# De Poligonorum Inscriptione

***Ovvero: come trascorrere il mese di settembre fra seni, coseni, radicali doppi e financo tripli***

# INDICE

# Lista delle figure

# 1 INTRODUZIONE

Ebbene, stavolta ve la siete proprio cercata… Il problema Kepleriano era troppo bello per non essere affrontato a fondo, senza doversi cioè limitare alle due sequenze di poligoni suggerite dal testo. E quindi si è provato ad esaminare *tutte* le possibili sequenze, tanto per vedere dove si approdava…

L'analisi, dopo qualche riflessione e numerosi calcoli, si è fatta ardua da affondare a fondo in maniera del tutto rigorosa; ed allora ho scelto un approccio intermedio: in molti casi non sapendo come dimostrare inoppugnabilmente alcune affermazioni, ho deciso di ricorrere a metodi grafici empirici (*orrore*!), cioè valutando *ad occhio*, per sovrapposizione d'immagini, quali fossero le disposizioni ottimali di poligoni da adottare. E poi (*doppio orrore*!!), sono dovuto addirittura ricorrere ad un *postulato* basato sul puro intuito, e sul quale c'è tutto il diritto di sollevar dubbi…

Ciononostante, la trattazione rimane tutt'altro che sintetica… E non escludo che possa contenere qualche madornale errore, in uno qualsiasi dei 20 casi di inscrizione esaminati; la mole di calcoli era troppo ingente per poter essere ricontrollata adeguatamente…

Per semplificarmi la vita, ho introdotto un formulario in appendice, tanto per non dover replicare calcoli ripetitivi delle stesse quantità algebriche… Beh, non vi chiedo di controllare tutto, né di arrivare in fondo… Mi è bastato il divertimento della ricerca e la soddisfazione di essere arrivato alla fine.

# 2 IMPOSTAZIONE DEL PROBLEMA

## 2.1 Generalità

Allora, abbiamo 5 figure geometriche[1] elementari[2] da inscrivere l'una nell'altra; obbiettivo è il cercare la sequenza di esse che porta alla massima superficie possibile per la più interna (e già che ci siamo, anche alla minima…). Il testo del problema richiederebbe di considerare solo le due seguenti sequenze:

- Circonferenza / Triangolo / Quadrato / Pentagono / Esagono
- Circonferenza / Esagono / Pentagono / Quadrato / Triangolo

Ma perché non considerare invece *tutte* le possibili sequenze e non solo quelle due? Prima cosa: quante sono? Poiché 5 oggetti possono essere ordinati in successione in 5 x 4 x 3 x 2 = 120 modi diversi, pare che il problema diventi 60 volte più gravoso… In realtà, se si considerano solo le 2 sequenze base, occorre considerare 8 diversi casi di inscrizione di poligoni (triangolo nella circonferenza, quadrato nel triangolo, ecc…). Ma quello che conta ai fini della soluzione del problema è il *rapporto* fra le superfici di ogni *possibile coppia* di poligoni: se prima di esaminare i 120 casi di permutazione dell'ordine in cui i poligoni vengono presi si valutano invece tutti i rapporti fra le superfici, rapporti che sono *solo* 20, ecco che il problema *completo* diventa solo *due volte e mezzo* più complesso di quello base…

In pratica, si tratta preliminarmente di riempire le caselle della tabella qui a destra con le relazioni che esprimono i rapporti fra le superfici dei poligoni inscrivente ed inscritto, indicati rispettivamente nella prima riga e nella prima colonna della tabella.

Una volta ricavate le 20 formule incognite (ed i corrispondenti valori numerici), diventa semplice darli in pasto ad un foglio Excel per trovare i 120 prodotti di essi, presi 4 a 4 in tutti i modi opportuni.

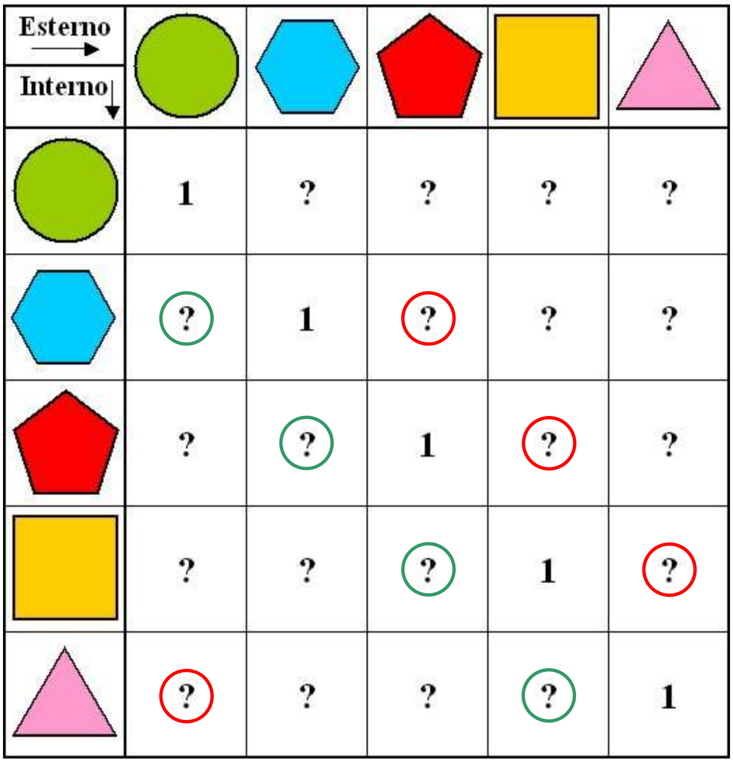



**Figura 1: I rapporti incogniti fra le superfici**

Ad esempio, le soluzioni per le due sequenze base richieste dal problema si troveranno moltiplicando fra loro i fattori rispettivamente indicati dai cerchietti rossi e verdi.

Nei 5 capitoli che seguono verranno calcolati i suddetti rapporti, procedendo colonna per colonna attraverso la tabella. Il successivo capitolo 8 fornisce la sintesi dei risultati ottenuti, e le relative conclusioni.

Riassumo alcune convenzioni adottate nel seguito, ad evitare inutili richiami e ripetizioni:

- Per le varie grandezze geometriche si è scelto di usare i seguenti simboli, salvo diversa indicazione:
  - **A**, per le aree delle superfici dei poligoni, di solito dotate di pedice come sotto indicato
  - **λ**, per i rapporti fra aree (cioè le relazioni cercate indicate nella tabella di Figura 1)
  - **r**, per il raggio della circonferenza
  - **l**, per il lato di un poligono, anch'esso di solito dotato di pedice
  - **h**, per l'altezza dei triangoli in cui i poligoni sono suddivisi, coincidente di norma con l'apotema di pentagono ed esagono e talora con il semilato del quadrato

[1] D'ora in poi, mi riferirò all'insieme delle *figure geometriche* come a *poligoni*, intendendo un po' impropriamente anche la circonferenza compresa fra essi.
[2] E inoltre, ometterò il termine *regolare*, se non strettamente necessario, dando per scontato che i poligoni siano equilateri ed equiangoli.

  - **x**, **y**, **z** e **k**, per segmenti di volta in volta utili alla risoluzione dei vari casi
- I pedici adottati per i vari simboli algebrici utilizzati seguono la seguente convenzione:
  - **C**, per la circonferenza
  - **E**, per l'esagono
  - **P**, per il pentagono
  - **Q**, per il quadrato
  - **T**, per il triangolo
- Si dà per scontata la validità delle formule in appendice, che non vengono richiamate esplicitamente nel corso dei calcoli se non in casi particolari
- Parimenti, si dà per scontato il valore degli angoli mostrati nelle varie figure, ricavabili tramite semplici considerazioni geometriche

## 2.2 Il postulato di monotonicità rotazionale

Tranne che per i casi che comportano la presenza della circonferenza (che troveranno comunque una loro collocazione in questo paragrafo), ogni volta che si considera una coppia di poligoni per cercar l'area massima di quello inscritto, si presenta un problema: qual è l'orientazione relativa fra i due poligoni che permette di massimizzare il valore cercato?

Per trattare la questione, consideriamo l'esempio più complesso fra quelli da esaminare, quello del pentagono inscritto nell'esagono. Supponiamo di *inchiodare* l'esagono al foglio di carta, ed inseriamo poi lì dentro il pentagono. Il pentagono può essere in astratto fatto ruotare con continuità di 360°, poi di volta in volta traslato *a spasso* per l'esagono. Vi sarebbero quindi tre gradi di libertà per il posizionamento del pentagono: l'angolo di rotazione rispetto all'esagono, e la posizione, individuabile ad esempio dalle coordinate del suo centro. Per ciascuna delle $\infty^3$ situazioni, il pentagono va poi espanso o compresso fino a renderlo tangente all'esagono, evitando che *fuoriesca* dall'esagono stesso e toccandone però con due o più vertici il perimetro, rimanendovi quindi inscritto come richiesto. In ciascun caso va calcolato il rapporto fra le aree, e quello massimo è il valore cercato.

Data la scarsa praticabilità del metodo sopra esposto, occorre restringere un bel po' il campo delle possibilità… Iniziamo col dire che se facciamo ruotare il pentagono di 1/5 di angolo giro, cioè di 72°, esso verrà a trovarsi in una posizione reciproca rispetto all'esagono equivalente a quella di partenza; è quindi intuitivo che basta esaminare le sole rotazioni fra 0° e 72° per trovare il nostro rapporto massimo. Però poi, se adesso *schiodiamo* l'esagono ed *inchiodiamo* invece il pentagono, ecco che ci si accorge che anche ruotando l'esagono di 1/6 di angolo giro ci si ritrova nella situazione iniziale, quindi è sufficiente considerare le rotazioni fra 0° e 60°. Al variare del numero di lati delle coppie di poligoni, si sceglierà di volta in volta l'angolo più piccolo, cioè quello relativo al poligono con più lati.

Estendendo il ragionamento alla circonferenza, ed assumendo che essa può essere intesa come un poligono ad infiniti lati, l'angolo in questione sarà nullo: non serve quindi ruotare i poligoni inscritti nella circonferenza o ad essa circoscritti, tutte le posizioni sono equivalenti.

Ma si può far di meglio con pentagono ed esagono? Vediamo: iniziamo col posizionare il pentagono con un lato coincidente con uno di quelli dell'esagono, ed immaginiamo di farlo ruotare un po', diciamo di 5° come nell'esempio qui sotto:

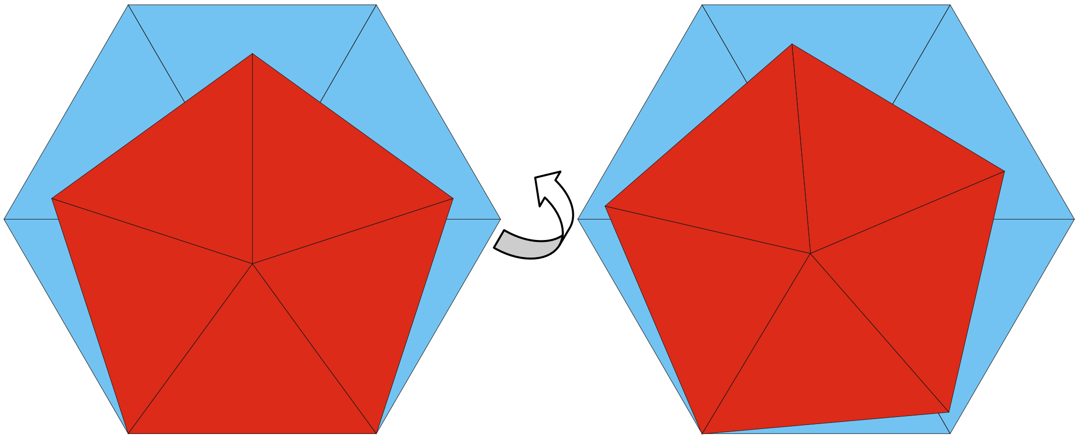


**Figura 2: Accenno di rotazione del pentagono nell'esagono**

Per comodità, si è scelto un pentagono con lo stesso lato dell'esagono; non interessa in questa fase massimizzarne l'area, si sta per il momento solo cercando di capire le problematiche relative alle rotazioni reciproche dei poligoni.

Procedendo con la rotazione, dopo un po' si arriva alla situazione illustrata nella figura che segue: il lato in basso a sinistra del pentagono viene ad essere parallelo a quello corrispondente dell'esagono, ed in pratica ci si ritrova ancora nella situazione di partenza, dal punto di vista della posizione *relativa* dei due poligoni.

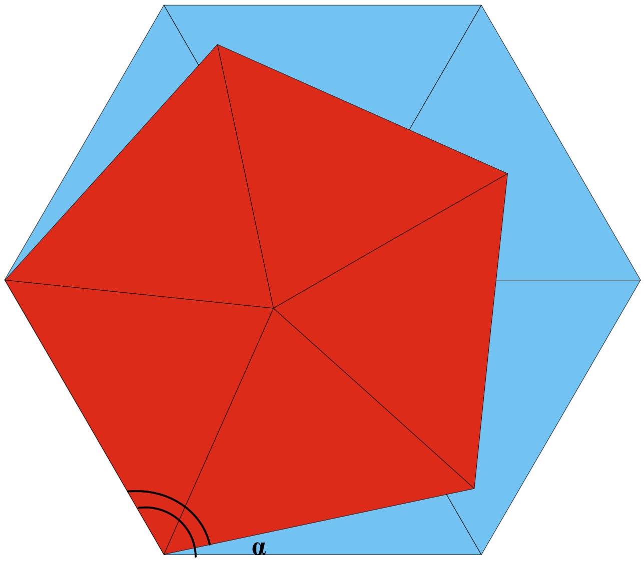



**Figura 3: Ritorno allo stato di partenza per il pentagono nell'esagono**

Di quanto è stato ruotato stavolta il pentagono, prima di ritornare alla situazione di partenza? L'angolo **α** è pari alla differenza fra gli angoli interni dei due poligoni; per un generico poligono di **n** lati l'angolo interno vale:

$$180° - 360°/n$$

Quindi, con poligoni che abbiano **n** ed **m** lati si ha:

$$\alpha = \left| 180° - \frac{360°}{n} - 180° + \frac{360°}{m} \right| = \left| \frac{360°}{m} - \frac{360°}{n} \right|$$

Nel caso in questione, con **n=5** ed **m=6**, risulta **α = 12°**. Un valore ancora migliore dei **72°** e **60°** considerati in precedenza… Beh, allora in generale l'angolo massimo ottimo $\boldsymbol{\alpha_O}$ da scegliere per esplorare tutti i casi possibili è dato da:

$$\alpha_O = \min\left( \frac{360°}{m}; \frac{360°}{n}; \left| \frac{360°}{m} - \frac{360°}{n} \right| \right)$$

Naturalmente, tutte le regole son passibili di eccezioni… Nel caso **n=3** ed **m=5** vediamo infatti cosa accade: se si procede come per pentagono ed esagono, la rotazione che riporta le posizioni relative a quelle di partenza è data ancora dalla relazione qui sopra, pari cioè a **48°**. Ma stavolta, se prima di ruotare il triangolo lo si trasla verso l'alto e *poi* lo si ruota, ci si accorge che *basta ruotarlo di **24°*** per tornare ad uno stato equivalente a quello di partenza.

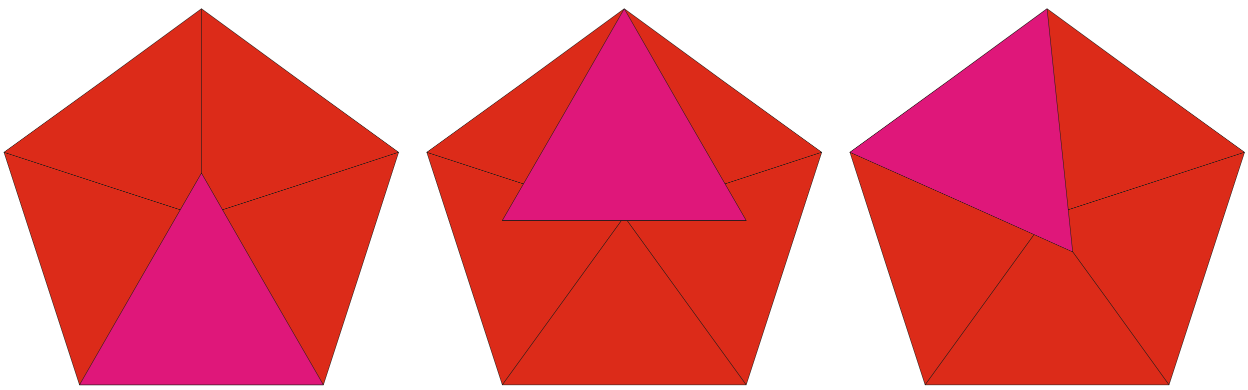


**Figura 4: Ritorno allo stato di partenza per il triangolo nel pentagono**

Con un po' di riflessione si conclude che ciò capita ogni qualvolta il numero dei lati dei due poligoni è dispari per entrambe, cioè solo nel caso di Figura 4 ai fini di questo problema.

Quindi:

$$\alpha_O = \begin{cases} \min\left(\frac{360°}{m};\frac{360°}{n};\left|\frac{360°}{m}-\frac{360°}{n}\right|\right) \Rightarrow \text{int}\left(\frac{m\cdot n}{2}\right)=\frac{m\cdot n}{2} \\ \min\left(\frac{360°}{m};\frac{360°}{n};\left|\frac{360°}{m}-\frac{360°}{n}\right|\Big/2\right) \Rightarrow \text{int}\left(\frac{m\cdot n}{2}\right)\neq\frac{m\cdot n}{2} \end{cases}$$

Ancora: data la simmetria speculare delle figure geometriche in questione (tutte regolari ed equiangolari) in fondo basta esaminare solo i casi relativi a *metà* dell'angolo minimo sopra discusso; andando oltre, si ripetono ciclicamente le stesse situazioni reciproche fra i due poligoni. La tabella che segue fornisce i valori per l'angolo ottimo, e naturalmente per la sua metà, in tutte le situazioni di rilievo per il problema in esame (nella tabella, con *Infinito* si intende la circonferenza, of course):

| m | n | 360/m | 360/n | \|360/m-360/n\| | Minimo | Minimo/2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 120 | 90 | 30 | 30 | 15 |
| 3 | 5 | 120 | 72 | 48 | 24 | 12 |
| 3 | 6 | 120 | 60 | 60 | 60 | 30 |
| 3 | Infinito | 120 | 0 | 120 | 0 | 0 |
| 4 | 5 | 90 | 72 | 18 | 18 | 9 |
| 4 | 6 | 90 | 60 | 30 | 30 | 15 |
| 4 | Infinito | 90 | 0 | 90 | 0 | 0 |
| 5 | 6 | 72 | 60 | 12 | 12 | 6 |
| 5 | Infinito | 72 | 0 | 72 | 0 | 0 |
| 6 | Infinito | 60 | 0 | 60 | 0 | 0 |

**Figura 5: Il massimo angolo da esaminare fra i poligoni**

La tabella vale sia per le inscrizioni che per le circoscrizioni[3]; cioè il poligono ad **m** lati può tanto essere interno quanto esterno, e viceversa per quello ad **n** lati. Guarda un po', a parte le righe relative alla circonferenza, tutti i valori ottimali coincidono con la terza colonna verdina della tabella. Questo non è vero in generale; se i Nostri Valenti Propositori di Quesiti (NVPQ) avessero voluto essere davvero cattivi, avrebbero esteso il problema all'eptagono… In quel caso, ad esempio, i triangoli inscritti o circoscritti all'eptagono sarebbero stati ottimali per rotazione se riferiti alla prima, fra le colonne verdine…

Andiamo avanti… Per ciascuno degli infiniti angoli compresi fra **0°** ed il valore ottimo di **α** (diviso per 2), occorre *portare a spasso* il poligono interno in quello esterno, e *gonfiarlo* fin quanto possibile: ancora ci si ritrova con $\infty^3$ situazioni… Anche se l'angolo di rotazione è stato ristretto ad una frazione dei **360°** inizialmente considerati, resta difficilissimo affrontare il problema se non si mette qualche paletto di quelli tosti…

Il paletto è il *postulato di monotonicità rotazionale*; che qui declamo unilateralmente[4]:

***Partendo dalla stato in cui i due poligoni hanno un lato parallelo, ed al crescere dell'angolo di rotazione reciproca fra essi nell'intervallo [0°- $\alpha_O$/2], fissato il poligono esterno, l'area massima di quello interno varia in modo monotono***

Conseguenza immediata del *postulato* è il fatto che l'area massima cercata (o in modo equivalente il rapporto fra le aree dei poligoni), o si riscontra quando il suddetto angolo è nullo, oppure quando esso vale $\alpha_O/2$.

Ciò vuol dire che nei 12 casi che non prevedono la presenza della circonferenza (per la quale basta esaminare un'unica situazione come visto sopra), è sufficiente comparare le due configurazioni per le quali la posizione reciproca dei due poligoni presenta un angolo pari a **0°** oppure ad $\alpha_O/2$.

Il resto della trattazione si basa su questo assunto; se qualcuno non è d'accordo, può agevolmente trascurare questa trattazione e passare il resto della serata visionando "Il grande fratello" oppure "L'isola dei famosi"…

3 Mi si perdoni il termine elettorale…
4 Se me lo dimostrate voi, mi sta bene; per questo mese, o facevo i calcoli nei 20 casi in esame, o provavo a dimostrare il postulato…

## 2.3 Metodo di verifica dei risultati

Naturalmente, non posso essere certo della validità dei calcoli per tutti i 20 casi sotto esaminati; spesso sono incorso in errori grossolani cui ho cercato di rimediare con il metodo qui di seguito descritto.

Le immagini di questo documento sono state generate (almeno quelle di base) col programma CorelDraw; questo consente una notevole precisione nel posizionamento delle figure geometriche, con precisione di una parte su 10000 o più. Nei casi più complessi (quelli senza circonferenza, in generale), si cercava di adattare il poligono interno al meglio possibile dentro l'altro, con espansioni e riduzioni condotte al grado più piccolo possibile, nei limiti del programma (e dei miei occhi…).

Il risultato è che le figure mostrano *quasi* esattamente quanto poi evidenziato dalle varie formule. Poiché CorelDraw fornisce le dimensioni dei vari oggetti grafici che gestisce, si potevano calcolare con esso le dimensioni *empiriche* delle aree e di conseguenza i loro rapporti. Questo ha consentito per ciascuno dei casi critici di confrontare il risultato *algebrico* ottenuto dai calcoli con quello *grafico empirico*: alla fine, corretti i numerosi errori via via commessi, le differenze capitavano sempre al di sotto di una parte per 1000, o meglio… Ciò naturalmente non dimostra che i calcoli siano esatti, ma un po' di fiducia si può concedere…

A titolo di esempio, prendo il caso col risultato algebrico più strano e maggiormente passibile di sospetti d'errore, poiché appaiono nella formula risolutiva alcuni numeracci interi a 4 o 6 cifre, cosa che non si riscontra negli altri 19 casi… Il valore per il rapporto fra le aree nel caso di pentagono inscritto nell'esagono ottenuto *graficamente* è 0,775020647386737, quello calcolato algebricamente è 0,77555787646219. La differenza, inferiore allo 0,07%, mi lascia ben sperare…

Il metodo grafico è stato poi sempre utilizzato (dove era opportuno) per decidere quale delle due posizioni fra i poligoni (non ruotati, ovvero ruotati reciprocamente di $\boldsymbol{\alpha_O/2}$) fosse quella ottimale. L'evidenza *grafica* è sempre stata lampante, seppur con ingrandimenti da microscopio elettronico… Ciò, naturalmente, sempre che si voglia prendere per buono il *postulato di monotonicità rotazionale*.

Altra piccola osservazione a margine… L'utility *Microsoft Equation Editor* pretende che seno, coseno e tangente siano indicati come *sin*, *cos* e *tan* rispettivamente… Me ne sono accorto tardi, ed ho allora troppo a lungo utilizzato invece *sen*, *cos* e *tg*… Per cui nelle varie formule utilizzate alcuni di tali termini appaiono in *corsivo* (*italics*… they say…), altri no… Mi scuso per questo…Non appena mi sarà richiesto di pubblicare questo documento sui *Proceedings of the American Mathematical Society* provvederò ovviamente a correggere, dietro corresponsione di 906899$ (pari ad un milione di volte il più grande rapporto fra le aree dei poligoni da me trovato).

# 3 POLIGONI INSCRITTI NELLA CIRCONFERENZA

Nel caso in cui si inscrivano poligoni regolari nella circonferenza, non ha alcuna importanza l'angolo relativo al posizionamento del poligono, come visto nel paragrafo 2.2.

Tutti i vertici dei poligoni toccano la circonferenza stessa, e nulla cambia facendo ruotare i poligoni nella circonferenza; è quindi evidente che le posizioni reciproche di circonferenza e poligoni nei 4 casi che seguono sono quelle ottimali, nel senso che massimizzano i rapporti cercati fra le aree.

## 3.1 Esagono inscritto nella circonferenza

Assunto **r** noto, occorre ricavare l'area dell'esagono in funzione di **r**; essendo l'esagono suddivisibile in 6 triangoli equilateri, tale area è il sestuplo di quella del triangolo **OPQ** mostrato nella figura che segue, la cui base **b** ha valore **r**, per cui:

$$A_E = 6 \cdot \frac{b \cdot h}{2} = 3 \cdot r \cdot r \cdot sen(60) = 3 \cdot r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

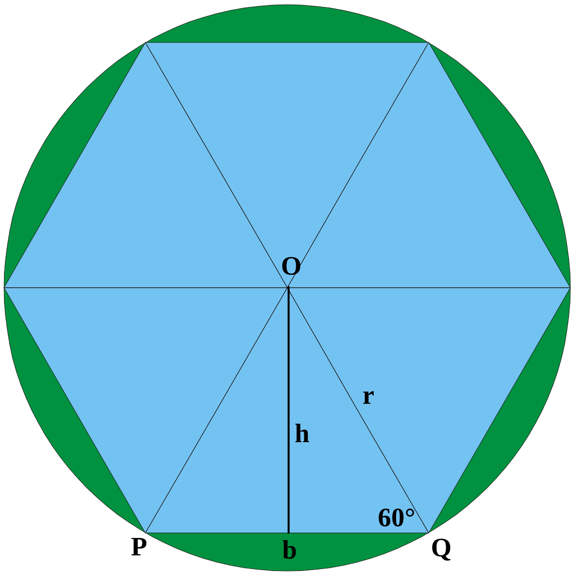



**Figura 6: Esagono inscritto nella circonferenza**

Quindi:

$$\lambda_{EC} = \frac{A_E}{A_C} = \frac{3 \cdot r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\pi \cdot r^2} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \pi} = 0{,}826993+$$

## 3.2 Pentagono inscritto nella circonferenza

Assunto **r** noto, occorre ricavare l'area del pentagono in funzione di **r**; essendo il pentagono suddivisibile in 5 triangoli isosceli, tale area è il quintuplo di quella del triangolo **OPQ** mostrato nella figura che segue, per cui:

$$A_P = 5 \cdot \frac{b \cdot h}{2} = 5 \cdot \frac{2 \cdot r \cdot \cos(54) \cdot r \cdot sen(54)}{2} = 5 \cdot r^2 \cdot \frac{sen(2 \cdot 54)}{2} = \frac{5 \cdot r^2 \cdot \sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}}{8}$$

Quindi:

$$\lambda_{PC} = \frac{A_P}{A_C} = \frac{5 \cdot r^2 \cdot \sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}} \big/ 8}{\pi \cdot r^2} = \frac{5 \cdot \sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}}{8 \cdot \pi} = \frac{5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5 + \sqrt{5}}}{8 \cdot \pi} = 0{,}756826+$$

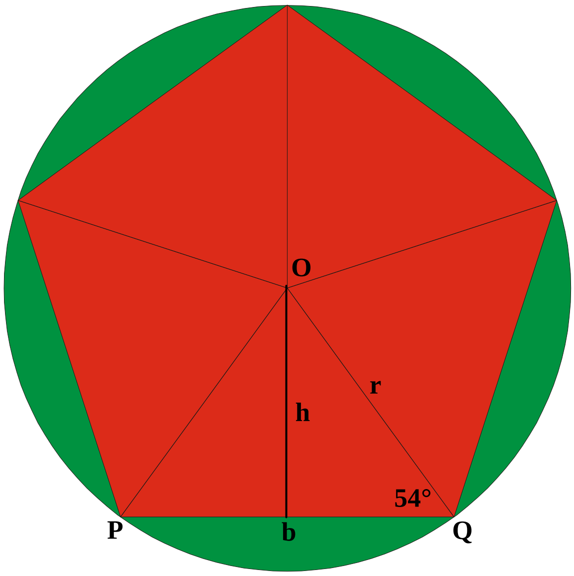



**Figura 7: Pentagono inscritto nella circonferenza**

## 3.3 Quadrato inscritto nella circonferenza

Assunto **r** noto, occorre ricavare l'area del quadrato in funzione di **r**; essendo il quadrato suddivisibile in 4 triangoli rettangoli isosceli, tale area è il quadruplo di quella del triangolo **OPQ** mostrato nella figura che segue, per cui:

$$A_Q = 4 \cdot \frac{b \cdot h}{2} = 2 \cdot 2 \cdot r \cdot \cos(45) \cdot r \cdot sen(45) = 4 \cdot r^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot r^2$$

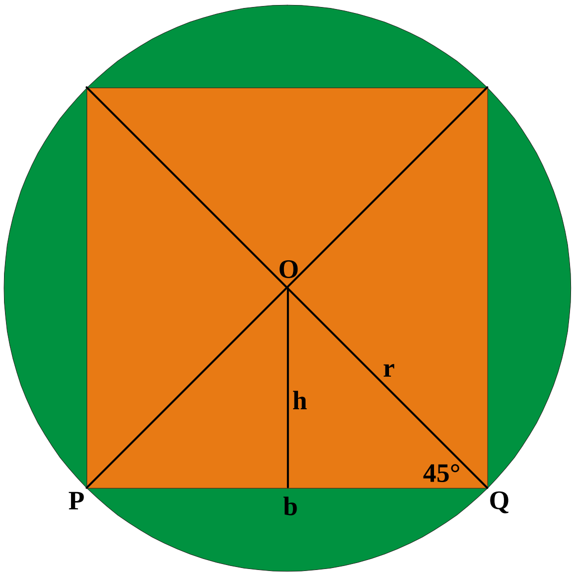



**Figura 8: Quadrato inscritto nella circonferenza**

Quindi:

$$\lambda_{QC} = \frac{A_Q}{A_C} = \frac{2 \cdot r^2}{\pi \cdot r^2} = \frac{2}{\pi} = 0{,}636619+$$

## 3.4 Triangolo inscritto nella circonferenza

Assunto **r** noto, occorre ricavare l'area del triangolo in funzione di **r**; essendo il triangolo suddivisibile in 3 triangoli rettangoli isosceli, tale area è il triplo di quella del triangolo **OPQ** mostrato nella figura che segue, per cui:

$$A_T = 3 \cdot \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 2 \cdot r \cdot \cos(30) \cdot r \cdot sen(30)}{2} = 3 \cdot r^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot r^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

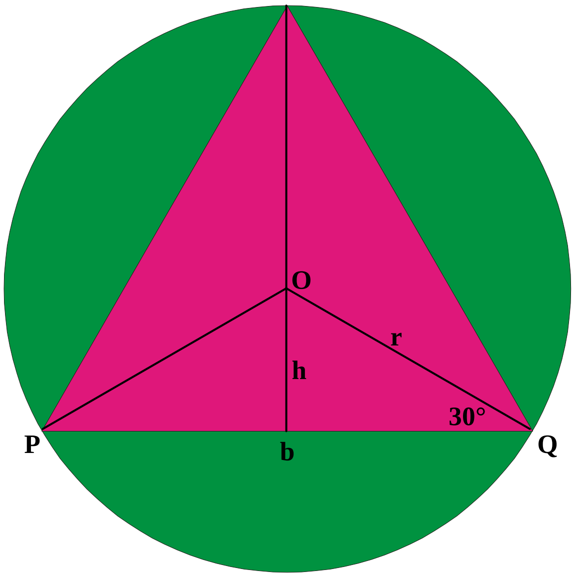



**Figura 9: Triangolo inscritto nella circonferenza**

Quindi:

$$\lambda_{TC} = \frac{A_T}{A_C} = \frac{\frac{3 \cdot r^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}{\pi \cdot r^2} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot \pi} = 0,413496 +$$

# 4 POLIGONI INSCRITTI NELL'ESAGONO

## 4.1 Circonferenza inscritta nell'esagono

Assunto **r** noto, occorre ricavare l'area dell'esagono in funzione di **r**; essendo l'esagono suddivisibile in 6 triangoli equilateri, tale area è il sestuplo di quella del triangolo **OPQ** mostrato nella figura che segue, la cui base **b** ha valore **l**, per cui:

$$A_E = 6 \cdot \frac{b \cdot r}{2} = 3 \cdot l \cdot r = 3 \cdot \frac{r}{sen(60)} \cdot r = 3 \cdot \frac{r^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6 \cdot r^2}{\sqrt{3}} = r^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}$$

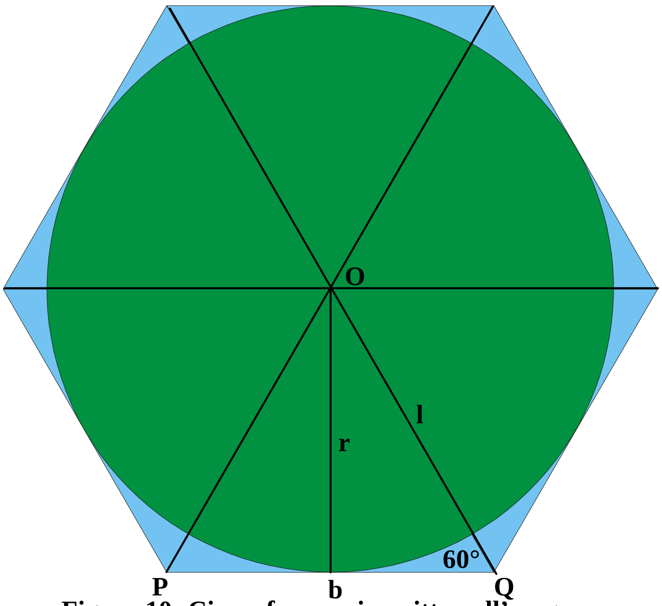



**Figura 10: Circonferenza inscritta nell'esagono**

Quindi:

$$\lambda_{CE} = \frac{A_C}{A_E} = \frac{\pi \cdot r^2}{r^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{6} = 0{,}906899 +$$

## 4.2 Pentagono inscritto nell'esagono

Come conseguenza del *postulato di monotonicità rotazionale*, ed in accordo alla tabella di Figura 5, occorre riferirsi al caso in cui il pentagono abbia un lato parallelo ad uno di quelli dell'esagono, ed a quello in cui il pentagono stesso sia ruotato di **6°** gradi.

Nella figura che segue, a sinistra è mostrato il massimo quadrato inscrivibile relativamente al primo caso, mentre a destra un pentagono *di uguali dimensioni* è piazzato nell'esagono nel migliore dei modi possibili.

Si osserva che nel secondo caso le dimensioni del pentagono dovrebbero essere soggette ad una riduzione per consentire al pentagono stesso di restare inscritto, per cui la situazione che massimizza il rapporto fra le aree è quella di sinistra. La differenza fra i due casi è inferiore all'1%, ma è facilmente riscontrabile nell'ingrandimento mostrato a destra.

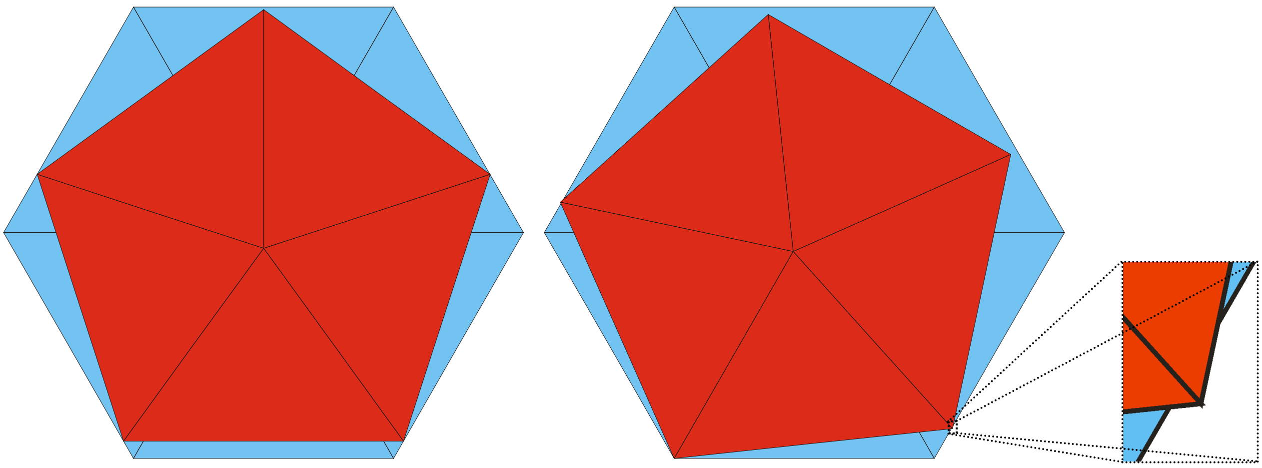


**Figura 11: Pentagono inscritto nell'esagono**

Come quasi sempre quando il pentagono è coinvolto, si tratta di uno dei più complessi fra i 20 casi da risolvere. In questo specifico caso, ci si semplifica un po' la vita ruotando l'immagine in alto a sinistra (quella di interesse) di 90°[5]; ed aggiungendo poi alla figura un triangolo equivalente ad uno dei 6 equilateri che compongono l'esagono (in rosa), come qui sotto mostrato.

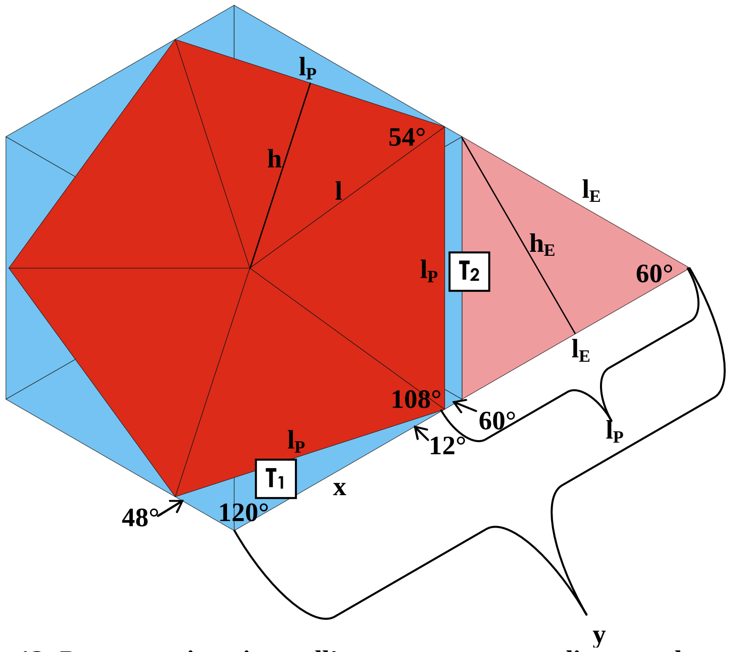



**Figura 12: Pentagono inscritto nell'esagono, con appendice protuberante**

Assunto noto il lato del pentagono $\mathbf{l_P}$, occorre ricavare le aree di esagono e pentagono in funzione di $\mathbf{l_P}$. Con riferimento alla figura qui sopra, e cominciando con l'applicare il teorema dei seni al triangolo indicato con $\mathbf{T_1}$ in figura, si ha:

[5] La rotazione è solo per questioni di impaginazione, naturalmente…

:

$$\frac{l_P}{sen(120)}=\frac{x}{sen(48)}$$

Quindi:

$$x=l_P\cdot\frac{sen(48)}{sen(120)}=l_P\cdot\frac{\dfrac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}+\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{8}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=l_P\cdot\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\left[\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\right]$$

Si ha poi, per come è stato costruito il triangolo rosa, e tenendo conto che lo stesso, indicato con $\mathbf{T_2}$, è equilatero[6]:

$$y=x+l_P=2\cdot l_E$$

Quindi:

$$l_E=\frac{x+l_P}{2}=\frac{l_P\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{12}\cdot\left[\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\right]+l_P}{2}=$$
$$=\frac{l_P}{24}\cdot\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}+3\cdot\sqrt{5}+9\right)$$

Adesso, l'area del pentagono è data dal quintuplo di uno dei suoi triangoli isosceli elementari; quindi, con riferimento alla figura in alto:

$$A_P=5\cdot\frac{l_P\cdot h}{2}$$

Essendo:

$$h=l\cdot sen(54)$$
$$l_P=2\cdot l\cdot\cos(54)$$

Si ha:

$$l=\frac{l_P}{2\cdot\cos(54)}$$
$$h=\frac{l_P}{2\cdot\cos(54)}\cdot sen(54)$$

[6] Si precisa qui che $\mathbf{T_2}$ comprende sia il triangolo rosa che il trapezio oblungo azzurro…

Quindi:

$$A_P=5\cdot\frac{l_P\cdot h}{2}=5\cdot\frac{l_P\cdot\frac{l_P}{2\cdot\cos(54)}\cdot sen(54)}{2}=l_P^{\,2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{sen(54)}{\cos(54)}=l_P^{\,2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}{\frac{\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}}{4}}=$$

$$=l_P^{\,2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}}\cdot\frac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}=l_P^{\,2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}}$$

Passiamo all'area dell'esagono; essa è data dal sestuplo di uno dei suoi triangoli equilateri elementari. Ad esempio, guarda caso, prendiamo proprio quello rosa aggiunto nella figura su in alto, che come visto equivale ad uno qualsiasi degli altri:

Si ha:

$$A_E=6\cdot\frac{l_E\cdot h_E}{2}=3\cdot l_E\cdot l_E\cdot sen(60)=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot l_E^{\,2}=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot\left[\frac{l_P}{24}\cdot\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}+3\cdot\sqrt{5}+9\right)\right]^2=$$

$$=l_P^{\,2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{32}\cdot\left(13+5\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{25+11\cdot\sqrt{5}}\right)$$

Infine:

$$\lambda_{PE}=\frac{A_P}{A_E}=\frac{l_P^{\,2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}}}{l_P^{\,2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{32}\cdot\left(13+5\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{25+11\cdot\sqrt{5}}\right)}=$$

$$=\frac{8\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{\sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}}}{\left(13+5\cdot\sqrt{5}\right)+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{25+11\cdot\sqrt{5}}}\cdot\frac{\left(13+5\cdot\sqrt{5}\right)-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{25+11\cdot\sqrt{5}}}{\left(13+5\cdot\sqrt{5}\right)-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{25+11\cdot\sqrt{5}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{6}\cdot\frac{\sqrt{1385+619\cdot\sqrt{5}}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{47+21\cdot\sqrt{5}}}{9+4\cdot\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{6}\cdot\frac{\sqrt{1385+619\cdot\sqrt{5}}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\left(\frac{\sqrt{47+\sqrt{2209-2205}}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{47-\sqrt{2209-2205}}}{\sqrt{2}}\right)}{9+4\cdot\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{6}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1385+619\cdot\sqrt{5}}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\left(7+3\cdot\sqrt{5}\right)}{9+4\cdot\sqrt{5}}\cdot\frac{9-4\cdot\sqrt{5}}{9-4\cdot\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{6}\cdot\left[\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(222985+99659\cdot\sqrt{5}-99720\cdot\sqrt{5}-222840\right)}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\left(3-\sqrt{5}\right)\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{6}\cdot\left[\sqrt{2}\cdot\sqrt{145-61\cdot\sqrt{5}}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\left(3-\sqrt{5}\right)\right]=0{,}767210+$$

Questo caso è sbalorditivo per come appaiano numeri enormi durante i calcoli (cosa di solito sintomo qualche errore…), ma che poi scompaiono quasi miracolosamente elidendosi a vicenda…

## 4.3 Quadrato inscritto nell'esagono

Come conseguenza del *postulato di monotonicità rotazionale*, ed in accordo alla tabella di Figura 5, occorre riferirsi al caso in cui il quadrato abbia un lato parallelo ad uno di quelli dell'esagono, ed a quello in cui il quadrato stesso sia ruotato di **15°** gradi.

Nella figura che segue, a sinistra è mostrato il massimo quadrato inscrivibile relativamente al primo caso, mentre a destra un quadrato *di uguali dimensioni*, ruotato di **15°** in senso antiorario, è piazzato nell'esagono nel migliore dei modi possibili

Si osserva facilmente che nel caso di destra le dimensioni del quadrato dovrebbero essere soggette ad una riduzione per consentire al quadrato stesso di restare inscritto, per cui la situazione che massimizza il rapporto fra le aree è quella di sinistra.

Assunto noto il lato $\mathbf{l_Q}$ del quadrato, occorre ricavare l'area dell'esagono in funzione di $\mathbf{l_Q}$. Con riferimento alla parte sinistra della figura che segue, si ha:

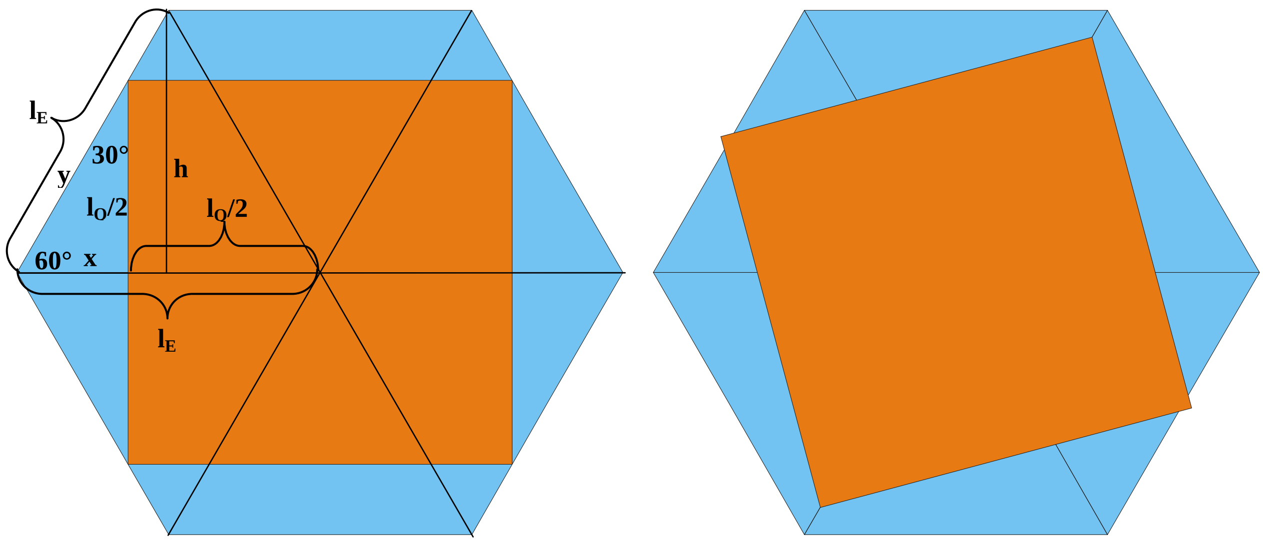



**Figura 13: Quadrato inscritto nell'esagono**

$$l_E = x + \frac{l_Q}{2} = y \cdot \cos(60) + \frac{l_Q}{2} = \frac{l_Q}{2 \cdot sen(60)} \cdot \frac{1}{2} + \frac{l_Q}{2} = l_Q \cdot \left( \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right) = \frac{l_Q}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$h = l_E \cdot sen(60) = \frac{l_Q}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = l_Q \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

Si ha poi, essendo l'area dell'esagono il sestuplo dell'area di uno dei suoi triangoli equilateri componenti:

$$A_E = 6 \cdot \frac{l_E \cdot h}{2} = 3 \cdot \frac{l_Q}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot l_Q \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot l_Q^{\ 2} \cdot \left(1+\sqrt{3}\right)^2 = l_Q^{\ 2} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{3}+3}{4}$$

Quindi, infine:

$$\lambda_{QE} = \frac{A_Q}{A_E} = \frac{4 \cdot l_Q^{\ 2}}{\left(2 \cdot \sqrt{3}+3\right) \cdot l_Q^{\ 2}} = \frac{4 \cdot \left(2 \cdot \sqrt{3}-3\right)}{\left(2 \cdot \sqrt{3}+3\right) \cdot \left(2 \cdot \sqrt{3}-3\right)} = \frac{4 \cdot \left(2 \cdot \sqrt{3}-3\right)}{12-9} = \frac{4}{3} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{3}-3\right) = 0{,}618802+$$

## 4.4 Triangolo inscritto nell'esagono

Come conseguenza del *postulato di monotonicità rotazionale*, ed in accordo alla tabella di Figura 5, occorre riferirsi al caso in cui il triangolo abbia un lato parallelo ad uno di quelli dell'esagono, ed a quello in cui il triangolo stesso sia ruotato di **30°** gradi.

Nella figura che segue, a destra è mostrato il massimo triangolo inscrivibile relativamente al secondo caso, mentre a sinistra un triangolo *di uguali dimensioni* è piazzato nell'esagono nel migliore dei modi possibili.

Si osserva facilmente che nel caso di sinistra le dimensioni del triangolo dovrebbero essere soggette ad una riduzione per consentire al triangolo stesso di restare inscritto, per cui la situazione che massimizza il rapporto fra le aree è quella di destra.

Da una rapida ispezione *ad occhio* dell'immagine in basso a destra, si osserva che il triangolo è composto da 6 triangoli rettangoli fra loro equivalenti, mentre l'esagono comprende gli stessi 6 triangoli di cui sopra (in *violetto*), più altri 6 identici (in *azzurro*).

Se si indica allora con $A_R$ l'area della superficie di uno qualsiasi dei triangoli rettangoli violetti ed azzurri della figura in basso a destra, si ha:

$$\lambda_{TE} = \frac{A_T}{A_E} = \frac{6 \cdot A_R}{12 \cdot A_R} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

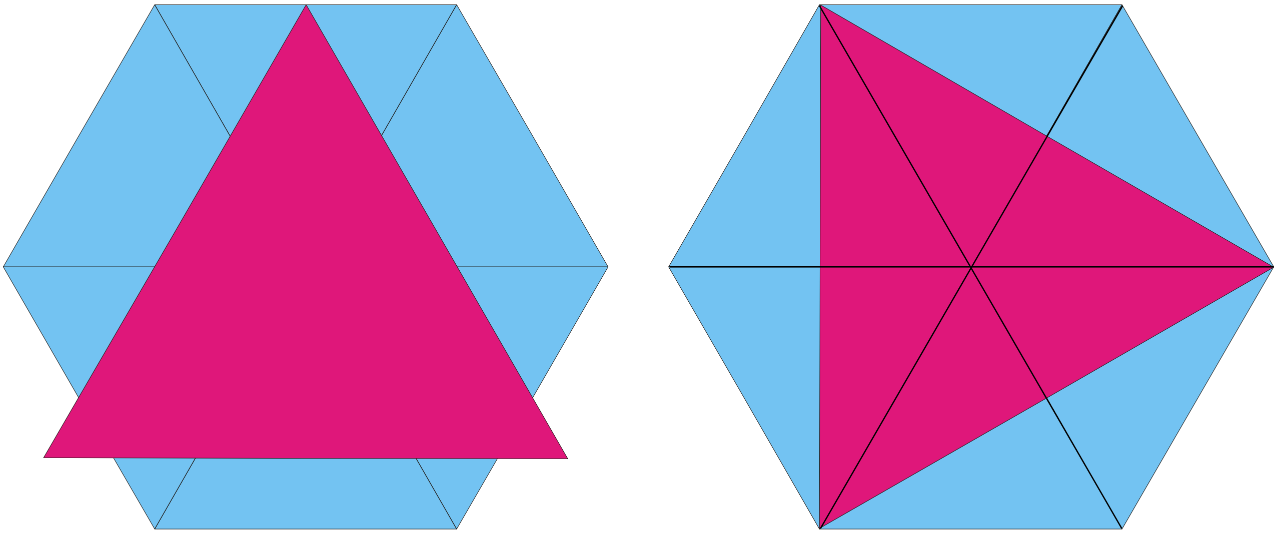


**Figura 14: Triangolo inscritto nell'esagono**

# 5 POLIGONI INSCRITTI NEL PENTAGONO

## 5.1 Circonferenza inscritta nel pentagono

Assunto **r** noto, occorre ricavare l'area del pentagono in funzione di **r**; essendo il pentagono suddivisibile in 5 triangoli isosceli, tale area è il quintuplo di quella del triangolo **OPQ** mostrato nella figura che segue.

Per uno qualsiasi di tali triangoli valgono le relazioni:

$$l = \frac{r}{sen(54)}$$

$$b = 2 \cdot l \cdot \cos(54) = 2 \cdot r \cdot \frac{\cos(54)}{sen(54)} = \frac{2 \cdot r}{tg(54)}$$

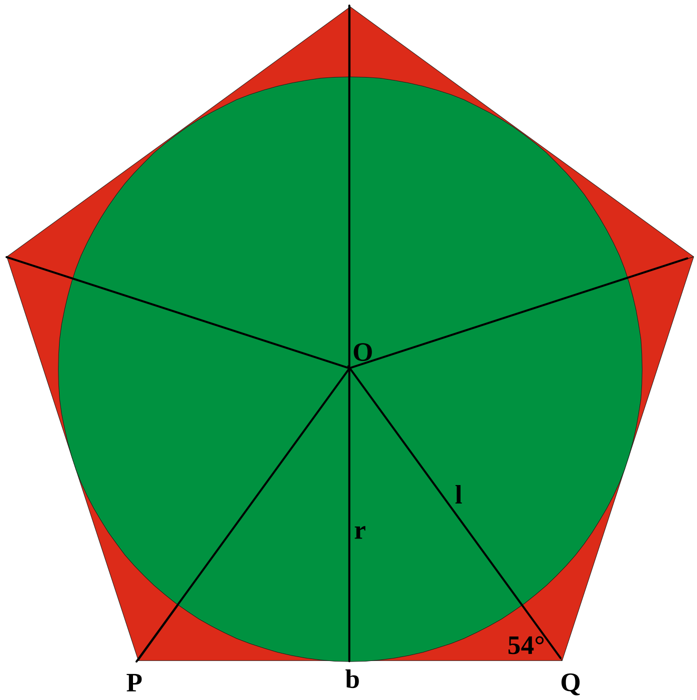



**Figura 15: Circonferenza inscritta nel pentagono**

Quindi:

$$\lambda_{CP} = \frac{A_C}{A_P} = \frac{\pi \cdot r^2}{5 \cdot \frac{b \cdot r}{2}} = \frac{\pi \cdot r^2}{5 \cdot \frac{2 \cdot r^2}{2 \cdot tg(54)}} = \frac{\pi \cdot tg(54)}{5} = \frac{\pi \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}}}{5} = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}}{\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}} = \frac{\pi}{5} \cdot \sqrt{\frac{5+1+2\cdot\sqrt{5}}{10-2\cdot\sqrt{5}}} =$$

$$= \frac{\pi}{5} \cdot \sqrt{\frac{2\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)}{2\cdot\left(5-\sqrt{5}\right)}} = \frac{\pi}{5} \cdot \sqrt{\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot\left(5+\sqrt{5}\right)}{\left(5-\sqrt{5}\right)\cdot\left(5+\sqrt{5}\right)}} = \frac{\pi}{5} \cdot \sqrt{\frac{20+8\cdot\sqrt{5}}{20}} = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{\sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} = \frac{\pi \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}}}{25} =$$

$$= 0{,}864806+$$

## 5.2 Esagono inscritto nel pentagono

Come conseguenza del *postulato di monotonicità rotazionale*, ed in accordo alla tabella di Figura 5, occorre riferirsi al caso in cui l'esagono abbia un lato parallelo ad uno di quelli del pentagono, ed a quello in cui l'esagono stesso sia ruotato di **6°** gradi.

Nella figura che segue, a destra è mostrato il massimo esagono inscrivibile relativamente al secondo caso, mentre a sinistra un esagono *di uguali dimensioni* è piazzato nel pentagono nel migliore dei modi possibili.

Si osserva che nel primo caso le dimensioni dell'esagono dovrebbero essere soggette ad una riduzione per consentire all'esagono stesso di restare inscritto, per cui la situazione che massimizza il rapporto fra le aree è quella di destra. La differenza fra i due casi è inferiore allo 0,1% (!), ma è facilmente riscontrabile nell'ingrandimento mostrato a sinistra.

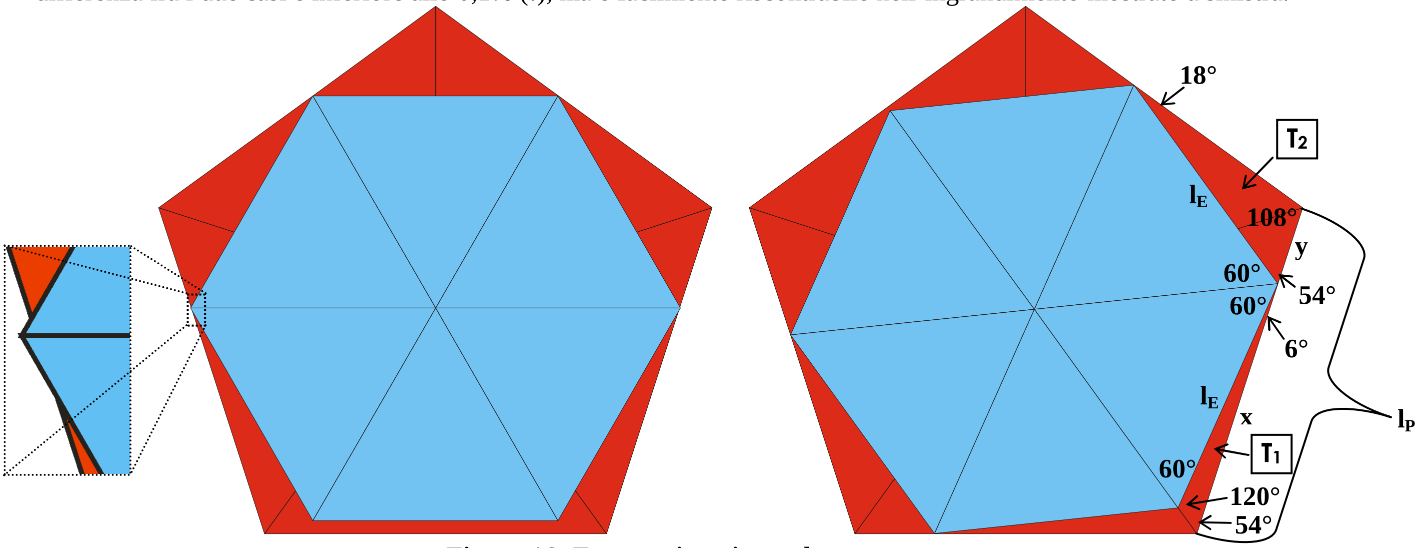



**Figura 16: Esagono inscritto nel pentagono**

Come quasi sempre quando il pentagono è coinvolto, si tratta di uno dei più complessi fra i 20 casi da risolvere. Assunto noto il lato dell'esagono $\mathbf{l_E}$, occorre ricavare le aree di esagono e pentagono in funzione di $\mathbf{l_E}$. Con riferimento alla figura qui sopra, e cominciando con l'applicare il teorema dei seni al triangolo indicato con $\mathbf{T_1}$ in figura, si ha:

$$\frac{l_E}{sen(54)} = \frac{x}{sen(120)}$$

Da cui:

$$x = l_E \cdot \frac{sen(120)}{sen(54)} = l_E \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{5}+1}{4}} = l_E \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = l_E \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$$

Applicando ancora il teorema dei seni, stavolta al triangolo indicato con $\mathbf{T_2}$ in figura, si ha:

$$\frac{l_E}{sen(108)} = \frac{y}{sen(18)}$$

Da cui:

$$y = l_E \cdot \frac{sen(18)}{sen(108)} = l_E \cdot \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{\frac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{4}} = l_E \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}} \cdot \frac{\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}}{\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}} = l_E \cdot \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}}}{5}$$

Si ha poi:

$$l_P = x + y = l_E \cdot \frac{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{2} + l_E \cdot \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}}}{5} = l_E \cdot \frac{5\cdot\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)+2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}}}{10}$$

Adesso, l'area del pentagono in funzione del suo lato è già stata ricavata in precedenza nel paragrafo 4.2; quindi, richiamando la relazione citata si ha:

$$A_P = l_P{}^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}} = l_E{}^2 \cdot \left[\frac{5\cdot\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)+2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}}}{10}\right]^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}} =$$

$$= l_E{}^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\left(\sqrt{325-79\cdot\sqrt{5}}+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}\right) =$$

$$= l_E{}^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\left[\sqrt{325-79\cdot\sqrt{5}}+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\left(\frac{\sqrt{3+\sqrt{9-5}}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3-\sqrt{9-5}}}{\sqrt{2}}\right)\right] =$$

$$= l_E{}^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\left[\sqrt{325-79\cdot\sqrt{5}}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\right]$$

Richiamando dallo stesso paragrafo 4.2 anche la relazione che fornisce l'area dell'esagono in funzione del suo lato si ha infine:

$$\lambda_{EP} = \frac{A_E}{A_P} = \frac{l_E{}^2 \cdot \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}}{l_E{}^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\left[\sqrt{325-79\cdot\sqrt{5}}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\right]} =$$

$$= 6\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{325-79\cdot\sqrt{5}}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}\cdot\frac{\sqrt{325-79\cdot\sqrt{5}}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{\sqrt{325-79\cdot\sqrt{5}}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)} =$$

$$= 6\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{325-79\cdot\sqrt{5}}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{145-19\cdot\sqrt{5}}\cdot\frac{145+19\cdot\sqrt{5}}{145+19\cdot\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{3\cdot\sqrt{3}}{4805}\cdot\left[\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{262165-641\cdot\sqrt{5}}-10\cdot\sqrt{3}\cdot\left(63-5\cdot\sqrt{5}\right)\right] = 0{,}775557+$$

Questo è il caso in cui il risultato è espresso dalla formula più complessa fra le 20 contemplate; può darsi sia errata, ma come anticipato nell'introduzione, paragrafo 2.3, la *verifica grafica* fornisce un risultato simile migliore di una parte su 1400…

## 5.3 Quadrato inscritto nel pentagono

Come conseguenza del *postulato di monotonicità rotazionale*, ed in accordo alla tabella di Figura 5, occorre riferirsi al caso in cui il quadrato abbia un lato parallelo ad uno di quelli del pentagono, ed a quello in cui il quadrato stesso sia ruotato di **9°** gradi.

Nella figura che segue, a destra è mostrato il massimo quadrato inscrivibile relativamente al secondo caso, mentre a sinistra un quadrato *di uguali dimensioni* è piazzato nel pentagono nel migliore dei modi possibili.

Si osserva che nel primo caso le dimensioni del quadrato dovrebbero essere soggette ad una riduzione per consentire al quadrato stesso di restare inscritto, per cui la situazione che massimizza il rapporto fra le aree è quella di destra. La differenza fra i due casi è inferiore all'1%, ma è facilmente riscontrabile nell'ingrandimento mostrato a sinistra.

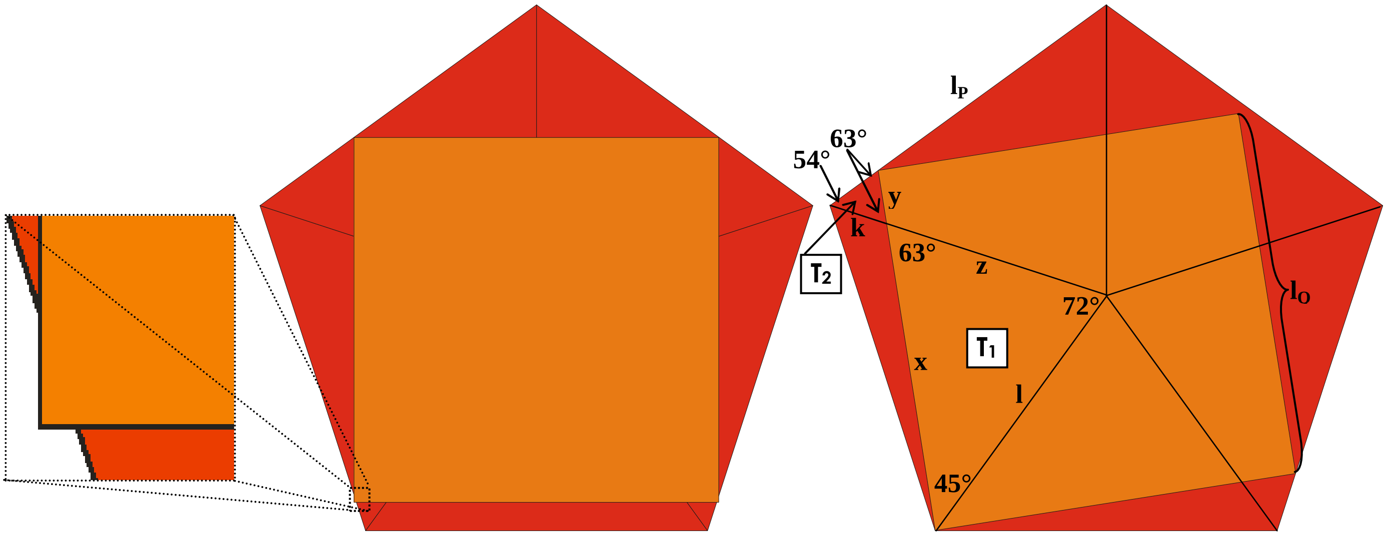



**Figura 17: Quadrato inscritto nel pentagono**

Come quasi sempre quando il pentagono è coinvolto, si tratta di uno dei più complessi fra i 20 casi da risolvere. Assunto noto il più esteso dei lati dei 5 triangoli isosceli in cui il pentagono è suddiviso, indicato con **l**, occorre ricavare le aree di quadrato e pentagono in funzione di **l**. Con riferimento alla parte destra della figura in alto, e cominciando con l'applicare il teorema dei seni al triangolo indicato con $\mathbf{T_1}$ in figura, si ha:

$$\frac{l}{sen(63)} = \frac{x}{sen(72)}$$

Quindi:

$$x = l \cdot \frac{sen(72)}{sen(63)} = l \cdot \frac{\frac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1\right)} =$$

$$= l \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}-\left(\sqrt{5}-1\right)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}-\left(\sqrt{5}-1\right)} =$$

$$= l \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} \cdot \left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}-\left(\sqrt{5}-1\right)\right) =$$

$$= l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\sqrt{5}-\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}}\right)$$

Ancora, dallo stesso triangolo:

$$\frac{l}{sen(63)} = \frac{z}{sen(45)}$$

Quindi:

$$z = l \cdot \frac{sen(45)}{sen(63)} = l \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 1\right)} = l \cdot \frac{4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5+\sqrt{5}} - \left(\sqrt{5}-1\right)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5+\sqrt{5}} - \left(\sqrt{5}-1\right)} =$$

$$= l \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5+\sqrt{5}} - \left(\sqrt{5}-1\right)}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = l \cdot \frac{\sqrt{10 - 2 \cdot \sqrt{5}} - \left(3 - \sqrt{5}\right)}{2}$$

Si ha poi:

$$k = l - z = l - l \cdot \frac{\sqrt{10 - 2 \cdot \sqrt{5}} - 3 + \sqrt{5}}{2} = l \cdot \frac{5 - \sqrt{5} - \sqrt{10 - 2 \cdot \sqrt{5}}}{2}$$

Applicando ancora una volta il teorema dei seni, stavolta al triangolo indicato con $\mathbf{T_2}$ in figura, si ha:

$$\frac{k}{sen(63)} = \frac{y}{sen(54)}$$

Quindi:

$$y = k \cdot \frac{sen(54)}{sen(63)} = l \cdot \frac{5 - \sqrt{5} - \sqrt{10 - 2 \cdot \sqrt{5}}}{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 1\right)} =$$

$$= l \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5 - \sqrt{5} - \sqrt{10 - 2 \cdot \sqrt{5}}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5+\sqrt{5}} - \left(\sqrt{5}-1\right)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5+\sqrt{5}} - \left(\sqrt{5}-1\right)} =$$

$$= l \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5 - \sqrt{5}} + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5 - 2 \cdot \sqrt{5}} - 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{5} - 1\right)}{4}$$

E’ adesso possibile valutare l’area del quadrato in funzione di **l**:

$$A_Q = {l_Q}^2 = \left(x + y\right)^2 =$$

$$= \left[ l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\sqrt{5} - \sqrt{5 - 2 \cdot \sqrt{5}}\right) + l \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5 - \sqrt{5}} + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5 - 2 \cdot \sqrt{5}} - 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{5}-1\right)}{4} \right]^2 =$$

$$= l^2 \cdot \frac{5}{8} \cdot \left[\sqrt{2} \cdot \sqrt{5 - \sqrt{5}} - \left(3 - \sqrt{5}\right)\right]^2 = l^2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(6 - 2 \cdot \sqrt{5} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{25 - 11 \cdot \sqrt{5}}\right)$$

Infine, considerando la relazione che esprime l’area del pentagono in funzione di **l** presente nel successivo paragrafo[7], si ha:

---

7 I calcoli per i vari casi non sono stati eseguiti nello stesso ordine in cui sono qui presentati; da qui l’inversione della sequenza…

$$\lambda_{QP}=\frac{A_Q}{A_P}=\frac{l^2\cdot\frac{5}{2}\cdot\left(6-2\cdot\sqrt{5}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{25-11\cdot\sqrt{5}}\right)}{\frac{5\cdot l^2}{16}\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}}=8\cdot\frac{6-2\cdot\sqrt{5}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{25-11\cdot\sqrt{5}}}{\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}=$$

$$=4\cdot\frac{4\cdot\sqrt{5}-8-\sqrt{2}\cdot\sqrt{65-29\sqrt{5}}}{\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}}\cdot\frac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}=$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\left(5\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}-5\cdot\sqrt{9-\sqrt{80}}\right)=$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\left(5\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}-5\cdot\left(\sqrt{\frac{9+\sqrt{81-80}}{2}}-\sqrt{\frac{9-\sqrt{81-80}}{2}}\right)\right)=$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\left[\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{25-11\cdot\sqrt{5}}-5\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)\right]=0{,}662219+$$

## 5.4 Triangolo inscritto nel pentagono

Come conseguenza del *postulato di monotonicità rotazionale*, ed in accordo alla tabella di Figura 5, occorre riferirsi al caso in cui il triangolo abbia un lato parallelo ad uno di quelli del pentagono, ed a quello in cui il triangolo stesso sia ruotato di **12°** gradi.

Nella figura che segue, a sinistra è mostrato il massimo triangolo inscrivibile relativamente al primo caso, mentre a destra un triangolo di uguali dimensioni, ruotato di **12°** in senso orario, è piazzato nel pentagono nel migliore dei modi possibili.

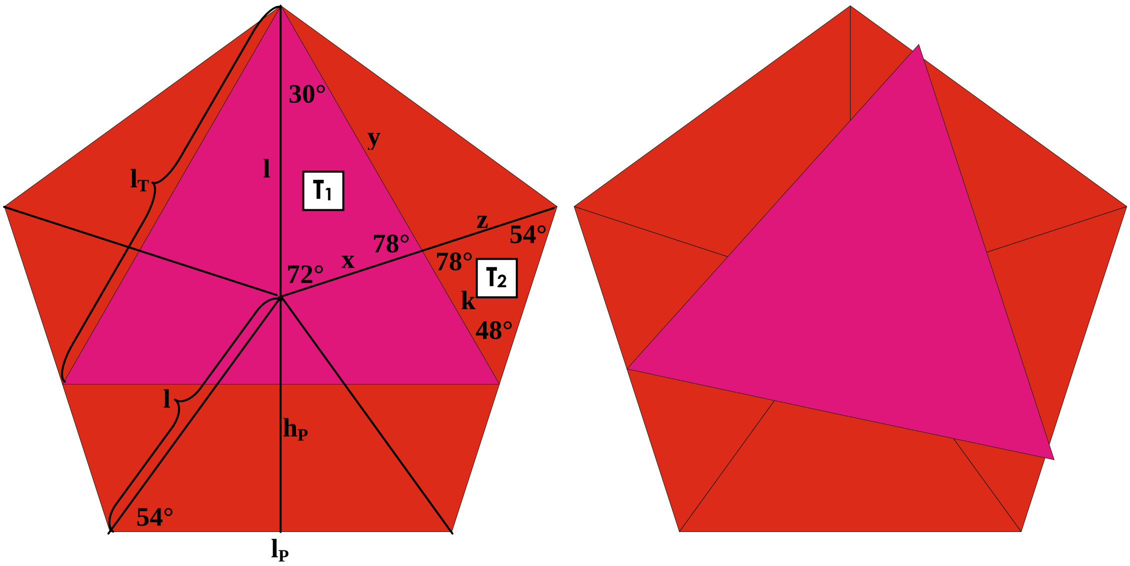



**Figura 18: Triangolo inscritto nel pentagono**

Si osserva facilmente che nel secondo caso le dimensioni del triangolo dovrebbero essere soggette ad una riduzione per consentire al triangolo stesso di restare inscritto, per cui la situazione che massimizza il rapporto fra le aree è quella di sinistra.

Come quasi sempre quando il pentagono è coinvolto, si tratta di uno dei più complessi fra i 20 casi da risolvere. Assunto noto il più esteso dei lati dei 5 triangoli isosceli in cui il pentagono è suddiviso, indicato con **l**, occorre ricavare le aree di triangolo e pentagono in funzione di **l**. Con riferimento alla parte sinistra della figura in alto, e cominciando con l'applicare il teorema dei seni al triangolo indicato con $\mathbf{T_1}$ in figura, si ha:

$$\frac{l}{sen(78)} = \frac{x}{sen(30)}$$

Quindi:

$$x = l \cdot \frac{sen(30)}{sen(78)} = l \cdot \frac{1/2}{\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1}{8}} = \frac{4 \cdot l}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1}$$

Poi, essendo **l = x + z**:

$$z = l - x = l - \frac{4 \cdot l}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1} = l \cdot \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-5}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1}$$

Applicando ancora il teorema dei seni al triangolo $\mathbf{T_1}$:

$$\frac{l}{sen(78)} = \frac{y}{sen(72)}$$

Per cui:

$$y = l \cdot \frac{sen(72)}{sen(78)} = l \cdot \frac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{8}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1} = 2\cdot l \cdot \frac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1}$$

Si ha poi, ancora per il teorema dei seni, ma stavolta applicato al triangolo indicato con $\mathbf{T_2}$ nella figura in alto:

$$\frac{k}{sen(54)} = \frac{z}{sen(48)}$$

Allora, ricordando l'espressione per **z** sopra ricavata:

$$k = z \cdot \frac{sen(54)}{sen(48)} = l \cdot \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-5}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \frac{8}{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}+\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)} =$$
$$= 2\cdot l \cdot \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-5}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}+\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}$$

Tutto quanto fatto finora è servito a trovare espressioni per i segmenti **y** e **k** mostrati nella figura in alto, in funzione del dato assunto noto, cioè **l**; la somma di tali segmenti costituisce il lato $\mathbf{l_T}$ del triangolo di cui si sta cercando l'area.

Si ha allora:

$$l_T = y + k = 2\cdot l \cdot \frac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1} + 2\cdot l \cdot \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-5}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}+\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}$$

Dopo inenarrabili calcoli algebrici (che non espongo in dettaglio per commossa pietà nei Vs. confronti)[8] si arriva a:

$$l_T = \frac{l}{8} \cdot \left[\left(\sqrt{5}+5\right)\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}} - 4\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\right]$$

L'altezza del triangolo $\mathbf{h_T}$ (non mostrata in figura per non complicarla troppo) è data da:

$$h_T = l_T \cdot sen(60) = l_T \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Per cui:

$$A_T = \frac{l_T \cdot h_T}{2} = l_T^{\,2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{l^2}{64} \cdot \left[\left(\sqrt{5}+5\right)\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}} - 4\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\right]^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} =$$
$$= \frac{l^2\cdot\sqrt{3}}{256} \cdot \left[\left(30+10\cdot\sqrt{5}\right)\cdot\left(10+2\cdot\sqrt{5}\right) + 240 - 8\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}+5\right)\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}\right] =$$
$$= \frac{l^2\cdot\sqrt{3}}{256} \cdot \left[640 + 160\cdot\sqrt{5} - 40\cdot\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}\right] =$$
$$= \frac{l^2\cdot 5\cdot\sqrt{3}}{32} \cdot \left[16 + 4\cdot\sqrt{5} - \sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}\right]$$

[8] Questo del triangolo nel pentagono è stato il primo dei casi complessi che ho affrontato… Con carta e penna… Poi ho cambiato sistema lavorando direttamente con Equation Editor. Ciò spiega la differenza nella logica di calcolo algebrico di questo caso rispetto agli altri.

Passiamo all'area del pentagono; essa è il quintuplo di quella di uno qualsiasi dei triangoli elementari che lo compongono:

$$A_P = 5 \cdot \frac{h_P \cdot l_P}{2} = 5 \cdot \frac{l \cdot sen(54) \cdot 2 \cdot l \cdot \cos(54)}{2} = 5 \cdot l^2 \cdot sen(54) \cdot \cos(54) =$$

$$= 5 \cdot l^2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \frac{\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}}{4} = \frac{5 \cdot l^2}{16} \cdot \left(\sqrt{5}+1\right) \cdot \sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}$$

Infine:

$$\lambda_{TP} = \frac{A_T}{A_P} = \frac{\frac{l^2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3}}{32} \cdot \left[16 + 4 \cdot \sqrt{5} - \sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{5}+1\right) \cdot \sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}\right]}{\frac{5 \cdot l^2}{16} \cdot \left(\sqrt{5}+1\right) \cdot \sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{16 + 4 \cdot \sqrt{5} - \sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{5}+1\right) \cdot \sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{\left(\sqrt{5}+1\right) \cdot \sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}} \cdot \frac{\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}}{\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{20} \cdot \left[\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{65 + 19 \cdot \sqrt{5}} - 5 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{5}+1\right)\right] = 0{,}412208 +$$

# 6 POLIGONI INSCRITTI NEL QUADRATO

## 6.1 Circonferenza inscritta nel quadrato

Assunto **r** noto, occorre ricavare l'area del quadrato in funzione di **r**; essendo il lato **l** del quadrato di lunghezza doppia rispetto ad **r**, si ha:

$$\lambda_{CQ} = \frac{A_C}{A_Q} = \frac{\pi \cdot r^2}{l^2} = \frac{\pi \cdot r^2}{4 \cdot r^2} = \frac{\pi}{4} = 0{,}785398 +$$

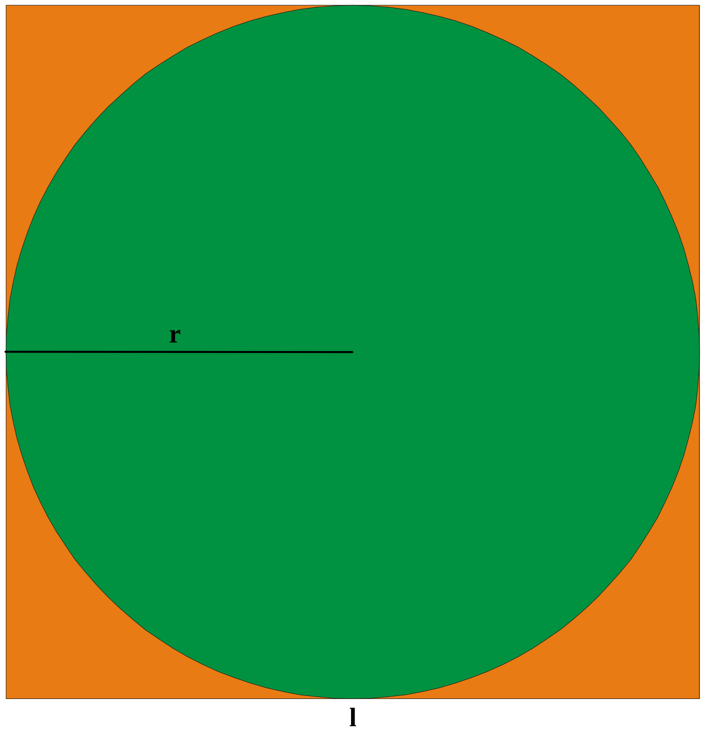



**Figura 19: Circonferenza inscritta nel quadrato**

## 6.2 Esagono inscritto nel quadrato

Come conseguenza del *postulato di monotonicità rotazionale*, ed in accordo alla tabella di Figura 5, occorre riferirsi al caso in cui l'esagono abbia un lato parallelo ad uno di quelli del quadrato, ed a quello in cui l'esagono stesso sia ruotato di **15°** gradi.

Nella figura che segue, a destra è mostrato il massimo esagono inscrivibile relativamente al secondo caso, mentre a sinistra un esagono *di uguali dimensioni* è piazzato nel quadrato nel migliore dei modi possibili.

Si osserva facilmente che nel caso di sinistra le dimensioni dell'esagono dovrebbero essere soggette ad una riduzione per consentire all' esagono stesso di restare inscritto, per cui la situazione che massimizza il rapporto fra le aree è quella di destra.

Assunto noto il lato $\mathbf{l_E}$ dell'esagono, occorre ricavare l'area del quadrato in funzione di $\mathbf{l_E}$. Con riferimento alla parte destra della figura che segue, si ha:

$$x = l_E \cdot \cos(45) = l_E \cdot \sqrt{2}/2$$
$$z = l_E \cdot sen(60) = l_E \cdot \sqrt{3}/2$$
$$y = \frac{z}{sen(45)} = \frac{l_E \cdot \sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{l_E \cdot \sqrt{6}}{2}$$

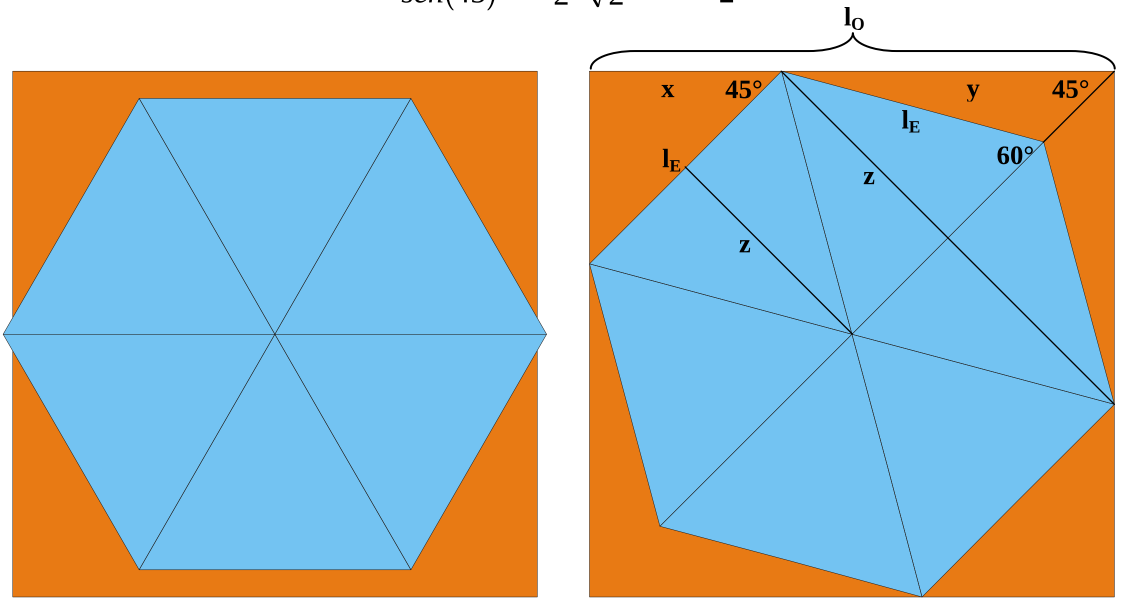



**Figura 20: Esagono inscritto nel quadrato**

Quindi:

$$A_Q = l_Q^{\ 2} = (x+y)^2 = \left( l_E \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + l_E \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2 = \frac{l_E^{\ 2}}{4} \cdot \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2 = l_E^{\ 2} \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)$$

L'area dell'esagono è il sestuplo di uno dei triangoli equilateri che lo compongono, per cui:

$$A_E = 6 \cdot \frac{l_E \cdot z}{2} = 3 \cdot l_E \cdot l_E \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = l_E^{\ 2} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Infine:

$$\lambda_{EQ} = \frac{A_E}{A_Q} = \frac{l_E^{\ 2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot l_E^{\ 2} \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)} = \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(2-\sqrt{3}\right)}{2 \cdot \left(2+\sqrt{3}\right) \cdot \left(2-\sqrt{3}\right)} = \frac{3 \cdot \left(2 \cdot \sqrt{3} - 3\right)}{2} = 0{,}696152+$$

## 6.3 Pentagono inscritto nel quadrato

Come conseguenza del *postulato di monotonicità rotazionale*, ed in accordo alla tabella di Figura 5, occorre riferirsi al caso in cui il pentagono abbia un lato parallelo ad uno di quelli del quadrato, ed a quello in cui il pentagono stesso sia ruotato di **9°** gradi.

Nella figura che segue, a destra è mostrato il massimo pentagono inscrivibile relativamente al secondo caso, mentre a sinistra un pentagono *di uguali dimensioni* è piazzato nel quadrato nel migliore dei modi possibili.

Si osserva facilmente che nel primo caso le dimensioni del pentagono dovrebbero essere soggette ad una riduzione per consentire al quadrato stesso di restare inscritto, per cui la situazione che massimizza il rapporto fra le aree è quella di destra.

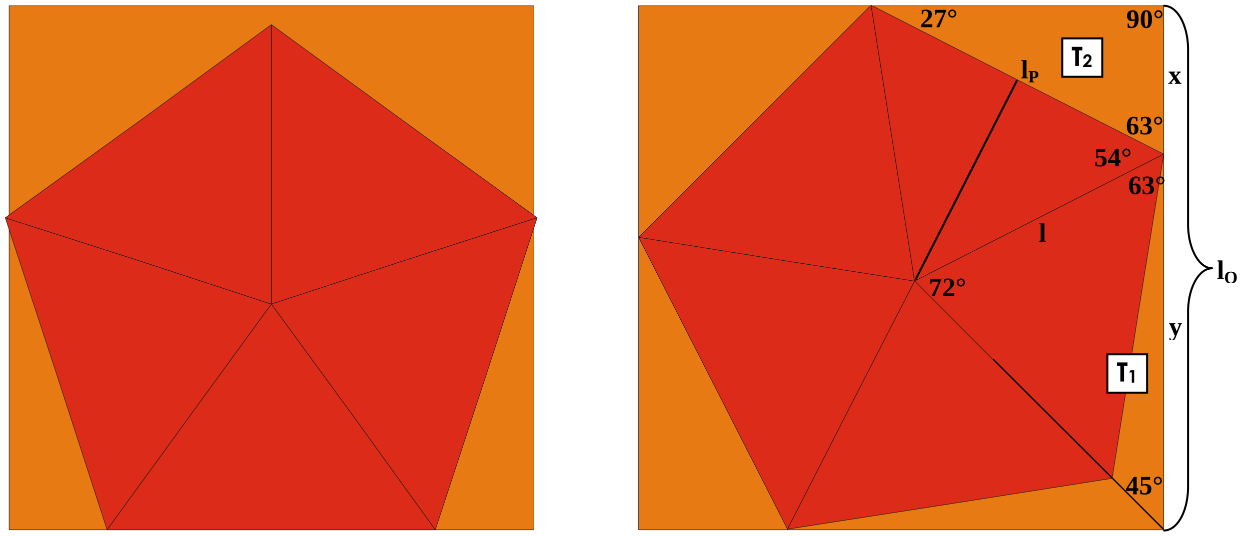



**Figura 21: Pentagono inscritto nel quadrato**

Come quasi sempre quando il pentagono è coinvolto, si tratta di uno dei più complessi fra i 20 casi da risolvere. Assunto noto il più esteso dei lati dei 5 triangoli isosceli in cui il pentagono è suddiviso, indicato con **l**, occorre ricavare le aree di quadrato e pentagono in funzione di **l**. Con riferimento alla parte destra della figura in alto, e cominciando con l'applicare il teorema dei seni al triangolo indicato con $\mathbf{T_1}$ in figura, si ha:

$$\frac{l}{sen(45)} = \frac{y}{sen(72)}$$

Quindi:

$$y = l \cdot \frac{sen(72)}{sen(45)} = l \cdot \frac{\frac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = l \cdot \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2}$$

Si ha poi:

$$l_P = 2 \cdot l \cdot \cos(54) = 2 \cdot l \cdot \frac{\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}}{4} = l \cdot \frac{\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}}{2}$$

E quindi, applicando ancora il teorema dei seni stavolta al triangolo $\mathbf{T_2}$ in figura:

$$\frac{l_P}{sen(90)} = \frac{x}{sen(27)}$$

Poi:

$$x = l_P \cdot \frac{sen(27)}{sen(90)} = l \cdot \frac{\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}}{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right)}{1} =$$
$$= l \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}}\right)$$

L'area del quadrato è allora esprimibile come segue:

$$A_Q = {l_Q}^2 = (x+y)^2 = \left[l\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}}\right)+l\cdot\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2}\right]^2 =$$
$$= l^2\cdot\frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}+1\right)$$

Ricordando allora l'espressione dell'area del pentagono in funzione di l, già ricavata nel paragrafo 5.4, ed applicando ad essa un'ulteriore semplificazione[9] si ha:

$$A_P = \frac{5\cdot l^2}{16}\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}} = l^2\cdot\frac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8}$$

Infine:

$$\lambda_{PQ} = \frac{A_P}{A_Q} = \frac{l^2\cdot\frac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8}}{l^2\cdot\frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}+1\right)} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\left(\sqrt{5}+1\right)+\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)-\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}}\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)-\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}}\right)} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}}-\sqrt{2}\cdot\left(5+\sqrt{5}\right)+\sqrt{5}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}-\left(9-2\cdot\sqrt{5}\right)} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}}-\sqrt{2}\cdot\left(5+\sqrt{5}\right)+\sqrt{5}\cdot\left(\frac{\sqrt{3+\sqrt{9-5}}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3-\sqrt{9-5}}}{\sqrt{2}}\right)}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\left(\frac{\sqrt{3+\sqrt{9-5}}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3-\sqrt{9-5}}}{\sqrt{2}}\right)-\left(9-2\cdot\sqrt{5}\right)} =$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\left(4\cdot\sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}}-5-3\cdot\sqrt{5}\right) = 0{,}673649+$$

9 Solo alla stesura di questo paragrafo mi accorgo della possibilità di semplificare ancora l'espressione dell'area del pentagono… Non riporto i calcoli nei paragrafi già scritti, pardon…

## 6.4 Triangolo inscritto nel quadrato

Come conseguenza del *postulato di monotonicità rotazionale*, ed in accordo alla tabella di Figura 5, occorre riferirsi al caso in cui il triangolo abbia un lato parallelo ad uno di quelli del quadrato, ed a quello in cui il triangolo stesso sia ruotato di **15°** gradi.

Nella figura che segue, a destra è mostrato il massimo triangolo inscrivibile relativamente al secondo caso, mentre a sinistra un triangolo *di uguali dimensioni* è piazzato nel quadrato nel migliore dei modi possibili.

Si osserva facilmente che nel primo caso le dimensioni del triangolo dovrebbero essere soggette ad una riduzione per consentire al triangolo stesso di restare inscritto, per cui la situazione che massimizza il rapporto fra le aree è quella di destra.

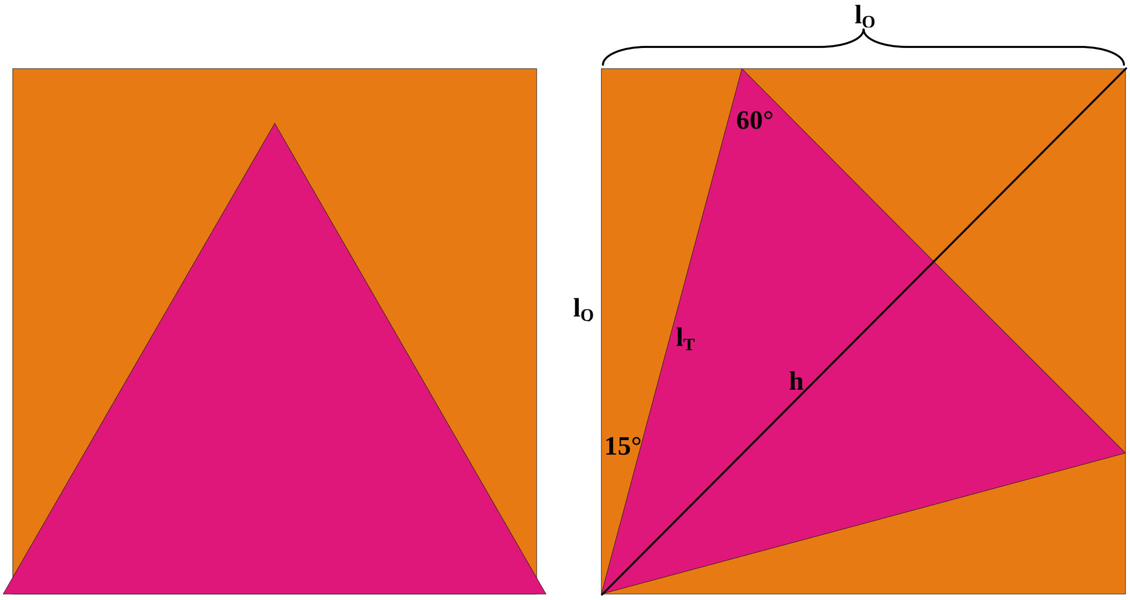



**Figura 22: Triangolo inscritto nel quadrato**

Assunto noto il lato $\mathbf{l_Q}$ del quadrato, occorre ricavare l'area del triangolo in funzione di $\mathbf{l_Q}$. Con riferimento alla parte destra della figura in alto, si ha:

$$l_T = \frac{l_Q}{\cos(15)}$$

$$h = l_T \cdot sen(60) = \frac{l_Q \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \cos(15)}$$

Quindi:

$$A_T = \frac{l_T \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l_Q}{\cos(15)} \cdot \frac{l_Q \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \cos(15)} = \frac{l_Q^{\ 2} \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot \cos^2(15)} = \frac{l_Q^{\ 2} \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{l_Q^{\ 2} \cdot \sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{l_Q^{\ 2} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right) \cdot \left(2-\sqrt{3}\right)} =$$

$$= l_Q^{\ 2} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{3} - 3\right)$$

Infine:

$$\lambda_{TQ} = \frac{A_T}{A_Q} = \frac{l_Q^{\ 2} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{3} - 3\right)}{l_Q^{\ 2}} = 2 \cdot \sqrt{3} - 3 = 0{,}464101 +$$

# 7 POLIGONI INSCRITTI NEL TRIANGOLO

## 7.1 Circonferenza inscritta nel triangolo

Assunto **r** noto, occorre ricavare l'area del triangolo in funzione di **r**; essendo il triangolo suddivisibile in 3 triangoli isosceli, tale area è il triplo di quella del triangolo **OPQ** mostrato nella figura che segue.

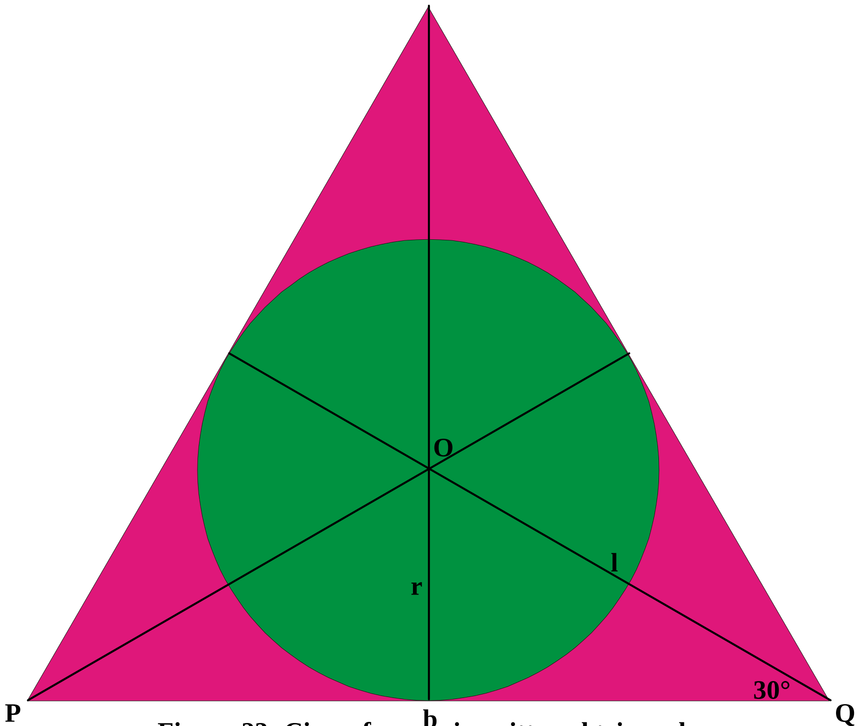



**Figura 23: Circonferenza inscritta nel triangolo**

Si ha allora:

$$A_T = 3 \cdot \frac{b \cdot r}{2} = 3 \cdot \frac{2 \cdot l \cdot \cos(30) \cdot r}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot r^2}{2 \cdot sen(30)} = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot r^2$$

Quindi:

$$\lambda_{CT} = \frac{A_C}{A_T} = \frac{\pi \cdot r^2}{3 \cdot \sqrt{3} \cdot r^2} = \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{9} = 0{,}604599 +$$

## 7.2 Esagono inscritto nel triangolo

Come conseguenza del *postulato di monotonicità rotazionale*, ed in accordo alla tabella di Figura 5, occorre riferirsi al caso in cui l'esagono abbia un lato parallelo ad uno di quelli del triangolo, ed a quello in cui l'esagono stesso sia ruotato di **30°** gradi.

Nella figura che segue, a sinistra è mostrato il massimo esagono inscrivibile relativamente al primo caso, mentre a destra un esagono *di uguali dimensioni*, ruotato di **30°** in senso orario, è piazzato nel triangolo nel migliore dei modi possibili.

Si osserva facilmente che nel secondo caso le dimensioni dell'esagono dovrebbero essere soggette ad una riduzione per consentire all'esagono stesso di restare inscritto, per cui la situazione che massimizza il rapporto fra le aree è quella di sinistra.

Da una rapida ispezione *ad occhio* dell'immagine a sinistra, si osserva che i tre triangoli *violetti* ai vertici della figura di sinistra qui sotto riportata sono identici ai 6 triangoli equilateri che compongono l'esagono.

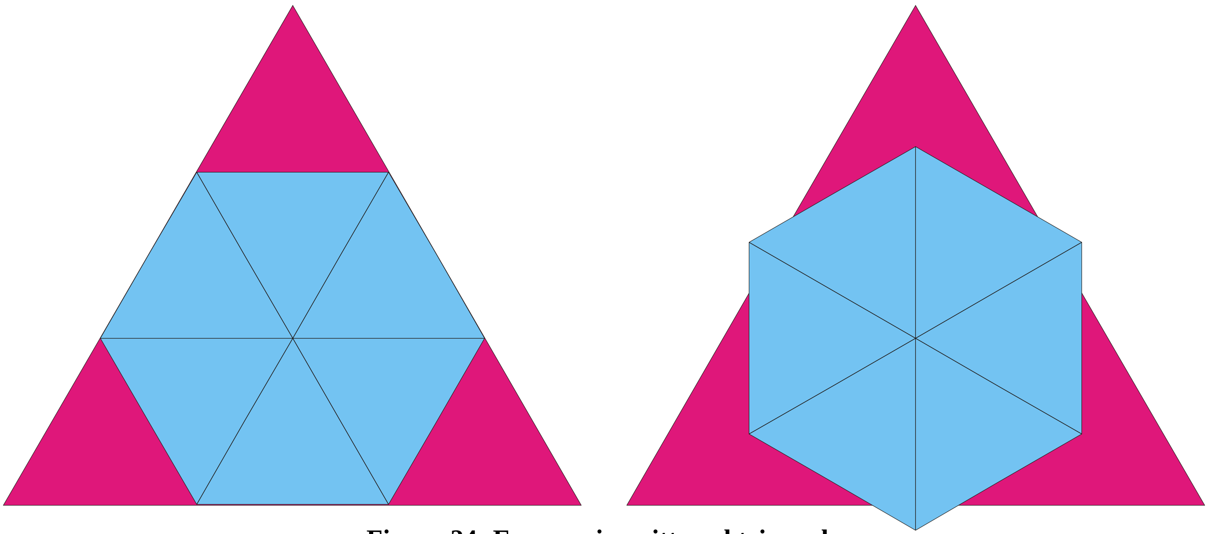


**Figura 24: Esagono inscritto nel triangolo**

Se si indica allora con $A_R$ l'area della superficie di uno qualsiasi dei triangoli violetti ed azzurri della figura qui in alto a sinistra, si ha:

$$\lambda_{ET} = \frac{A_E}{A_T} = \frac{6 \cdot A_R}{9 \cdot A_R} = \frac{2}{3} = 0{,}666666+$$

## 7.3 Pentagono inscritto nel triangolo

Come conseguenza del postulato di monotonicità rotazionale, ed in accordo alla tabella di Figura 5, occorre riferirsi al caso in cui il pentagono abbia un lato parallelo ad uno di quelli del triangolo, ed a quello in cui il pentagono stesso sia ruotato di **15°** gradi.

Nella figura che segue, a sinistra è mostrato il massimo pentagono inscrivibile relativamente al primo caso, mentre a destra un pentagono di uguali dimensioni, ruotato di 12° in senso antiorario, è piazzato nel triangolo nel migliore dei modi possibili.

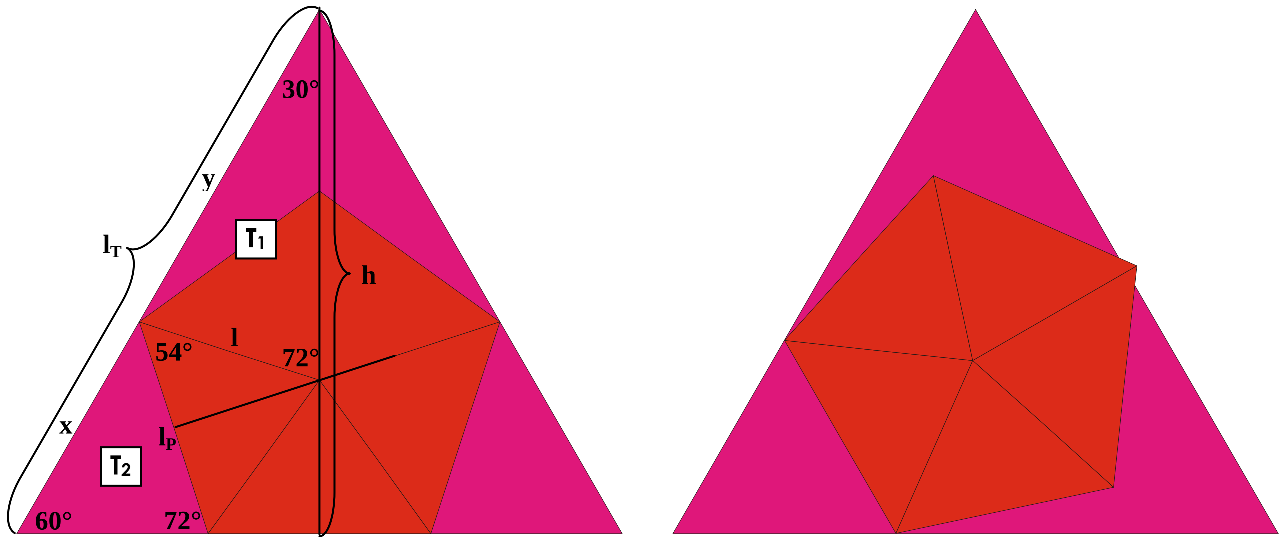



**Figura 25: Pentagono inscritto nel triangolo**

Si osserva facilmente che nel secondo caso le dimensioni del pentagono dovrebbero essere soggette ad una riduzione per consentire al pentagono stesso di restare inscritto, per cui la situazione che massimizza il rapporto fra le aree è quella di sinistra.

Come quasi sempre quando il pentagono è coinvolto, si tratta di uno dei più complessi fra i 20 casi da risolvere. Assunto noto il più esteso dei lati dei 5 triangoli isosceli in cui il pentagono è suddiviso, indicato con **l**, occorre ricavare le aree di triangolo e pentagono in funzione di **l**. Con riferimento alla parte sinistra della figura in alto, e cominciando con l'applicare il teorema dei seni al triangolo indicato con $\mathbf{T_1}$ in figura, si ha:

$$\frac{l}{sen(30)} = \frac{y}{sen(72)}$$

Quindi:

$$y = l \cdot \frac{sen(72)}{sen(30)} = 2 \cdot l \cdot \frac{\sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}}{4} = l \cdot \frac{\sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}}{2}$$

Si ha poi:

$$l_P = 2 \cdot l \cdot \cos(54) = 2 \cdot l \cdot \frac{\sqrt{10 - 2 \cdot \sqrt{5}}}{4} = l \cdot \frac{\sqrt{10 - 2 \cdot \sqrt{5}}}{2}$$

Applicando nuovamente il teorema dei seni, stavolta al triangolo indicato con $\mathbf{T_2}$ in figura, si ha:

$$\frac{l_P}{sen(60)} = \frac{x}{sen(72)}$$

Quindi:

$$x = l_P \cdot \frac{sen(72)}{sen(60)} = l \cdot \frac{\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \sqrt{100-20} = l \cdot \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{3}$$

Allora:

$$l_T = x + y = l \cdot \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{3} + l \cdot \frac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{2} = \frac{l}{6} \cdot \left(2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} + 3\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}\right)$$

E poi:

$$h = l_T \cdot sen(60) = \frac{l}{6} \cdot \left(2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} + 3\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l\cdot\sqrt{3}}{12} \cdot \left(2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} + 3\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}\right)$$

L'area del triangolo è quindi data da:

$$A_T = \frac{l_T \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{6} \cdot \left(2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} + 3\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}\right) \cdot \frac{l\cdot\sqrt{3}}{12} \cdot \left(2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} + 3\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}\right) =$$
$$= \frac{l^2\cdot\sqrt{3}}{144} \cdot \left(2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} + 3\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{l^2\cdot\sqrt{3}}{24} \cdot \left(25 + 3\cdot\sqrt{5} + 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}\right)$$

Ricordando la formula relativa all'area del pentagono già ottenuta nel paragrafo 5.4 si ha allora:

$$\lambda_{PT} = \frac{A_P}{A_T} = \frac{\frac{5\cdot l^2}{16} \cdot \left(\sqrt{5}+1\right) \cdot \sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}}{\frac{l^2\cdot\sqrt{3}}{24} \cdot \left(25 + 3\cdot\sqrt{5} + 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}\right)} =$$
$$= \frac{5\cdot\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}}{25 + 3\cdot\sqrt{5} + 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}} \cdot \frac{25 + 3\cdot\sqrt{5} - 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{25 + 3\cdot\sqrt{5} - 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{25\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}} + 3\cdot\left(\sqrt{5}+5\right)\cdot\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}} - 40\cdot\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)}{7+3\cdot\sqrt{5}} \cdot \frac{7-3\cdot\sqrt{5}}{7-3\cdot\sqrt{5}} =$$
$$= \sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\left[\sqrt{545-242\cdot\sqrt{5}} - 2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(5-2\cdot\sqrt{5}\right)\right] = 0{,}538540+$$

## 7.4 Quadrato inscritto nel triangolo

Come conseguenza del postulato di monotonicità rotazionale, ed in accordo alla tabella di Figura 5, occorre riferirsi al caso in cui il quadrato abbia un lato parallelo ad uno di quelli del triangolo, ed a quello in cui il quadrato stesso sia ruotato di **15°** gradi.

Nella figura che segue, a sinistra è mostrato il massimo quadrato inscrivibile relativamente al primo caso, mentre a destra un quadrato di uguali dimensioni, ruotato di **15°** in senso orario, è piazzato nel triangolo nel migliore dei modi possibili.

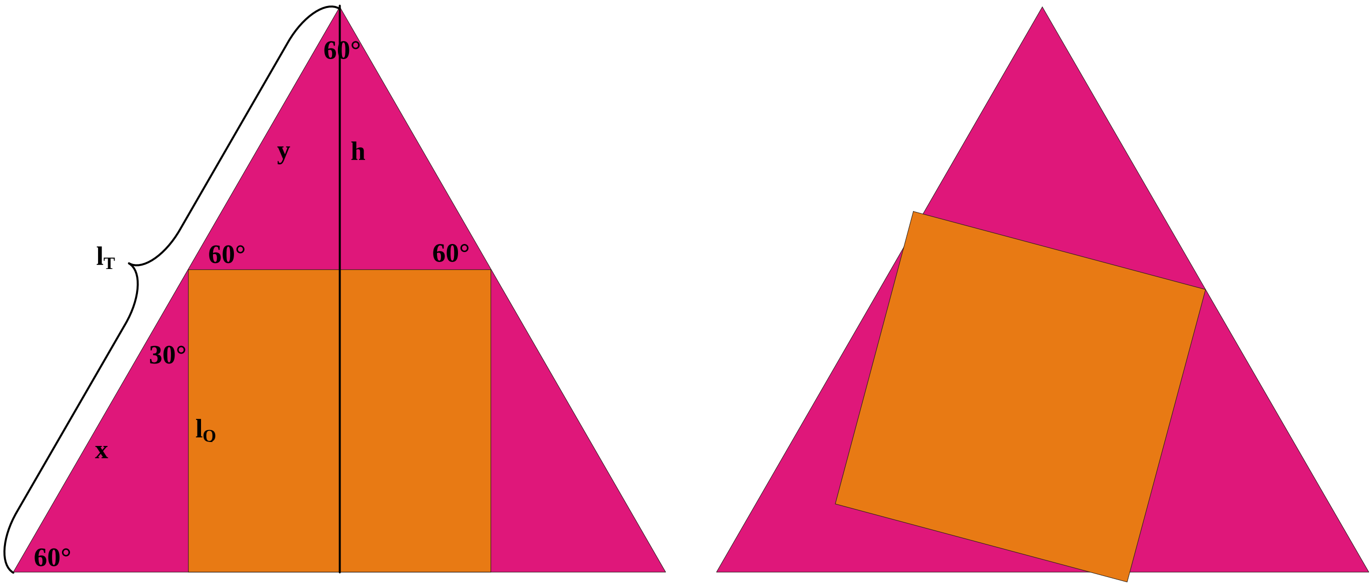



**Figura 26: Quadrato inscritto nel triangolo**

Si osserva facilmente che nel secondo caso le dimensioni del quadrato dovrebbero essere soggette ad una riduzione per consentire al quadrato stesso di restare inscritto, per cui la situazione che massimizza il rapporto fra le aree è quella di sinistra.

Assunto noto il lato $\mathbf{l_Q}$ del quadrato, occorre ricavare l'area del triangolo in funzione di $\mathbf{l_Q}$. Con riferimento alla parte sinistra della figura in alto, si ha:

$$l_T = x + y = \frac{l_Q}{sen(60)} + l_Q = l_Q \cdot \left( \frac{2}{\sqrt{3}} + 1 \right)$$

$$h = y \cdot sen(60) = l_Q \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Per cui:

$$A_T = \frac{l_T \cdot (h + l_Q)}{2} = \frac{1}{2} \cdot l_Q \cdot \left( \frac{2}{\sqrt{3}} + 1 \right) \cdot \left( l_Q \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + l_Q \right) = \frac{l_Q^{\,2}}{2} \cdot \left( \frac{2}{\sqrt{3}} + 1 \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) = l_Q^{\,2} \cdot \frac{7 \cdot \sqrt{3} + 12}{12}$$

Quindi:

$$\lambda_{QT} = \frac{A_Q}{A_T} = \frac{12 \cdot l_Q^{\,2}}{l_Q^{\,2} \cdot (7 \cdot \sqrt{3} + 12)} = \frac{12 \cdot (7 \cdot \sqrt{3} - 12)}{(7 \cdot \sqrt{3} + 12) \cdot (7 \cdot \sqrt{3} - 12)} = 4 \cdot (7 \cdot \sqrt{3} - 12) = 0{,}497422 +$$

# 8 RIEPILOGO DEI RISULTATI E CONCLUSIONI

Ed a questo punto è possibile riprendere la tabella di Figura 1, riempiendola con tutti i 20 valori trovati:

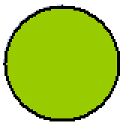
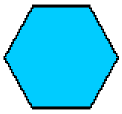
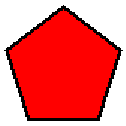
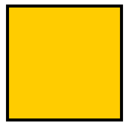
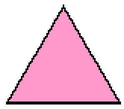
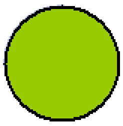
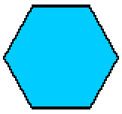
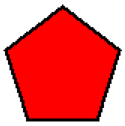
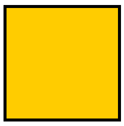
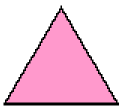
| Esterno → / Interno ↓ |  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|---|
|  | 1 | 0,906900 | 0,864806 | 0,785398 | 0,604600 |
|  | 0,826993 | 1 | 0,775558 | 0,696152 | 0,666667 |
|  | 0,756827 | 0,767210 | 1 | 0,673649 | 0,538541 |
|  | 0,636620 | 0,618802 | 0,662219 | 1 | 0,497423 |
|  | 0,413497 | 0,500000 | 0,412209 | 0,464102 | 1 |

**Figura 27: Riepilogo dei rapporti fra le aree dei poligoni**

Prima cosa, un'occhiata a questi rapporti; se li ordiniamo per valore, dal minore al maggiore, la *classifica* è la seguente:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | PT | 0,412209 | 11 | TE | 0,666667 |
| 2 | CT | 0,413497 | 12 | QP | 0,673649 |
| 3 | QT | 0,464102 | 13 | QE | 0,696152 |
| 4 | TQ | 0,497423 | 14 | CP | 0,756827 |
| 5 | ET | 0,500000 | 15 | EP | 0,767210 |
| 6 | TP | 0,538541 | 16 | PE | 0,775558 |
| 7 | TC | 0,604600 | 17 | QC | 0,785398 |
| 8 | EQ | 0,618802 | 18 | CE | 0,826993 |
| 9 | CQ | 0,636620 | 19 | PC | 0,864806 |
| 10 | PQ | 0,662219 | 20 | EC | 0,906900 |

**Figura 28: Classifica dei rapporti fra le aree dei poligoni**

I vari casi sono identificati da coppie di lettere, la prima relativa al poligono esterno, la seconda all'interno[10]. Quindi inserire triangoli in pentagoni pare fortemente svantaggioso (o vantaggioso?)[11], in particolar modo rispetto all'inserimento di circonferenze in esagoni.

La tabella che segue, invece, mostra i confronti fra i due casi possibili per ogni coppia di poligoni, invertendo cioè i ruoli di interno ed esterno. La massima distanza fra i due casi si riscontra per la coppia circonferenza-triangolo, la minima per quella esagono-pentagono.

[10] Si osservi che questa convenzione è *opposta* a quella utilizzata per i fattori $\lambda_{XY}$ calcolati nei precedenti capitoli.

[11] Naturalmente, bisognerebbe sapere cosa uno deve farsene, delle due figure…

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | CT | 0,413497 | TC | 0,604600 | 0,683918 |
| 2 | ET | 0,500000 | TE | 0,666667 | 0,750000 |
| 3 | PT | 0,412209 | TP | 0,538541 | 0,765418 |
| 4 | CQ | 0,636620 | QC | 0,785398 | 0,810569 |
| 5 | CP | 0,756827 | PC | 0,864806 | 0,875140 |
| 6 | EQ | 0,618802 | QE | 0,696152 | 0,888889 |
| 7 | CE | 0,826993 | EC | 0,906900 | 0,911891 |
| 8 | QT | 0,464102 | TQ | 0,497423 | 0,933013 |
| 9 | PQ | 0,662219 | QP | 0,673649 | 0,983033 |
| 10 | EP | 0,767210 | PE | 0,775558 | 0,989237 |

**Figura 29: Scambio di ruoli fra poligoni**

E passiamo al cuore del problema: la tabella che segue elenca le 120 configurazioni, per ordine crescente dell'area del più interno dei 5 poligoni (assumendo che il più esterno abbia area unitaria):

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | C | T | P | Q | E | 0,102659 |
| 2 | E | Q | P | T | C | 0,103889 |
| 3 | C | T | P | E | Q | 0,106870 |
| 4 | C | T | Q | P | E | 0,107460 |
| 5 | C | P | T | Q | E | 0,108030 |
| 6 | E | Q | C | T | P | 0,108226 |
| 7 | C | T | Q | E | P | 0,109854 |
| 8 | P | T | C | Q | E | 0,110451 |
| 9 | C | T | E | Q | P | 0,114912 |
| 10 | C | Q | P | T | E | 0,117853 |
| 11 | C | Q | E | T | P | 0,119336 |
| 12 | E | P | T | C | Q | 0,121725 |
| 13 | C | Q | T | P | E | 0,123403 |
| 14 | E | P | T | Q | C | 0,123551 |
| 15 | P | C | T | Q | E | 0,123829 |
| 16 | E | C | T | Q | P | 0,125658 |
| 17 | P | T | C | E | Q | 0,127538 |
| 18 | C | E | Q | T | P | 0,127904 |
| 19 | C | P | T | E | Q | 0,128699 |
| 20 | P | T | Q | E | C | 0,129451 |
| 21 | E | T | C | Q | P | 0,129644 |
| 22 | C | E | P | T | Q | 0,130095 |
| 23 | E | Q | T | C | P | 0,131410 |
| 24 | Q | E | P | T | C | 0,133108 |
| 25 | P | T | Q | C | E | 0,133179 |
| 26 | P | T | E | Q | C | 0,133557 |
| 27 | E | C | T | P | Q | 0,133737 |
| 28 | E | Q | T | P | C | 0,133753 |
| 29 | P | E | Q | T | C | 0,134663 |
| 30 | Q | C | T | P | E | 0,135642 |
| 31 | E | P | C | T | Q | 0,136468 |
| 32 | C | E | T | Q | P | 0,138558 |
| 33 | Q | P | T | C | E | 0,138842 |
| 34 | P | Q | E | T | C | 0,139362 |
| 35 | E | T | P | Q | C | 0,140049 |
| 36 | C | T | E | P | Q | 0,140054 |
| 37 | C | Q | E | P | T | 0,140157 |
| 38 | Q | E | C | T | P | 0,140590 |
| 39 | E | C | P | T | Q | 0,140734 |
| 40 | C | E | Q | P | T | 0,142104 |
| 41 | E | P | Q | T | C | 0,142560 |
| 42 | P | Q | C | T | E | 0,143375 |
| 43 | E | C | Q | T | P | 0,144302 |
| 44 | P | E | C | T | Q | 0,144668 |
| 45 | E | T | Q | P | C | 0,144893 |
| 46 | C | P | E | T | Q | 0,145984 |
| 47 | C | E | T | P | Q | 0,147466 |
| 48 | P | C | T | E | Q | 0,147520 |
| 49 | E | T | Q | C | P | 0,147837 |
| 50 | E | T | P | C | Q | 0,148248 |
| 51 | E | Q | P | C | T | 0,149065 |
| 52 | P | E | T | C | Q | 0,149256 |
| 53 | C | Q | T | E | P | 0,151118 |
| 54 | P | E | T | Q | C | 0,151495 |
| 55 | E | T | C | P | Q | 0,151508 |
| 56 | E | Q | C | P | T | 0,151620 |
| 57 | P | Q | T | C | E | 0,153669 |
| 58 | C | P | Q | T | E | 0,155067 |
| 59 | P | E | Q | C | T | 0,155858 |
| 60 | Q | P | E | T | C | 0,157938 |
| 61 | P | T | E | C | Q | 0,158659 |
| 62 | Q | E | T | C | P | 0,159272 |
| 63 | E | C | Q | P | T | 0,160321 |
| 64 | Q | P | C | T | E | 0,160596 |
| 65 | Q | E | T | P | C | 0,162111 |
| 66 | Q | C | P | T | E | 0,163347 |
| 67 | Q | T | C | P | E | 0,164699 |
| 68 | E | P | Q | C | T | 0,164998 |
| 69 | Q | C | T | E | P | 0,166106 |
| 70 | C | Q | P | E | T | 0,166302 |
| 71 | Q | P | T | E | C | 0,167888 |
| 72 | C | P | E | Q | T | 0,168568 |
| 73 | P | C | Q | T | E | 0,170342 |
| 74 | P | Q | E | C | T | 0,172877 |
| 75 | C | P | Q | E | T | 0,174451 |
| 76 | Q | C | E | T | P | 0,174896 |
| 77 | Q | T | P | E | C | 0,175794 |
| 78 | P | C | E | T | Q | 0,177876 |
| 79 | Q | T | C | E | P | 0,178032 |
| 80 | Q | T | P | C | E | 0,178753 |
| 81 | P | Q | T | E | C | 0,185816 |
| 82 | Q | E | P | C | T | 0,190990 |
| 83 | P | C | Q | E | T | 0,191634 |
| 84 | C | E | P | Q | T | 0,194999 |
| 85 | Q | P | E | C | T | 0,195920 |
| 86 | E | P | C | Q | T | 0,196032 |
| 87 | Q | E | C | P | T | 0,196960 |
| 88 | T | C | Q | P | E | 0,201093 |
| 89 | T | P | E | Q | C | 0,202990 |
| 90 | Q | T | E | P | C | 0,205284 |
| 91 | P | C | E | Q | T | 0,205393 |
| 92 | Q | C | E | P | T | 0,205411 |
| 93 | T | C | Q | E | P | 0,205573 |
| 94 | T | P | C | Q | E | 0,206406 |
| 95 | P | E | C | Q | T | 0,207810 |
| 96 | T | C | E | Q | P | 0,208428 |
| 97 | E | C | P | Q | T | 0,210946 |
| 98 | T | C | P | Q | E | 0,210946 |
| 99 | Q | T | E | C | P | 0,212362 |
| 100 | P | Q | C | E | T | 0,215062 |
| 101 | T | C | P | E | Q | 0,219599 |
| 102 | T | P | Q | E | C | 0,225156 |
| 103 | T | Q | C | P | E | 0,229312 |
| 104 | T | Q | E | P | C | 0,229754 |
| 105 | Q | C | P | E | T | 0,230500 |
| 106 | T | P | Q | C | E | 0,231639 |
| 107 | T | Q | P | E | C | 0,235685 |
| 108 | T | Q | E | C | P | 0,237676 |
| 109 | T | P | C | E | Q | 0,238337 |
| 110 | T | Q | P | C | E | 0,239652 |
| 111 | T | E | Q | P | C | 0,240333 |
| 112 | Q | P | C | E | T | 0,240893 |
| 113 | T | P | E | C | Q | 0,241142 |
| 114 | T | E | Q | C | P | 0,245215 |
| 115 | T | Q | C | E | P | 0,247874 |
| 116 | T | C | E | P | Q | 0,254031 |
| 117 | T | E | C | Q | P | 0,259288 |
| 118 | T | E | P | Q | C | 0,266020 |
| 119 | T | E | P | C | Q | 0,281593 |
| 120 | T | E | C | P | Q | 0,303017 |

**Figura 30: La classifica delle 120 configurazioni**

Le due configurazioni base richieste dal problema (**CTQPE** e **CEPQT**) sono indicate in arancio; se il criterio di classificazione premia le soluzioni ad area più piccola, una delle due base si piazza ottima quarta, con un posto per i preliminari di Champions League, l'altra consegue un più che anonimo 84° posto… Fra tutte le 120 configurazioni, l'ultima elencata consegue un'area per il poligono interno circa tripla rispetto alla prima.

Le figure qui di seguito riportate mostrano le due configurazioni estreme:

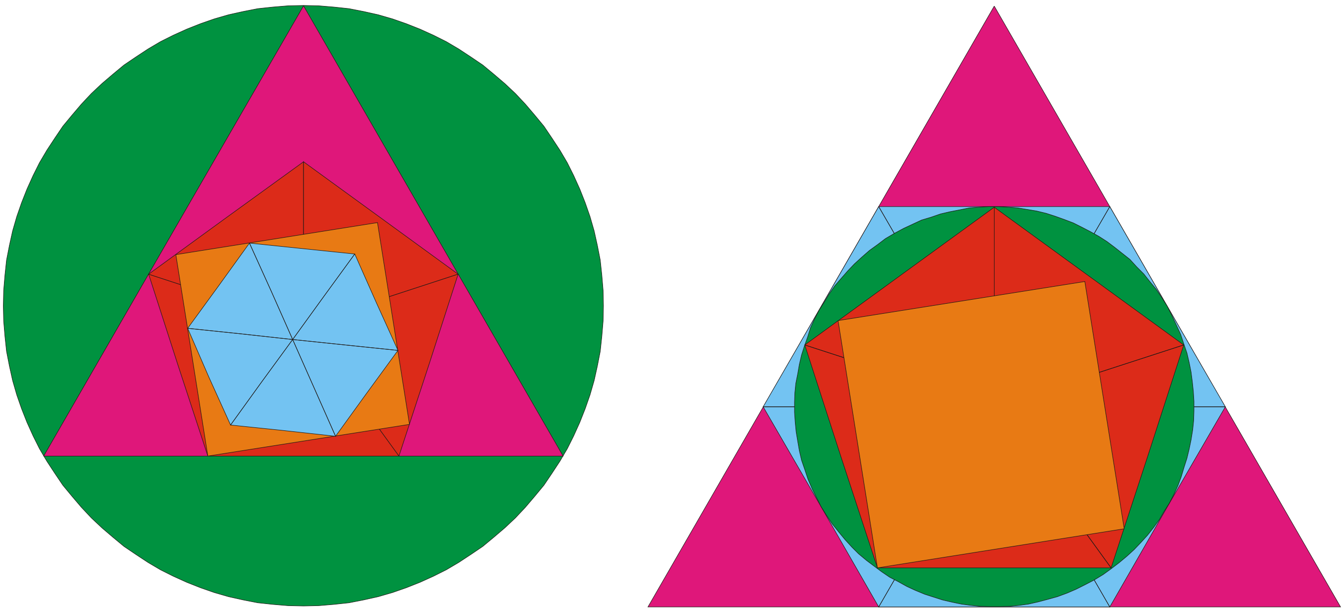


**Figura 31: CTPQE e TECPQ, con il minore ed il maggiore dei poligoni più interni**

L'unica similitudine fra i due casi è costituita dal fatto che il quadrato sia inscritto nel pentagono.

Cosa succede adesso se invece di voler minimizzare (o massimizzare) l'area del più interno dei poligoni si volesse estremizzare la *somma* delle aree dei 5 poligoni?[12] La *classifica* sarebbe stavolta la seguente:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | E | Q | P | T | C | 3,309260 |
| 2 | C | T | P | Q | E | 3,310409 |
| 3 | C | T | P | E | Q | 3,346398 |
| 4 | P | T | C | Q | E | 3,349581 |
| 5 | E | Q | C | T | P | 3,356238 |
| 6 | C | T | Q | P | E | 3,360126 |
| 7 | C | P | T | Q | E | 3,362611 |
| 8 | C | Q | E | T | P | 3,371313 |
| 9 | C | T | E | Q | P | 3,372615 |
| 10 | C | T | Q | E | P | 3,374282 |
| 11 | C | Q | P | T | E | 3,389145 |
| 12 | C | Q | T | P | E | 3,414820 |
| 13 | E | T | C | Q | P | 3,414869 |
| 14 | E | P | T | C | Q | 3,420639 |
| 15 | E | Q | T | C | P | 3,444330 |
| 16 | C | E | Q | T | P | 3,448438 |
| 17 | C | P | T | E | Q | 3,454504 |
| 18 | E | P | T | Q | C | 3,462240 |
| 19 | P | T | C | E | Q | 3,462604 |
| 20 | P | Q | E | T | C | 3,462972 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | P | E | Q | T | C | 3,463061 |
| 22 | P | C | T | Q | E | 3,471878 |
| 23 | Q | E | P | T | C | 3,480171 |
| 24 | P | T | E | Q | C | 3,483076 |
| 25 | E | T | P | Q | C | 3,486158 |
| 26 | E | Q | T | P | C | 3,486251 |
| 27 | E | C | T | Q | P | 3,491468 |
| 28 | C | E | T | Q | P | 3,498065 |
| 29 | E | P | Q | T | C | 3,498131 |
| 30 | C | E | P | T | Q | 3,503835 |
| 31 | C | T | E | P | Q | 3,509593 |
| 32 | C | Q | E | P | T | 3,512191 |
| 33 | P | T | Q | E | C | 3,512684 |
| 34 | Q | C | T | P | E | 3,512994 |
| 35 | P | E | T | C | Q | 3,516777 |
| 36 | Q | P | T | C | E | 3,517451 |
| 37 | E | C | T | P | Q | 3,521157 |
| 38 | P | T | Q | C | E | 3,522023 |
| 39 | E | T | C | P | Q | 3,523646 |
| 40 | C | E | T | P | Q | 3,527754 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 41 | P | Q | C | T | E | 3,527781 |
| 42 | C | P | E | T | Q | 3,529807 |
| 43 | C | E | Q | P | T | 3,531654 |
| 44 | C | Q | T | E | P | 3,534598 |
| 45 | E | T | Q | P | C | 3,535878 |
| 46 | E | T | Q | C | P | 3,539648 |
| 47 | E | T | P | C | Q | 3,539967 |
| 48 | E | P | C | T | Q | 3,542936 |
| 49 | E | C | Q | T | P | 3,546162 |
| 50 | C | P | Q | T | E | 3,549814 |
| 51 | Q | P | E | T | C | 3,553807 |
| 52 | Q | E | C | T | P | 3,555090 |
| 53 | Q | E | T | C | P | 3,557579 |
| 54 | P | Q | T | C | E | 3,557914 |
| 55 | P | E | T | Q | C | 3,558379 |
| 56 | P | C | T | E | Q | 3,563772 |
| 57 | E | Q | P | C | T | 3,570754 |
| 58 | E | Q | C | P | T | 3,573236 |
| 59 | E | C | P | T | Q | 3,573358 |
| 60 | C | Q | P | E | T | 3,585827 |

**Figura 32: Le 120 configurazioni, ordinate per somma delle aree crescente (prima parte)**

12 Ad esempio, volendo costruire un modellino dei 5 poligoni, con questi ultimi realizzati per mezzo di lamine in metallo prezioso sovrapposte, sarebbe utile minimizzare l'area totale, se il modellino dovessimo regalarlo… Se invece ci venisse commissionato, e si concordasse col cliente un pagamento a peso, sarebbe conveniente massimizzarla…

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 61 | P | E | Q | C | T | 3,593255 |
| 62 | P | E | C | T | Q | 3,593377 |
| 63 | Q | E | T | P | C | 3,599500 |
| 64 | Q | T | C | P | E | 3,601086 |
| 65 | C | P | Q | E | T | 3,615199 |
| 66 | C | P | E | Q | T | 3,615288 |
| 67 | Q | P | C | T | E | 3,618619 |
| 68 | Q | C | P | T | E | 3,621100 |
| 69 | P | T | E | C | Q | 3,622395 |
| 70 | E | P | Q | C | T | 3,628324 |
| 71 | E | C | Q | P | T | 3,629378 |
| 72 | P | C | Q | T | E | 3,632194 |
| 73 | Q | C | T | E | P | 3,632772 |
| 74 | Q | C | E | T | P | 3,650932 |
| 75 | Q | P | T | E | C | 3,659425 |
| 76 | Q | T | C | E | P | 3,662905 |
| 77 | P | Q | E | C | T | 3,678768 |
| 78 | Q | T | P | E | C | 3,685100 |
| 79 | P | C | E | T | Q | 3,689222 |
| 80 | T | C | Q | P | E | 3,690427 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 81 | Q | T | P | C | E | 3,694442 |
| 82 | P | C | Q | E | T | 3,697578 |
| 83 | P | Q | T | E | C | 3,699887 |
| 84 | T | C | Q | E | P | 3,704582 |
| 85 | T | P | E | Q | C | 3,718299 |
| 86 | T | C | P | Q | E | 3,719798 |
| 87 | C | E | P | Q | T | 3,720525 |
| 88 | T | C | E | Q | P | 3,724045 |
| 89 | E | P | C | Q | T | 3,732738 |
| 90 | T | P | C | Q | E | 3,736119 |
| 91 | Q | E | P | C | T | 3,741666 |
| 92 | T | C | P | E | Q | 3,755787 |
| 93 | Q | T | E | P | C | 3,762785 |
| 94 | Q | P | E | C | T | 3,769603 |
| 95 | Q | E | C | P | T | 3,772088 |
| 96 | P | Q | C | E | T | 3,774611 |
| 97 | P | C | E | Q | T | 3,774703 |
| 98 | P | E | C | Q | T | 3,783179 |
| 99 | E | C | P | Q | T | 3,790047 |
| 100 | Q | C | E | P | T | 3,791811 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 101 | Q | T | E | C | P | 3,794495 |
| 102 | T | P | Q | E | C | 3,803812 |
| 103 | T | P | Q | C | E | 3,813152 |
| 104 | T | Q | C | P | E | 3,815205 |
| 105 | Q | C | P | E | T | 3,817783 |
| 106 | T | E | Q | P | C | 3,823924 |
| 107 | T | Q | E | P | C | 3,825591 |
| 108 | T | E | Q | C | P | 3,827694 |
| 109 | T | P | C | E | Q | 3,849143 |
| 110 | T | Q | P | E | C | 3,853529 |
| 111 | T | Q | E | C | P | 3,857301 |
| 112 | T | P | E | C | Q | 3,857618 |
| 113 | T | C | E | P | Q | 3,861023 |
| 114 | T | Q | P | C | E | 3,862871 |
| 115 | Q | P | C | E | T | 3,865449 |
| 116 | T | Q | C | E | P | 3,877024 |
| 117 | T | E | P | Q | C | 3,881494 |
| 118 | T | E | C | Q | P | 3,883835 |
| 119 | T | E | P | C | Q | 3,935303 |
| 120 | T | E | C | P | Q | 3,992612 |

**Figura 33: Le 120 configurazioni, ordinate per somma delle aree crescente (seconda parte)**

Stavolta la migliore (o peggiore) delle due configurazioni base scivola dal 4° al 6° posto (e deve accontentarsi della Coppa UEFA…); l'altra permane nel suo stato di anonimato, perdendo altre 3 posizioni (o guadagnandole…) fino all'87° posto.

L'ultima configurazione elencata, **TECPQ**, è la stessa che massimizzava anche l'area del poligono più interno, mentre dal capo opposto della *classifica* le prime due configurazioni (**CTPQE** ed **EQPTC**) si scambiano di posto, mentre la terza (**CTPEQ**) rimane la stessa.

In genere gli spostamenti in *classifica* rispetto al criterio precedente sono minimi (più del 60% delle configurazioni si sposta di 4 posizioni o meno), con qualche eccezione; lo spostamento record (20) è per la configurazione qui sotto illustrata, che passa dalla 39ª alla 59ª posizione.

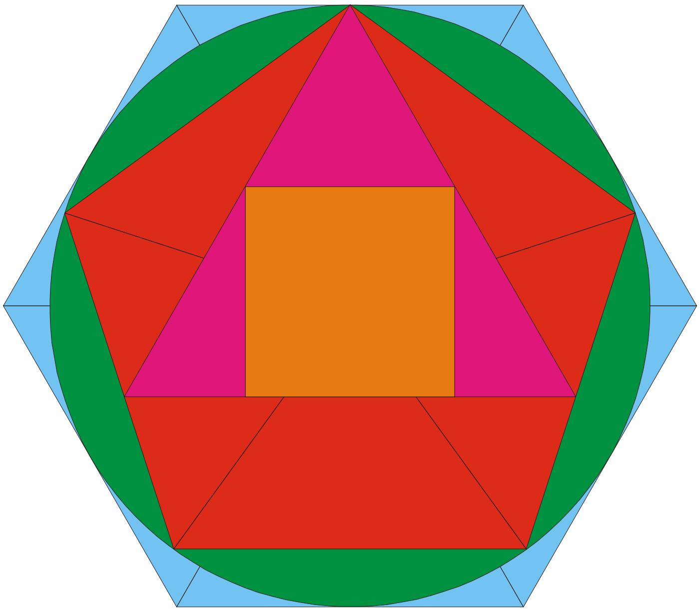


**Figura 34: ECPTQ, la configurazione più ondivaga**

Infine, tanto per allungare ancora un po' di più il brodo: qual'è la configurazione più banale, la più anonima? Essa è quella della figura che segue, che si piazza rispettivamente 59ª e 61ª nelle due classifiche. Nessuna riesce a far di meglio, in quanto a mediocrità…

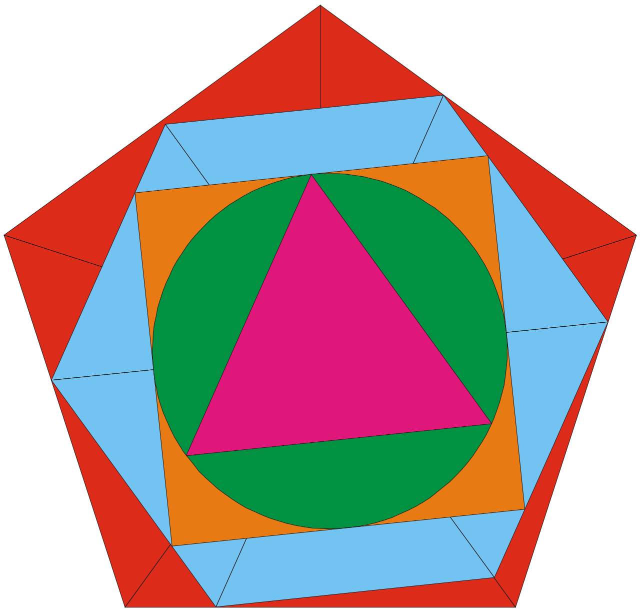


**Figura 35: PEQCT, la configurazione più anonima**

## 8.1 Variazioni sul tema

Per le future notti insonni, in cui non si sa cosa fare, l'alba è lontana e il tempo che scorre è duro da colmare, ci sarebbero alcuni problemini collaterali da affrontare… Prendiamo ad esempio la configurazione **TECPQ**, quello con la massima area del poligono più interno:

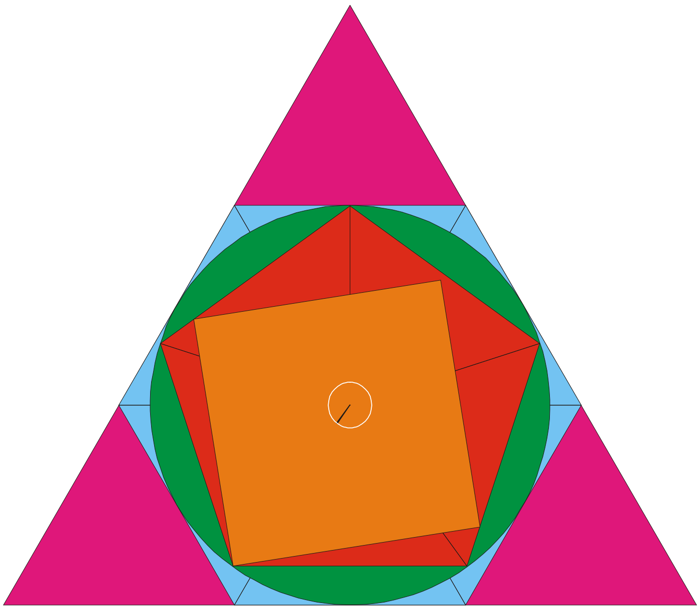


**Figura 36: TECPQ; distanza fra i centri dei poligoni più esterno e più interno**

Il segmento nero è la congiungente i centri del quadrato e del triangolo, cioè dei poligoni più interno e più esterno. Il cerchietto bianco mostra cosa accade al centro del quadrato quando si fanno ruotare di 360° la circonferenza e solidalmente tutti i poligoni ad essa interni. Sempre a parità dell'area del poligono più esterno, qual è la massima estensione che il segmento nero può raggiungere nelle 120 configurazioni? E la minima? La distanza può mai essere nulla?

Si noti che questo è un caso relativamente semplice: anche facendo ruotare *a scatti* di 72° per 4 volte il quadrato all'interno del pentagono, la posizione del centro del quadrato verrà sempre a trovarsi sulla circonferenza bianca in figura. Triangolo, esagono e circonferenza sono poi concentrici, per cui le rotazioni della circonferenza nell'esagono e gli *scatti* di 60° dell'esagono nel triangolo non producono cambiamenti significativi.

Prendiamo invece un altro esempio: la configurazione **PECTQ**, apparentemente anonima in quanto rispettivamente 62ª e 44ª nelle due *classifiche* viste in precedenza. Di nuovo il segmento nero rappresenta la distanza fra i centri dei poligoni più interno e più esterno, ed il cerchietto bianco il percorso del centro del quadrato al ruotare della circonferenza e dei poligoni ad esso interni.

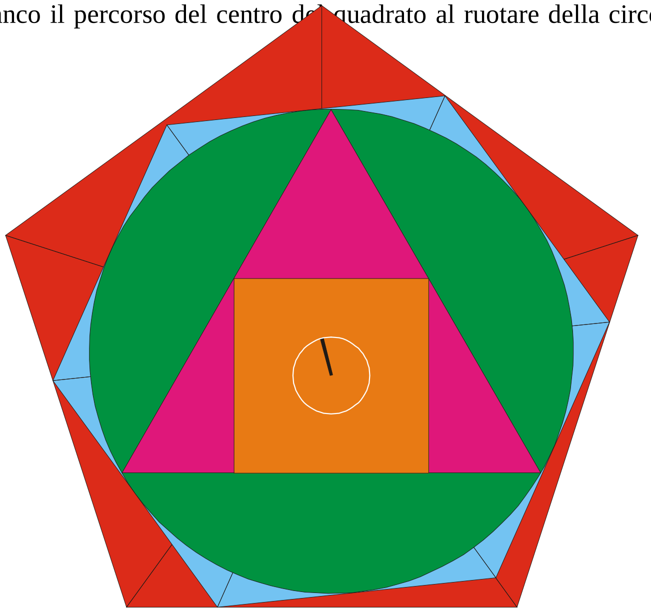


**Figura 37: PECTQ: evoluzione del centro del quadrato**

Se però stavolta facciamo ruotare di 120° il quadrato nel triangolo, due volte, e consideriamo tutte i tre possibili percorsi del centro del quadrato al ruotare della circonferenza (e dei poligoni in essa contenuti), ecco che spunta fuori una terna distinta di cerchietti che ricorda gli anelli borromei:

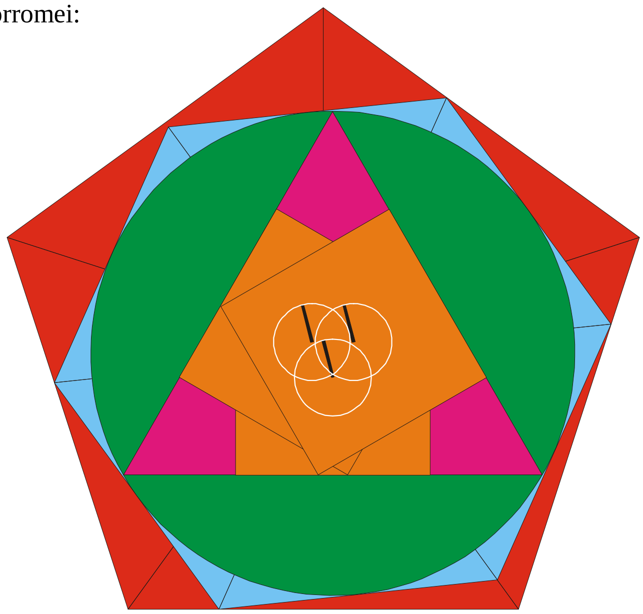


**Figura 38: PECTQ: evoluzione multipla del centro del quadrato**

Ed è ancora nulla… Poiché l'esagono è eccentrico rispetto al pentagono e può essere piazzato nel pentagono stesso in 5 diversi modi, la terna di cerchietti risulta anch'essa quintuplicata, senza sovrapposizioni!

In generale, se si mantiene fisso il poligono più esterno, facendo assumere a quelli interni tutte le possibili posizioni e facendo poi ruotare circonferenza e poligoni ad essa inscritti, si genera un insieme di cerchietti talora sovrapposti, talora intersecati (o forse anche disgiunti?), che delimitano una certa area. Qual è il valor massimo di tale area al variare delle 120 configurazioni? Ed il minimo?

Penso possa bastare, per questo mese… Saluti,

BR1

PS: non pensate minimamente che io conosca le risposte…

# 9 APPENDICE: FORMULARIO

## 9.1 Seni e coseni di angoli notevoli

La tabella che segue riporta formule di uso corrente nel corso del testo, che vengono assunte senza dimostrazione.

| **Angolo** | **Seno** | **Coseno** |
|---|---|---|
| 0° | $0$ | $1$ |
| 15° | $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)/4$ | $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)/4$ |
| 18° | $\left(\sqrt{5}-1\right)/4$ | $\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}/4$ |
| 30° | $1/2$ | $\sqrt{3}/2$ |
| 36° | $\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}/4$ | $\left(\sqrt{5}+1\right)/4$ |
| 45° | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ |
| 60° | $\sqrt{3}/2$ | $1/2$ |

## 9.2 Altri seni e coseni di angoli riconducibili ai precedenti

Formule ricavabili in base a quelle del precedente e successivo paragrafo.

- $sen(108) = sen(90+18) = \cos(18)$
- $sen(54) = sen(90-36) = \cos(36)$
- $\cos(54) = \cos(90-36) = sen(36)$
- $tg(54) = \dfrac{sen(54)}{\cos(54)} = \dfrac{sen(90-36)}{\cos(90-36)} = \dfrac{\cos(36)}{sen(36)} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \dfrac{4}{\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}}$
- $sen(78) = sen(60+18) = sen(60)\cdot\cos(18) + \cos(60)\cdot sen(18) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{4} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{5}-1}{4} =$
  $= \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1}{8}$
- $sen(72) = sen(90-18) = \cos(18)$
- $sen(48) = sen(30+18) = sen(30)\cdot\cos(18) + \cos(30)\cdot sen(18) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{5}-1}{4} =$
  $= \dfrac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}+\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{8}$
- $sen(63) = sen(90-27) = \cos(27) = \cos\left(\dfrac{54}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos(54)}{2}} = \pm\sqrt{\dfrac{1+sen(36)}{2}} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}}{4}}{2}} =$
  $= \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{4+\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{\dfrac{4+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}} + \sqrt{\dfrac{4-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}}\right) =$
  $= \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{\dfrac{4+\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{\dfrac{5}{2}}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)}{2}} + \sqrt{\dfrac{4-\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{\dfrac{5}{2}}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)}{2}}\right) = \pm\dfrac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right) =$
  $= \pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}\cdot\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1\right)$

- $$sen(27) = sen\left(\frac{54}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(54)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-sen(36)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}}{4}}{2}} =$$
$$= \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{4-\sqrt{10-2\cdot\sqrt{5}}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{\frac{4+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}} - \sqrt{\frac{4-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}}\right) =$$
$$= \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{\frac{4+\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}{2}} - \sqrt{\frac{4-\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}{2}}\right) == \pm\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$$
$$\pm\frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right)$$
- $$sen(48) = sen(30+18) = sen(30)\cdot\cos(18)+\cos(30)\cdot sen(18) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4} =$$
$$= \frac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}+\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{8}$$
- $sen(120) = sen(90+30) = \cos(30)$

## 9.3 Altre formule trigonometriche e non, utilizzate qui

- $sen(90 \pm \alpha) = \cos(\alpha)$
- $\cos(90 \pm \alpha) = \mp sen(\alpha)$
- $sen(2 \cdot \alpha) = 2 \cdot sen(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$
- $sen(\alpha \pm \beta) = sen(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \cdot sen(\beta)$
- $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$
- $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$
- $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$
- **Teorema dei seni**: dato un triangolo dotato di lati **a**, **b** e **c**, e di angoli opposti ordinatamente a tali lati rispettivamente pari ad **α**, **β** e **γ**, si ha:

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\gamma)}$$