Una curiosa proprietà…

Marco Ripà
marco@marcoripa.net

…che ho scovato è la seguente: se andiamo a calcolare il valore di

$$\sum_{i=m}^{n}(n-i)+\sum_{i=m+1}^{n}(n-i)$$

risulta

$$2*\sum_{i=m}^{n}(n-i)-(n-m)=2*\sum_{i=m}^{n}n-2*\sum_{i=m}^{n}i-n+m=$$
$$=2n(n-m+1)-2*\frac{n^2+n-m^2+m}{2}-n+m=$$
$$=2n^2-2nm+2n-n^2-n+m^2-m-n+m=$$
$$=\boldsymbol{n^2-2nm+m^2}=$$
$$=(\boldsymbol{n-m})^2.$$

In tal modo abbiamo appurato, non omettendo alcun passaggio intermedio, che (per ogni n>m, dove sia n che m sono interi positivi - $\forall n \in \aleph\backslash\{0\}, m \in \aleph_0$ -)

$$\sum_{\mathbf{i=m}}^{\mathbf{n}}(\mathbf{n-i})+\sum_{\mathbf{i=m+1}}^{\mathbf{n}}(\mathbf{n-i})=(\mathbf{n-m})^2. \qquad (1)$$

Questo risultato ci permette di risalire agevolmente al valore di

$$\sum_{j=0}^{n-m}\sum_{i=m+j}^{n}(n-i)=\sum_{i=m}^{n}(n-i)+\sum_{i=m+1}^{n}(n-i)+\sum_{i=m+2}^{n}(n-i)+\cdots+\sum_{i=n-1}^{n}(n-i)+(n-n) \qquad (2)$$

e di provare che, in generale,

$$\sum_{j=0}^{t}\sum_{i=m+j}^{n}(n-i)$$ con $t \leq n-m$

è pari alla differenza tra l'(n-m)esimo numero tetraedrico e l'(n-m-t-1)esimo. Infatti la (2) è, per definizione, pari all'(n-m)esimo numero tetraedrico.
Per i numeri tetraedrici si rimanda alla sequenza A000292 di OEIS (http://oeis.org/A000292).

La (2) è data dalla somma di n-m+1 termini, di cui l'ultimo nullo (pari a n-n=0). Per esplicitare la relazione ci avvaliamo della (1) e riscriviamo il tutto come $(n-m)^2+(n-(m+2))^2+(n-(m+4))^2+(n-(m+6))^2+\ldots+4^2+2^2+0$ se n-m è pari e $(n-m)^2+(n-(m+2))^2+(n-(m+4))^2+(n-(m+6))^2+\ldots3^2+1^2$ nel caso di n-m dispari. Il valore della (2) è dato perciò dalla somma dei quadrati dei numeri pari minori o uguali ad n-m, per n-m pari, e dalla somma dei quadrati dei numeri dispari minori di n-m, per n-m dispari. Unendo i due casi precedenti abbiamo esattamente la sequenza dei numeri tetraedrici minori o uguali a n-m, ovvero A000292. In particolare, sia T_i:=0,1,4,10,20,35,56,84,… per i=0,1,2,3,4,5,6,7,… , T_i è dispari sse i(mod 4)≡1). Rimane pertanto dimostrato che la (2) – e il caso banale t=n-m - è pari all'(n-m)esimo numero tetraedrico.

Nel caso in cui il limite superiore della sommatoria è t<n-m, sottrarremo semplicemente al risultato precedente il valore dell'(n-m-t-1)esimo numero tetraedrico, calcolato nello stesso modo, vale a dire $\binom{n-m-t+1}{3}$.

Dunque risulta

$$\sum_{j=0}^{t}\sum_{i=m+j}^{n}(n-i)=\binom{n-m}{3}-\binom{n-m-t+1}{3}=$$

$$=\frac{(n-m)(n-m+1)(n-m+2)-(n-m-(t+1))(n-m-(t+1)+1)(n-m-(t+1)+2)}{6}=$$

$$=\frac{\mathbf{(n-m)(n-m+1)(n-m+2)-(n-m-t-1)(n-m-t)(n-m-t+1)}}{\mathbf{6}}$$

Facendo un po' di conti possiamo anche riscrivere il tutto come

$$\sum_{j=0}^{t}\sum_{i=m+j}^{n}(n-i)=\frac{3n^2t+3n^2-6nmt-6nm-3nt^2+3n+3m^2t+3m^2+3mt^2-3m+t^3-t}{6}=$$

$$=\frac{(\sqrt{t+1}\,n-\sqrt{t+1}\,m)^2+m(t^2-1)-n(t^2-1)+\frac{t(t^2-1)}{3}}{2}=$$

$$=\frac{\mathbf{(\sqrt{t+1}\,n-\sqrt{t+1}\,m)^2+(t^2-1)\left(m-n+\frac{t}{3}\right)}}{\mathbf{2}} \qquad (3)$$

Torniamo a questo punto sul problema iniziale e verifichiamo la proprietà (1) sostituendo 1=t nella (3):

$$\frac{(\sqrt{1+1}\,n-\sqrt{1+1}\,m)^2+(1^2-1)\left(m-n+\frac{1}{3}\right)}{2}=\frac{(\sqrt{2}\,n-\sqrt{2}\,m)^2}{2}=\frac{2(n-m)^2}{2}=(n-m)^2$$

$\square$

Pertanto il caso (1) è un'elegante accezione della (3).