Guido Fiorentino

La matematica nostra e dei Mundurukù

I Mundurukù sono una tribù molto primitiva di cacciatori-raccoglitori analfabeti dell'Amazzonia, che vive in condizioni di pressoché totale isolamento. Da quanto riferisce il linguista Steven Pinker"[1], si può dedurre che il loro linguaggio lessicalizza tutti i concetti che essi riconoscono, e usano, ossia li designa tutti con altrettante parole specifiche del loro vocabolario – per noi dei sostantivi; cioè essi non utilizzano, né conoscono gli aggettivi e le espressioni equivalenti che noi associamo ai sostantivi per indicarne le differenti possibili caratteristiche: allo scopo si servono invece di sostantivi differenti, o di differenti versioni del sostantivo; solo per fare un possibile esempio: un sostantivo per "cibo buono" e un altro per "cibo cattivo". Simile è anche il caso degli inuit, che vivono invece nell'Artico - sempre citati da Pinker - che usano vocaboli differenti per i diversi tipi di neve.

Quelle tribù possono però fare così solo perché è estremamente limitato il numero dei concetti che le loro condizioni di vita assolutamente primitive danno la possibilità, e il motivo, di riconoscere e di comunicare: per qualsiasi società umana appena un po' più evoluta, designare con altrettanti termini, o loro modificazioni specifiche, tutti i concetti che i suoi membri riconoscono, e usano, ne richiederebbe un numero talmente spropositato che mai la mente riuscirebbe a ricordarli.

Lo stesso vale per il conteggio, primo passo verso la matematica: finché - come succede per i Mundurukù - l'esigenza di contare si limita alle poche unità che nelle particolari condizioni della loro esistenza ci può essere motivo di specificare, è più semplice specializzare i termini, ad esempio modificando le desinenze delle parole secondo le particolari occorrenze numeriche; e se sono più di cinque, si passa a "molti". Verosimilmente facevano così anche i nostri lontanissimi progenitori agli albori del linguaggio: lo fa pensare l'uso del duale e di forme simili, che tuttora persiste in alcune lingue; ma, evidentemente, per quella strada non si può andare lontano.

L'evoluzione ha portato il nostro linguaggio a risolvere quei problemi in un modo più generale, associando ai sostantivi, che indicano le *proprietà* fondamentali dei *concetti*, gli *attributi*: aggettivi o espressioni equivalenti[2], relativi alle particolari *caratteristiche accessorie*, che differenziano ciò che si intende designare dal concetto evocato dal sostantivo: ad esempio, una "rosa *rossa*" da una "rosa".

Così, le lingue evolute parlate nel mondo riservano la lessicalizzazione a un numero relativamente limitato di *concetti semplici*, che per l'importanza e frequenza del loro impiego lo giustificano; designano invece tutti i concetti più *complessi* associando ai sostantivi che li rappresentano degli *attributi* – tipicamente aggettivi, pure lessicalizzati – intesi a specificare le caratteristiche che li distinguono da essi, quali loro sottospecie, nonché dai concetti complessi con altri attributi.

Nel nostro linguaggio concetti e attributi - sostantivi e aggettivi o forme equivalenti - costituiscono le coordinate di una sorta di "mappa", che con un numero grande, ma finito, di termini, permette di designare un numero illimitato di differenti oggetti, personaggi, eventi, ecc., senza che sia necessario coniare altrettanti termini specifici, né memorizzare il significato delle loro illimitate possibili combinazioni, perché emerge dall'interazione logica fra i rispettivi significati.

Concetti sia semplici che complessi: sostantivi eventualmente accompagnati da aggettivi o altri attributi, costituiscono il *soggetto logico* e il *predicato logico* delle proposizioni: *logico* per distinguerlo da quello grammaticale rappresentato dal solo sostantivo. Naturalmente, non sempre la forma grammaticale delle parole rispecchia la loro effettiva funzione: ad esempio, in italiano e nelle lingue affini, i sostantivi sono spesso aggettivati, come "scimmia" in "uomo scimmia", o "da scimmia", per "scimmiesco", mentre qualsiasi parte del discorso può essere sostantivata ponendola almeno idealmente *fra virgolette*, come "il bene", "il per", "l'essere", ecc.; in molte lingue poi – come il cinese – secondo la sua posizione nella frase, una stessa parola può assumere più differenti significati e corrispondenti funzioni grammaticali: quella che conta è la funzione effettivamente svolta dalle parole.

Del tutto analoga è stata l'evoluzione per la matematica, che costituisce l'oggetto specifico di queste pagine, dove l'accostamento ai concetti - usualmente rappresentati in forma simbolica dai *termini* noti o incogniti - dei *coefficienti* - gli aggettivi numerici[3] che ne costituiscono gli attributi - consente di specificare illimitatamente le loro *caratteristiche quantitative*.

*

L'associazione degli attributi ai concetti ha rappresentato un progresso irreversibile del linguaggio, assolutamente indispensabile per le limitate possibilità della nostra mente quotidianamente assillata dalla necessità di designare e ricordare nuovi concetti, e per le nostre stesse capacità espressive e d'immaginazione: dopo la classificazione per concetti delle percezioni e dei pensieri, una tappa dell'evoluzione del pensiero umano persino più determinante della notazione posizionale dei numeri, eppure usualmente ignorata.

Non soltanto, infatti, la sua importanza non è riconosciuta come merita, ma il suo ruolo e la sua stessa esistenza sono ignorati dai linguisti e dai logici, che nonostante la sostanziale ed evidente differenza ontologica, considerano i concetti e gli attributi logicamente equivalenti(4), e sì che sin dalle elementari abbiamo imparato a distinguere fra sostantivi e aggettivi, i loro rappresentanti più tipici. E l'esistenza stessa di concetti e attributi – o più precisamente, di *termini* e *coefficienti* – come *entità* è poi addirittura respinta dai matematici, per i quali, con un sostanziale regresso alla matematica arcaica dei Mundurukù, concetti e attributi, termini e coefficienti dovrebbero essere globalmente considerati, come un tutto inscindibile, *proprietà unarie dette predicati o relazioni n.arie, o in generale formule*(5).

Indubbiamente la differenza fra le *proprietà* dei *concetti* e le *caratteristiche* invece degli *attributi*, al pari di quella fra sostantivi e aggettivi, termini e coefficienti, è essenzialmente induttiva e sfugge a definizioni precise ed esaurienti; non sono tuttavia affatto più solide e realistiche le basi della logica cui si attengono i matematici, quali risultano, ad esempio dalle dispense di Gabriele Lolli cui si riferisce la nota precedente, anch'esse dichiaratamente induttive ma - in riferimento alle situazioni reali - ben più discutibili.

Ciò vale in particolare per l'asserzione:

Se *A* è una formula, anche (¬*A*) lo è".(6)

Facendo un tutt'uno di concetti e attributi, coefficienti e termini che compongono le formule, tale definizione ne ammette incondizionatamente la negazione; ma *negato* è - per definizione - tutto quanto ciò di cui si parla *non è*, per cui nel nostro mondo sostanzialmente qualsiasi cosa può corrispondere a "¬*A*" - ciò che la formula non è: il negato di una formula, come di qualsiasi concetto, non ha quindi alcun significato.

Forse, in un mondo come quello dei Mundurukù. tanto povero di concetti, anche il negato di "formula" - ammesso che rientri fra i loro concetti - potrebbe avere un qualche significato, ma nel nostro non ne ha alcuno; è quindi lecito domandarsi a quale mondo fa riferimento un'induzione che l'ammette: al nostro attuale, per il quale, almeno ragionevolmente, le deduzioni che se ne possono trarre dovrebbero valere, o a uno arcaico che con esso non ha più nulla a che fare.

Nel nostro linguaggio la negazione è sempre ammessa per gli attributi, quindi per gli aggettivi e i coefficienti, ma per i concetti come i sostantivi e i termini, e così per le proposizioni e che li esprimono, è ammissibile solo come smentita di una precedente affermazione, o quanto meno presunzione. Sono quindi sostanzialmente differenti le logiche cui obbediscono i concetti e gli attributi: gli attributi a una logica almeno approssimativamente binaria(7) e che comunque ammette sempre la negazione, e i concetti invece a una logica di cui usualmente non si parla, *unaria* in quanto ammette unicamente l'affermazione; e analogamente, nell'algebra il segno meno vale esclusivamente per i coefficienti(8), che possono essere sia positivi che negativi, ma non per i termini, che non sono né l'uno né l'altro.

Certo, se si sorvola sulla differenza fra concetti e attributi, la logica si semplifica; ma proprio lì sta la discriminazione fra una logica del tutto astratta, come quella cui si rifanno i matematici nelle loro considerazioni, e la logica che vale veramente nel nostro mondo: tutto sta a stabilire a quale mondo sono destinate le conclusioni che si intendono trarre dai ragionamenti: se al nostro, o a uno arcaico sostanzialmente rimasto all'età della pietra come quello dei Mundurukù, che al nostro più non corrisponde, o a quello rigorosamente binario di cui si parla più sotto, che nel nostro non ha proprio alcun riscontro.

In realtà i matematici necessariamente tollerano che si usi parlare di termini e coefficienti, e li si utilizzi per quella che chiamano "matematica standard": essi stessi non saprebbero farne a meno nei loro calcoli, né possono certo ignorare la distinzione fra concetti e attributi nel metalinguaggio che usano per la specificazione dei sistemi formali, per la spiegazione delle elaborazioni e l'interpretazione dei risultati. Però teorizzano ragionando su un mondo che nella realtà non trova alcun riscontro.

*

Invero, l'improprietà della logica cui gli studiosi usano attenersi - che almeno in teoria ammette la negazione di concetti e termini che nel nostro mondo non vale - di regola non ha modo di manifestarsi e passa inosservata, perché i discorsi riguardano molto più facilmente gli *attributi*, ossia le *caratteristiche contingenti* qualitative, quantitative, o di altra natura dei concetti, che le loro *proprietà ontologiche*, cioè la loro natura, e quelle proprietà non c'è usualmente alcun motivo di negarle, cosicché l'improprietà della logica rimane soltanto teorica, e non incide sui risultati.

Ciò può far pensare che la differenza fra i concetti e gli attributi sia una questione puramente tassonomica, di solo nominalismo; ci si possa quindi disinteressare della natura di concetti o invece di attributi di ciò su cui si ragiona e si opera; ma non è così: la distinzione fra concetti e attributi è veramente essenziale e permette anche di risolvere alcuni notissimi paradossi, privandoli dell'aura cui nemmeno Piergiorgio Odifreddi riesce a sottrarsi, che li fa considerare naturali e inevitabili,.

Egli dice:

L'espressione *paradoxon* significa … «oltre l'opinione comune». E poiché gli individui possono anche essere intelligenti e colti, ma le masse sono sicuramente beote e ignoranti, l'opinione comune è quasi sempre sbagliata. Dunque, i paradossi sono quasi sempre pure e semplici verità, e il tempo si diverte a sollevare lembi del grande velo che le nasconde(9).

o addirittura:

Oggi i paradossi sono … descritti come verità che stanno a testa in giù e gambe all'aria per attirare l'attenzione, e mostrano una discrepanza tra le credenze che rendono un'affermazione impossibile, e la logica che rende un argomento in loro difesa corretto. L'unica soluzione possibile, non indolore, richiede una revisione radicale delle credenze, della logica, o di entrambe.

In matematica, la revisione provoca a volte una singolare reincarnazione. Alla luce dei nuovi concetti introdotti per risolverli, i vecchi paradossi non solo cessano di essere tali, ma si trasformano addirittura in nuovi teoremi o definizioni, e appaiono finalmente come pure e semplici verità, coi piedi per terra e la testa sul collo"(10).

Più ragionevolmente, per Enzo Paci,

I paradossi indicano, di solito, un problema mal posto, un nodo non analizzato: indicano la necessità di riesaminare i problemi ricominciando daccapo e cercando di "disoccultare" l'origine di tutte le concatenate operazioni che ci hanno, alla fine, rivelato un'aporia insuperabile. In altri termini indicano un lavoro da fare, e un lavoro tutt'altro che facile.(11)

Di fatto frequentemente il problema è mal posto. Così è nel famoso paradosso "del mentitore", perché ignora la distinzione fra concetti e attributi: riconoscendola la soluzione è semplice, e immediata.

Le numerose versioni del paradosso sono tutte sostanzialmente riconducibili a quella classica del tipo "Questa frase è falsa", da cui, ragionando in termini binari, si usa trarre la conclusione che la frase è vera se, e solo se, è falsa; ma ciò non è corretto: la copula "è" equivale al segno di uguaglianza "=", e se – come è doveroso – non si ignora la sostanziale differenza ontologica fra sostantivi e aggettivi, il sostantivo "frase" del soggetto *non può* essere uguale all'aggettivo "falsa" del predicato: anche al predicato deve necessariamente esserci un sostantivo, sia pure sottinteso, come in "Questa frase è (una frase) falsa", che in sostanza equivale a "Questa frase *non è* una frase".

Non è quindi un paradosso, ma una proposizione autocontraddittoria: rendendosene conto, viene meno il paradosso, e insieme anche il fondamento del ragionamento che ad esso si ispira, di cui Gödel si è servito per la "prova" dei suoi famosi Teoremi, sostituendo alla "falsità" del "mentitore" la "non dimostrabilità" della propoposizione "*G*"(12).

Qualcosa di simile vale per diversi altri noti paradossi, ad esempio "di Grelling", "di Richard", di "Berry", ecc., anch'essi autocontraddittori, non per nulla chiamati *antinomie*, basati su definizioni arbitrarie, volutamente formulate in modo tale da identificare quanto affermano con ciò che non è, né può essere.

Dice Piergiorgio Odifreddi:

Che cosa c'è dunque di tanto terribile nella contraddizione da spingere i logici a postulare un principio che la escluda esplicitamente? La risposta è che da una contraddizione potrebbe derivare qualunque cosa, e la logica diventerebbe inutile. Detto in latino, *ex falso quodlibet*.(13)

Non rendendosi conto delle contraddizioni, né Odifreddi né tanti altri studiosi mostrano la stessa severità verso i paradossi, né tanto meno verso l'uso che - come dice Gabriele Lolli - Gödel ritenne utile, e legittimo, farne quali strumenti di dimostrazione per la "prova" dei suoi Teoremi:

Il pullulare delle antinomie era considerato da molti un argomento a sfavore dei concetti nuovi che si volevano introdurre nella matematica, da quelli insiemistici a quelli logici, soprattutto quelli relativi alla «definibilità»: non erano matematica.

Finché Gödel non ha eseguito la sua dimostrazione, questo è stato il sentimento più diffuso tra i matematici, di sospetto e fastidio per tali forme di ragionamento.

Con Gödel i paradossi sono rimessi all'onor del mondo. sia scientifico che culturale, e vengono ad assumere un carattere positivo, come tecnica dimostrativa. Nell'introduzione al suo lavoro sull'incompletezza, Gödel osserva che «l'analogia di questa argomentazione con l'antinomia di Richard salta agli occhi. Anche con 'il mentitore" sussiste una stretta affinità ... abbiamo una proposizione, la quale afferma la propria indimostrabilità»; in una nota aggiunge: «In generale tutte le antinomie epistemologiche possono essere sfruttate per una simile dimostrazione di indecidibilità».[(14)]

Però Gödel si spinge oltre.

*

Come è detto più sopra, manca di regola il motivo per negare impropriamente i concetti e i termini, che non l'ammettono, nulla però impedisce di farlo[(15)]: in matematica il motivo di farlo non c'era, solo però finché Gödel si rese conto che poteva trarne vantaggio per la "prova" dei suoi Teoremi.

Senza che sia necessario entrare nei dettagli, la complessa e originale metodologia da lui seguita è discutibile non soltanto – come è detto più sopra – perché non è accettabile il ragionamento ispirato al paradosso "del mentitore", ma basato sulla "non dimostrabilità" della proposizione "G", ma soprattutto perché la "prova" si fonda su una logica rigorosamente binaria che non è la nostra: anche ammesso che fosse valida, lo sarebbe per un mondo che col nostro nulla ha a che fare.

La "prova" contempla infatti la "negazione formale" della famosa proposizione "La proposizione G non è dimostrabile" "~*G*"[(16)], e di concetti, come "~Dim", dove "Dim" è una dimostrazione[(17)]: espressioni che nel nostro mondo sono prive di qualsiasi significato, e nemmeno in quello dei Mundurukù potrebbero trovare riscontro.

Naturalmente, la logica binaria rende tutto più semplice; consente a Gödel di far assurgere l'assenza di una dimostrazione contraria a valida prova di qualsiasi affermazione ad arbitrio: dell'incompletezza degli assiomi dell'aritmetica, così come dell'esistenza di Dio[(18)].

Dice di fatto "La prova di Gödel" a proposito della formula "$(\exists y)\ (x)\ \sim \mathrm{Dim}\ (x, y)$":

Espressa in parole, essa afferma che 'vi è almeno un numero y tale che, per ogni numero x, x non sta nella relazione Dim con y'. Interpretata in linguaggio metamatematico, la formula afferma che 'vi è almeno una formula dell'aritmetica per la quale nessuna sequenza di formule costituisce una dimostrazione'.[(19)]

Chi mai metterebbe in dubbio che "vi è almeno un numero y tale che, per ogni numero x, x non sta nella relazione Dim con y", del quale mai aveva prospettato l'esistenza?

Molto più dubbio è che ciò significhi qualcosa nel nostro mondo, dove l'assenza di un concetto deve essere provata solo se ne è stata affermata l'esistenza, altrimenti è una verità lapalissiana su cui nessun serio ragionamento può fondarsi: soltanto in un mondo binario del tutto astratto, che non è il nostro, si può in tal modo dare per provata l'esistenza di "una formula dell'aritmetica per la quale nessuna sequenza di formule costituisce una dimostrazione", che nessuno ha mai visto, né con tutta verosimiglianza mai si vedrà, come di qualsiasi cosa d'altro a piacere.

Ogni perplessità risulta quindi giustificata sulla reale validità della "prova" che Gödel ha dato del Teorema di incompletezza: "«la verità matematica più importante del secolo», come - sarebbe stata descritta nel 1952 in una cerimonia alla Harvard University"[(20)]. Naturalmente non si intende con questo entrare nel merito dei Teoremi, ma solo mettere in dubbio la validità per le cose di questo mondo della metodologia che Gödel ha utilizzato per la "prova", tanto più che l'incompletezza degli assiomi dei Principia Mathematica è stata dimostrata per altra via da Turing e da altri, e non è nemmeno facile immaginare come degli assiomi potrebbero assicurarne la completezza.

Dice Rebecca Golstein, in un libro dedicato alla spiegazione, ed esaltazione della "prova":

Abbiamo mostrato, ironicamente, che [G] è vera uscendo dal sistema e facendo vedere che nessuna dimostrazione di G può essere prodotta entro il sistema formale. Abbiamo mostrato che G è vera facendo vedere che non può essere dimostrata, proprio come dice.[(21)]

Il solo dubbio è se ci fosse bisogno di provarlo, visto che di "G" sostanzialmente nulla si sa. E' comunque piuttosto curioso notare ciò che, sempre Rebecca Goldstein, riferisce:

… il discorso di venti minuti che Gödel pronunciò il secondo giorno della conferenza [di Koenigsberg] suscitò poca attenzione. Era essenzialmente un compendio del lavoro che aveva svolto l'anno prima per la tesi del suo dottorato; non un lavoro sull'incompletezza quanto piuttosto sulla completezza. Ciò che Gödel aveva fatto era provare la completezza di quello che è chiamato calcolo predicativo o, a volte, *logica del primo ordine*, o ancora *logica dei quantificatori*. ...(22)

Verosimilmente egli aveva dimostrato che è completa la "logica dei quantificatori", cioè proprio la completezza di quel ramo della matematica rigorosamente binario, relativo ai coefficienti e in generale all'aritmetica, di cui con i suoi Teoremi. ritenne poi di aver dimostrato l'incompletezza.

* * *

Note

1) Steven Pinker, *Fatti di parole*, Milano, Mondadori 2009, pp. 151-152.
2) Ad esempio, l'associazione di preposizioni ai sostantivi, del tipo "di legno", con significato simile all'aggettivo "legnoso". Anche i concetti possono essere indicati da espressioni più complesse che i soli sostantivi.
3) Pur essendo rappresentati allo stesso modo, sono altra cosa, ad esempio "3" quale coefficiente, ossia *aggettivo numerico*, o invece come *numero*, in quanto sostantivo né pari né dispari, né primo né divisibile, ecc.
4) Dice ad esempio Steven Pinker nel libro della nota 1, p. 102: "Non c'è pressoché nessuno che, negli svariati dibattiti su natura *versus* cultura, non riconosca che le persone devono nascere con la capacità di rappresentarsi alcuni concetti elementari (anche solo «rosso», «rumoroso», «rotondo» e così via) e, a partire da questo repertorio innato di assemblarne di nuovi con l'esperienza (anche solo associandoli fra loro). Il concetto complesso di «quadrato rosso», per esempio, si apprende collegando i concetti semplici di «rosso» e «quadrato»"; e la *Logica*, di Ettore Casari, Torino, UTET, 1995, usa la medesima simbologia per rappresentare "Socrate è mortale" e "Venere è un pianeta". Nemmeno Whitehead e Russell fanno alcuna distinzione fra concetti e attributi nei *Principia matematica*, Cambridge, 1910. Nella logica proposizionale si usa invece operare una distinzione – concettualmente non altrettanto rilevante - fra un primo e un secondo ordine, secondo che si tratta di predicati, o di predicati di predicati.
5) Dalle Dispense di Filosofia della matematica di Gabriele Lolli, *Gödel filosofo*", anno 2010-11.
6) Formula 2 a p. 3, del paragrafo 1.2 dedicato ai "Termini e formule", dove l'insieme delle formule "è definito con la seguente definizione induttiva:", di cui quella riportata è il numero 2,
7) Anziché i due soli valori tutto o niente della logica unaria, gli attributi possono presentare tutta una gamma di sfumature.
8) Usualmente sfugge che nelle espressioni algebriche, il segno meno può precedere solo i coefficienti, con la sola eccezione ovvia che il coefficiente sia 1, per cui è sottinteso.
9) Piergiorgio Odifreddi *C'era una volta un paradosso*, Torino, Einaudi, , 2001, p. XI.
10) Ivi, p. 280.
11) Enzo Papi, Introduzione a *Le parole e le cose*, di Ernest Gellner, Milano, il Saggiatore, 1959, pp. 10-11.
12) Dicono Ernest Nagel e J. R. Newman ne *La prova di Gödel*, Torino, Boringhieri, 1974: "Gödel, d'altra parte, dimostrò anche che *G* è dimostrabile se, e solo se, la sua negazione formale ~*G* è dimostrabile", p. 93.
13) Piergiorgio Odifreddi, *Il diavolo in cattedra*, Torino, Einaudi 2003, p. 63.
14) Gabriele Lolli, *Da Euclide a Gödel*, Bologna, Il Mulino 2004, p. 127.
15) Lo fanno in sostanza i filosofi, con le loro dotte disquisizioni sul "non essere", e "il nulla".
16) Nel libro della nota 12, p. 93.
17) Ivi, p. 94.
18) Ne la "Prova matematica dell'esistenza di Dio", a cura di Gabriele Lolli e Piergiorgio Odifreddi, Torino, Bollati Boringhieri 2006, Lolli, che delle opere di Gödel è uno dei massimi esegeti, dice a "Nel 1961 Gödel scrisse quattro lettere alla madre esprimendo le sue ragioni per credere in un'altra vita. Altre volte si era limitato a osservare che l'esistenza di Dio e di una vita dopo la morte non erano mai state refutate. Lo stesso dicasi per la possibilità della trasmigrazione delle anime. Qualche volta dava l'impressione di pensare che qualunque credenza potesse essere legittimamente assunta, se non era stata provata logicamente contraddittoria. D'altra parte il suo teorema di completezza della logica afferma proprio questo, per la matematica.", pp. 17-18.
19) Nel libro della nota 12, p. 102.
20) Palle Yourgrau, *Un mondo senza tempo*, Milano, Il Saggiatore 2006, p. 70.
21) Rebecca Goldstein, *Incompletezza*, Torino, Codice, 2006, p. 137.
22) Ivi., p. 111.

Ivrea, 26/6/2011