_2 &= \arctan\left(\frac{c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\right) \\
\theta_2 &= \arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right)
\end{aligned}
$$

Ne consegue che le coordinate che stiamo cercando potranno essere scritte nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
a_{\frac{1}{2}} =& \frac{\sqrt{c_1^2}}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \cdot \cos\left[\operatorname{sign}(c_1) \cdot 90^\circ - \arctan\left(\frac{c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\right)\right] \cdot \\
& \cdot \cos\left[\theta_1 - \arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right)\right] \\
b_{\frac{1}{2}} =& \frac{\sqrt{c_1^2}}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \cdot \cos\left[\operatorname{sign}(c_1) \cdot 90^\circ - \arctan\left(\frac{c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\right)\right] \cdot \\
& \cdot \sin\left[\theta_1 - \arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right)\right] \\
c_{\frac{1}{2}} =& \frac{\sqrt{c_1^2}}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \cdot \sin\left[\operatorname{sign}(c_1) \cdot 90^\circ - \arctan\left(\frac{c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Per proseguire con la dimostrazione è necessario servirsi delle seguenti relazioni trigonometriche notevoli:

$$
\begin{aligned}
&\cos(x - y) = \cos(x) \cdot \cos(y) + \sin(x) \cdot \sin(y) \\
&\sin(x - y) = \sin(x) \cdot \cos(y) - \cos(x) \cdot \sin(y) \\
&\cos\left[\arctan\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\right] = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + c^2}} \\
&\sin\left[\arctan\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\right] = \sqrt{\frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}} \\
&\cos\left[\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right] = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2}} \\
&\sin\left[\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right] = \sqrt{\frac{b^2}{a^2 + b^2}} \\
&\cos\left[\operatorname{sign}(x) \cdot 90^\circ - y\right] = \operatorname{sign}(x) \cdot sin(y) \\
&\sin\left[\operatorname{sign}(x) \cdot 90^\circ - y\right] = \operatorname{sign}(x) \cdot cos(y)
\end{aligned}
$$

Per determinare il valore della coordinata $a_{\frac{1}{2}}$ i passaggi da svolgere saranno i seguenti:

$$\begin{aligned}
a_{\frac{1}{2}} =& \operatorname{sign}(c_1) \cdot \frac{\sqrt{c_1^2}}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \cdot \sqrt{\frac{c_2^2}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \cdot \\
& \cdot \left[\sqrt{\frac{a_2^2}{a_2^2+b_2^2}} \cdot \cos(\theta_1) + \sqrt{\frac{b_2^2}{a_2^2+b_2^2}} \cdot \sin(\theta_1)\right] = \\
=& \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2} \cdot \operatorname{sign}(c_1) \cdot \sqrt{c_1^2} \cdot \sqrt{c_2^2} \cdot \frac{\sqrt{a_2^2} \cdot \cos(\theta_1) + \sqrt{b_2^2} \cdot \sin(\theta_1)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}
\end{aligned}$$

Per determinare il valore della coordinata $b_{\frac{1}{2}}$ i passaggi da svolgere saranno i seguenti:

$$\begin{aligned}
b_{\frac{1}{2}} =& \operatorname{sign}(c_1) \cdot \frac{\sqrt{c_1^2}}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \cdot \sqrt{\frac{c_2^2}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \cdot \\
& \cdot \left[\sqrt{\frac{a_2^2}{a_2^2+b_2^2}} \cdot \sin(\theta_1) - \sqrt{\frac{b_2^2}{a_2^2+b_2^2}} \cdot \cos(\theta_1)\right] = \\
=& \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2} \cdot \operatorname{sign}(c_1) \cdot \sqrt{c_1^2} \cdot \sqrt{c_2^2} \cdot \frac{\sqrt{a_2^2} \cdot \sin(\theta_1) - \sqrt{b_2^2} \cdot \cos(\theta_1)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}
\end{aligned}$$

Per determinare il valore della coordinata $c_{\frac{1}{2}}$ i passaggi da svolgere saranno i seguenti:

$$\begin{aligned}
c_{\frac{1}{2}} =& \operatorname{sign}(c_1) \cdot \frac{\sqrt{c_1^2}}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \cdot \sqrt{\frac{a_2^2+b_2^2}{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} = \\
=& \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2} \cdot \operatorname{sign}(c_1) \cdot \sqrt{c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2}
\end{aligned}$$

Queste relazioni hanno validità generale, nel preciso senso che sono in grado di coprire anche i casi in cui i coefficienti a_2,b_2,c_2 siano nulli (purché $o_2(a_2, b_2, c_2)$ rimanga nell'ambito dei numeri completi non situati sulla retta U).

L'unica limitazione in questo senso è data dalla necessità di evitare la seguente situazione:

$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 0$$

il che conferma l'impossibilità di dividere un numero completo $o(t, \theta, \gamma)$ per lo zero (caratterizzato proprio dai valori a_2, b_2, c_2 che rendono vera la suddetta espressione).

Volendo individuare delle relazioni che soddisfano la regola della divisione in funzione delle effettive coordinate possedute dai numeri completi coinvolti, dovremo adottare per tutti i coefficienti a,b,c la convenzione $\sqrt{x^2} = x$, tranne che per c_1 per il quale dovrà valere la convenzione $\sqrt{x^2} = |x|$. La ragione è presto detta e dipende dal fatto che se applichiamo anche per c_1 la solita convenzione, avremo:

$$\operatorname{sign}(c_1) \cdot \sqrt{c_1^2} = |c_1|$$

e quindi un risultato della divisione che dipenderà dal modulo della coordinata c_1. Imponendo invece $\sqrt{x^2} = |x|$ avremo:

$$\operatorname{sign}(c_1) \cdot \sqrt{c_1^2} = c_1$$

e quindi un risultato della divisione che dipenderà dall'effettivo valore di tale coordinata.

Le relazioni ottenute saranno le seguenti:

$$\begin{aligned}
a_{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot (c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_2 \cdot \cos(\theta_1) + b_2 \cdot \sin(\theta_1)}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \\
b_{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot (c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_2 \cdot \sin(\theta_1) - b_2 \cdot \cos(\theta_1)}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \\
c_{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot c_1 \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Dal momento che il numero $o_2(a_2, b_2, c_2)$ è in rappresentazione standard, secondo quanto stabilito dal teorema 2.11 dovremo far valere la seguente relazione:

$$\sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right|$$

che unita a quelle indicate dalle formule (2.5), dimostrano la tesi. □

A titolo esemplificativo del teorema appena dimostrato, supponiamo di dover moltiplicare il numero uscente di coordinata $c_1 = 1$ e fase $\theta_1 = 30°$ con un numero completo in rappresentazione standard avente coordinate: $a_2 = 1$, $b_2 = -1$, $c_2 = 1$.

Il loro modulo potrà essere calcolato nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
t_1 &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} = \sqrt{c_1^2} = \sqrt{1} = 1 \\
t_2 &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

mentre per le loro fasi nel caso del numero uscente abbiamo:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \operatorname{sign}(c_1) \cdot 90° = 90° \\
\theta_1 &= 30°
\end{aligned}$$

mentre nel caso del numero completo dovremo fare riferimento alle formule legate alla rappresentazione standard:

$$\gamma_2 = \arctan\left(\frac{c_2}{|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\,|}\right) = \arctan\left(\frac{1}{|\sqrt{2}|}\right) \simeq 35,26°$$
$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right) = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -45°$$

Applicando la regola della divisione otteniamo come risultato il numero completo avente i seguenti valori del modulo e delle fasi:

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\gamma_{\frac{1}{2}} = \gamma_1 - \gamma_2 \simeq 54,74°$$
$$\theta_{\frac{1}{2}} = \theta_1 - \theta_2 = 75°$$

e le seguenti coordinate:

$$a_{\frac{1}{2}} = t_{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\gamma_{\frac{1}{2}}) \cdot \cos(\theta_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos(\simeq 54,74°) \cdot \cos(75°) \simeq 0,09$$
$$b_{\frac{1}{2}} = t_{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\gamma_{\frac{1}{2}}) \cdot \sin(\theta_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos(\simeq 54,74°) \cdot \sin(75°) \simeq 0,32$$
$$c_{\frac{1}{2}} = t_{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\gamma_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin(\simeq 54,74°) = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

A questo punto possiamo verificare come le formule del precedente teorema facciano effettivamente giungere allo stesso risultato:

$$a_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2} \cdot (c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_2 \cdot \cos(\theta_1) + b_2 \cdot \sin(\theta_1)}{|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\,|} =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{\cos(30°) - \sin(30°)}{|\sqrt{2}\,|} \simeq 0,09$$
$$b_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2} \cdot (c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_2 \cdot \sin(\theta_1) - b_2 \cdot \cos(\theta_1)}{|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\,|} =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{\sin(30°) + \cos(30°)}{|\sqrt{2}\,|} \simeq 0,32$$
$$c_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2} \cdot c_1 \cdot \left|\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right| = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot |\sqrt{2}\,| = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Theorem 2.53. *Nel caso in cui solo $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ appartiene alla retta U mentre $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ è in rappresentazione complementare, la loro divisione*

potrà essere espressa nel seguente modo:

$$o_{\frac{1}{2}}(a_{\frac{1}{2}}, b_{\frac{1}{2}}, c_{\frac{1}{2}})_{(t_{\frac{1}{2}}, \theta_{\frac{1}{2}}, \gamma_{\frac{1}{2}})} = a_{\frac{1}{2}(\frac{t_1}{t_2})} + i \cdot b_{\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)} + u \cdot c_{\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)}$$

dove:

$$\begin{aligned}
a_{\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot (c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_2 \cdot \cos(\theta_1) + b_2 \cdot \sin(\theta_1)}{|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,|} \\
b_{\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot (c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_2 \cdot \sin(\theta_1) - b_2 \cdot \cos(\theta_1)}{|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,|} \\
c_{\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot c_1 \cdot \left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right|
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Dal momento che il numero $o_2(a_2, b_2, c_2)$ è in rappresentazione complementare, secondo quanto stabilito dal teorema 2.15 dovremo far valere la seguente relazione:

$$\sqrt{a_2^2 + b_2^2} = -|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,|$$

che unita a quelle indicate dalle formule (2.5), dimostrano la tesi. □

A titolo esemplificativo del teorema appena dimostrato, supponiamo di dover moltiplicare il numero uscente di coordinata $c_1 = 1$ e fase $\theta_1 = 30°$ con un numero completo in rappresentazione complementare avente coordinate: $a_2 = 1$, $b_2 = -1$, $c_2 = 1$.

Il loro modulo potrà essere calcolato nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
t_1 &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} = \sqrt{c_1^2} = \sqrt{1} = 1 \\
t_2 &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

mentre per le loro fasi nel caso del numero uscente abbiamo:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \text{sign}\,(c_1) \cdot 90° = 90° \\
\theta_1 &= 30°
\end{aligned}$$

mentre nel caso del numero completo dovremo fare riferimento alle formule legate alla rappresentazione complementare:

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= \arctan\left(\frac{c_2}{-|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,|}\right) = \arctan\left(\frac{1}{-|\sqrt{2}|}\right) \simeq 144,74° \\
\theta_2 &= \arctan\left(\frac{-b_2}{-a_2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = 135°
\end{aligned}$$

Applicando la regola della divisione otteniamo come risultato il numero completo avente i seguenti valori del modulo e delle fasi:

$$
\begin{aligned}
& t_{\frac{1}{2}} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
& \gamma_{\frac{1}{2}} = \gamma_1 - \gamma_2 \simeq -54,74° \\
& \theta_{\frac{1}{2}} = \theta_1 - \theta_2 = -105°
\end{aligned}
$$

e le seguenti coordinate:

$$
\begin{aligned}
& a_{\frac{1}{2}} = t_{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\gamma_{\frac{1}{2}}) \cdot \cos(\theta_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos(\simeq -54,74°) \cdot \cos(-105°) \simeq -0,09 \\
& b_{\frac{1}{2}} = t_{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\gamma_{\frac{1}{2}}) \cdot \sin(\theta_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos(\simeq -54,74°) \cdot \sin(-105°) \simeq -0,32 \\
& c_{\frac{1}{2}} = t_{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\gamma_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin(\simeq -54,74°) = -\frac{\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}
$$

A questo punto possiamo verificare come le formule del precedente teorema facciano effettivamente giungere allo stesso risultato:

$$
\begin{aligned}
a_{\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot (c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_2 \cdot \cos(\theta_1) + b_2 \cdot \sin(\theta_1)}{|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,|} = \\
&= -\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{\cos(30°) - \sin(30°)}{|\sqrt{2}\,|} \simeq -0,09 \\
b_{\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot (c_1 \cdot c_2) \cdot \frac{a_2 \cdot \sin(\theta_1) - b_2 \cdot \cos(\theta_1)}{|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,|} = \\
&= -\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{\sin(30°) + \cos(30°)}{|\sqrt{2}\,|} \simeq -0,32 \\
c_{\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot c_1 \cdot \left|\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right| = -\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot |\sqrt{2}\,| = -\frac{\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}
$$

Theorem 2.54. *Nel caso in cui solo $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ appartiene alla retta U mentre $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ è in rappresentazione standard, la loro divisione potrà* *essere espressa nel seguente modo:*

$$o_{\frac{1}{2}}(a_{\frac{1}{2}}, b_{\frac{1}{2}}, c_{\frac{1}{2}})_{(t_{\frac{1}{2}}, \theta_{\frac{1}{2}}, \gamma_{\frac{1}{2}})} = a_{\frac{1}{2}(\frac{t_1}{t_2})} + i \cdot b_{\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)} + u \cdot c_{\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)}$$

dove:

$$a_{\frac{1}{2}} = \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{a_1 \cdot \cos(\theta_2) + b_1 \cdot \sin(\theta_2)}{|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,|}$$
$$b_{\frac{1}{2}} = \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{b_1 \cdot \cos(\theta_2) - a_1 \cdot \sin(\theta_2)}{|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,|}$$
$$c_{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{c_2} \cdot \left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right|$$

Dimostrazione. La divisione tra due numeri completi, come sappiamo, soddisfa la seguente formula:

$$o_{\frac{1}{2}}(t_{\frac{1}{2}}, \theta_{\frac{1}{2}}, \gamma_{\frac{1}{2}}) = \frac{t_1}{t_2} \cdot \{[\cos(\gamma_1 - \gamma_2) \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)] +$$
$$+ i \cdot [\cos(\gamma_1 - \gamma_2) \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)] + u \cdot [\sin(\gamma_1 - \gamma_2)]\}$$

Dal momento che $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ appartiene alla retta U avrà i seguenti valori di modulo e fasi:

$$t_2 = \sqrt{c_2^2}$$
$$\gamma_2 = \text{sign}(c_2) \cdot 90°$$
$$\theta_2 \text{ conosciuto } \neq \arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right)$$

diversamente da $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ che avrà invece i seguenti valori:

$$t_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$$
$$\gamma_1 = \arctan\left(\frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}\right)$$
$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right)$$

Ne consegue che le coordinate che stiamo cercando potranno essere scritte

nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
a_{\frac{1}{2}} =& \frac{\sqrt{c_1^2+b_1^2+c_1^2}}{\sqrt{c_2^2}} \cdot \cos\left[\arctan\left(\frac{c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\right) - \operatorname{sign}(c_2)\cdot 90^\circ\right]\cdot \\
& \cdot \cos\left[\arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right) - \theta_2\right] \\
b_{\frac{1}{2}} =& \frac{\sqrt{c_1^2+b_1^2+c_1^2}}{\sqrt{c_2^2}} \cdot \cos\left[\arctan\left(\frac{c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\right) - \operatorname{sign}(c_2)\cdot 90^\circ\right]\cdot \\
& \cdot \sin\left[\arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right) - \theta_2\right] \\
c_{\frac{1}{2}} =& \frac{\sqrt{c_1^2+b_1^2+c_1^2}}{\sqrt{c_2^2}} \cdot \sin\left[\arctan\left(\frac{c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\right) - \operatorname{sign}(c_2)\cdot 90^\circ\right]
\end{aligned}
$$

Per proseguire con la dimostrazione è necessario servirsi delle seguenti relazioni trigonometriche notevoli:

$$
\begin{aligned}
&\cos(x-y) = \cos(x)\cdot\cos(y) + \sin(x)\cdot\sin(y) \\
&\sin(x-y) = \sin(x)\cdot\cos(y) - \cos(x)\cdot\sin(y) \\
&\cos\left[\arctan\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right] = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2}} \\
&\sin\left[\arctan\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right] = \sqrt{\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}} \\
&\cos\left[\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right] = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}} \\
&\sin\left[\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right] = \sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2}} \\
&\cos\left[x - \operatorname{sign}(y)\cdot 90^\circ\right] = \operatorname{sign}(y)\cdot sin(x) \\
&\sin\left[x - \operatorname{sign}(y)\cdot 90^\circ\right] = -\operatorname{sign}(y)\cdot cos(x)
\end{aligned}
$$

Per determinare il valore della coordinata $a_{\frac{1}{2}}$ i passaggi da svolgere saranno i seguenti:

$$
\begin{aligned}
a_{\frac{1}{2}} =& \operatorname{sign}(c_2)\cdot\frac{\sqrt{c_1^2+b_1^2+c_1^2}}{\sqrt{c_2^2}}\cdot\sqrt{\frac{c_1^2}{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}\cdot \\
& \cdot\left[\sqrt{\frac{a_1^2}{a_1^2+b_1^2}}\cdot\cos(\theta_2) + \sqrt{\frac{b_1^2}{a_1^2+b_1^2}}\cdot\sin(\theta_2)\right] = \\
=& \operatorname{sign}(c_2)\cdot\frac{\sqrt{c_1^2}}{\sqrt{c_2^2}}\cdot\frac{\sqrt{a_1^2}\cdot\cos(\theta_2)+\sqrt{b_1^2}\cdot\sin(\theta_2)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}
\end{aligned}
$$

Per determinare il valore della coordinata $b_{\frac{1}{2}}$ i passaggi da svolgere saranno i seguenti:

$$\begin{aligned}b_{\frac{1}{2}} =& \operatorname{sign}(c_2) \cdot \frac{\sqrt{c_1^2+b_1^2+c_1^2}}{\sqrt{c_2^2}} \cdot \sqrt{\frac{c_1^2}{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} \cdot \\ &\cdot \left[\sqrt{\frac{b_1^2}{a_1^2+b_1^2}} \cdot \cos(\theta_2) - \sqrt{\frac{a_1^2}{a_1^2+b_1^2}} \cdot \sin(\theta_2)\right] = \\ =& \operatorname{sign}(c_2) \cdot \frac{\sqrt{c_1^2}}{\sqrt{c_2^2}} \cdot \frac{\sqrt{b_1^2} \cdot \cos(\theta_2) - \sqrt{a_1^2} \cdot \sin(\theta_2)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\end{aligned}$$

Per determinare il valore della coordinata $c_{\frac{1}{2}}$ i passaggi da svolgere saranno i seguenti:

$$c_{\frac{1}{2}} = -\operatorname{sign}(c_2) \cdot \frac{\sqrt{c_1^2+b_1^2+c_1^2}}{\sqrt{c_2^2}} \cdot \sqrt{\frac{a_1^2+b_1^2}{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = -\operatorname{sign}(c_2) \cdot \frac{1}{\sqrt{c_2^2}} \cdot \sqrt{a_1^2+b_1^2}$$

Queste relazioni hanno validità generale, nel preciso senso che sono in grado di coprire anche i casi in cui i coefficienti a_1,b_1,c_1 siano nulli (purché $o_1(a_1, b_1, c_1)$ rimanga nell'ambito dei numeri completi non situati sulla retta U).

L'unica limitazione in questo senso è data dalla necessità di evitare la seguente situazione:

$$c_2^2 = 0$$

il che conferma l'impossibilità di dividere un numero completo $o(t, \theta, \gamma)$ per lo zero (caratterizzato proprio dai valori di c_2 che rendono vera la suddetta espressione).

Volendo individuare delle relazioni che soddisfano la regola della moltiplicazione in funzione delle effettive coordinate nei numeri completi coinvolti dovremo adottare per tutti i coefficienti a,b,c la convenzione $\sqrt{x^2} = x$, tranne che per c_2 per il quale dovrà valere la convenzione $\sqrt{x^2} = |x|$. La ragione è presto detta e dipende dal fatto che se applichiamo anche per c_2 la solita convenzione, avremo:

$$\frac{\operatorname{sign}(c_2)}{\sqrt{c_2^2}} = \frac{1}{|c_2|}$$

e quindi un risultato della moltiplicazione che dipenderà dal modulo della coordinata c_2. Imponendo invece $\sqrt{x^2} = |x|$ avremo:

$$\frac{\operatorname{sign}(c_2)}{\sqrt{c_2^2}} = \frac{1}{c_2}$$

e quindi un risultato della moltiplicazione che dipenderà dall'effettivo valore di tale coordinata.

Le relazioni ottenute saranno le seguenti:

$$\begin{aligned} a_{\frac{1}{2}} &= \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{a_1 \cdot \cos(\theta_2) + b_1 \cdot \sin(\theta_2)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \\ b_{\frac{1}{2}} &= \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{b_1 \cdot \cos(\theta_2) - a_1 \cdot \sin(\theta_2)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \\ c_{\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{c_2} \cdot \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dal momento che il numero $o_1(a_1, b_1, c_1)$ è in rappresentazione standard, secondo quanto stabilito dal teorema 2.11 dovremo far valere la seguente relazione:

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \left| \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \right|$$

che unita a quelle indicate dalle formule (2.6), dimostrano la tesi. □

A titolo esemplificativo del teorema appena dimostrato, supponiamo di dover moltiplicare il numero numero completo in rappresentazione standard avente coordinate: $a_1 = 1$, $b_1 = -1$, $c_1 = 1$ con un uscente di coordinata $c_2 = 1$ e fase $\theta_2 = 30°$.

Il loro modulo potrà essere calcolato nel seguente modo:

$$\begin{aligned} t_1 &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3} \\ t_2 &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} = \sqrt{c_2^2} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

mentre per le loro fasi nel caso del numero uscente abbiamo:

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \text{sign}\,(c_2) \cdot 90° = 90° \\ \theta_2 &= 30° \end{aligned}$$

mentre nel caso del numero completo dovremo fare riferimento alle formule legate alla rappresentazione standard:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \arctan\left(\frac{c_1}{\left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right|}\right) = \arctan\left(\frac{1}{|\sqrt{2}|}\right) \simeq 35,26° \\ \theta_1 &= \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right) = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -45° \end{aligned}$$

Applicando la regola della divisione otteniamo come risultato il numero completo avente i seguenti valori del modulo e delle fasi:

$$\begin{aligned} t_{\frac{1}{2}} &= \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{3} \\ \gamma_{\frac{1}{2}} &= \gamma_1 - \gamma_2 \simeq -54,74° \\ \theta_{\frac{1}{2}} &= \theta_1 - \theta_2 = -75° \end{aligned}$$

e le seguenti coordinate:

$$\begin{aligned}
a_{\frac{1}{2}} &= t_{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\gamma_{\frac{1}{2}}) \cdot \cos(\theta_{\frac{1}{2}}) = \sqrt{3} \cdot \cos(\simeq -54,74°) \cdot \cos(-75°) \simeq 0,26 \\
b_{\frac{1}{2}} &= t_{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\gamma_{\frac{1}{2}}) \cdot \sin(\theta_{\frac{1}{2}}) = \sqrt{3} \cdot \cos(\simeq -54,74°) \cdot \sin(-75°) \simeq -0,97 \\
c_{\frac{1}{2}} &= t_{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\gamma_{\frac{1}{2}}) = \sqrt{3} \cdot \sin(\simeq -54,74°) = -\sqrt{2}
\end{aligned}$$

A questo punto possiamo verificare come le formule del precedente teorema facciano effettivamente giungere allo stesso risultato:

$$\begin{aligned}
a_{\frac{1}{2}} &= \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{a_1 \cdot \cos(\theta_2) + b_1 \cdot \sin(\theta_2)}{|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,|} = \frac{\cos(30°) - \sin(30°)}{|\sqrt{2}\,|} \simeq 0,26 \\
b_{\frac{1}{2}} &= \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{b_1 \cdot \cos(\theta_2) - a_1 \cdot \sin(\theta_2)}{|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,|} = \frac{-\cos(30°) - \sin(30°)}{|\sqrt{2}\,|} \simeq -0,97 \\
c_{\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{c_2} \cdot \left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right| = -\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Theorem 2.55. *Nel caso in cui solo $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ appartiene alla retta U mentre $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ è in rappresentazione complementare, la loro divisione potrà essere espressa nel seguente modo:*

$$o_{\frac{1}{2}}(a_{\frac{1}{2}}, b_{\frac{1}{2}}, c_{\frac{1}{2}})_{(t_{\frac{1}{2}}, \theta_{\frac{1}{2}}, \gamma_{\frac{1}{2}})} = a_{\frac{1}{2}(\frac{t_1}{t_2})} + i \cdot b_{\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)} + u \cdot c_{\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)}$$

dove:

$$\begin{aligned}
a_{\frac{1}{2}} &= -\frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{a_1 \cdot \cos(\theta_2) + b_1 \cdot \sin(\theta_2)}{|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,|} \\
b_{\frac{1}{2}} &= -\frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{b_1 \cdot \cos(\theta_2) - a_1 \cdot \sin(\theta_2)}{|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,|} \\
c_{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{c_2} \cdot \left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right|
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Dal momento che il numero $o_1(a_1, b_1, c_1)$ è in rappresentazione complementare, secondo quanto stabilito dal teorema 2.15 dovremo far valere la seguente relazione:

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = -|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,|$$

che unita a quelle indicate dalle formule (2.6), dimostrano la tesi. □

A titolo esemplificativo del teorema appena dimostrato, supponiamo di dover moltiplicare un numero completo in rappresentazione complementare avente coordinate: $a_2 = 1$, $b_2 = -1$, $c_2 = 1$ con il numero uscente di coordinata $c_1 = 1$ e fase $\theta_1 = 30°$.

Il loro modulo potrà essere calcolato nel seguente modo:

$$t_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$
$$t_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} = \sqrt{c_2^2} = \sqrt{1} = 1$$

mentre per le loro fasi nel caso del numero uscente abbiamo:

$$\gamma_2 = \operatorname{sign}(c_2) \cdot 90° = 90°$$
$$\theta_2 = 30°$$

mentre nel caso del numero completo dovremo fare riferimento alle formule legate alla rappresentazione complementare:

$$\gamma_1 = \arctan\left(\frac{c_1}{-\left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\right|}\right) = \arctan\left(\frac{1}{-|\sqrt{2}|}\right) \simeq 144,74°$$
$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{-b_1}{-a_1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = 135°$$

Applicando la regola della divisione otteniamo come risultato il numero completo avente i seguenti valori del modulo e delle fasi:

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{3}$$
$$\gamma_{\frac{1}{2}} = \gamma_1 - \gamma_2 \simeq 54,74°$$
$$\theta_{\frac{1}{2}} = \theta_1 - \theta_2 = 105°$$

e le seguenti coordinate:

$$a_{\frac{1}{2}} = t_{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\gamma_{\frac{1}{2}}) \cdot \cos(\theta_{\frac{1}{2}}) = \sqrt{3} \cdot \cos(\simeq 54,74°) \cdot \cos(105°) \simeq -0,26$$
$$b_{\frac{1}{2}} = t_{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\gamma_{\frac{1}{2}}) \cdot \sin(\theta_{\frac{1}{2}}) = \sqrt{3} \cdot \cos(\simeq 54,74°) \cdot \sin(105°) \simeq 0,97$$
$$c_{\frac{1}{2}} = t_{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\gamma_{\frac{1}{2}}) = \sqrt{3} \cdot \sin(\simeq 54,74°) = \sqrt{2}$$

A questo punto possiamo verificare come le formule del precedente teorema facciano effettivamente giungere allo stesso risultato:

$$a_{\frac{1}{2}} = -\frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{a_1 \cdot \cos(\theta_2) + b_1 \cdot \sin(\theta_2)}{|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,|} = -\frac{\cos(30°) - \sin(30°)}{|\sqrt{2}\,|} \simeq -0,26$$
$$b_{\frac{1}{2}} = -\frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{b_1 \cdot \cos(\theta_2) - a_1 \cdot \sin(\theta_2)}{|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,|} = -\frac{-\cos(30°) - \sin(30°)}{|\sqrt{2}\,|} \simeq 0,97$$
$$c_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{c_2} \cdot \left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right| = \sqrt{2}$$

Theorem 2.56. *Nel caso in cui sia $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ che $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ appartengono alla retta U, la loro divisione potrà essere espressa nel seguente modo:*

$$o_{\frac{1}{2}}(a_{\frac{1}{2}}, b_{\frac{1}{2}}, c_{\frac{1}{2}})_{(t_{\frac{1}{2}}, \theta_{\frac{1}{2}}, \gamma_{\frac{1}{2}})} = a_{\frac{1}{2}(\frac{t_1}{t_2})} + i \cdot b_{\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)} + u \cdot c_{\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)}$$

dove:

$$a_{\frac{1}{2}} = \frac{c_1}{c_2} \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)$$
$$b_{\frac{1}{2}} = \frac{c_1}{c_2} \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)$$
$$c_{\frac{1}{2}} = 0$$

Dimostrazione. La divisione tra due numeri completi, come sappiamo, soddisfa la seguente formula:

$$o_{\frac{1}{2}}(t_{\frac{1}{2}}, \theta_{\frac{1}{2}}, \gamma_{\frac{1}{2}}) = \frac{t_1}{t_2} \cdot \{[\cos(\gamma_1 - \gamma_2) \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)] +$$
$$+ i \cdot [\cos(\gamma_1 - \gamma_2) \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)] + u \cdot [\sin(\gamma_1 - \gamma_2)]\}$$

Dal momento che $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ e $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ appartengono alla retta U avranno i seguenti valori di modulo e fasi:

$$t_1 = \sqrt{c_1^2}$$
$$t_2 = \sqrt{c_2^2}$$
$$\gamma_1 = \mathrm{sign}(c_1) \cdot 90°$$
$$\gamma_2 = \mathrm{sign}(c_2) \cdot 90°$$
$$\theta_1 \text{ conosciuto } \neq \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right)$$
$$\theta_2 \text{ conosciuto } \neq \arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right)$$

Ne consegue che le coordinate che stiamo cercando potranno essere scritte nel seguente modo:

$$a_{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{c_1^2}}{\sqrt{c_2^2}} \cdot \cos[\mathrm{sign}(c_1) \cdot 90° - \mathrm{sign}(c_2) \cdot 90°] \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)$$
$$b_{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{c_1^2}}{\sqrt{c_2^2}} \cdot \cos[\mathrm{sign}(c_1) \cdot 90° - \mathrm{sign}(c_2) \cdot 90°] \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)$$
$$c_{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{c_1^2}}{\sqrt{c_2^2}} \cdot \sin[\mathrm{sign}(c_1) \cdot 90° - \mathrm{sign}(c_2) \cdot 90°]$$

Considerando che quando c_1 e c_2 hanno segni concordi si ottiene:

$$\cos\left[\operatorname{sign}(c_1)\cdot 90° - \operatorname{sign}(c_2)\cdot 90°\right] = \cos(\pm 0°) = 1 = \operatorname{sign}(c_1)\cdot\operatorname{sign}(c_2)$$
$$\sin\left[\operatorname{sign}(c_1)\cdot 90° - \operatorname{sign}(c_2)\cdot 90°\right] = \sin(\pm 0°) = 0$$

e che che quando hanno segni discordi si ottiene:

$$\cos\left[\operatorname{sign}(c_1)\cdot 90° - \operatorname{sign}(c_2)\cdot 90°\right] = \cos(\pm 180°) = -1 = \operatorname{sign}(c_1)\cdot\operatorname{sign}(c_2)$$
$$\sin\left[\operatorname{sign}(c_1)\cdot 90° - \operatorname{sign}(c_2)\cdot 90°\right] = \sin(\pm 180°) = 0$$

potremo scrivere:

$$\begin{aligned}
a_{\frac{1}{2}} &= \operatorname{sign}(c_1)\cdot\operatorname{sign}(c_2)\cdot\frac{\sqrt{c_1^2}}{\sqrt{c_2^2}}\cdot\cos(\theta_1-\theta_2)\\
b_{\frac{1}{2}} &= \operatorname{sign}(c_1)\cdot\operatorname{sign}(c_2)\cdot\frac{\sqrt{c_1^2}}{\sqrt{c_2^2}}\cdot\sin(\theta_1-\theta_2)\\
c_{\frac{1}{2}} &= 0
\end{aligned}$$

Volendo individuare delle relazioni che soddisfano la regola della moltiplicazione in funzione delle effettive coordinate nei numeri completi coinvolti dovremo adottare per i coefficienti c_1,c_2 la convenzione $\sqrt{x^2} = |x|$. Infatti in questo modo otteniamo:

$$\operatorname{sign}(c_1)\cdot\sqrt{c_1^2} = c_1$$
$$\frac{\operatorname{sign}(c_2)}{\sqrt{c_2^2}} = \frac{1}{c_2}$$

e quindi un risultato della moltiplicazione che dipenderà dall'effettivo valore di tali coordinate: La relazione che otteniamo seguendo queste convenzioni dimostra la tesi. □

A titolo esemplificativo del teorema appena dimostrato, supponiamo di dover moltiplicare un numero uscente di coordinata $c_1 = 1$ e fase $\theta_1 = 30°$ con il numero uscente di coordinata $c_2 = 1$ e fase $\theta_2 = 30°$.

Il loro modulo potrà essere calcolato nel seguente modo:

$$t_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} = \sqrt{c_1^2} = \sqrt{1} = 1$$
$$t_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} = \sqrt{c_2^2} = \sqrt{1} = 1$$

mentre per le loro fasi abbiamo:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \operatorname{sign}(c_1)\cdot 90° = 90°\\
\gamma_2 &= \operatorname{sign}(c_2)\cdot 90° = 90°\\
\theta_1 &= 30°\\
\theta_2 &= 30°
\end{aligned}$$

Applicando la regola della divisione otteniamo come risultato il numero completo avente i seguenti valori del modulo e delle fasi:

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{t_1}{t_2} = 1$$
$$\gamma_{\frac{1}{2}} = \gamma_1 - \gamma_2 = 0°$$
$$\theta_{\frac{1}{2}} = \theta_1 - \theta_2 = 0°$$

e le seguenti coordinate:

$$a_{\frac{1}{2}} = t_{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\gamma_{\frac{1}{2}}) \cdot \cos(\theta_{\frac{1}{2}}) = 1 \cdot \cos(0°) \cdot \cos(0°) = 1$$
$$b_{\frac{1}{2}} = t_{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\gamma_{\frac{1}{2}}) \cdot \sin(\theta_{\frac{1}{2}}) = 1 \cdot \cos(0°) \cdot \sin(0°) = 0$$
$$c_{\frac{1}{2}} = t_{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\gamma_{\frac{1}{2}}) = 1 \cdot \sin(0°) = 0$$

A questo punto possiamo verificare come le formule del precedente teorema facciano effettivamente giungere allo stesso risultato:

$$a_{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{c_1^2}}{\sqrt{c_2^2}} \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) = 1 \cdot \cos(0°) = 1$$
$$b_{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{c_1^2}}{\sqrt{c_2^2}} \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2) = 1 \cdot \sin(0°) = 0$$
$$c_{\frac{1}{2}} = 0$$

Theorem 2.57. *Risulta indivisibile rispetto alla divisione il numero completo 0, ovvero per:*

$$o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1) = 0$$

si ha:

$$\frac{o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)}{o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)} = 0$$

Dimostrazione. Essendo t_1,θ_1,γ_1,t_2,θ_2,γ_2 dei numeri reali possiamo scrivere:

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{0}{t_2} = 0$$
$$\theta_{\frac{1}{2}} = \theta_1 - \theta_2 = \theta_1 - \mathit{indeterminato} = \mathit{indeterminato}$$
$$\gamma_{\frac{1}{2}} = \gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_1 - \mathit{indeterminato} = \mathit{indeterminato}$$

dimostrando la tesi. □

Theorem 2.58. *Risulta neutro rispetto alla divisione il numero completo* $1_{(S)}$*, ovvero per:*

$$o_2(a_2, b_2, c_2)_{(S)} = 1_{(S)}$$

si ha:

$$\frac{o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)}{o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)} = o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$$

Dimostrazione. Essendo t_1,θ_1,γ_1,t_2,θ_2,γ_2 dei numeri reali possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} t_{\frac{1}{2}} &= \frac{t_1}{t_2} = \frac{t_1}{1} = t_1 \\ \theta_{\frac{1}{2}} &= \theta_1 - \theta_2 = \theta_1 - 0 = \theta_1 \\ \gamma_{\frac{1}{2}} &= \gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_1 - 0 = \gamma_1 \end{aligned}$$

dimostrando la tesi. □

Theorem 2.59. *Risulta identico rispetto alla divisione il numero completo che che identifica la stessa posizione rispetto all'origine, ovvero per:*

$$o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2) = o_2(t_1, \theta_1, \gamma_1)$$

si ha:

$$\frac{o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)}{o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)} = 1_{(S)}$$

Dimostrazione. Essendo t_1,θ_1,γ_1,t_2,θ_2,γ_2 dei numeri reali possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} t_{\frac{1}{2}} &= \frac{t_1}{t_2} = \frac{t_1}{t_1} = 1 \\ \theta_{\frac{1}{2}} &= \theta_1 - \theta_2 = \theta_1 - \theta_1 = 0 \\ \gamma_{\frac{1}{2}} &= \gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_1 - \gamma_1 = 0 \end{aligned}$$

dimostrando la tesi. □

Theorem 2.60. *Vale la proprietà invariantiva, ovvero:*

$$\begin{aligned} \frac{o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)}{o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)} &= \frac{[o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1) \cdot o_3(t_3, \theta_3, \gamma_3)]}{[o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2) \cdot o_3(t_3, \theta_3, \gamma_3)]} \\ \frac{o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)}{o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)} &= \frac{\frac{o_1(t_1,\theta_1,\gamma_1)}{o_3(t_3,\theta_3,\gamma_3)}}{\frac{o_2(t_2,\theta_2,\gamma_2)}{o_3(t_3,\theta_3,\gamma_3)}} \end{aligned}$$

Dimostrazione. Essendo t_1,θ_1,γ_1,t_2,θ_2,γ_2,t_3,θ_3,γ_3 dei numeri reali possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} t_{\frac{1}{2}} &= \frac{t_1}{t_2} \\ \theta_{\frac{1}{2}} &= (\theta_1 - \theta_2) \\ \gamma_{\frac{1}{2}} &= (\gamma_1 - \gamma_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{\frac{(1\cdot 3)}{(2\cdot 3)}} &= \frac{t_1 \cdot t_3}{t_2 \cdot t_3} = \frac{t_1}{t_2} \\ \theta_{\frac{(1\cdot 3)}{(2\cdot 3)}} &= (\theta_1 + \theta_3) - (\theta_2 + \theta_3) = \theta_1 - \theta_2 \\ \gamma_{\frac{(1\cdot 3)}{(2\cdot 3)}} &= (\gamma_1 + \gamma_3) - (\gamma_2 + \gamma_3) = \gamma_1 - \gamma_2 \end{aligned}$$

$$t_{\frac{(\frac{1}{3})}{(\frac{2}{3})}} = \frac{\frac{t_1}{t_3}}{\frac{t_2}{t_3}} = \frac{t_1}{t_2}$$

$$\theta_{\frac{(\frac{1}{3})}{(\frac{2}{3})}} = (\theta_1 - \theta_3) - (\theta_2 - \theta_3) = \theta_1 - \theta_2$$

$$\gamma_{\frac{(\frac{1}{3})}{(\frac{2}{3})}} = (\gamma_1 - \gamma_3) - (\gamma_2 - \gamma_3) = \gamma_1 - \gamma_2$$

dimostrando la tesi. □

Theorem 2.61. *Non vale la proprietà distributiva rispetto all'addizione, ovvero per:*

$$o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1) = o_3(t_3, \theta_3, \gamma_3) + o_4(t_4, \theta_4, \gamma_4)$$

si ha:

$$\frac{o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)}{o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)} \neq \left[\frac{o_3(t_3, \theta_3, \gamma_3)}{o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)}\right] + \left[\frac{o_4(t_4, \theta_4, \gamma_4)}{o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)}\right]$$

Dimostrazione. Facendo riferimento alla situazione descritta dal teorema 2.48 e considerando che a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2, a_3,b_3,c_3,a_4,b_4,c_4 sono numeri reali, possiamo scrivere:

$$c_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot \left[c_1 \cdot \left|\sqrt{(a_2^2 + b_2^2)}\right| - c_2 \cdot \left|\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)}\right|\right]$$

$$\begin{aligned}
c_{(\frac{3}{2})+(\frac{4}{2})} =& \frac{1}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot \left[c_3 \cdot \left|\sqrt{(a_2^2 + b_2^2)}\right| - c_2 \cdot \left|\sqrt{(a_3^2 + b_3^2)}\right|\right] + \\
&+ \frac{1}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot \left[c_4 \cdot \left|\sqrt{(a_2^2 + b_2^2)}\right| - c_2 \cdot \left|\sqrt{(a_4^2 + b_4^2)}\right|\right] = \\
=& \frac{1}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot \left\{(c_3 + c_4) \cdot \left|\sqrt{(a_2^2 + b_2^2)}\right| + \right. \\
&\left. - c_2 \cdot \left[\left|\sqrt{(a_3^2 + b_3^2)}\right| + \left|\sqrt{(a_4^2 + b_4^2)}\right|\right]\right\} = \\
=& \frac{1}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot \left\{c_1 \cdot \left|\sqrt{(a_2^2 + b_2^2)}\right| + \right. \\
&\left. - c_2 \cdot \left[\left|\sqrt{(a_3^2 + b_3^2)}\right| + \left|\sqrt{(a_4^2 + b_4^2)}\right|\right]\right\} \neq c_{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

dimostrando la tesi. □

Theorem 2.62. *Non vale la proprietà distributiva rispetto alla sottrazione, ovvero per:*

$$o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1) = o_3(t_3, \theta_3, \gamma_3) - o_4(t_4, \theta_4, \gamma_4)$$

si ha:

$$\frac{o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)}{o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)} \neq \left[\frac{o_3(t_3, \theta_3, \gamma_3)}{o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)}\right] - \left[\frac{o_4(t_4, \theta_4, \gamma_4)}{o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)}\right]$$

Dimostrazione. Facendo riferimento alla situazione descritta dal teorema 2.48 e considerando che a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2, a_3,b_3,c_3,a_4,b_4,c_4 sono numeri reali, possiamo scrivere:

$$c_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2} \cdot \left[c_1 \cdot \left|\sqrt{(a_2^2+b_2^2)}\right| - c_2 \cdot \left|\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}\right|\right]$$

$$\begin{aligned} c_{(\frac{3}{2})-(\frac{4}{2})} =& \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2} \cdot \left[c_3 \cdot \left|\sqrt{(a_2^2+b_2^2)}\right| - c_2 \cdot \left|\sqrt{(a_3^2+b_3^2)}\right|\right] + \\ & - \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2} \cdot \left[c_4 \cdot \left|\sqrt{(a_2^2+b_2^2)}\right| - c_2 \cdot \left|\sqrt{(a_4^2+b_4^2)}\right|\right] = \\ =& \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2} \cdot \left\{(c_3-c_4) \cdot \left|\sqrt{(a_2^2+b_2^2)}\right| + \right. \\ & \left. - c_2 \cdot \left[\left|\sqrt{(a_3^2+b_3^2)}\right| - \left|\sqrt{(a_4^2+b_4^2)}\right|\right]\right\} = \\ =& \frac{1}{a_2^2+b_2^2+c_2^2} \cdot \left\{c_1 \cdot \left|\sqrt{(a_2^2+b_2^2)}\right| + \right. \\ & \left. - c_2 \cdot \left[\left|\sqrt{(a_3^2+b_3^2)}\right| - \left|\sqrt{(a_4^2+b_4^2)}\right|\right]\right\} \neq c_{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

dimostrando la tesi. □

Theorem 2.63. *Vale la proprietà di equivalenza moltiplicazione divisione, ovvero:*

$$o_1(t_1,\theta_1,\gamma_1) \cdot o_2(t_2,\theta_2,\gamma_2) = \frac{o_1(t_1,\theta_1,\gamma_1)}{\frac{1}{o_2(t_2,\theta_2,\gamma_2)}}$$

$$\frac{o_1(t_1,\theta_1,\gamma_1)}{o_2(t_2,\theta_2,\gamma_2)} = o_1(t_1,\theta_1,\gamma_1) \cdot \frac{1}{o_2(t_2,\theta_2,\gamma_2)}$$

Dimostrazione. Essendo t_1,θ_1,γ_1,t_2,θ_2,γ_2 dei numeri reali possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} t_{1\cdot 2} &= t_1 \cdot t_2 \\ \theta_{1\cdot 2} &= \theta_1 + \theta_2 \\ \gamma_{1\cdot 2} &= \gamma_1 + \gamma_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{\frac{1}{\frac{1}{2}}} &= \frac{t_1}{\frac{1}{t_2}} = t_1 \cdot t_2 \\ \theta_{\frac{1}{\frac{1}{2}}} &= \theta_1 - (-\theta_2) = \theta_1 + \theta_2 \\ \gamma_{\frac{1}{\frac{1}{2}}} &= \gamma_1 - (-\gamma_2) = \gamma_1 + \gamma_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{\frac{1}{2}} &= \frac{t_1}{t_2} \\ \theta_{\frac{1}{2}} &= (\theta_1 - \theta_2) \\ \gamma_{\frac{1}{2}} &= (\gamma_1 - \gamma_2) \end{aligned}$$

$$t_{1\cdot\frac{1}{2}} = t_1 \cdot \frac{1}{t_2} = \frac{t_1}{t_2}$$
$$\theta_{1\cdot\frac{1}{2}} = \theta_1 + (-\theta_2) = \theta_1 - \theta_2$$
$$\gamma_{1\cdot\frac{1}{2}} = \gamma_1 + (-\gamma_2) = \gamma_1 - \gamma_2$$

dimostrando la tesi. □

2.6 Potenza n-esima

Definition 2.64. *Nello spazio RIU viene definita potenza n-esima del numero completo $o(t,\theta,\gamma)$ con n (numero naturale) detto esponente e $o(t,\theta,\gamma)$ base, il numero $o_{\uparrow n}(t_{\uparrow n},\theta_{\uparrow n},\gamma_{\uparrow n})$ rappresentato anche con il simbolo $o(t,\theta,\gamma)^n$ che soddisfa le seguenti condizioni:*

1. $o(t,\theta,\gamma)^n = o(t,\theta,\gamma) \cdot \ldots \cdot o(t,\theta,\gamma)$ *for* $n > 0$
2. $o(t,\theta,\gamma)^n = \frac{o(t,\theta,\gamma)}{o(t,\theta,\gamma)} = 1$ *for* $n = 0$
3. $o(t,\theta,\gamma)^n = \cfrac{1}{\cfrac{\cfrac{o(t,\theta,\gamma)}{\ldots}}{o(t,\theta,\gamma)}}$ *for* $n < 0$
4. $n > 0$ *for* $o(t,\theta,\gamma) = 0$

Si noti che il termine $o(t,\theta,\gamma)$ nella prima e nella terza condizione è inteso apparire $|n|$ volte.

La prima condizione definisce il ripetersi della moltiplicazione della base per sé stessa un numero positivo di volte, la seconda un numero 0 di volte, e infine la terza un numero negativo di volte. Tutte queste condizioni equivalgono a richiedere:

$$t_{\uparrow n} = t^n$$
$$\theta_{\uparrow n} = \theta \cdot n$$
$$\gamma_{\uparrow n} = \gamma \cdot n$$

La quarta condizione trae la sua giustificazione dall'impossibilità di definire il modulo della potenza n-esima quando ad essere moltiplicato per sé stesso per un numero 0 o negativo di volte è proprio lo 0, in quanto in quel caso sarebbero presenti le seguenti divisioni per 0:

$$o(t,\theta,\gamma)^n = \frac{0}{0} = 1 \text{ per } n = 0$$
$$o(t,\theta,\gamma)^n = \cfrac{1}{\cfrac{\cfrac{0}{\ldots}}{0}} \text{ per } n < 0 \text{ con 0 che appare |n| volte}$$

Theorem 2.65. *Vale la proprietà del prodotto degli esponenti, ovvero:*

$$(o^n)^m = o^{n \cdot m}$$

Dimostrazione. Applicando a $(o^n)^m$ e $o^{n \cdot m}$ la definizione di potenza n-esima precedentemente introdotta si ottiene effettivamente lo stesso risultato, come si può osservare dalle seguenti relazioni nel caso in cui (m, n) siano entrambi maggiori di zero:

$$\begin{aligned} (o^n)^m &= (o \cdot o \cdot \ldots \cdot o) \cdot (o \cdot o \cdot \ldots \cdot o) \cdot \ldots \cdot (o \cdot o \cdot \ldots \cdot o) \\ o^{n \cdot m} &= (o \cdot o \cdot o \cdot o \cdot \ldots \cdot o) \end{aligned}$$

È facile verificare come tutte le coppie di relazioni ottenibili presentino un totale di $|n \cdot m|$ termini $o(t, \theta, \gamma)$ al numeratore o al denominatore. Poiché questo risultato non dipende dai particolari valori assunti da $o(t, \theta, \gamma)$ possiamo considerare quella qui esaminata una proprietà valida in generale. □

Theorem 2.66. *Vale la proprietà della somma degli esponenti, ovvero:*

$$o^n \cdot o^m = o^{n+m}$$

Dimostrazione. Applicando a $(o^n \cdot o^m)$ e o^{n+m} la definizione di potenza n-esima precedentemente introdotta si ottiene effettivamente lo stesso risultato, come si può osservare dalle seguenti relazioni nel caso in cui (m, n) siano entrambi maggiori di zero:

$$\begin{aligned} o^n \cdot o^m &= (o \cdot o \cdot o \cdot o \cdot \ldots \cdot o) \cdot (o \cdot o \cdot \ldots \cdot o) \\ o^{n+m} &= (o \cdot o \cdot o \cdot o \cdot o \cdot o \cdot o \cdot o \cdot \ldots \cdot o) \end{aligned}$$

È facile verificare come tutte le coppie di relazioni ottenibili presentino un totale di $|m + n|$ termini $o(t, \theta, \gamma)$ al numeratore o al denominatore. Poiché questo risultato non dipende dai particolari valori assunti da $o(t, \theta, \gamma)$ possiamo considerare quella qui esaminata una proprietà valida in generale. □

Theorem 2.67. *Vale la proprietà della differenza degli esponenti, ovvero:*

$$\frac{o^n}{o^m} = o^{n-m}$$

Dimostrazione. Applicando a $(\frac{o^n}{o^m})$ e o^{n-m} la definizione di potenza n-esima precedentemente introdotta si ottiene effettivamente lo stesso risultato, come si può osservare dalle seguenti relazioni nel caso in cui (m, n) siano entrambi maggiori di zero:

$$\begin{aligned} \frac{o^n}{o^m} &= (o \cdot o \cdot o \cdot o \cdot \ldots \cdot o) && \text{se } n > m \\ o^{n-m} &= (o \cdot o \cdot o \cdot o \cdot o \cdot o \cdot o \cdot o \cdot \ldots \cdot o) && \text{se } n > m \end{aligned}$$

$$\frac{o^n}{o^m} = \frac{1}{(o \cdot o \cdot o \cdot o \cdot \ldots \cdot o)} \qquad \text{se } n < m$$

$$o^{n-m} = \frac{1}{(o \cdot o \cdot o \cdot o \cdot o \cdot o \cdot o \cdot o \cdot \ldots \cdot o)} \qquad \text{se } n < m$$

È facile verificare come tutte le coppie di relazioni ottenibili presentino un totale di $|m - n|$ termini $o(t, \theta, \gamma)$ al numeratore o al denominatore. Poiché questo risultato non dipende dai particolari valori assunti da $o(t, \theta, \gamma)$ possiamo considerare quella qui esaminata una proprietà valida in generale. □

Theorem 2.68. *Vale la proprietà del prodotto delle basi, ovvero:*

$$o_1^n \cdot o_2^n = (o_1 \cdot o_2)^n$$

Dimostrazione. Applicando a $(o_1^n \cdot o_2^n)$ e $(o_1 \cdot o_2)^n$ la definizione di potenza n-esima precedentemente introdotta si ottiene effettivamente lo stesso risultato, come si può osservare dalle seguenti relazioni nel caso in cui n sia maggiore di zero:

$$o_1^n \cdot o_2^n = (o_1 \cdot o_1 \cdot o_1 \cdot \ldots \cdot o_1) \cdot (o_2 \cdot o_2 \cdot o_2 \cdot \ldots \cdot o_2)$$

$$(o_1 \cdot o_2)^n = (o_1 \cdot o_2) \cdot (o_1 \cdot o_2) \cdot \ldots \cdot (o_1 \cdot o_2) \cdot$$

È facile verificare come tutte le coppie di relazioni ottenibili presentino un totale di $|n|$ termini di $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ e di $|n|$ termini di $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ al numeratore o al denominatore. Poiché questo risultato non dipende dai particolari valori assunti da $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ e $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ possiamo considerare quella qui esaminata una proprietà valida in generale. □

Theorem 2.69. *Vale la proprietà del quoziente delle basi, ovvero:*

$$\frac{o_1^n}{o_2^n} = \left(\frac{o_1}{o_2}\right)^n$$

Dimostrazione. Applicando a $\frac{o_1^n}{o_2^n}$ e $(\frac{o_1}{o_2})^n$ la definizione di potenza n-esima precedentemente introdotta si ottiene effettivamente lo stesso risultato, come si può osservare dalle seguenti relazioni nel caso in cui n sia maggiore di zero:

$$\frac{o_1^n}{o_2^n} = \frac{(o_1 \cdot o_1 \cdot o_1 \cdot \ldots \cdot o_1)}{(o_2 \cdot o_2 \cdot o_2 \cdot \ldots \cdot o_2)}$$

$$\left(\frac{o_1}{o_2}\right)^n = \left(\frac{o_1}{o_2}\right) \cdot \left(\frac{o_1}{o_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{o_1}{o_2}\right)$$

È facile verificare come tutte le coppie di relazioni ottenibili presentino un totale di $|n|$ termini di $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ al numeratore e di $|n|$ termini di $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ al denominatore o viceversa. Poiché questo risultato non dipende dai particolari valori assunti da $o_1(t_1, \theta_1, \gamma_1)$ e $o_2(t_2, \theta_2, \gamma_2)$ possiamo considerare quella qui esaminata una proprietà valida in generale. □

2.7 Radice n-esima

Definition 2.70. *Nello spazio RIU viene definita radice n-esima del numero completo $o(t,\theta,\gamma)$ con n (numero naturale) detto indice e $o(t,\theta,\gamma)$ radicando, il numero $o_{\downarrow n}(t_{\downarrow n},\theta_{\downarrow n},\gamma_{\downarrow n})$ rappresentato anche con il simbolo $\sqrt[n]{o(t,\theta,\gamma)}$ che soddisfa le seguenti condizioni:*

1. $\sqrt[n]{o(t,\theta,\gamma)} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{o(t,\theta,\gamma)} = o(t,\theta,\gamma)$ *per* $n > 0$

2. $\dfrac{1}{\dfrac{\dfrac{\sqrt[n]{o(t,\theta,\gamma)}}{\cdots}}{\sqrt[n]{o(t,\theta,\gamma)}}} = o(t,\theta,\gamma)$ *per* $n < 0$

3. $\theta_{\downarrow n} = \frac{\theta}{n}, \quad \gamma_{\downarrow n} = \frac{\gamma}{n}$

4. $n \neq 0$ *per ogni* $o(t,\theta,\gamma)$

5. $n \geq 0$ *per* $o(t,\theta,\gamma) = 0$

6. $\sqrt[n]{t} > 0, \quad t > 0$

Si noti che il termine $\sqrt[n]{o(t,\theta,\gamma)}$ nella prima e seconda condizione è inteso apparire $|n|$ volte.

La prima condizione definisce il ripetersi della moltiplicazione della radice per sé stessa un numero positivo di volte, mentre la seconda un numero negativo di volte. Entrambe queste condizioni equivalgono a richiedere:

$$
\begin{aligned}
t_{\downarrow n} &= \sqrt[n]{t} \\
\theta_{\downarrow n} &= \frac{\theta + k \cdot 360^\circ}{n} \qquad \text{per } k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots \\
\gamma_{\downarrow n} &= \frac{\gamma + k \cdot 360^\circ}{n} \qquad \text{per } k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots
\end{aligned}
$$

La terza condizione trae la sua giustificazione nella necessità di definire la radice n-esima in modo univoco. Infatti quando tale condizione non vale, ci saranno n^2 numeri completi differenti in grado di soddisfare tale definizione: uno per ciascuna coppia distinta di fasi $\theta_{\downarrow n}$, $\gamma_{\downarrow n}$ data dalle relazioni vista sopra.

Anche la quarta condizione trae la sua giustificazione nella necessità di definire la radice n-esima in modo univoco. Infatti quando tale condizione non vale, la moltiplicazione della radice per sé stessa un numero di volte pari a 0 richiederebbe l'impiego della seguente espressione:

$$
\frac{\sqrt[n]{o(t,\theta,\gamma)}}{\sqrt[n]{o(t,\theta,\gamma)}} = 1
$$

che si troverebbe ad essere soddisfatta da più valori di $\sqrt[n]{o(t,\theta,\gamma)}$.

La quinta condizione trae la sua giustificazione dall'impossibilità di definire valori della radice n-esima che moltiplicati per sé stessi un numero negativo di volte siano in grado di dare come risultato proprio il valore 0. Infatti la seguente espressione:

$$\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt[n]{o(t,\theta,\gamma)}}{\cfrac{\dots}{\sqrt[n]{o(t,\theta,\gamma)}}}} = 0 \text{ per } n < 0,\ \sqrt[n]{o(t,\theta,\gamma)} \text{ appare |n| volte}$$

richiede l'esistenza di un divisore del numero 1 che possa fargli corrispondere un quoziente pari a 0: cosa che sappiamo impossibile.

La sesta condizione trae la sua giustificazione dalla necessità di rendere lecita la radice n-esima a livello del modulo t del numero completo $o(t,\theta,\gamma)$.

Theorem 2.71. *Vale la proprietà del prodotto degli indici, ovvero:*

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{o}} = \sqrt[m\cdot n]{o}$$

Dimostrazione. Applicando il principio secondo il quale due numeri sono uguali se e solo se lo rimangono una volta elevati alla stessa potenza, possiamo elevare i due membri della precedente uguaglianza per il numero $(m \cdot n)$ ottenendo:

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{o}}\right)^{(m\cdot n)} = (\sqrt[m\cdot n]{o})^{(m\cdot n)}$$

A questo punto è sufficiente verificare come i due membri qui riportati siano effettivamente uguali.

Considerando il valore $\sqrt[m]{\sqrt[n]{o}}$ del primo membro come un numero completo, è possibile applicare su di esso il teorema 2.65 del prodotto degli esponenti delle potenze ennesime ottenendo:

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{o}}\right)^{(m\cdot n)} = \left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{o}}\right)^{m}\right]^{n}$$

Applicando poi su questo membro la definizione di radice n-esima, si ottiene:

$$\left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{o}}\right)^{m}\right]^{n} = (\sqrt[n]{o})^{n} = o$$

Applicando la medesima definizione al secondo membro si ottiene un risultato finale equivalente:

$$(\sqrt[m\cdot n]{o})^{(m\cdot n)} = o$$

□

Theorem 2.72. *Vale la proprietà del prodotto dei radicandi, ovvero:*

$$\sqrt[n]{o_1} \cdot \sqrt[n]{o_2} = \sqrt[n]{o_1 \cdot o_2}$$

Dimostrazione. Applicando il principio secondo il quale due numeri sono uguali se e solo se lo rimangono una volta elevati alla stessa potenza, possiamo elevare i due membri della precedente uguaglianza per il numero n ottenendo:

$$(\sqrt[n]{o_1} \cdot \sqrt[n]{o_2})^n = (\sqrt[n]{o_1 \cdot o_2})^n$$

A questo punto è sufficiente verificare come i due membri qui riportati siano effettivamente uguali.

Considerando i valori $\sqrt[n]{o_1}$ e $\sqrt[n]{o_2}$ del primo membro come numeri completi, è possibile applicare su di essi il teorema 2.68 del prodotto delle basi delle potenze ennesime ottenendo:

$$(\sqrt[n]{o_1} \cdot \sqrt[n]{o_2})^n = (\sqrt[n]{o_1})^n \cdot (\sqrt[n]{o_2})^n$$

Applicando poi sui due fattori di questo membro la definizione di radice n-esima, si ottiene:

$$(\sqrt[n]{o_1})^n \cdot (\sqrt[n]{o_2})^n = o_1 \cdot o_2$$

Applicando la medesima definizione al secondo membro si ottiene un risultato finale equivalente:

$$(\sqrt[n]{o_1 \cdot o_2})^n = o_1 \cdot o_2$$

□

Theorem 2.73. *Vale la proprietà del quoziente dei radicandi, ovvero:*

$$\frac{\sqrt[n]{o_1}}{\sqrt[n]{o_2}} = \sqrt[n]{\frac{o_1}{o_2}}$$

Dimostrazione. Applicando il principio secondo il quale due numeri sono uguali se e solo se lo rimangono una volta elevati alla stessa potenza, possiamo elevare i due membri della precedente uguaglianza per il numero n ottenendo:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{o_1}}{\sqrt[n]{o_2}} \right)^n = \left(\sqrt[n]{\frac{o_1}{o_2}} \right)^n$$

A questo punto è sufficiente verificare come i due membri qui riportati siano effettivamente uguali.

Considerando i valori $\sqrt[n]{o_1}$ e $\sqrt[n]{o_2}$ del primo membro come numeri completi, è possibile applicare su di essi il teorema 2.69 del quoziente delle basi delle potenze ennesime ottenendo:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{o_1}}{\sqrt[n]{o_2}} \right)^n = \frac{(\sqrt[n]{o_1})^n}{(\sqrt[n]{o_2})^n}$$

Applicando poi sui due fattori di questo membro la definizione di radice n-esima, si ottiene:

$$\frac{(\sqrt[n]{o_1}\,)^n}{(\sqrt[n]{o_2}\,)^n} = \frac{o_1}{o_2}$$

Applicando la medesima definizione al secondo membro si ottiene un risultato finale equivalente:

$$\left(\sqrt[n]{\frac{o_1}{o_2}}\right)^n = \frac{o_1}{o_2}$$

$\square$

2.8 Potenza ad esponente razionale

Definition 2.74. *Nello spazio RIU viene definita potenza ad esponente razionale* $\frac{m}{n}$ *(con n,m numeri naturali) del numero completo* $o(t,\theta,\gamma)$ *con* $\frac{m}{n}$ *detto esponente e* $o(t,\theta,\gamma)$ *base, il numero* $o_{\uparrow m\downarrow n}(t_{\uparrow m\downarrow n},\theta_{\uparrow m\downarrow n},\gamma_{\uparrow m\downarrow n})$ *rappresentato anche con il simbolo* $o(t,\theta,\gamma)^{\frac{m}{n}}$ *oppure* $\sqrt[n]{o(t,\theta,\gamma)^m}$ *che soddisfa le seguenti condizioni:*

1. $\left[\sqrt[n]{o(t,\theta,\gamma)^m}\,\right]^n = o(t,\theta,\gamma)^m$
2. $m > 0$ *per* $o(t,\theta,\gamma) = 0$
3. $n \neq 0$ *per ogni* $o(t,\theta,\gamma)^m$ *e quindi per ogni* $o(t,\theta,\gamma)$
4. $n \geq 0$ *per* $o(t,\theta,\gamma)^m = 0$ *e quindi per* $o(t,\theta,\gamma) = 0$
5. $\theta_{\uparrow m\downarrow n} = \frac{\theta\cdot m}{n}, \quad \gamma_{\uparrow m\downarrow n} = \frac{\gamma\cdot m}{n}$
6. $\sqrt[n]{t^m} > 0, \quad t^m > 0$
7. $\sqrt[n]{t} > 0, \quad t > 0$

La prima condizione definisce la potenza ad esponente razionale come una radice n-esima di una potenza m-esima.

Le seconda condizione è richiesta per la corretta definizione della potenza m-esima.

Le terza, la quarta, la quinta e la sesta condizione sono richieste per la corretta definizione della radice n-esima.

La settima condizione è richiesta per rendere lecita l'inversione dell'ordine tra radice e potenza, ovvero per poter scrivere:

$$\left[\sqrt[n]{o(t,\theta,\gamma)}\,\right]^m$$

e quindi:

$$(\sqrt[n]{t}\,)^m$$

Theorem 2.75. *Vale la proprietà di inversione tra radice e potenza, ovvero:*

$$o^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{o}\,)^m$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si farà riferimento alla seguente formulazione della proprietà appena introdotta:

$$\sqrt[n]{o^m} = (\sqrt[n]{o}\,)^m$$

Applicando il principio secondo il quale due numeri sono uguali se e solo se lo rimangono una volta elevati alla stessa potenza, possiamo elevare i due membri della precedente uguaglianza per il numero n ottenendo:

$$\left(\sqrt[n]{o^m}\,\right)^n = [(\sqrt[n]{o}\,)^m]^n$$

A questo punto è sufficiente verificare come i due membri qui riportati siano effettivamente uguali.

Considerando il valore $\sqrt[n]{o}$ del secondo membro come un numero completo, è possibile applicare su di esso il teorema 2.65 del prodotto degli esponenti delle potenze ennesime ottenendo:

$$[(\sqrt[n]{o}\,)^m]^n = (\sqrt[n]{o}\,)^{m\cdot n} = (\sqrt[n]{o}\,)^{n\cdot m} = [(\sqrt[n]{o}\,)^n]^m$$

Applicando poi su questo membro la definizione di radice n-esima, si ottiene:

$$[(\sqrt[n]{o}\,)^n]^m = o^m$$

Applicando la medesima definizione al primo membro si ottiene un risultato finale equivalente:

$$\left(\sqrt[n]{o^m}\,\right)^n = o^m$$

□

Theorem 2.76. *Vale la proprietà di equivalenza tra esponente ed indice, ovvero:*

$$o^{\frac{m}{n}} = o^{\frac{m\cdot p}{n\cdot p}}$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si farà riferimento alla seguente formulazione della proprietà appena introdotta:

$$\sqrt[n]{o^m} = \sqrt[n\cdot p]{o^{m\cdot p}}$$

Applicando il principio secondo il quale due numeri sono uguali se e solo se lo rimangono una volta elevati alla stessa potenza, possiamo elevare i due membri della precedente uguaglianza per il numero $(n \cdot p)$ ottenendo:

$$\left(\sqrt[n]{o^m}\,\right)^{(n\cdot p)} = (\sqrt[n\cdot p]{o^{m\cdot p}}\,)^{(n\cdot p)}$$

A questo punto è sufficiente verificare come i due membri qui riportati siano effettivamente uguali.

Applicando al primo membro il teorema 2.75 di inversione tra radice e potenza delle potenze ad esponente razionale otteniamo:

$$\left(\sqrt[n]{o^m}\right)^{(n\cdot p)} = [(\sqrt[n]{o})^m]^{(n\cdot p)}$$

Considerando il valore $\sqrt[n]{o}$ di questo membro come un numero completo, è possibile applicare su di esso il teorema 2.65 del prodotto degli esponenti delle potenze ennesime ottenendo:

$$[(\sqrt[n]{o})^m]^{(n\cdot p)} = (\sqrt[n]{o})^{m\cdot n\cdot p} == (\sqrt[n]{o})^{n\cdot m\cdot p} = [(\sqrt[n]{o})^n]^{(m\cdot p)}$$

Applicando poi su questo membro la definizione di radice n-esima, si ottiene:

$$[(\sqrt[n]{o})^n]^{(m\cdot p)} = o^{m\cdot p}$$

Applicando la medesima definizione al secondo membro si ottiene un risultato finale equivalente:

$$(\sqrt[n\cdot p]{o^{m\cdot p}})^{(n\cdot p)} = o^{m\cdot p}$$

□

Theorem 2.77. *Vale la proprietà del prodotto degli esponenti razionali ovvero:*

$$(o^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = o^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}} = o^{\frac{m\cdot p}{n\cdot p}}$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si farà riferimento alla seguente formulazione della proprietà appena introdotta:

$$(\sqrt[n]{o^m})^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n\cdot q]{o^{m\cdot p}}$$

A questo punto è sufficiente verificare come i due membri qui riportati siano effettivamente uguali.

Iniziamo ad esprimere il primo membro nel seguente modo:

$$(\sqrt[n]{o^m})^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{o^m})^p}$$

Considerando il valore o^m di questo membro come un numero completo, è possibile applicare su di esso il teorema 2.75 di inversione tra radice e potenza delle potenze ad esponente razionale ottenendo:

$$\sqrt[q]{(\sqrt[n]{o^m})^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{(o^m)^p}}$$

Applicando poi su questo membro il teorema 2.71 del prodotto degli indici delle radici ennesime e il teorema 2.65 del prodotto degli esponenti delle potenze ennesime si ottiene un'espressione identica al secondo membro:

$$\sqrt[q]{\sqrt[n]{(o^m)^p}} = \sqrt[q \cdot n]{o^{m \cdot p}}$$

□

Theorem 2.78. *Vale la proprietà della somma degli esponenti razionali ovvero:*

$$(o^{\frac{m}{n}}) \cdot (o^{\frac{p}{q}}) = o^{(\frac{m}{n}+\frac{p}{q})} = o^{\frac{(m \cdot q)+(p \cdot n)}{n \cdot q}}$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si farà riferimento alla seguente formulazione della proprietà appena introdotta:

$$\sqrt[n]{o^m} \cdot \sqrt[q]{o^p} = \sqrt[n \cdot q]{o^{(m \cdot q + p \cdot n)}}$$

A questo punto è sufficiente verificare come i due membri qui riportati siano effettivamente uguali.

Applicando al primo membro il teorema 2.76 di equivalenza tra esponente ed indice delle potenze a esponente razionale otteniamo:

$$\sqrt[n]{o^m} \cdot \sqrt[q]{o^p} = \sqrt[n \cdot q]{o^{m \cdot q}} \cdot \sqrt[q \cdot n]{o^{p \cdot n}}$$

Considerando i valori $o^{m \cdot q}$ e $o^{p \cdot n}$ di questo membro come numeri completi, è possibile applicare su di essi il teorema 2.72 del prodotto dei radicandi delle radici ennesime ottenendo:

$$\sqrt[n \cdot q]{o^{m \cdot q}} \cdot \sqrt[q \cdot n]{o^{p \cdot n}} = \sqrt[n \cdot q]{o^{m \cdot q} \cdot o^{p \cdot n}}$$

Applicando poi su questo membro il teorema 2.66 della somma degli esponenti delle potenze ennesime si ottiene un'espressione identica al secondo membro:

$$\sqrt[n \cdot q]{o^{m \cdot q} \cdot o^{p \cdot n}} = \sqrt[n \cdot q]{o^{(m \cdot q + p \cdot n)}}$$

□

Theorem 2.79. *Vale la proprietà della differenza degli esponenti razionali ovvero:*

$$\frac{(o^{\frac{m}{n}})}{(o^{\frac{p}{q}})} = o^{(\frac{m}{n}-\frac{p}{q})} = o^{\frac{(m \cdot q)-(p \cdot n)}{n \cdot q}}$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si farà riferimento alla seguente formulazione della proprietà appena introdotta:

$$\frac{\sqrt[n]{o^m}}{\sqrt[q]{o^p}} = \sqrt[n \cdot q]{o^{(m \cdot q - p \cdot n)}}$$

A questo punto è sufficiente verificare come i due membri qui riportati siano effettivamente uguali.

Applicando al primo membro il teorema 2.76 di equivalenza tra esponente ed indice delle potenze a esponente razionale otteniamo:

$$\frac{\sqrt[n]{o^m}}{\sqrt[q]{o^p}} = \frac{\sqrt[n\cdot q]{o^{m\cdot q}}}{\sqrt[q\cdot n]{o^{p\cdot n}}}$$

Considerando i valori $o^{m\cdot q}$ e $o^{p\cdot n}$ di questo membro come numeri completi, è possibile applicare su di essi il teorema 2.73 del quoziente dei radicandi delle radici ennesime ottenendo:

$$\frac{\sqrt[n\cdot q]{o^{m\cdot q}}}{\sqrt[q\cdot n]{o^{p\cdot n}}} = \sqrt[n\cdot q]{\frac{o^{m\cdot q}}{o^{p\cdot n}}}$$

Applicando poi su questo membro il teorema 2.67 della differenza degli esponenti delle potenze ennesime si ottiene un'espressione identica al secondo membro:

$$\sqrt[n\cdot q]{\frac{o^{m\cdot q}}{o^{p\cdot n}}} = \sqrt[n\cdot q]{o^{(m\cdot q - p\cdot n)}}$$

□

Theorem 2.80. *Vale la proprietà del prodotto delle basi ovvero:*

$$(o_1^{\frac{m}{n}}) \cdot (o_2^{\frac{m}{n}}) = (o_1 \cdot o_2)^{\frac{m}{n}}$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si farà riferimento alla seguente formulazione della proprietà appena introdotta:

$$\sqrt[n]{o_1^m} \cdot \sqrt[n]{o_2^m} = \sqrt[n]{(o_1 \cdot o_2)^m}$$

A questo punto è sufficiente verificare come i due membri qui riportati siano effettivamente uguali.

Applicando al secondo membro il teorema 2.68 del prodotto delle basi delle potenze ennesime otteniamo:

$$\sqrt[n]{(o_1 \cdot o_2)^m} = \sqrt[n]{o_1^m \cdot o_2^m}$$

Considerando i valori o_1^m e o_2^m di questo membro come numeri completi, è possibile applicare su di essi il teorema 2.72 del prodotto dei radicandi delle radici ennesime ottenendo un'espressione identica al primo membro:

$$\sqrt[n]{o_1^m \cdot o_2^m} = \sqrt[n]{o_1^m} \cdot \sqrt[n]{o_2^m}$$

□

Theorem 2.81. *Vale la proprietà del quoziente delle basi ovvero:*

$$\frac{o_1^{\frac{m}{n}}}{o_2^{\frac{m}{n}}} = \left(\frac{o_1}{o_2}\right)^{\frac{m}{n}}$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si farà riferimento alla seguente formulazione della proprietà appena introdotta:

$$\frac{\sqrt[n]{o_1^m}}{\sqrt[n]{o_2^m}} = \sqrt[n]{\left(\frac{o_1}{o_2}\right)^m}$$

A questo punto è sufficiente verificare come i due membri qui riportati siano effettivamente uguali.

Applicando al secondo membro il teorema 2.69 del quoziente delle basi delle potenze ennesime otteniamo:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{o_1}{o_2}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{o_1^m}{o_2^m}}$$

Considerando i valori o_1^m e o_2^m di questo membro come numeri completi, è possibile applicare su di essi il teorema 2.73 del quoziente dei radicandi delle radici ennesime ottenendo un'espressione identica al primo membro:

$$\sqrt[n]{\frac{o_1^m}{o_2^m}} = \frac{\sqrt[n]{o_1^m}}{\sqrt[n]{o_2^m}}$$

□

3 Numeri nello spazio a n dimensioni

3.1 Numeri completi n dimensionali

Per identificare i numeri completi nelle n dimensioni dello spazio verranno usate le seguenti notazioni:

1. $o(a)$ o $o(t)$ per i reali
2. $o(a, b)$ o $o(t, \theta)$ per i complessi
3. $o(a, b, c)$ o $o(t, \theta, \gamma)$ per i completi propriamente detti
4. $o(a, b, c, d)$ o $o(t, \theta, \gamma, \varphi)$ per i completi a 4 dimensioni
5. $\cdots$

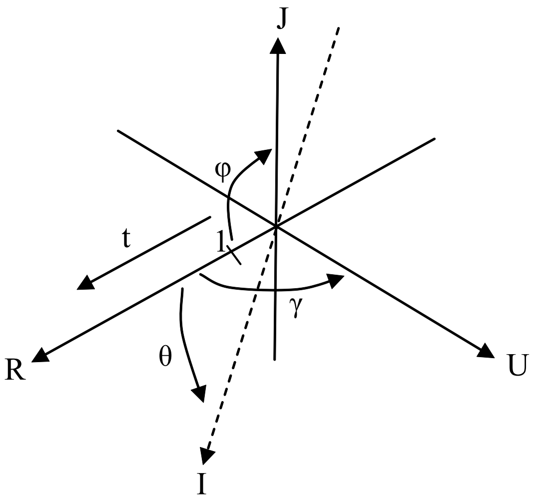

Figura 30: Rappresentazione di un numero completo della quarta dimensione attraverso operazioni di traslazione e rotazione

6. $o(a_1, a_2, .., a_n)$ o $o(t, \theta_2, \theta_3, .., \theta_n)$ per i completi ad n dimensioni

Definition 3.1. *Viene definito numero completo n dimensionale $o(t, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n)$ la posizione che si raggiunge da quella unitaria della retta V_1 traslandola del modulo t, ruotando poi tale retta di angolo θ_2 lungo il piano V_1V_n, ruotando poi tale piano di angolo θ_3 lungo lo spazio $V_1V_{n-1}V_n$, ruotando poi tale spazio di angolo θ_4 lungo l'iperspazio $V_1V_{n-2}V_{n-1}V_n$ e così via fino alla rotazione di angolo θ_n lungo lo spazio n dimensionale $V_1V_2 \ldots V_{n-2}V_{n-1}V_n$.*

Si osservi la figura 30 nel caso di un numero completo definito in uno spazio a quattro dimensioni.

Theorem 3.2. *I numeri completi n dimensionali possono essere espressi nel seguente modo:*

$$\begin{aligned} o(t, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n) = & t \cdot \{v_1 \cdot [\cos(\theta_n) \cdot \cos(\theta_{n-1}) \cdot \ldots \cdot \cos(\theta_5) \cdot \cos(\theta_4) \cdot \cos(\theta_3) \cdot \cos(\theta_2)] + \\ & + v_2 \cdot [\cos(\theta_n) \cdot \cos(\theta_{n-1}) \cdot \ldots \cdot \cos(\theta_5) \cdot \cos(\theta_4) \cdot \cos(\theta_3) \cdot \sin(\theta_2)] + \\ & + v_3 \cdot [\cos(\theta_n) \cdot \cos(\theta_{n-1}) \cdot \ldots \cdot \cos(\theta_5) \cdot \cos(\theta_4) \cdot \sin(\theta_3)] + \\ & + v_4 \cdot [\cos(\theta_n) \cdot \cos(\theta_{n-1}) \cdot \ldots \cdot \cos(\theta_5) \cdot \sin(\theta_4)] + \\ & + \ldots + \\ & + v_{n-1} \cdot [\cos(\theta_n) \cdot \sin(\theta_{n-1})] + \\ & + v_n \cdot [\sin(\theta_n)]\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

con i simboli v_1,v_2,...,v_n che identificano i versori relativi alle rette ortogonali V_1,V_2,...,V_n che compongono lo spazio n dimensionale, i simboli θ_2, θ_3,...,θ_n le rotazioni usate per introdurre tali rette (la retta V_1 viene introdotta dalla traslazione t), mentre i seguenti simboli a_1,a_2,...,a_n rappresentano le coordinate

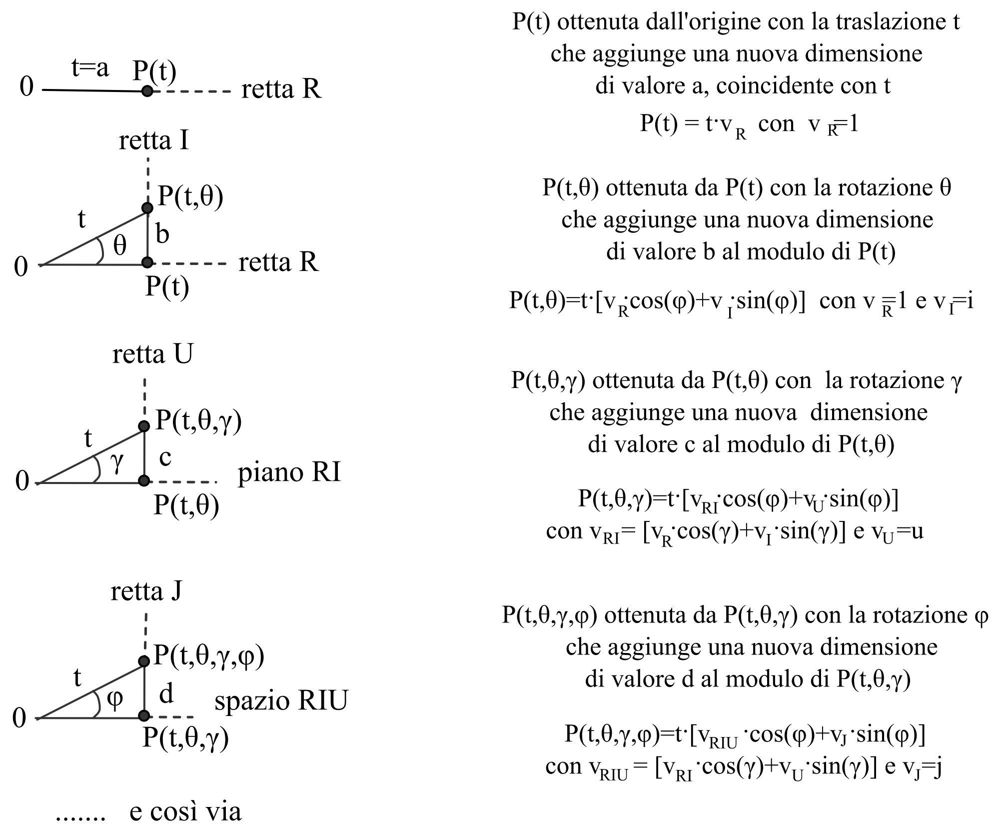

Figura 31: Costruzione dei numeri completi n dimensionali

del numero $o(t, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n)$ *nello spazio n dimensionale:*

$$\begin{aligned}
a_1 &= t \cdot [\cos(\theta_n) \cdot \cos(\theta_{n-1}) \cdot \ldots \cdot \cos(\theta_5) \cdot \cos(\theta_4) \cdot \cos(\theta_3) \cdot \cos(\theta_2)] \\
a_2 &= t \cdot [\cos(\theta_n) \cdot \cos(\theta_{n-1}) \cdot \ldots \cdot \cos(\theta_5) \cdot \cos(\theta_4) \cdot \cos(\theta_3) \cdot \sin(\theta_2)] \\
a_3 &= t \cdot [\cos(\theta_n) \cdot \cos(\theta_{n-1}) \cdot \ldots \cdot \cos(\theta_5) \cdot \cos(\theta_4) \cdot \sin(\theta_3)] \\
a_4 &= t \cdot [\cos(\theta_n) \cdot \cos(\theta_{n-1}) \cdot \ldots \cdot \cos(\theta_5) \cdot \sin(\theta_4)] \\
&\ldots \\
a_n &= t \cdot [\sin(\theta_n)]
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Osservando nella figura 31 come l'aggiunta di una nuova rotazione permette di esprimere le coordinate dei numeri completi nelle dimensioni successive arriviamo direttamente all'espressione precedente.

□

Theorem 3.3. *Il modulo dei numeri completi n dimensionali può essere espresso nel seguente modo:*

$$t = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots a_n^2}$$

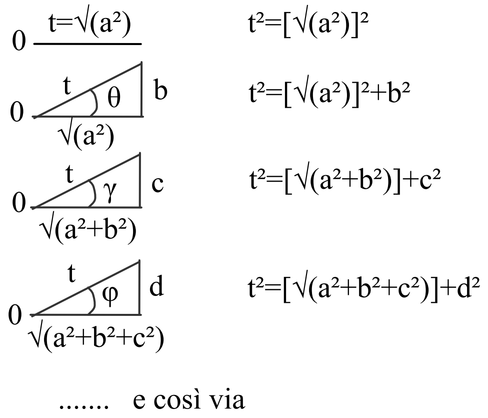

Figura 32: Rappresentazione del modulo dei numeri completi n dimensionali

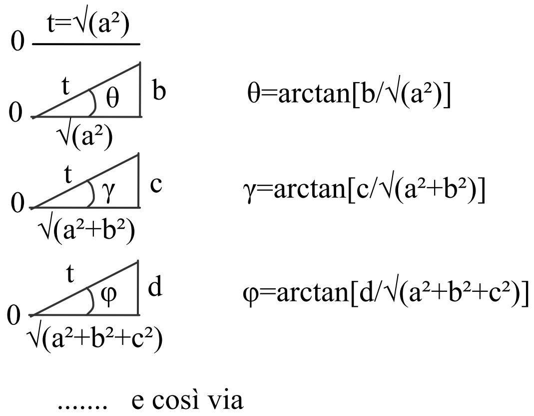

Figura 33: Rappresentazione delle fasi dei numeri completi n dimensionali

Dimostrazione. Applicando il teorema di Pitagora ai passaggi che portano alle dimensioni successive, come mostrato nella figura 32, si arriva direttamente alla relazione precedente.

□

Theorem 3.4. *Le fasi dei numeri completi n dimensionali possono essere espresse nel seguente modo:*

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots a_{n-1}^2}}\right)$$

Dimostrazione. Applicando le relazioni trigonometriche della funzione arctan() ai passaggi che portano alle dimensioni successive, come mostrato nella figura 33, si arriva direttamente alla relazione precedente.

□

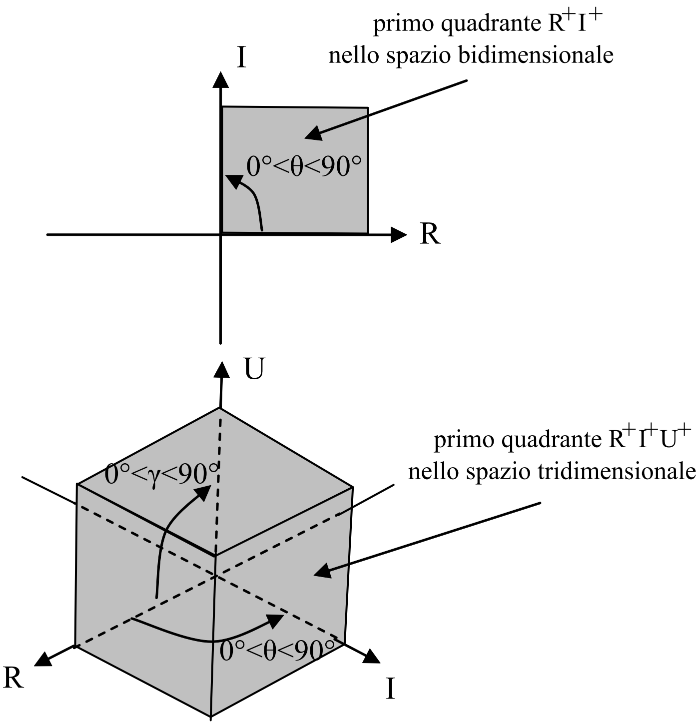

Figura 34: Rappresentazione standard delle fasi θ,γ per i primi quadranti

Definition 3.5. *I numeri completi n dimensionali di coordinate* (a_1,a_2,a_3,...,a_n) *tutte diverse da zero vengono definiti in rappresentazione standard se dotati di fasi* (θ_2,θ_3,...,θ_n) *che soddisfano le convenzioni introdotte qui di seguito.*

Per le posizioni $P(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ nella regione $V_1^+ V_2^+ V_3^+ \ldots V_n^+$, caratterizzata dai valori a_1,a_2,a_3,...,a_n tutti positivi, le fasi scelte apparterranno tutte al primo quadrante, ovvero avremo:

$$0^\circ < \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n < 90^\circ$$

Possiamo osservare in proposito la figura 34.

Poiché valgono le seguenti formule:

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2}}\right)$$

$$\theta_3 = \arctan\left(\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}\right)$$

$$\ldots$$

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots a_{n-1}^2}}\right)$$

per permettere alle fasi θ_2,θ_3,...,θ_n di avere un valore tra 0° e 90° quando tutti i coefficienti a_2,a_3,...,a_n sono positivi, anche i corrispondenti denominatori dovranno essere positivi. Questo significa che la rappresentazione standard da noi scelta richiede di assegnare le soluzioni positive alle seguenti radici:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a_1^2} = \left|\sqrt{a_1^2}\right| \\
&\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \left|\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right| \\
&\dots \\
&\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots a_{n-1}^2} = \left|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots a_{n-1}^2}\right|
\end{aligned}$$

Per le posizioni $P(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ nella regione $V_1^- V_2^+ V_3^+ \dots V_n^+$, caratterizzata dai valori a_2,a_3,a_4,...,a_n positivi e dai valori a_1 negativi, le fasi scelte saranno le seguenti:

$$\begin{aligned}
&90° < \theta_2 < 180° \\
&0° < \theta_3, \theta_4, \dots, \theta_n < 90°
\end{aligned}$$

Infatti poiché valgono le seguenti formule:

$$\begin{aligned}
&\sin(180° - \theta_2) = \sin(\theta_2) \\
&\cos(180° - \theta_2) = -\cos(\theta_2)
\end{aligned}$$

per imporre il segno negativo al solo coefficiente a_1 della formula (3.1) basterà lasciare invariate tutte le fasi θ_3,θ_4,...,θ_n ai valori del primo quadrante e sostituire il valore di $\theta_2 = \theta_2^*$ (relativo al valore che questa fase assume nel primo quadrante) con $\theta_2 = (180° - \theta_2^*)$.

Possiamo osservare in proposito la figura 35 nella pagina successiva.

Poiché valgono le seguenti formule:

$$\begin{aligned}
&\theta_2 = \arctan\left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2}}\right) \\
&\theta_3 = \arctan\left(\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}\right) \\
&\dots \\
&\theta_n = \arctan\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots a_{n-1}^2}}\right)
\end{aligned}$$

per permettere alle fasi θ_3,θ_4,...,θ_n di avere un valore tra 0° e 90° quando tutti i coefficienti a_3,a_4,...,a_n sono positivi, anche i corrispondenti denominatori dovranno essere positivi. Mentre per permettere alla fase θ_2 di avere un valore

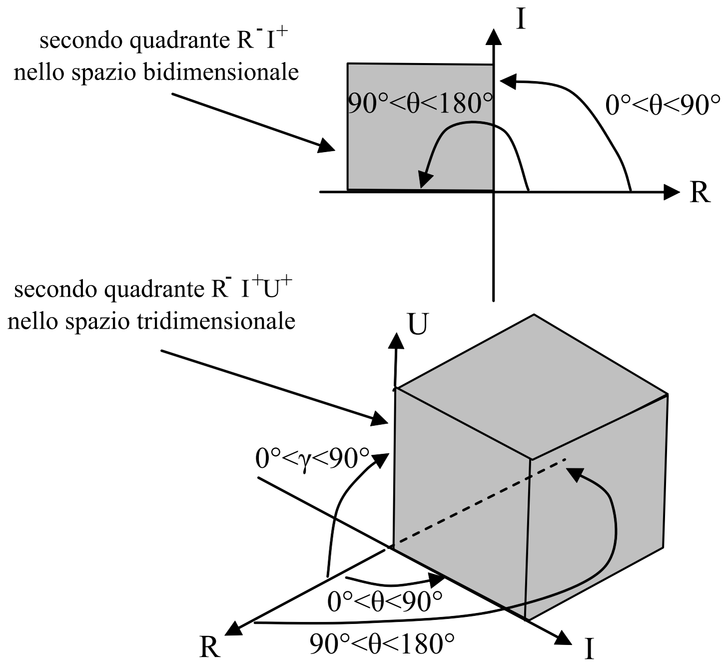

Figura 35: Rappresentazione standard delle fasi θ,γ per i secondi quadranti

tra 90° e 180° quando il coefficiente a_1 è negativo e quello a_2 è positivo dovremo considerare negativo il termine che compare al suo denominatore. Questo significa che la rappresentazione standard da noi scelta richiede di assegnare le soluzioni positive alle seguenti radici:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \left|\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,\right| \\
&\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \left|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\right| \\
&\ldots \\
&\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots a_{n-1}^2} = \left|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots a_{n-1}^2}\,\right|
\end{aligned}$$

e le soluzioni negative a:

$$\sqrt{a_1^2} = -\left|\sqrt{a_1^2}\,\right|$$

Per le posizioni $P(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ nella regione $V_1^- V_2^- V_3^+ \ldots V_n^+$, caratterizzata dai valori a_3,a_4,a_5,...,a_n positivi e dai valori a_1,a_2 negativi, le fasi scelte saranno le seguenti:

$$\begin{aligned}
&180° < \theta_2 < 270° \\
&0° < \theta_3, \theta_4, \ldots, \theta_n < 90°
\end{aligned}$$

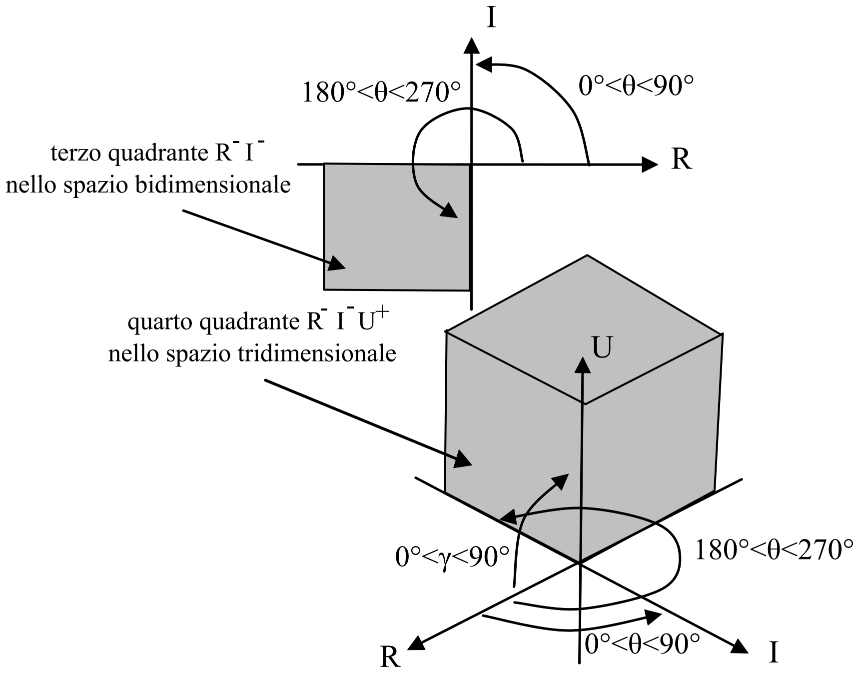

Figura 36: Rappresentazione standard delle fasi θ,γ per i terzi quadranti

Infatti poiché valgono le seguenti formule:

$$\sin(180^\circ + \theta_2) = -\sin(\theta_2)$$
$$\cos(180^\circ + \theta_2) = -\cos(\theta_2)$$

per imporre il segno negativo ai soli coefficienti a_1 e a_2 della formula (3.1) basterà lasciare invariate tutte le fasi θ_3,θ_4,...,θ_n ai valori del primo quadrante e sostituire il valore di $\theta_2 = \theta_2^*$ (relativo al valore che questa fase assume nel primo quadrante) con $\theta_2 = (180^\circ + \theta_2^*)$.

Possiamo osservare in proposito la figura 36.

Poiché valgono le seguenti formule:

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2}}\right)$$
$$\theta_3 = \arctan\left(\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}\right)$$
$$\ldots$$
$$\theta_n = \arctan\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots a_{n-1}^2}}\right)$$

per permettere alle fasi θ_3,θ_4,...,θ_n di avere un valore tra 0° e 90° quando tutti i coefficienti a_3,a_4,...,a_n sono positivi, anche i corrispondenti denominatori dovranno essere positivi. Mentre per permettere alla fase θ_2 di avere un valore tra 180° e 270° quando i coefficienti a_1 e a_2 sono negativi dovremo considerare negativo il termine che compare al suo denominatore. Questo significa che la rappresentazione standard da noi scelta richiede di assegnare le soluzioni positive alle seguenti radici:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \left|\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right| \\
&\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \left|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\right| \\
&\ldots \\
&\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots a_{n-1}^2} = \left|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots a_{n-1}^2}\right|
\end{aligned}$$

e le soluzioni negative a:

$$\sqrt{a_1^2} = -\left|\sqrt{a_1^2}\right|$$

Per le posizioni $P(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ nella regione $V_1^+ V_2^- V_3^+ \ldots V_n^+$, caratterizzata dai valori a_1,a_3,a_4,. . .,a_n positivi e dal valore a_2 negativo, le fasi scelte saranno le seguenti:

$$\begin{aligned}
&270^\circ < \theta_2 < 360^\circ \\
&0^\circ < \theta_3, \theta_4, \ldots, \theta_n < 90^\circ
\end{aligned}$$

Infatti poiché valgono le seguenti formule:

$$\begin{aligned}
&\sin(360^\circ - \theta_2) = -\sin(\theta_2) \\
&\cos(360^\circ - \theta_2) = \cos(\theta_2)
\end{aligned}$$

per imporre il segno negativo del solo coefficiente a_2 della formula (3.1) basterà lasciare invariate tutte le fasi θ_3,θ_4,. . .,θ_n ai valori del primo quadrante e sostituire il valore di $\theta_2 = \theta_2^*$ (relativo al valore che questa fase assume nel primo quadrante) con $\theta_2 = (360^\circ - \theta_2^*)$.

Possiamo osservare in proposito la figura 37 nella pagina successiva.

Poiché valgono le seguenti formule:

$$\begin{aligned}
&\theta_2 = \arctan\left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2}}\right) \\
&\theta_3 = \arctan\left(\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}\right) \\
&\ldots \\
&\theta_n = \arctan\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots a_{n-1}^2}}\right)
\end{aligned}$$

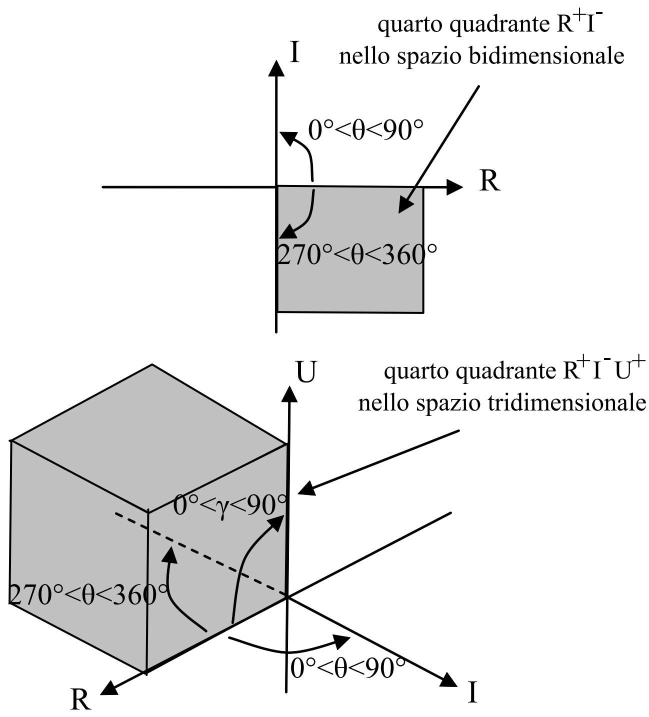

Figura 37: Rappresentazione standard delle fasi θ,γ per i quarti quadranti

per permettere alle fasi θ_3,θ_4,...,θ_n di avere un valore tra 0° e 90° quando tutti i coefficienti a_3,a_4,...,a_n sono positivi, anche i corrispondenti denominatori dovranno essere positivi. Mentre per permettere alla fase θ_2 di avere un valore tra 270° e 360° quando il coefficiente a_2 è negativo e quello a_1 è positivo dovremo considerare positivo il termine che compare al suo denominatore. Questo significa che la rappresentazione standard da noi scelta richiede di assegnare le soluzioni positive alle seguenti radici:

$$\sqrt{a_1^2} = \left|\sqrt{a_1^2}\right|$$
$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \left|\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right|$$
$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots a_{n-1}^2} = \left|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots a_{n-1}^2}\right|$$

Per le posizioni $P(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ nelle regioni $V_1V_2V_3 \ldots V_n$, caratterizzata dai valori a_3,a_4,a_5,...,a_n che possono essere positivi e negativi, le fasi scelte saranno le seguenti:

$$0° < \theta_i < 90° \quad \text{per ogni } a_i > 0 \text{ con } i = 3, 4, 5, \ldots, n$$
$$270° < \theta_i < 360° \quad \text{per ogni } a_i < 0 \text{ con } i = 3, 4, 5, \ldots, n$$

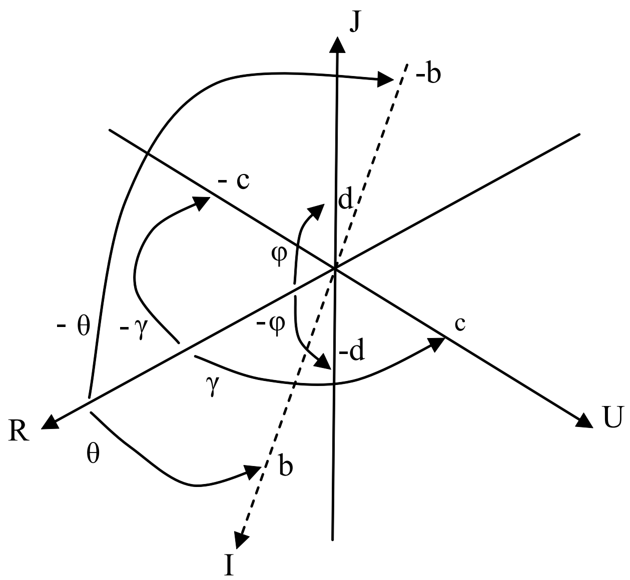

Figura 38: Variazione del segno delle fasi al variare del segno del loro corrispondente coefficiente

Infatti poiché valgono le seguenti formule:

$$\sin(360° - \theta_i) = -\sin(\theta_i)$$
$$\cos(360° - \theta_i) = \cos(\theta_i)$$

per imporre il segno negativo ad alcuni specifici coefficienti a_3,a_4,...,a_n della formula (3.1) basterà assegnare alle corrispondenti fasi θ_3,θ_4,...,θ_n il valore opposto rispetto a quello che mostrano nel primo quadrante (e quindi assegnare loro un valore tra 270° e 360°) e lasciare invariate tutte le altre.

Possiamo osservare in proposito la figura 38.

Poiché valgono le seguenti formule:

$$\theta_3 = \arctan\left(\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}\right)$$
$$\theta_4 = \arctan\left(\frac{a_4}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\right)$$
$$\dots$$
$$\theta_n = \arctan\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots a_{n-1}^2}}\right)$$

per permettere alle fasi θ_3,θ_4,...,θ_n di avere un valore tra 0° e 90° quando i corrispondenti coefficienti a_3,a_4,...,a_n sono positivi, e un valore tra 270° e 360°

quando i corrispondenti coefficienti sono negativi, i vari denominatori coinvolti dovranno essere tutti positivi. Questo significa che la rappresentazione standard da noi scelta richiede di assegnare le soluzioni positive alle seguenti radici:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a_1^2+a_2^2} = \left|\sqrt{a_1^2+a_2^2}\right| \\
&\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} = \left|\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\right| \\
&\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots a_{n-1}^2} = \left|\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots a_{n-1}^2}\right|
\end{aligned}$$

Dal momento che la gestione dei segni dei coefficienti a_3,a_4,...,a_n non interferisce con l'angolo θ_2, possiamo integrarla con quella dei segni di a_1 e a_2 secondo le modalità viste in precedenza.

Theorem 3.6. *La rappresentazione standard di un numero completo n dimensionale dotato di coordinate (a_1,a_2,a_3,...,a_n) tutte diverse da zero richiede di assegnare le seguenti soluzioni per le seguenti radici algebriche:*

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a_1^2} = a_1 \\
&\sqrt{a_1^2+a_2^2} = \left|\sqrt{a_1^2+a_2^2}\right| \\
&\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} = \left|\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\right| \\
&\ldots \\
&\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots a_{n-1}^2} = \left|\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots a_{n-1}^2}\right|
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Nel caso delle rappresentazioni standard precedentemente esaminate le fasi assumono i valori previsti dalle formule:

$$\begin{aligned}
&\theta_2 = \arctan\left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2}}\right) \\
&\theta_3 = \arctan\left(\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\right) \\
&\ldots \\
&\theta_n = \arctan\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots a_{n-1}^2}}\right)
\end{aligned}$$

quando si assegna alle radici algebriche coinvolte proprio i valori qui considerati. E questo dimostra immediatamente la tesi. □

Ad esempio nello spazio a quattro dimensioni il numero completo di espressione:

$$\begin{aligned} o(t,\theta,\gamma,\varphi) =& [\cos(\varphi)\cdot\cos(\gamma)\cdot\cos(\theta)] + i\cdot[\cos(\varphi)\cdot\cos(\gamma)\cdot\sin(\theta)] + \\ &+ u\cdot[\cos(\varphi)\cdot\sin(\gamma)] + j\cdot[\sin(\varphi)] \end{aligned}$$

associato alla posizione:

$$o(a,b,c,d) = o(-1,1,-1,1)$$

potrà essere espresso in rappresentazione standard attraverso le seguenti fasi:

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = 135^\circ \\ \gamma &= \arctan\left(\frac{c}{|\sqrt{a^2+b^2}\,|}\right) = \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \simeq -35,26^\circ \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{d}{|\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,|}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^\circ \end{aligned}$$

e il seguente modulo:

$$t = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} = \sqrt{4} = 2$$

Per verificare che la rappresentazione standard $o(\theta,\gamma,\varphi)$ così ottenuta identifica proprio la posizione $o(-1,1,-1,1)$ è sufficiente eseguire i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned} &a = t\cdot\cos(\varphi)\cdot\cos(\gamma)\cdot\cos(\theta) = 2\cdot\cos(30^\circ)\cdot\cos(\simeq -35,26^\circ)\cdot\cos(135^\circ) = -1 \\ &b = t\cdot\cos(\varphi)\cdot\cos(\gamma)\cdot\sin(\theta) = 2\cdot\cos(30^\circ)\cdot\cos(\simeq -35,26^\circ)\cdot\sin(135^\circ) = 1 \\ &c = t\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\gamma) = 2\cdot\cos(30^\circ)\cdot\sin(\simeq -35,26^\circ) = -1 \\ &d = t\cdot\sin(\varphi) = 2\cdot\sin(30^\circ) = 1 \end{aligned}$$

Definition 3.7. *I numeri completi n dimensionali di coordinate* $(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)$ *tutte diverse da zero vengono definiti in rappresentazione complementare se dotati di fasi* $(\theta_2,\theta_3,\ldots,\theta_n)$ *ottenute dai valori* $\theta_2,\theta_3,\ldots,\theta_n$ *della rappresentazione standard attraverso quelle sostituzioni che permettono di individuare le stesse posizioni.*

Theorem 3.8. *Chiamate* $\theta_2,\theta_3,\ldots,\theta_n$ *le fasi che permettono ad un numero completo n dimensionale dotato di coordinate* $(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)$ *tutte diverse da zero e in rappresentazione standard di identificare una qualsiasi posizione dello spazio* $V_1V_2V_3\ldots V_n$*, gli insiemi alternativi di fasi in grado di individuare la stessa posizione possono essere ottenuti dai seguenti valori:* θ, $(360^\circ-\theta)$, $(180^\circ-\theta)$, $(\theta+180^\circ)$.

Dimostrazione. La possibilità di esprimere attraverso la formula (3.1) le stesse posizioni della rappresentazione standard, assegnando alle fasi i seguenti valori: θ, $(360° - \theta)$, $(180° - \theta)$, $(\theta + 180°)$ deriva dal fatto che in questo modo si mantengono i moduli invariati e si introducono segni che possono neutralizzarsi a vicenda, come si evince dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
&\cos(\theta) = \cos(\theta)\\
&\sin(\theta) = \sin(\theta)\\
&\cos(360° - \theta) = \cos(\theta)\\
&\sin(360° - \theta) = -\sin(\theta)\\
&\cos(180° - \theta) = -\cos(\theta)\\
&\sin(180° - \theta) = \sin(\theta)\\
&\cos(\theta + 180°) = -\cos(\theta)\\
&\sin(\theta + 180°) = -\sin(\theta)
\end{aligned}$$

Attraverso questo procedimento è possibile affiancare, ad esempio, la rappresentazione standard della quarta dimensione:

$$\begin{aligned}
o(t,\theta,\gamma,\varphi) =& [\cos(\varphi)\cdot\cos(\gamma)\cdot\cos(\theta)] + i\cdot[\cos(\varphi)\cdot\cos(\gamma)\cdot\sin(\theta)] +\\
&+ u\cdot[\cos(\varphi)\cdot\sin(\gamma)] + j\cdot[\sin(\varphi)]
\end{aligned}$$

alle seguenti rappresentazioni complementari:

$$\begin{aligned}
o(t,\theta,\gamma+180°,180°-\varphi) =& [\cos(180°-\varphi)\cdot\cos(\gamma+180°)\cdot\cos(\theta)] +\\
&+ i\cdot[\cos(180°-\varphi)\cdot\cos(\gamma+180°)\cdot\sin(\theta)] +\\
&+ u\cdot[\cos(180°-\varphi)\cdot\sin(\gamma+180°)] +\\
&+ j\cdot[\sin(180°-\varphi)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
o(t,\theta+180°,360°-\gamma,180°-\varphi) =& [\cos(180°-\varphi)\cdot\cos(360°-\gamma)\cdot\cos(\theta+180°)] +\\
&+ i\cdot[\cos(180°-\varphi)\cdot\cos(360°-\gamma)\cdot\sin(\theta+180°)] +\\
&+ u\cdot[\cos(180°-\varphi)\cdot\sin(360°-\gamma)] +\\
&+ j\cdot[\sin(180°-\varphi)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
o(t,\theta+180°,180°-\gamma,\varphi) =& [\cos(\varphi)\cdot\cos(180°-\gamma)\cdot\cos(\theta+180°)] +\\
&+ i\cdot[\cos(\varphi)\cdot\cos(180°-\gamma)\cdot\sin(\theta+180°)] +\\
&+ u\cdot[\cos(\varphi)\cdot\sin(180°-\gamma)] +\\
&+ j\cdot[\sin(\varphi)]
\end{aligned}$$

$\square$

Ad esempio se vogliamo identificare una rappresentazione complementare del seguente numero completo a quattro dimensioni:

$$o(a,b,c,d) = o(-1,1,-1,1)$$

la cui rappresentazione standard è dotata delle seguenti fasi:

$$\begin{aligned} &\theta^* = 135^\circ \\ &\gamma^* \simeq -35,26^\circ \\ &\varphi^* = 30^\circ \end{aligned}$$

e del seguente modulo:

$$t = 2$$

è sufficiente eseguire i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned} &\theta = \theta^* = 135^\circ \\ &\gamma = \gamma^* + 180^\circ \simeq (\simeq -35,26^\circ) + 180^\circ \simeq 144,74^\circ \\ &\varphi = 180^\circ - \varphi^* = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ \end{aligned}$$

Per verificare che la rappresentazione complementare $o(\theta,\gamma,\varphi)$ così ottenuta identifica proprio la posizione $o(-1,1,-1,1)$ è sufficiente eseguire i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned} &a = t \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\theta) = 2 \cdot \cos(150^\circ) \cdot \cos(\simeq 144,74^\circ) \cdot \cos(135^\circ) = -1 \\ &b = t \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\theta) = 2 \cdot \cos(150^\circ) \cdot \cos(\simeq 144,74^\circ) \cdot \sin(135^\circ) = 1 \\ &c = t \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\gamma) = 2 \cdot \cos(150^\circ) \cdot \sin(\simeq 144,74^\circ) = -1 \\ &d = t \cdot \sin(\varphi) = 2 \cdot \sin(150^\circ) = 1 \end{aligned}$$

Definition 3.9. *I numeri completi n dimensionali di coordinate (a_1,a_2,a_3,...,a_n) alcune delle quali nulle vengono definiti in rappresentazione standard se le loro fasi oltre ad essere coerenti con quelle delle altre rappresentazioni standard (secondo la definizione 3.5) assumono valore zero in caso di indeterminazione.*

Le relazioni che danno il valore delle fasi nelle rappresentazioni standard sono le seguenti:

$$\begin{aligned} &\theta_2 = \arctan\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \\ &\theta_3 = \arctan\left(\frac{a_3}{|\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,|}\right) \\ &\theta_3 = \arctan\left(\frac{a_4}{|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,|}\right) \\ &\dots \\ &\theta_n = \arctan\left(\frac{a_n}{|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots a_{n-1}^2}\,|}\right) \end{aligned}$$

Dal momento che ci sono dei coefficienti nulli, potranno verificarsi i seguenti casi notevoli:

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{0}{a_1}\right) = \begin{cases} 0° & \text{per } a_1 > 0 \\ 180° & \text{per } a_1 < 0 \end{cases}$$
$$\theta_i = \arctan\left(\frac{a_i}{0}\right) = \begin{cases} 90° & \text{per } a_i > 0 \\ 270° & \text{per } a_i < 0 \end{cases}$$
$$\theta_i = \arctan\left(\frac{0}{|x \neq 0|}\right) = 0°$$
$$\theta_i = \arctan\left(\frac{0}{0}\right) = 0°$$

Ad esempio nello spazio a quattro dimensioni il numero completo di espressione:

$$\begin{aligned} o(t, \theta, \gamma, \varphi) =& [\cos(\varphi) \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\theta)] + i \cdot [\cos(\varphi) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\theta)] + \\ & + u \cdot [\cos(\varphi) \cdot \sin(\gamma)] + j \cdot [\sin(\varphi)] \end{aligned}$$

associato alla posizione:

$$o(a, b, c, d) = o(-1, 0, 1, 0)$$

potrà essere espresso in rappresentazione standard attraverso le seguenti fasi:

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{0}{-1}\right) = 180°$$
$$\gamma = \arctan\left(\frac{c}{|\sqrt{a^2 + b^2}\,|}\right) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = 45°$$
$$\varphi = \arctan\left(\frac{d}{|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,|}\right) = \arctan\left(\frac{0}{\sqrt{2}}\right) = 0°$$

e il seguente modulo:

$$t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{2}$$

Per verificare che la rappresentazione standard $o(\theta, \gamma, \varphi)$ così ottenuta identifica proprio la posizione $o(-1, 0, 1, 0)$ è sufficiente eseguire i seguenti calcoli:

$$a = t \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\theta) = \sqrt{2} \cdot \cos(0°) \cdot \cos(45°) \cdot \cos(180°) = -1$$
$$b = t \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\theta) = \sqrt{2} \cdot \cos(0°) \cdot \cos(45°) \cdot \sin(180°) = 0$$
$$c = t \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\gamma) = \sqrt{2} \cdot \cos(0°) \cdot \sin(45°) = 1$$
$$d = t \cdot \sin(\varphi) = \sqrt{2} \cdot \sin(0°) = 0$$

Definition 3.10. *I numeri completi n dimensionali di coordinate (a_1,a_2,a_3,...,a_n) alcune delle quali nulle vengono definiti in rappresentazione complementare se le loro fasi oltre ad essere coerenti con quelle delle rappresentazioni standard (secondo la definizione 3.5) mostrano casi di indeterminazione in corrispondenza dei quali assumono il valore zero.*

Ad esempio nello spazio a quattro dimensioni il numero completo di espressione:

$$\begin{aligned} o(t,\theta,\gamma,\varphi) =& [\cos(\varphi)\cdot\cos(\gamma)\cdot\cos(\theta)] + i\cdot[\cos(\varphi)\cdot\cos(\gamma)\cdot\sin(\theta)]+ \\ &+ u\cdot[\cos(\varphi)\cdot\sin(\gamma)] + j\cdot[\sin(\varphi)] \end{aligned}$$

associato alla posizione:

$$o(a,b,c,d) = o(0,0,1,0)$$

potrà essere espresso in rappresentazione complementare attraverso le seguenti fasi:

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{0}{0}\right) = 30^\circ \neq 0^\circ \\ \gamma &= \arctan\left(\frac{c}{|\sqrt{a^2+b^2}\,|}\right) = \arctan\left(\frac{1}{0}\right) = 90^\circ \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{d}{|\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,|}\right) = \arctan\left(\frac{0}{1}\right) = 0^\circ \end{aligned}$$

e il seguente modulo:

$$t = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} = 1$$

Per verificare che la rappresentazione complementare $o(\theta,\gamma,\varphi)$ così ottenuta identifica proprio la posizione $o(0,0,1,0)$ è sufficiente eseguire i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned} a &= t\cdot\cos(\varphi)\cdot\cos(\gamma)\cdot\cos(\theta) = 1\cdot\cos(0^\circ)\cdot\cos(90^\circ)\cdot\cos(30^\circ) = 0 \\ b &= t\cdot\cos(\varphi)\cdot\cos(\gamma)\cdot\sin(\theta) = 1\cdot\cos(0^\circ)\cdot\cos(90^\circ)\cdot\sin(0^\circ) = 0 \\ c &= t\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\gamma) = 1\cdot\cos(0^\circ)\cdot\sin(90^\circ) = 1 \\ d &= t\cdot\sin(\varphi) = 1\cdot\sin(0^\circ) = 0 \end{aligned}$$

Dal momento che i valori non nulli legati alle fasi indeterminate sono illimitati, saranno illimitate anche le rappresentazioni complementari qui definite.

Theorem 3.11. *I numeri completi n dimensionali (con $n > 2$) di coordinate (a_1,a_2,a_3,...,a_n) non possono essere espressi nel seguente modo:*

$$o(a_1,a_2,\ldots,a_n) = v_1\cdot a_1 + v_2\cdot a_2 + \ldots + v_n\cdot a_n$$

ovvero:

$$o(t,\theta_2,\ldots,\theta_n) \neq o(a_1,a_2,\ldots,a_n) = v_1\cdot a_1 + v_2\cdot a_2 + \ldots + v_n\cdot a_n$$

Dimostrazione. La dimostrazione deriva dal fatto che non c'è alcuna corrispondenza biunivoca tra le operazioni di traslazione e rotazione di valori $(t, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ e le posizioni $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dello spazio n dimensionale, dal momento che esiste sempre (per ogni dimensione superiore alla seconda) la rappresentazione complementare:

$$o(t, \theta_2, \ldots, \theta_{(n-2)}, \theta_{(n-1)} + 180°, 180° - \theta_n)$$

Infatti se (t,θ_2,...,θ_n) sono i valori che rendono vera la formula (3.1) dei numeri completi n dimensionali, questa stessa espressione sarà soddisfatta anche dai valori:

$$(t, \theta_2, \ldots, \theta_{(n-2)}, \theta_{(n-1)} + 180°, 180° - \theta_n)$$

come si evince dalle seguenti relazioni trigonometriche:

$$\begin{aligned}
&\cos(180° - \theta_n) \cdot \cos(\theta_{(n-1)} + 180°) = \cos(\theta_n) \cdot \cos(\theta_{(n-1)}) \\
&\cos(180° - \theta_n) \cdot \sin(\theta_{(n-1)} + 180°) = \cos(\theta_n) \cdot \sin(\theta_{(n-1)}) \\
&\sin(180° - \theta_n) = \sin(\theta_n)
\end{aligned}$$

□

Data l'impossibilità di associare i numeri completi alle singole posizioni dello spazio n dimensionale, potremo comunque esprimerli in funzione delle loro coordinate $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a patto di esplicitare anche le fasi coinvolte.

Detto in altre parole dovremo servirci della seguente notazione:

$$o(a_1, a_2, \ldots, a_n)_{(t,\theta_2,\ldots,\theta_n)} = v_1 \cdot a_{1(t)} + v_2 \cdot a_{2(\theta_2)} + v_3 \cdot a_{3(\theta_3)} + \ldots + v_n \cdot a_{n(\theta_n)}$$

dove i valori di t,θ_2,...,θ_n se non già indicati, dovranno essere riferiti a quelli che caratterizzano la rappresentazione standard.

Mentre qualsiasi altra notazione del seguente tipo:

$$o(a_1, a_2, \ldots, a_n) = v_1 \cdot a_1 + v_2 \cdot a_2 + \ldots + v_n \cdot a_n$$

priva cioè delle informazioni sufficienti a risalire ai valori delle fasi θ_2,...,θ_n sarà in grado di rappresentare solamente le posizioni dello spazio n dimensionale, ma non i numeri completi.

3.2 Operazioni n dimensionali

Definition 3.12. *Nello spazio $V_1V_2V_3 \ldots V_n$ viene definita addizione tra le due posizioni $o(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})$ e $o(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2})$ la posizione $o(a_{1(1+2)}, a_{2(1+2)}, \ldots, a_{n(1+2)})$ rappresentata anche con il simbolo $o(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}) + o(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2})$ che soddisfa la seguente condizione:*

$$o_{1+2}(a_{1(1+2)}, a_{2(1+2)}, \ldots, a_{n(1+2)}) = o_{1+2}(a_{11} + a_{12}, a_{11} + a_{12}, \ldots, a_{n1} + a_{n2})$$

Questa condizione equivale a trovare la posizione dello spazio $V_1V_2V_3\dots V_n$ avente le seguenti coordinate:

$$
\begin{aligned}
&a_{1(1+2)} = a_{11} + a_{12}\\
&a_{2(1+2)} = a_{21} + a_{22}\\
&\dots\\
&a_{n(1+2)} = a_{n1} + a_{n2}
\end{aligned}
$$

Ad esempio nella quarta dimensione avremo:

$$o_{1+2}(a_{1+2}, b_{1+2}, c_{1+2}, d_{1+2}) = o_{1+2}(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$$

con:

$$
\begin{aligned}
a_{1+2} &= a_1 + a_2\\
b_{1+2} &= b_1 + b_2\\
c_{1+2} &= c_1 + c_2\\
d_{1+2} &= d_1 + d_2
\end{aligned}
$$

Va sottolineato come l'addizione deve essere considerata un'operazione che agisce sulle posizioni e non sui numeri completi, perlomeno nelle dimensione maggiori della seconda per le quali non c'è una corrispondenza biunivoca tra le posizioni e i numeri completi.

Per integrare l'operazione di addizione agente sulle posizioni con le altre operazioni agenti sui numeri completi sarà sufficiente fare riferimento al numero completo che si ottiene assegnando alla somma le fasi della rappresentazione standard.

Theorem 3.13. *Le proprietà sancite dai teoremi 2.21, 2.22, 2.23, 2.24 per la terza dimensione si mantengono valide anche per le dimensioni successive.*

Dimostrazione. In pratica le dimostrazioni dei suddetti teoremi possono essere banalmente estese per un numero di dimensioni a piacere in quanto ciascuna coordinata è trattata indipendentemente dalle altre, e dispone delle stesse proprietà. □

Definition 3.14. *Nello spazio $V_1V_2V_3\dots V_n$ viene definita sottrazione tra le due posizioni $o(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1})$ e $o(a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2})$ la posizione $o(a_{1(1-2)}, a_{2(1-2)}, \dots, a_{n(1-2)})$ rappresentata anche con il simbolo $o(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}) - o(a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2})$ che soddisfa la seguente condizione:*

$$o_{1-2}(a_{1(1-2)}, a_{2(1-2)}, \dots, a_{n(1-2)}) = o_{1-2}(a_{11} - a_{12}, a_{11} - a_{12}, \dots, a_{n1} - a_{n2})$$

Questa condizione definisce la sottrazione come operazione inversa rispetto alla addizione, ed equivale a richiedere:

$$\begin{aligned}
&a_{1(1-2)} = a_{11} - a_{12} \\
&a_{2(1-2)} = a_{21} - a_{22} \\
&\dots \\
&a_{n(1-2)} = a_{n1} - a_{n2}
\end{aligned}$$

Ad esempio nella quarta dimensione avremo:

$$o_{1-2}(a_{1-2}, b_{1-2}, c_{1-2}, d_{1-2}) = o_{1-2}(a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2, d_1 - d_2)$$

con:

$$\begin{aligned}
a_{1-2} &= a_1 - a_2 \\
b_{1-2} &= b_1 - b_2 \\
c_{1-2} &= c_1 - c_2 \\
d_{1-2} &= d_1 - d_2
\end{aligned}$$

Va sottolineato come la sottrazione deve essere considerata un'operazione che agisce sulle posizioni e non sui numeri completi, perlomeno nelle dimensione maggiori della seconda per le quali non c'è una corrispondenza biunivoca tra le posizioni e i numeri completi.

Per integrare l'operazione di sottrazione agente sulle posizioni con le altre operazioni agenti sui numeri completi sarà sufficiente fare riferimento al numero completo che si ottiene assegnando alla differenza le fasi della rappresentazione standard.

Theorem 3.15. *Le proprietà sancite dai teoremi 2.26, 2.27, 2.28, 2.29 per la terza dimensione si mantengono valide anche per le dimensioni successive.*

Dimostrazione. In pratica le dimostrazioni dei suddetti teoremi possono essere banalmente estese per un numero di dimensioni a piacere in quanto ciascuna coordinata è trattata indipendentemente dalle altre, e dispone delle stesse proprietà. □

Definition 3.16. *Nello spazio* $V_1V_2\dots V_n$ *viene definita moltiplicazione tra due numeri completi* $o_1(t_1, \theta_{21}, \dots, \theta_{n1})$ *e* $o_2(t_2, \theta_{22}, \dots, \theta_{n2})$*, il numero* $o_{1\cdot 2}(t_{1\cdot 2}, \theta_{2(1\cdot 2)}, \dots, \theta_{n(1\cdot 2)})$ *rappresentato anche con il simbolo* $o_1(t_1, \theta_{21}, \dots, \theta_{n1}) \cdot o_2(t_2, \theta_{22}, \dots, \theta_{n2})$ *che soddisfa la seguente condizione:*

$$o_{1\cdot 2}(t_{1\cdot 2}, \theta_{2(1\cdot 2)}, \dots, \theta_{n(1\cdot 2)}) = o_{1\cdot 2}(t_1 \cdot t_2, \theta_{21} + \theta_{22}, \dots, \theta_{n1} + \theta_{n2})$$

Questa condizione definisce l'operazione della moltiplicazione, ed equivale a richiedere:

$$\begin{aligned}
&t_{1\cdot 2} = t_1 \cdot t_2\\
&\theta_{2(1\cdot 2)} = \theta_{21} + \theta_{22}\\
&\dots\\
&\theta_{n(1\cdot 2)} = \theta_{n1} + \theta_{n2}
\end{aligned}$$

Ad esempio nella quarta dimensione avremo:

$$o_{1\cdot 2}(t_{1\cdot 2}, \theta_{1\cdot 2}, \gamma_{1\cdot 2}, \varphi_{1\cdot 2}) = o_{1\cdot 2}(t_1 \cdot t_2, \theta_1 + \theta_2, \gamma_1 + \gamma_2, \varphi_1 + \varphi_2)$$

con:

$$\begin{aligned}
&t_{1\cdot 2} = t_1 \cdot t_2\\
&\theta_{1\cdot 2} = \theta_1 + \theta_2\\
&\gamma_{1\cdot 2} = \gamma_1 + \gamma_2\\
&\varphi_{1\cdot 2} = \varphi_1 + \varphi_2
\end{aligned}$$

Theorem 3.17. *Le proprietà sancite dai teoremi 2.40, 2.41, 2.42, 2.43, 2.44, 2.45, 2.46 per la terza dimensione si mantengono valide anche per le dimensioni successive.*

Dimostrazione. In pratica le dimostrazioni dei suddetti teoremi possono essere banalmente estese per un numero di dimensioni a piacere in quanto ciascuna fase è trattata indipendentemente dalle altre, e dispone delle stesse proprietà.

Un discorso a parte lo meritano le proprietà distributive rispetto all'addizione e alla sottrazione per le quali occorre considerare che le dimensioni successive alla terza di fatto la estendono. Questo significa che se tali proprietà fossero state valide nelle dimensioni superiori alla terza lo sarebbero state anche nella terza, come caso particolare, ma sappiamo che ciò non è. □

Definition 3.18. *Nello spazio $V_1V_2\dots V_n$ viene definita divisione tra due numeri completi $o_1(t_1, \theta_{21}, \dots, \theta_{n1})$ e $o_2(t_2, \theta_{22}, \dots, \theta_{n2})$ il numero $o_{\frac{1}{2}}(t_{\frac{1}{2}}, \theta_{2(\frac{1}{2})}, \dots, \theta_{n(\frac{1}{2})})$ rappresentato anche con il simbolo $\frac{o_1(t_1,\theta_{21},\dots,\theta_{n1})}{o_2(t_2,\theta_{22},\dots,\theta_{n2})}$ che soddisfa le seguenti condizioni:*

1. $o_{\frac{1}{2}}(t_{\frac{1}{2}}, \theta_{2(\frac{1}{2})}, \dots, \theta_{n(\frac{1}{2})}) \cdot o_2(t_2, \theta_{22}, \dots, \theta_{n2}) = o_1(t_1, \theta_{21}, \dots, \theta_{n1})$
2. $o_2(t_2, \theta_{22}, \dots, \theta_{n2}) \neq 0$

La prima condizione definisce la divisione come operazione inversa rispetto alla moltiplicazione, ed equivale a richiedere che:

$$\begin{aligned}
&t_{\frac{1}{2}} = \frac{t_1}{t_2}\\
&\theta_{2(\frac{1}{2})} = \theta_{21} - \theta_{22}\\
&\dots\\
&\theta_{n(\frac{1}{2})} = \theta_{n1} - \theta_{n2}
\end{aligned}$$

Ad esempio nella quarta dimensione avremo:

$$o_{1\cdot 2}(t_{\frac{1}{2}}, \theta_{\frac{1}{2}}, \gamma_{\frac{1}{2}}, \varphi_{\frac{1}{2}}) = o_{1\cdot 2}(t_1 \cdot t_2, \theta_1 - \theta_2, \gamma_1 - \gamma_2, \varphi_1 - \varphi_2)$$

con:

$$\begin{aligned} t_{\frac{1}{2}} &= \frac{t_1}{t_2} \\ \theta_{\frac{1}{2}} &= \theta_1 - \theta_2 \\ \gamma_{\frac{1}{2}} &= \gamma_1 - \gamma_2 \\ \varphi_{\frac{1}{2}} &= \varphi_1 - \varphi_2 \end{aligned}$$

La seconda condizione trae la sua giustificazione nella necessità di definire la divisione in modo univoco. Infatti quando essa non vale, l'espressione:

$$o_{\frac{1}{2}}(t_{\frac{1}{2}}, \theta_{2(\frac{1}{2})}, \ldots, \theta_{n(\frac{1}{2})}) \cdot 0 = 0$$

oltre a richiedere un dividendo $o_1(t_1, \theta_{21}, \ldots, \theta_{n1})$ a sua volta nullo, si troverebbe ad essere soddisfatta da più valori di $o_{\frac{1}{2}}(t_{\frac{1}{2}}, \theta_{2(\frac{1}{2})}, \ldots, \theta_{n(\frac{1}{2})})$.

Theorem 3.19. *Le proprietà sancite dai teoremi 2.57,2.58,2.59, 2.60, 2.61, 2.62, 2.63 per la terza dimensione si mantengono valide anche per le dimensioni successive.*

Dimostrazione. In pratica le dimostrazioni dei suddetti teoremi possono essere banalmente estese per un numero di dimensioni a piacere in quanto ciascuna fase è trattata indipendentemente dalle altre, e dispone delle stesse proprietà.

Un discorso a parte lo meritano le proprietà distributive rispetto all'addizione e alla sottrazione per le quali occorre considerare che le dimensioni successive alla terza di fatto la estendono. Questo significa che se tali proprietà fossero state valide nelle dimensioni superiori alla terza lo sarebbero state anche nella terza, come caso particolare, ma sappiamo che ciò non è. □

Definition 3.20. *Nello spazio $V_1V_2\ldots V_n$ viene definita potenza n-esima del numero completo$o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)$ con n (numero naturale) detto esponente e $o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)$ base, il numero $o_{\uparrow n}(t_{\uparrow n}, \theta_{2(\uparrow n)}, \ldots, \theta_{i(\uparrow n)})$ rappresentato anche con il simbolo $o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)^n$ che soddisfa le seguenti condizioni:*

1. $o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)^n = o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i) \cdot \ldots \cdot o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)$ *per* $n > 0$
2. $o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)^n = \frac{o(t,\theta_2,\ldots,\theta_i)}{o(t,\theta_2,\ldots,\theta_i)} = 1$ *per* $n = 0$
3. $o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)^n = \cfrac{1}{\cfrac{o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)}{\cfrac{\ldots}{o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)}}}$ *per* $n < 0$

4. $n > 0$ *per* $o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i) = 0$

Si noti che il termine $o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)$ *nella prima e terza condizione è inteso apparire* $|n|$ *volte.*

La prima condizione definisce il ripetersi della moltiplicazione della base per sé stessa un numero positivo di volte, la seconda un numero 0 di volte, e infine la terza un numero negativo di volte. Tutte queste condizioni equivalgono a richiedere:

$$\begin{aligned} &t_{\uparrow n} = t^n \\ &\theta_{2(\uparrow n)} = \theta_2 \cdot n \\ &\ldots \\ &\theta_{i(\uparrow n)} = \theta_i \cdot n \end{aligned}$$

Ad esempio nella quarta dimensione avremo:

$$o_{\uparrow n}(t, \theta, \gamma, \varphi)^n = o_{\uparrow n}(t_{\uparrow n}, \theta_{\uparrow n}, \gamma_{\uparrow n}, \varphi_{\uparrow n})$$

con:

$$\begin{aligned} &t_{\uparrow n} = t^n \\ &\theta_{\uparrow n} = \theta \cdot n \\ &\gamma_{\uparrow n} = \gamma \cdot n \\ &\varphi_{\uparrow n} = \varphi \cdot n \end{aligned}$$

La quarta condizione trae la sua giustificazione dall'impossibilità di definire il modulo della potenza n-esima quando ad essere moltiplicato per sé stesso per un numero 0 o negativo di volte è proprio lo 0, in quanto in quel caso sarebbero presenti le seguenti divisioni per 0:

$$\begin{aligned} &o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)^n = \frac{0}{0} = 1 \text{ per } n = 0 \\ &o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)^n = \cfrac{1}{\cfrac{0}{\cfrac{\ldots}{0}}} \text{ per } n < 0 \text{ con 0 che appare |n| volte} \end{aligned}$$

Theorem 3.21. *Le proprietà sancite dai teoremi 2.65, 2.66, 2.67, 2.68, 2.69 per la terza dimensione si mantengono valide anche per le dimensioni successive.*

Dimostrazione. In pratica le dimostrazioni dei suddetti teoremi possono essere ripetute inalterate per le dimensioni superiori alla terza, in quanto non dipendono dal numero di dimensioni considerate, ma dalla struttura stessa della potenza n-esima. □

Definition 3.22. *Nello spazio $V_1 V_2 \dots V_n$ viene definita radice n-esima del numero completo $o(t, \theta_2, \dots, \theta_i)$ con n (numero naturale) detto indice e $o(t, \theta_2, \dots, \theta_i)$ radicando, il numero $o_{\downarrow n}(t_{\downarrow n}, \theta_{2(\downarrow n)}, \dots, \theta_{i(\downarrow n)})$ rappresentato anche con il simbolo $\sqrt[n]{o(t, \theta_2, \dots, \theta_i)}$ che soddisfa le seguenti condizioni:*

1. $\sqrt[n]{o(t, \theta_2, \dots, \theta_i)} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{o(t, \theta_2, \dots, \theta_i)} = o(t, \theta_2, \dots, \theta_i)$ *per* $n > 0$

2. $\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt[n]{o(t, \theta_2, \dots, \theta_i)}}{\dfrac{\cdots}{\sqrt[n]{o(t, \theta_2, \dots, \theta_i)}}}} = o(t, \theta_2, \dots, \theta_i)$ *per* $n < 0$

3. $\theta_{2(\downarrow n)} = \frac{\theta_2}{n}, \quad \theta_{3(\downarrow n)} = \frac{\theta_3}{n}, \quad \dots, \quad \theta_{i(\downarrow n)} = \frac{\theta_i}{n}$

4. $n \neq 0$ *per ogni* $o(t, \theta_2, \dots, \theta_i)$

5. $n \geq 0$ *per* $o(t, \theta_2, \dots, \theta_i) = 0$

6. $\sqrt[n]{t} > 0, \quad t > 0$

Si noti che il termine $\sqrt[n]{o(t, \theta_2, \dots, \theta_i)}$ nella prima e seconda condizione è inteso apparire $|n|$ volte.

La prima condizione definisce il ripetersi della moltiplicazione della radice per sé stessa un numero positivo di volte, mentre la seconda un numero negativo di volte. Entrambe queste condizioni equivalgono a richiedere:

$$
\begin{aligned}
& t_{\downarrow n} = \sqrt[n]{t} \\
& \theta_{2(\downarrow n)} = \frac{\theta_2 + k \cdot 360°}{n} \qquad \text{per } k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots \\
& \dots \\
& \theta_{i(\downarrow n)} = \frac{\theta_i + k \cdot 360°}{n} \qquad \text{per } k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots
\end{aligned}
$$

La terza condizione trae la sua giustificazione nella necessità di definire la radice n-esima in modo univoco. Infatti quando tale condizione non vale, ci saranno $n^{(i-1)}$ numeri completi differenti in grado di soddisfare la definizione di radice n-esima: uno per ciascun insieme distinto di fasi $\theta_{2(\downarrow n)}$,$\theta_{3(\downarrow n)}$,. . ., $\theta_{i(\downarrow n)}$, che soddisfa le relazioni vista sopra.

Ad esempio nella quarta dimensione avremo:

$$\sqrt[n]{o(t, \theta, \gamma, \varphi)} = o_{\downarrow n}(t_{\downarrow n}, \theta_{\downarrow n}, \gamma_{\downarrow n}, \varphi_{\downarrow n})$$

con:

$$t_{\downarrow n} = \sqrt[n]{t}$$
$$\theta_{\downarrow n} = \frac{\theta}{n}$$
$$\gamma_{\downarrow n} = \frac{\gamma}{n}$$
$$\varphi_{\downarrow n} = \frac{\varphi}{n}$$

Anche la quarta condizione trae la sua giustificazione nella necessità di definire la radice n-esima in modo univoco. Infatti quando tale condizione non vale, la moltiplicazione della radice per sé stessa un numero di volte pari a 0 richiederebbe l'impiego della seguente espressione:

$$\frac{\sqrt[n]{o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)}}{\sqrt[n]{o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)}} = 1$$

che si troverebbe ad essere soddisfatta da più valori di $\sqrt[n]{[o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)]}$.

La quinta condizione trae la sua giustificazione dall'impossibilità di definire valori della radice n-esima che moltiplicati per sé stessi un numero negativo di volte siano in grado di dare come risultato proprio il valore 0. Infatti la seguente espressione:

$$\frac{1}{\dfrac{\sqrt[n]{o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)}}{\dfrac{\ldots}{\sqrt[n]{o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)}}}} = 0 \text{ per } n < 0, \ \sqrt[n]{o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)} \text{ appare |n| volte}$$

richiede l'esistenza di un divisore del numero 1 che possa fargli corrispondere un quoziente pari a 0: cosa che sappiamo impossibile.

La sesta condizione trae la sua giustificazione dalla necessità di rendere lecita la radice n-esima a livello del modulo t del numero completo $o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)$.

Theorem 3.23. *Le proprietà sancite dai teoremi 2.71, 2.72, 2.73 per la terza dimensione si mantengono valide anche per le dimensioni successive.*

Dimostrazione. In pratica le dimostrazioni dei suddetti teoremi possono essere ripetute inalterate per le dimensioni superiori alla terza, in quanto non dipendono dal numero di dimensioni considerate, ma dalla struttura stessa della radice n-esima. □

Definition 3.24. *Nello spazio $V_1 V_2 \ldots V_n$ viene definita potenza ad esponente razionale $\frac{m}{n}$ (con n,m numeri naturali) del numero completo $o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)$ con $\frac{m}{n}$ detto esponente e $o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)$ base, il numero $o_{\uparrow m \downarrow n}(t_{\uparrow m \downarrow n}, \theta_{2(\uparrow m \downarrow n)}, \ldots, \theta_{i(\uparrow m \downarrow n)})$ rappresentato anche con il simbolo $o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)^{\frac{m}{n}}$ oppure $\sqrt[n]{o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)^m}$ che soddisfa le seguenti condizioni:*

1. $\left[\sqrt[n]{o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)^m} \right]^n = o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)^m$
2. $m > 0$ *per* $o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i) = 0$
3. $n \neq 0$ *per ogni* $o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)^m$ *e quindi per ogni* $o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)$
4. $n \geq 0$ *per* $o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)^m = 0$ *e quindi per* $o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i) = 0$
5. $\theta_{2(\uparrow m \downarrow n)} = \frac{\theta_2 \cdot m}{n}, \quad \theta_{3(\uparrow m \downarrow n)} = \frac{\theta_3 \cdot m}{n}, \quad \ldots, \quad \theta_{i(\uparrow m \downarrow n)} = \frac{\theta_i \cdot m}{n}$
6. $\sqrt[n]{t^m} > 0, \quad t^m > 0$
7. $\sqrt[n]{t} > 0, \quad t > 0$

La prima condizione definisce la potenza ad esponente razionale come una radice n-esima di una potenza m-esima.

Le seconda condizione è richiesta per la corretta definizione della potenza m-esima.

Le terza, la quarta, la quinta e la sesta condizione sono richieste per la corretta definizione della radice n-esima.

Ad esempio nella quarta dimensione avremo:

$$\sqrt[n]{o(t, \theta, \gamma, \varphi)^m} = o_{\uparrow m \downarrow n}(t_{\uparrow m \downarrow n}, \theta_{\uparrow m \downarrow n}, \gamma_{\uparrow m \downarrow n}, \varphi_{\uparrow m \downarrow n})$$

con:

$$t_{\downarrow n} = t^{\frac{m}{n}}$$
$$\theta_{\downarrow n} = \frac{m}{n} \cdot \theta$$
$$\gamma_{\downarrow n} = \frac{m}{n} \cdot \gamma$$
$$\varphi_{\downarrow n} = \frac{m}{n} \cdot \varphi$$

La settima condizione è richiesta per rendere lecita l'inversione dell'ordine tra radice e potenza, ovvero per poter scrivere:

$$\left[\sqrt[n]{o(t, \theta_2, \ldots, \theta_i)} \right]^m$$

e quindi:

$$\left(\sqrt[n]{t} \right)^m$$

Theorem 3.25. *Le proprietà sancite dai teoremi 2.75, 2.76, 2.77, 2.78, 2.79, 2.80, 2.81 per la terza dimensione si mantengono valide anche per le dimensioni successive.*

Dimostrazione. In pratica le dimostrazioni dei suddetti teoremi possono essere ripetute inalterate per le dimensioni superiori alla terza, in quanto non dipendono dal numero di dimensioni considerate, ma dalla struttura stessa della potenza ad esponente razionale. □

Riferimenti bibliografici

[1] HARDY, G. H. A course of pure mathematics. Centenary edition. Reprint of the tenth (1952) edition with a foreword by T. W. Körner. *Cambridge University Press, Cambridge*, 2008. xx+509 pp. ISBN: 978-0-521-72055-7 MR2400109