

Una curiosa proprietà...

Marco Ripà
marco@marcoripa.net

...che ho scovato è la seguente: se andiamo a calcolare il valore di

$$\sum_{i=m}^n (n-i) + \sum_{i=m+1}^n (n-i)$$

risulta

$$\begin{aligned} 2 * \sum_{i=m}^n (n-i) - (n-m) &= 2 * \sum_{i=m}^n n - 2 * \sum_{i=m}^n i - n + m = \\ &= 2n(n-m+1) - 2 * \frac{n^2 + n - m^2 + m}{2} - n + m = \\ &= 2n^2 - 2nm + 2n - n^2 - n + m^2 - m - n + m = \\ &= n^2 - 2nm + m^2 = \\ &= (n-m)^2. \end{aligned}$$

In tal modo abbiamo appurato, non omettendo alcun passaggio intermedio, che (per ogni $n > m$, dove sia n che m sono interi positivi - $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, m \in \mathbb{N}_0$ -)

$$\sum_{i=m}^n (n-i) + \sum_{i=m+1}^n (n-i) = (n-m)^2. \quad (1)$$

Questo risultato ci permette di risalire agevolmente al valore di

$$\sum_{j=0}^{n-m} \sum_{i=m+j}^n (n-i) = \sum_{i=m}^n (n-i) + \sum_{i=m+1}^n (n-i) + \sum_{i=m+2}^n (n-i) + \dots + \sum_{i=n-1}^n (n-i) + (n-n) \quad (2)$$

e di provare che, in generale,

$$\sum_{j=0}^t \sum_{i=m+j}^n (n-i) \quad \text{con } t \leq n-m$$

è pari alla differenza tra l' $(n-m)$ esimo numero tetraedrico e l' $(n-m-t-1)$ esimo. Infatti la (2) è, per definizione, pari all' $(n-m)$ esimo numero tetraedrico.

Per i numeri tetraedrici si rimanda alla sequenza [A000292](http://oeis.org/A000292) di OEIS (<http://oeis.org/A000292>).

La (2) è data dalla somma di $n-m+1$ termini, di cui l'ultimo nullo (pari a $n-n=0$). Per esplicitare la relazione ci avvaliamo della (1) e riscriviamo il tutto come $(n-m)^2 + (n-(m+2))^2 + (n-(m+4))^2 + (n-(m+6))^2 + \dots + 4^2 + 2^2 + 0$ se $n-m$ è pari e $(n-m)^2 + (n-(m+2))^2 + (n-(m+4))^2 + (n-(m+6))^2 + \dots + 3^2 + 1^2$ nel caso di $n-m$ dispari. Il valore della (2) è

dato perciò dalla somma dei quadrati dei numeri pari minori o uguali ad $n-m$, per $n-m$ pari, e dalla somma dei quadrati dei numeri dispari minori di $n-m$, per $n-m$ dispari. Unendo i due casi precedenti abbiamo esattamente la sequenza dei numeri tetraedrici minori o uguali a $n-m$, ovvero [A000292](#). In particolare, sia $T_i = 0, 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, \dots$ per $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$, T_i è dispari sse $i \pmod{4} \equiv 1$. Rimane pertanto dimostrato che la (2) – e il caso banale $t = n - m$ – è pari all' $(n-m)$ esimo numero tetraedrico.

Nel caso in cui il limite superiore della sommatoria è $t < n - m$, sottrarremo semplicemente al risultato precedente il valore dell' $(n-m-t-1)$ esimo numero tetraedrico, calcolato nello stesso modo, vale a dire $\binom{n-m-t+1}{3}$.

Dunque risulta

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^t \sum_{i=m+j}^n (n-i) &= \binom{n-m}{3} - \binom{n-m-t+1}{3} = \\ &= \frac{(n-m)(n-m+1)(n-m+2) - (n-m-(t+1))(n-m-(t+1)+1)(n-m-(t+1)+2)}{6} = \\ &= \frac{(n-m)(n-m+1)(n-m+2) - (n-m-t-1)(n-m-t)(n-m-t+1)}{6} \end{aligned}$$

Facendo un po' di conti possiamo anche riscrivere il tutto come

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^t \sum_{i=m+j}^n (n-i) &= \frac{3n^2t + 3n^2 - 6nmt - 6nm - 3nt^2 + 3n + 3m^2t + 3m^2 + 3mt^2 - 3m + t^3 - t}{6} = \\ &= \frac{(\sqrt{t+1}n - \sqrt{t+1}m)^2 + m(t^2 - 1) - n(t^2 - 1) + \frac{t(t^2 - 1)}{3}}{2} = \\ &= \frac{(\sqrt{t+1}n - \sqrt{t+1}m)^2 + (t^2 - 1)\left(m - n + \frac{t}{3}\right)}{2} \quad (3) \end{aligned}$$

Torniamo a questo punto sul problema iniziale e verifichiamo la proprietà (1) sostituendo $1 = t$ nella (3):

$$\frac{(\sqrt{1+1}n - \sqrt{1+1}m)^2 + (1^2 - 1)\left(m - n + \frac{1}{3}\right)}{2} = \frac{(\sqrt{2}n - \sqrt{2}m)^2}{2} = \frac{2(n-m)^2}{2} = (n-m)^2$$

□

Pertanto il caso (1) è un'elegante accezione della (3).