Guido Fiorentino

I miracoli della negazione

E’ piuttosto comune vedere le cose in termini binari del tipo si/no, usando quindi la negazione per cui, ad esempio ciò che non è vero è sicuramente falso, e viceversa e, di fatto, in molti casi sapere ciò che qualcosa *non è*, permette di indovinare ciò che invece è, più difficile da scoprire; appare perciò naturale servirsene quale strumento di conoscenza.

Invero, è ampiamente riconosciuto che, più spesso delle due caratteristiche estreme, si riscontra un’intera gamma di situazioni cui non è possibile attribuire né l’una né l’altra delle due alternative. Dice ad esempio Piergiorgio Odifreddi:

> La restrizione a due soli valori di verità impone alla logica classica una rigidità manichea in cui tutto risulta bianco o nero, cioè vero o falso. Il grande vantaggio è che le cose si semplificano enormemente; ma si tratta, come disse Russell, del vantaggio del furto nei confronti del lavoro onesto.(1)

Una logica almeno approssimativamente binaria, quindi il ricorso alla negazione, vale comunque soltanto per gli *attributi*, quali gli aggettivi degli esempi, o forme equivalenti composte di più parole(2). *Negato* è infatti, per principio, tutto quanto ciò di cui si parla *non è*: gli attributi lo hanno, e corrisponde a ciò che non sono(3); non è così invece per i *concetti* espressi da sostantivi e proposizioni: se non ci sono, o vengono negati, nulla di significativo sta al loro posto, per cui, salvo che smentisca una precedente affermazione o quanto meno presunzione, la negazione di concetti come “non uomo”, “non albero”, “non dimostrazione”, ecc. è un’operazione senza significato, perché sostanzialmente qualsiasi cosa vi corrisponde.

Può perciò risultare sorprendente che in quei termini binari impropri, ben più dei comuni mortali usino ragionare i cultori della matematica, che è considerata la *scienza esatta* per eccellenza. Quella metodologia appare però decisamente allettante, perché dimostrare cosa qualcosa *non è*, consente di stabilire cosa invece *è*, che ne costituisce il necessario complemento, altrimenti difficile da trovare.

Ciò semplifica la soluzione di numerosi problemi teorici, per cui i matematici non vi rinunziano: ragionando sulle orme aristoteliche in termini vero-funzionali, sembra infatti possibile utilizzare il “valore di verità” per dare un negato anche ai concetti che non l’hanno; e così fa Odifreddi:

> Una volta presa la stoica decisione di ridurre i valori di verità a due soli la vita si semplifica enormemente, per non dire che perde praticamente di interesse. Diventa infatti possibile descrivere completamente il comportamento dei connettivi in maniera vero-funzionale, che sarebbe l’insipido modo di ridurre questo comportamento ai valori di verità, nel modo seguente.
>
> Poiché negare una proposizione è diverso dall’affermarla, la negazione deve cambiare il valore di verità di una proposizione. Se le scelte sono solo due, la negazione non può far altro che scambiarle, facendo diventare il vero falso e viceversa.(4)

In quel modo, sia pure insipido,

> Le […] definizioni vero-funzionali di negazione, congiunzione e disgiunzione sono naturali, una volta accettato il fatto che il valore di verità di una formula composta debba essere completamente determinato dai valori di verità delle sue componenti.(5)

Appare così legittimo ragionare in termini binari per tutte indifferentemente le situazioni, attenendosi a quella che, in “Gödel filosofo”, Gabriele Lolli chiama una “definizione induttiva”:

Se A è una formula, anche $\neg A$ lo è.(6)

dove “A” è un attributo, come un aggettivo, o invece un concetto indicato da un sostantivo o da un’intera proposizione.

Però nel nostro mondo quella simmetria fra l’affermazione e la negazione non ha riscontro: vale approssimativamente per gli attributi, come gli aggettivi, ma a dispetto di ogni considerazione sul “valore di verità”, i concetti e le proposizioni non ammettono la negazione. Si pone quindi il problema di decidere che valore possano avere le conclusioni che i matematici usano trarre da ragionamenti basati su una logica che non corrisponde a quanto a noi è dato di constatare.

Il problema non è ignoto, né nuovo; come dice Alfio Licata, è stato affrontato da Gödel stesso:

Gödel iniziò la sua conferenza riconoscendo subito una profonda connessione tra i suoi risultati e quelli di Turing, e come questi avessero svolto una preziosa opera di chiarificazione. Ben cosciente di certe letture del suo lavoro, spiegò chiaramente come questi contributi non dovevano essere intesi come uno *scacco* della mente umana, ma individuavano precise limitazioni dei sistemi formali. A questo proposito introdusse una distinzione tra proposizioni matematiche o*biettivamente vere* e proposizioni *vere in relazione ad un sistema formale*, sostenendo che le capacità della mente umana di gestire le prime non era in alcun modo limitata dai teoremi sul secondo tipo di proposizioni.(7)

Per ammirevole che sia la scienza che vi è profusa, è però giustificato domandarsi che valore possano avere per i nostri problemi le proposizioni del secondo tipo, fondate sulla negazione anche dei concetti, che non vale nel nostro mondo, ma che ad esso vengono più o meno consapevolmente estrapolate.

*

Sull'assenza di una prova contraria si basa, ad esempio, la "Prova matematica dell'esistenza di Dio", di Gödel(8), e implicitamente, - come Gabriele Lolli dice nella presentazione del libro - la dimostrazione stessa dei suoi famosi Teoremi:

Nel 1961 **G**ödel scrisse quattro lettere alla madre esprimendo le sue ragioni per credere in un'altra vita. Altre volte si era limitato a osservare che l'esistenza di Dio e di una vita dopo la morte non erano mai state refutate. Lo stesso dicasi per la possibilità della trasmigrazione delle anime. Qualche volta dava l'impressione di pensare che qualunque credenza potesse essere legittimamente assunta, se non era stata provata logicamente contraddittoria. D'altra parte il suo teorema di completezza della logica afferma proprio questo, per la matematica.(9)

Di fatto, come dice "La prova di Gödel" di Nagel e Newman, che sin dall'edizione americana del 1958, costituisce il primo testo quasi d'obbligo per avvicinarsi alla conoscenza di quella dimostrazione, sul postulato per cui "La proposizione G è dimostrabile se e solo se la sua negazione formale $\sim G$ è dimostrabile" (10) si fonda di fatto la dimostrazione dei Teoremi. E su quella base si dà per incontestabilmente accertata l'incompletezza dell'aritmetica.

Dice ad esempio Palle Yourgrau,

Quel che scoprì Gödel, […] fu che non sono necessariamente incompleti soltanto i postulati di Peano bensì anche qualsiasi sistema di assiomi o di postulati (anche se infinitamente grande) da cui possa essere derivata un'aritmetica che soddisfi qualsiasi criterio matematico ragionevole di controllo da parte di una mente finita. (Una mente infinita, come quella di Dio, in grado di afferrare insieme tutti i numeri, non ha presumibilmente bisogno di assiomi.) Così l'ambito più semplice e più basilare della matematica, l'aritmetica dei numeri naturali, la roccia su cui poggia il grande edificio della matematica, risulta essere, da un punto di vista assiomatico informale, incompleta e, peggio ancora, non completabile.(11)

La dimostrazione di **G**ödel usa una metodologia assolutamente innovativa unanimemente ammirata che si ispira anche ai paradossi, ma si fonda su una logica binaria che nel nostro mondo non vale: indubbiamente - come dice Russell – "le cose si semplificano enormemente", è però legittimo il dubbio che possa essere vero anche quello che segue.

Per l'esistenza di Dio manca evidentemente alcuna possibilità di un vero riscontro, ma per le proposizioni aritmetiche, incomplete in quanto indecidibili, non dovrebbe essere necessariamente così; però di vere prove non ce ne sono.

"Prova di Gödel" è infatti usualmente considerata e chiamata la dimostrazione che egli ha dato dei suoi Teoremi, e "La prova di che però non è una "prova" nel senso che usualmente si dà alla parola. Dice infatti George B. Dyson,

Nel 1931 il logico austriaco Kurt Gödel (1906-1978) ampliò gli orizzonti della matematica dimostrando, per entrambe le definizioni, che nessun sistema formale che contenga l'aritmetica elementare può essere al tempo stesso consistente e completo. All'interno di qualsiasi sistema di linguaggio, di logica o di aritmetica sufficientemente potente e non contraddittorio è possibile costruire enunciati veri che non si possono dimostrare entro il sistema stesso.

Gödel raggiunse tale conclusione tramite una tecnica nota oggi come numerazione di Gödel, attraverso la quale a tutti gli enunciati all'interno del linguaggio di un dato sistema formale vengono assegnati in modo univoco dei numeri che li identificano in modo che tali enunciati sono obbligati a sottostare alle manipolazioni di una burocrazia strettamente aritmetica cui è impossibile sfuggire. […].

I concetti (proposizioni) metamatematici divengono in tal modo concetti (proposizioni) sui numeri naturali o loro successioni e questi possono essere (almeno in parte) espressi con i segni dello stesso sistema", scriveva Gödel nell'introduzione alla sua dimostrazione. Grazie a ingegnose giravolte di logica e teoria dei numeri, Gödel costruì una proposizione nota ora col suo stesso nome, "che asserisce la propria non dimostrabilità", anche se ragionando al di fuori del sistema la si può intendere come vera.(12)

Con quella procedura - che ricorda i metodi staliniani - si dà per provata la reale esistenza di proposizione aritmetiche indecidibili, facendo confessare alla proposizione stessa di non essere dimostrabile.

Ma, in realtà, se come "proposizioni aritmetiche" si intendono quelle che *esprimono relazioni esclusivamente numeriche, per cui comprendono solo simboli numerici e segni operativi matematici*, di proposizioni aritmetiche effettivamente non decidibili, dal 1931 non se ne è vista alcuna,. I soli esempi di proposizioni indecidibili che è stato dato di veder citati si riferiscono invece, al più - come il teorema di Goodstein(13) - a loro caratteristiche, sono quindi *metaaritmetiche*, o a problemi metamatematici, come l'Ipotesi del continuo, l'Assioma di scelta, o il problema di Turing dell'arresto.

Nel mondo binario dei matematici quella dimostrazione del tutto indiretta basta per considerare accertata l'esistenza di proposizioni aritmetiche non dimostrabili né refutabili, anche se nessuno finora ne ha viste. Dice di fatto "La prova di Gödel":

Giungiamo finalmente alla *coda* della stupefacente sinfonia intellettuale di Gödel. Sono stati mostrati i passi con i quali egli ha stabilito la proposizione metamatematica: 'se l'aritmetica è coerente, essa è incompleta'. Ma è possibile anche dimostrare che questa proposizione condizionale, *considerata come un tutto,* è rappresentata da una proposizione *dimostrabile* nell'ambito dell'aritmetica formalizzata.

Questa formula cruciale è facilmente costruibile. Come è stato spiegato […], la proposizione metamatematica 'l'aritmetica è coerente' risulta equivalente alla proposizione 'vi è almeno una proposizione dell'aritmetica che non è dimostrabile'. Quest'ultima è rappresentata nel calcolo formale dalla seguente formula, che chiamiamo 'A':

$$(\exists y)\,(x)\ \sim\mathrm{Dim}\,(x, y).$$ (14)

Senza alcun dubbio c'è una formula "~ Dim(x,z)",

che rappresenta, nell'ambito dell'aritmetica formalizzata, la proposizione metamatematica: 'la sequenza di formule con numero di Gödel x non è una dimostrazione della formula con numero di Gödel *z*(15)

Se ne trae la conclusione che

vi è almeno un numero *y* tale che, per ogni numero *x*, *x* non sta nella relazione Dim con *y*'. Interpretata in linguaggio metamatematico, la formula afferma che 'vi è almeno una formula dell'aritmetica per la quale nessuna sequenza di formule costituisce una dimostrazione'.(16)

Ma, nel nostro mondo, di numeri *y*, che *non stanno* in quella relazione ce n'è un'infinità; nessuno però che permetta di individuare l'*x* che invece *stia* in quella relazione, realmente provando l'esistenza dell'incompletezza: verosimilmente quella prova mai ci potrà essere.

Qui si intende mostrare, che di fatto l'uso incondizionato della negazione per i nostri problemi porta a risultati illusori del tutto fuorvianti; si deve però partire di lontano, dalla distinzione già messa in evidenza fra i concetti fra i concetti e gli attributi, che nel nostro linguaggio è essenziale.

*

I concetti e gli attributi sono entrambi importanti, ma non vanno confusi, perché sono ontologicamente differenti, come è implicito nei nomi stessi di *sostantivi* e *aggettivi* dei loro rappresentanti più tipici: sin dalle elementari abbiamo imparato a distinguerli per gli aspetti grammaticali, ma la loro differenza per quelli logici ben più essenziali non è invece riconosciuta.

Ad esempio il linguista Steven Pinker chiama "concetti" anche aggettivi quali «rosso», «rumoroso», «rotondo», ecc.(17), e nella sua "Logica" Ettore Casari(18) non fa differenza fra le proposizioni che come oggetto hanno dei sostantivi, o invece degli aggettivi; e la stessa esistenza di concetti e attributi è del tutto ignorata dalla logica predicativa per così dire ufficiale ereditata dalla scolastica, cui si attiene anche Odifreddi[19], basata su una sorta di processo alle intenzioni dei parlanti.

La reale natura dei concetti e degli attributi, quindi l'esigenza di distinguerli, dovrebbe invece risultare evidente nella concezione qui sommariamente delineata, che considera il linguaggio per quello che è realmente: il mezzo che usiamo per esprimere e comunicare i pensieri - o meglio - i ricordi che la nostra mente ne conserva - qualunque ne siano la natura e le intenzioni sottostanti.

In questa concezione gli *insiemi* hanno un ruolo fondamentale[20]. Il numero dei ricordi è infatti tale che sarebbe del tutto impensabile assegnare a ciascuno di essi un codice specifico del linguaggio per rappresentarlo ed evocarlo; perciò la nostra mente li raggruppa in *insiemi*: racchiude in altrettanti differenti *concetti* gli insiemi dei ricordi in cui riconosce una *proprietà* esclusiva che giudica *fondamentale*.

I ricordi inclusi in ciascuno di tali insiemi sono simili, perché posseggono la stessa proprietà fondamentale, ma non sono identici: differiscono per alcuni *attributi*: *caratteristiche accessorie*, che la mente pure riconosce e le consentono di distinguerli. Gli stessi attributi - ad esempio, il colore di un fiore – li riconosce però in una pluralità illimitata di ricordi, rientranti in concetti di tutt'altra natura.

I concetti più frequenti e importanti sono *lessicalizzati*, ossia ad essi è associato un *nome* – più precisamente un sostantivo del vocabolario della lingua, e sono ugualmente lessicalizzati gli attributi, quali aggettivi o espressioni equivalenti: accostandoli ai nomi, consentono di individuare, e designare, i più ristretti e precisi sottoinsiemi della popolazione di ricordi dei concetti che posseggono le loro caratteristiche: l'associazione di concetti e attributi permette così di rendere ed evocare un numero di differenti concetti sostanzialmente illimitato[21], senza che per questo sia necessario creare altrettanti differenti codici, che la nostra memoria mai riuscirebbe a ricordare[22].

*

Evidentemente, la classificazione dei ricordi per concetti e attributi, ciascuno non può compierla che per conto suo, sui suoi ricordi: la scelta delle parole intese a rappresentarli ed evocarli non può quindi essere operata esattamente allo stesso modo nemmeno dai parlanti di quella che - con una approssimazione accettabile - si può chiamare la *stessa* lingua naturale; tuttavia le differenze sono sufficientemente contenute perché la comunicazione sia usualmente possibile, contribuendo anche ad avvicinare le classificazioni individuali.

I concetti e gli attributi costituiscono le due coordinate, entrambe essenziali, su cui si fonda la comunicazione, ma sono del tutto differenti, per cui obbediscono a logiche differenti.

I ricordi possono avere o non avere le caratteristiche indicate dagli attributi, ad esempio essere o non essere "belli", ma se non le hanno, hanno necessariamente le caratteristiche complementari, corrispondenti al negato; per gli attributi vale perciò una logica almeno approssimativamente binaria, che comunque ammette la negazione[23].

La logica dei concetti invece non l'ammette. I ricordi inclusi nell'*insieme* di ciascun concetto sono accomunati da una proprietà loro esclusiva; e per grande che possa essere il loro numero, è necessariamente una frazione infinitesima della Totalità dei ricordi dell'individuo, che si suddivide fra tutti i concetti: così trascurabile che, per qualsiasi di essi il negato – ciò che il concetto *non è* - sostanzialmente si identifica con la Totalità stessa dei ricordi, priva di significato. I concetti non hanno quindi alcun negato significativo, presentano una completa dissimmetria fra l'affermazione e la negazione: obbediscono a una logica di cui usualmente non si parla, *unaria* perché ammette unicamente l'affermazione. Salvo che sia la smentita di una precedente affermazione o quanto meno presunzione, la loro negazione è un'operazione priva di significato: eppure, come si è visto, ad esempio in relazione alla nota 14, Gödel la utilizza indifferentemente anche per i concetti.

La natura di concetti o attributi di ciò su cui si opera non può perciò invece essere ignorata, e per il problema della completezza delle proposizioni aritmetiche è di fatto essenziale.

Dice infatti Maria Luisa dalla Chiara Stabia:

> Un sistema **T** è sintatticamente completo, quando per ogni proposizione a, **T** è in grado di dimostrare a oppure $\neg a$.

La completezza corrisponde ad un requisito epistemologico molto importante; un sistema completo è infatti in grado di *deciderle*, nel senso di dimostrare o refutare ogni problema che sia esprimibile nel suo linguaggio.[24]

Senza che sia necessaria una dimostrazione specifica, dovrebbe essere evidente che a tale requisito non può corrispondere alcuna proposizione che abbia un contenuto semantico, comprenda quindi dei concetti, per l'inevitabile incertezza interpretativa dovuta alle componenti psicologiche del loro significato. Ciò restringe drasticamente il campo delle proposizioni che vi possono corrispondere, proprio a quelle proposizioni aritmetiche di cui Gödel ha decretato l'incompletezza, per le caratteristiche assolutamente particolari dei *numerali*, che a parte i simboli operativi"+", "-", ecc., ne sono i soli componenti [25].

Caratteristica del tutto esclusiva di quegli aggettivi numerici è infatti un valore univoco del tutto a-semantico oggettivo e privo di alcun margine di incertezza[26], indipendente dall'interpretazione e dai concetti cui possono essere associati, che nelle proposizioni aritmetiche comunque non ci sono, per cui sono aggettivi *puri*, e possono stare da soli sia al soggetto che al predicato[27]. Per quella somma di caratteristiche veramente esclusive, le proposizioni aritmetiche sono tautologie, perché il soggetto ha un valore del tutto uguale al predicato, a-semantiche ma significative[28]: assieme a quelle algebriche[29] sono le sole proposizioni che possono essere complete.

*

La a-semanticità del linguaggio è esplicitamente indicata da Alfio Licata quale presupposto indispensabile per l'assiomatizzazione di un *sistema formale* che tra i suoi requisiti possegga la completezza:

Il grande matematico David Hilbert aveva suggerito la possibilità di configurare l'intera conoscenza matematica attraverso l'uso del *metodo assiomatico*, ossia utilizzando un numero finito di proposizioni di partenza in grado di definire astrattamente gli enti della teoria, gli assiomi A, e un *insieme di regole di inferenza* R. Sia A che R sono espressi in un *linguaggio* L sintatticamente preciso e a-semantico, un insieme di simboli e di operatori formali per la manipolazione di simboli. Utilizzando le regole R è possibile generare i teoremi T della teoria da A. Un sistema di questo tipo si dice *sistema formale*, che indicheremo con <L,A, R>, e deve possedere una serie di requisiti generali:
1) *Coerenza o non-contraddittorietà*: un sistema formale non può produrre sia una proposizione P che la sua opposta non-P;
2) *Completezza sintattica*: un sistema formale si dice completo quando, data una qualsiasi proposizione P, ben formata secondo le regole del linguaggio formale L, è possibile dimostrare che P può essere ricavata da A utilizzando le regole R;
3) *Decidibilità*: un sistema è decidibile se data una proposizione P è possibile dimostrare in un numero finito di passi se la proposizione appartiene o no al sistema utilizzando R;
4) *Assiomatizzabilità*: un sistema <L,A,R> è assiomatizzabile se è possibile mostrare che un sistema <L,A,R>*, che produce gli stessi teoremi T di <L,A, R>, è decidibile. In altre parole, si richiede di poter fare il percorso inverso della decidibilità, individuando univocamente il gruppo A degli assiomi che generano i teoremi T;
5) *Ricchezza*: un sistema formale si dice sintatticamente ricco se è possibile associare ad ogni proposizione generale P relativa alle proprietà di una certa classe di oggetti, una proposizione particolare P_1 che riguarda un membro particolare della classe che esibisce effettivamente quelle proprietà. Ci si aspetta dunque che un sistema formale possa esplorare in modo esauriente ogni oggetto costruibile tramite <L,A,R>.[30]

Le proposizioni aritmetiche possono quindi essere complete; ciononostante, Licata è convinto della validità del

Primo teorema di. Gödel: *Ogni sistema sufficientemente potente, coerente ed assiomatizzabile è sintatticamente incompleto*. Questo risultato esprime che è sempre possibile produrre a partire da un sistema di assiomi A una proposizione P indecidibile. ossia della quale è impossibile stabilire, con gli strumenti del sistema. né la verità né la falsità.[31]

Tutto dipende però dagli strumenti, e quelli utilizzati da **G**ödel: l'uso dei paradossi, e in modo particolare della negazione anche per i concetti, facendone un tutt'uno con i loro attributi, sono discutibili.

Di fatto, come dice Rebecca Goldstein" in "Incompletezza", che pure è dedicato alla spiegazione ed esaltazione del ben più famoso "Teorema", in una precedente sessione della stessa conferenza di Koenigsberg, del 1931 Gödel stesso aveva dimostrato la completezza delle proposizioni aritmetiche:

> Il discorso di venti minuti che Gödel pronunciò il secondo giorno della conferenza [di Koenigsberg] suscitò poca attenzione. Era essenzialmente un compendio del lavoro che aveva svolto l'anno prima per la tesi del suo dottorato; non un lavoro sull'incompletezza quanto piuttosto sulla completezza. Ciò che Gödel aveva fatto era provare la completezza di quello che è chiamato calcolo predicativo o, a volte, *logica del primo ordine*, o ancora *logica dei quantificatori*. […] Ribattezziamo il relativo sistema di logica formale come "logica limpida". Gödel ha dimostrato che la logica limpida è completa. I suoi assiomi e le sue regole d'inferenza consentono di dimostrare tutte le proposizioni logicamente vere, o tautologiche, al suo interno.(32)

Sfugge però alla Goldstein che in quell'occasione Gödel aveva dimostrato la completezza del calcolo che – come essa stessa precisa – "è chiamato calcolo predicativo o, a volte, *logica del primo ordine*, o ancora *logica dei quantificatori*"; ma a quella caratteristica corrispondono proprio, e soltanto, le proposizioni dell'aritmetica e dell'algebra, perché comprendono solamente quantificatori, ossia aggettivi numerici; altra cosa è, ovviamente, se le proposizioni contengono dei concetti: si esce dal campo della "logica limpida", e delle posizioni di cui si può assicurare la completezza.

*

Dovrebbe quindi risultare evidente l'assoluta importanza della distinzione fra i concetti e gli attributi e, a ben maggior ragione, nel linguaggio matematico, fra i loro corrispettivi rappresentati dai *termini*, che si riferiscono ai concetti oggetto dei calcoli, e i *coefficienti*, gli attributi, che ne specificano gli aspetti quantitativi: la notazione stessa posizionale dei numeri non sarebbe altrimenti nemmeno pensabile.

Per i matematici quella scissione è però incompatibile con la logica binaria cui si attengono. Naturalmente non possono certo farne a meno per i loro calcoli, né possono ignorare la distinzione fra i concetti e gli attributi nella spiegazione delle elaborazioni e l'interpretazione dei risultati, per cui necessariamente tollerano che in quella che chiamano "matematica standard", si parli di termini e coefficienti; pretenderebbero che si considerassero un tutt'uno, sostanzialmente regredendo al linguaggio arcaico che - ignorando gli attributi - doveva necessariamente utilizzare altrettanti codici, o alterazioni del codice, per designare le differenti caratteristiche non solamente qualitative, ma anche quantitative con cui uno stesso concetto poteva presentarsi(33).

Il duale e forme simili, di cui in alcune lingue c'è tuttora traccia, fa pensare che così facessero i nostri lontanissimi antenati, affidando alla desinenza dei nomi le poche indicazioni quantitative che le condizioni primitive dell'esistenza richiedevano di specificare; ma evidentemente per quella strada non si poteva andare lontano.

Il problema è stato risolto in modo radicale, e assolutamente irreversibile, scindendo la considerazione dei concetti, da quella dei loro attributi numerici che permettono di specificarne illimitatamente le *caratteristiche quantitative*, positive o negative, e sono sostanzialmente i soli interessati dal calcolo(34), per cui si ha ogni vantaggio a separarli.

Appare quindi giusto domandarsi che senso possa avere ragionare nei termini binari che nel nostro mondo non hanno riscontro; ma, per quanto illusoria, la metodologia basata sulla negazione è allettante, perché apparentemente semplifica la soluzione di molti problemi; non c'è quindi da meravigliarsi che abbia trovato dei proseliti anche in altre discipline, quale la linguistica.

Solo per fare un esempio, Andrea Moro, enuncia il seguente "principio":

> *Principio di dipendenza dalla struttura (versione semplificata): Nessuna regola sintattica può riferirsi al numero delle parole di una frase o alla posizione di una parola in una sequenza di parole.*
>
> Il principio stabilisce che regole della sintassi non possono essere, per così dire, «aritmetiche », basarsi cioè sul conto di una certa posizione in una sequenza …(35)

Ben poco tale principio serve a corroborare le tesi chomskyane di cui Moro è un assertore, verosimilmente destinate a rimanere pure ipotesi, prive di alcun reale riscontro e di applicazioni significative.

Sapere a che cosa qualcosa non serve è quanto meno inutile: la negazione basata sulla una logica binaria che nel nostro mondo non vale non ha alcun valore euristico: è illusoria, o come per l'asserita incompletezza dell'aritmetica, fuorviante; non è però falsificabile: di proposizioni aritmetiche non dimostrabili né refutabili non se n'è trovata nemmeno una, ma evidentemente non costituisce una prova sufficiente che nemmeno in futuro se ne potranno mai trovare.

Rimane però il dubbio su quanto possa essere ragionevole indagare i fondamenti della matematica, e a maggior ragione servirsi di una logica che per noi non vale per metterli in dubbio, tanto più quando l'assenza di prove in contrario pare invece giustificare l'intuizione platoniana su un mondo matematico al di sopra di quanto i ristretti limiti dei nostri sensi ci permettano di percepire che in essa in qualche misura si rispecchia.

* * *

NOTE

1) Piergiorgio Odifreddi, *Il diavolo in cattedra*, Torino, Einaudi 2003.

2) Sono forme logicamente equivalenti agli aggettivi, ad esempio, sostantivi preceduti da preposizioni, come "di marmo", approssimativamente equivalente a "marmoreo", o anche espressioni più complesse.

3) Gli attributi possono presentare tutta una gamma di sfumature; tuttavia, con la sola eccezione degli aggettivi numerici, di cui si parlerà, hanno pur sempre dei negati significativi, corrispondenti alle caratteristiche che essi non hanno.

4) Nel libro della nota 2, p.74.

5) Ivi, p. 75.

6) Alfio Licata, *La logica aperta della mente*, Torino, Codice 2008, p. 101. L'affermaziome è in riferimento ai riflessi dei suoi teoremi sulle ricerche di intelligenza artificiale.

7) Gabriele Lolli, *Gödel filosofo*", Dispense di Filosofia della matematica, Pisa 2010-11, p. 3, http://homepage.sns.it/lolli/dispense10/corso10-1.pdf. Quella definizione, in particolare il principio del *terzo escluso* che essa implica, è stata contestata dagli intuizionisti", come Brouwer per motivi di principio legate alla concezione stessa della matematica, quindi differenti da quelli qui più sotto indicati.

8) Kurt Gödel, *Prova matematica dell'esistenza di Dio*, a cura di Gabriele Lolli e Piergiorgio Odifreddi, Torino, Bollati Boringhieri 2006.

9) Ivi, pp. 17-18.

10) E. Nagel e J. R. Newman, *La prova di Gödel*, Torino, Boringhieri 1974, p. 94.

11) Palle Yourgrau, *Un mondo senza tempo*, Milano, Il Saggiatore 2006, p. 64.

12) George B. Dyson, *L'evoluzione delle macchine*, Milano, Raffaello Cortina 2000, p. 96.

13) Dice Wikipedia: "In matematica, il Teorema di Goodstein è un teorema sui numeri naturali, relativamente semplice da enunciare, la cui particolarità consiste nel fatto di essere indecidibile dall'aritmetica di Peano ma dimostrabile nella teoria assiomatica degli insiemi. Esso può essere considerato un esempio di enunciato indecidibile dagli usuali assiomi dell'aritmetica più "naturale" rispetto alle complicate costruzioni dei teoremi di incompletezza di Gödel". Solo per fare un esempio, si tratta di dimostrare che "$\sup_n E(n,a)$ è il più piccolo ordinale esponenzialmente indecomponibile maggiore di a".

14) Nel libro della nota 10, p. 102.

15) Ivi, p. 93.

16) Ivi, stessa pagina.

17) S. Pinker, *Fatti di parole*, Milano, Mondadori 2009, p 102.

18) Ettore Casari, *Logica*, Torino, UTET 1995.

19) Alla logica predicativa secondo l'orientamento della scolastica, Odifreddi dedica, nel libro della nota 2, il capitolo a partire da p. 131.

20) L'insiemistica è nata a opera di Georg Cantor per risolvere i problemi degli infiniti. Il suo grande successo ha però fatto polarizzare l'interesse esclusivamente su quella finalità, ignorando il ruolo pure fondamentale che gli insiemi hanno in ogni altro campo della nostra vita, a cominciare dal linguaggio. La concezione qui sommariamente delineata ricalca sostanzialmente quella espressa dall'A in *Linguaggio e insiemi*, Milano, Shakespeare and Co., 1981, con la sola differenza terminologica, relativa ai concetti e attributi, lì chiamati rispettivamente "concetti primari" e "secondari".

21) Ipotizzando che la memoria abbia la capacità di ricordare *n* distinti codici, equamente divisi fra sostantivi e aggettivi, combinarli uno a uno permetterebbe di designare $n^2/4$ differenti concetti complessi, anche se ovviamente non tutti ugualmente validi dal punto di vista logico, come ad esempio "verità falsa", "bontà veloce", ecc., che solo in particolari contesti potrebbero assumere un significato; per contro a uno stesso

concetto possono essere associati più differenti attributi, corrispondenti ad altrettanti ulteriori sotto-sottoinsiemi.
22) Dice Percy M. Bridgman, *La critica operazionale della scienza*", p. 309: "Ora vi sono delle lingue e delle culture che non costruiscono il concetto di "classe"; per esempio alcune lingue primitive non hanno una parola per designare l'albero in generale. Conseguentemente, queste lingue non possono formulare affermazioni generali di inclusioni in classi, né, quindi, costruire un sillogismo. Eppure queste culture riescono ad avere contatti abbastanza efficaci con l'ambiente (almeno se i loro simili li lasceranno isolati), di modo che esse devono avere un modo non logico convenzionale per arrivare alla "verità". Ma quel modo primitivo poteva abbracciare solo ciò che c'è e si riconosce: la negazione non vi poteva aver senso, perché vi rientra tutto ciò che non c'è; non è più così col riconoscimento delle caratteristiche indicate dagli attributi: se non c'è la caratteristica, c'è quella complementare che ne è il negato; ma la negazione è stata arbitrariamente estrapolata anche ai concetti che per loro natura non l'ammettono, il che porta a risultati privi di reale fondamento, anche se per il loro carattere generalmente del tutto astratto ciò facilmente sfugge.
23) "Non bello", ad esempio, non significa sempre "brutto", però è ugualmente significativo. La sola eccezione è costituita dagli aggettivi numerici, come 1. 2, 3, …, per il loro numero infinito, al pari dei concetti non hanno negati significativi perché qualsiasi altro numero corrisponde a ciò che essi non sono.
24) Maria Luisa dalla Chiara Stabia, *Logica*, Milano, ISEDI 1974, p. 50.
25) Secondo il modo con cui sono utilizzati - ovviamente in senso propriamente aritmetico - i termini numerici sono *numeri*, ossia sostantivi, come in "3 è maggiore di 2", o invece più propriamente *numerali*, quali *aggettivi numerici*, come in "3 cani", e in particolare nelle proposizioni aritmetiche, di cui qui si parla. Da un punto di vista logico fa eccezione lo zero, che come numero non ha alcun senso.
26) Gli aggettivi numerici hanno un significato oggettivo e assolutamente univoco, perché il loro valore è determinato da una logica rigorosa, traducibile in termini binari; non per nulla su tale caratteristica si basa la tecnica dei computer.
27) Da soli gli altri aggettivi non possono stare, per cui che al soggetto vanno messi "fra virgolette": ad esempio, «"Buono" è un aggettivo»; al predicato possono esserlo solo apparentemente, ad esempio in una proposizione come "Socrate è mortale". Me la copula "è" sostanzialmente equivale al segno "=", e un concetto come "Socrate" non può essere uguale a un aggettivo come "mortale"; sia pure sottinteso, anche al predicato ci deve essere un sostantivo, ad esempio "(uomo) mortale".
28) Dice William Bartlett, *La morte dell'anima*, Bari, Laterza 1987, "La concezione russelliana o logicistica approda ad un complesso di conclusioni alquanto imbarazzanti. La tavola pitagorica, per esempio, ci fornisce un numero infinito di proposizioni del tipo "91 x 79 = 7189". "Secondo Russell queste proposizioni non sono altro che tautologie, eternamente vere, ma vuote, altrettanti modi diversi di dire "A = A". Ma se prescindiamo dal platonico regno delle essenze, scopriamo una realtà più mondana e funzionale: le cosiddette tautologie della tavola pitagorica sono strumenti di calcolo. E' in questo che consistono la loro natura e il loro uso". pp. 163-164.
29) Le proposizioni algebriche contengono dei simboli alfabetici che si riferiscono a concetti, ma *in quella particolare circostanza* ne indicano esclusivamente il valore numerico, sono quindi del tutto assimilabili ad aggettivi numerici, e così le proposizioni algebriche a quelle aritmetiche. A rigore, anche tutte le altre tautologie corrispondono a sono dimostrabili o refutabili, ma evidentemente non sono significative.
30) Nel libro della nota 6, p. 84.
31) Ivi, p. 87.
32) Rebecca Goldstein, *Incompletezza*, Torino, Codice 2006, p. 111.
33) Secondo quanto riferisce Pinker, nel libro della nota 17, pp. 151-152, è tuttora il caso per i Mundurukù, una tribù di cacciatori-raccoglitori dell'Amazzonia che vive in condizioni primitive di pressoché totale isolamento.
34) C'è invero in natura qualche fenomeno fisico molto particolare, in cui valori numerici dei coefficienti non sono indipendenti dalla natura dei termini cui si riferiscono: così è per la velocità, quando raggiunge valori prossimi a quello "c" della luce, che non può superare, per cui, nei calcoli si deve tener conto che in quelle situazioni estreme non valgono più le leggi aritmetiche dell'addizione.
35) Andrea Moro, *I confini di Babele*, Milano, Longanesi 2006, p. 197.

Ivrea, 19/3/2012