

MI ASCOLTI. AVVISI GLI INFINITI OSPITI DELL'ALBERGO E CHIEDA LORO DI PASSARE, OGNUNO, NELLA CAMERA IMMEDIATAMENTE SUCCESSIVA ALLA PROPRIA.



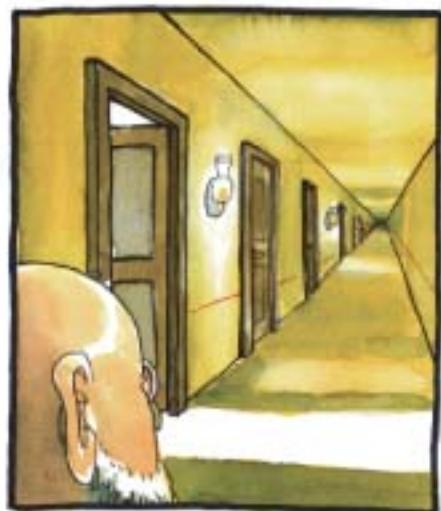
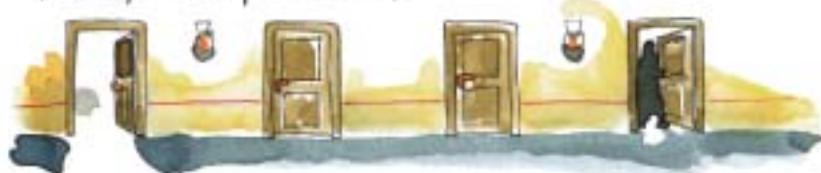
COSICCHE' CHI E' NELLA PRIMA PASSI NELLA SECONDA.

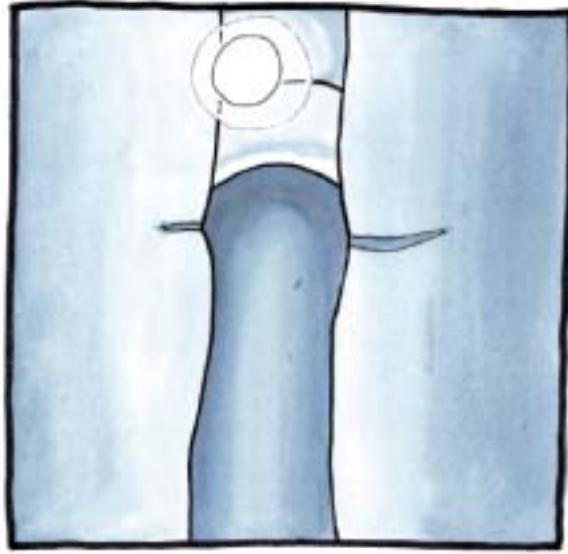


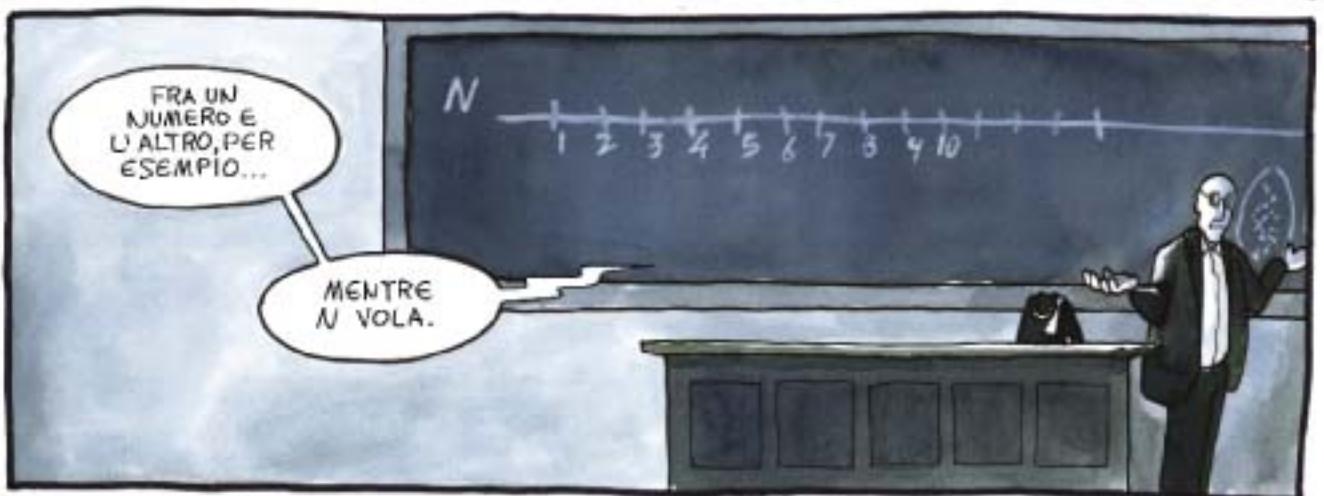
CHI E' NELLA SECONDA SI SPOSTI NELLA TERZA.  
CHI E' NELLA TERZA, NELLA QUARTA E COSI' VIA.



AFFINCHE' LA PRIMA CAMERA RIMANGA LIBERA E IO NE POSSA, ALFINE, DISPORRE.







C'E' UNA FRATTURA CHE SEPARA  
L'UNO DAL DUE.



2

3

4



UN SALTO OBBLIGATO  
NEL CONTEGGIO.

1

2

3

4

PRIMA L'UNO. SALTO. POI  
IL DUE. SALTO. TRE. SALTO.

1

2

3

4



1

2

3

4



1

2

3

4

1

2

3

4

5

6

7

8

NON UNA TRASFORMAZIONE  
DELL'UNO NEL DUE.  
MA L'UNO.

...  
E IL DUE.  
UN BALZO PREPOTENTE  
DALL'ODORE NUMINOSO.

...  
E UN ABISSO.

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

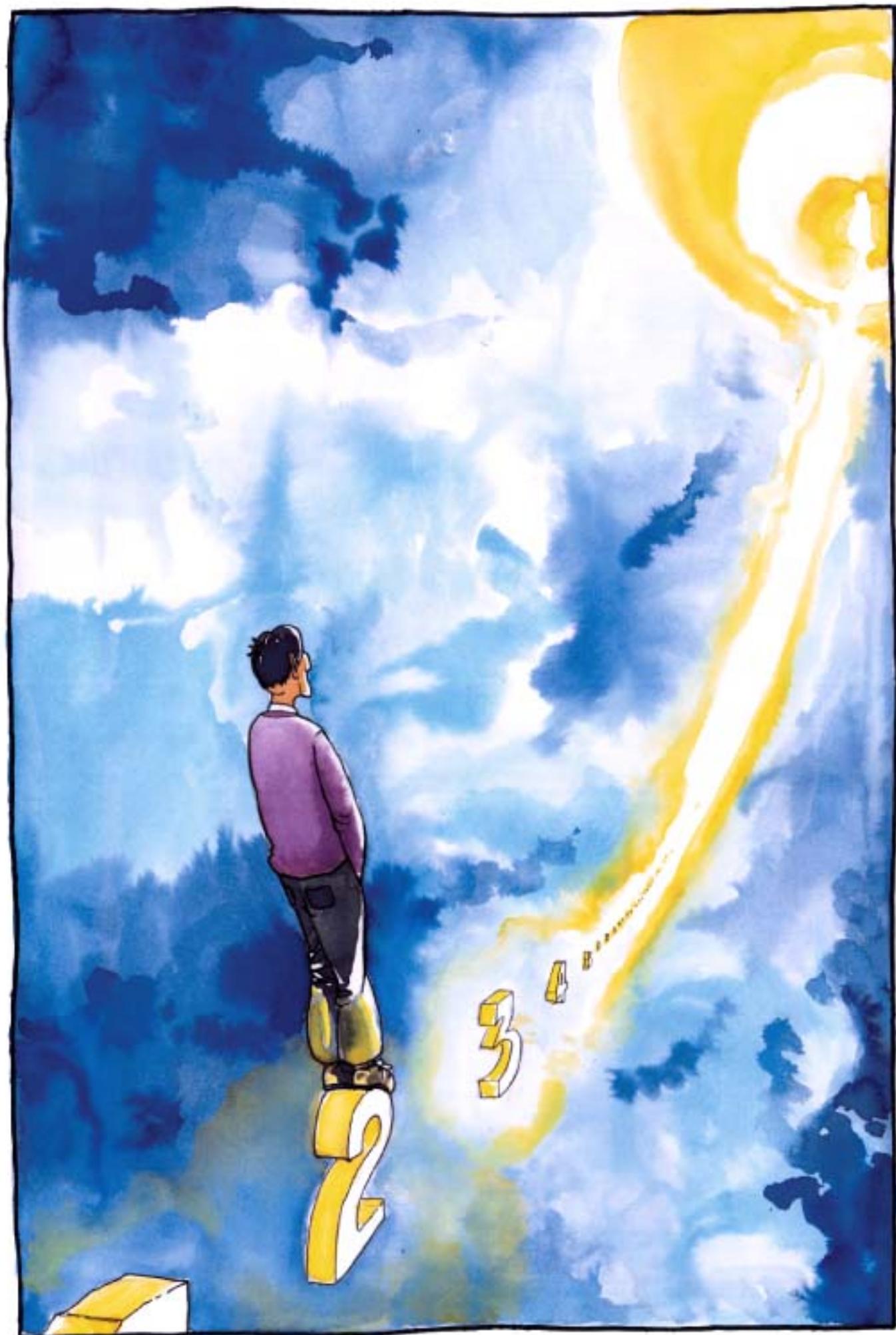
14

15

16

17

18





COME SAPPIAMO, ESISTONO MOLTE FAMIGLIE DI NUMERI.

TAC  
FSSSH

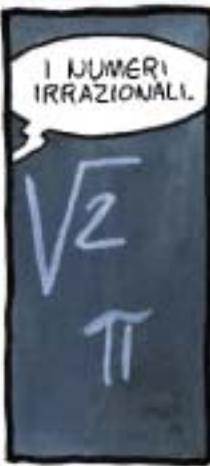
MA COSA ACCADE IN QUELL' ABISSO?



I NUMERI NATURALI E I NUMERI RAZIONALI.



INFINITI GLI UNI E GLI ALTRI.



I NUMERI IRRAZIONALI.



NUMERI CURIOSI DALLE INFINITE CIFRE DOPO LA VIRGOLA.

TAC  
TAC



A NOI INTERESSA CAPIRE COSA SUCCEDDE FRA UNO E DUE.

E TIREREMO IN BALLO I NUMERI COSIDDETTI REALI.



ECCONE DEGLI ESEMPI, SECONDO LA RAPPRESENTAZIONE DECIMALE.



FU GEORGE CANTOR A DISCHIUDERE LE PORTE DI UN NUOVO ORDINE DI INFINITI.



E LO FECE PROPRIO LAVORANDO SU QUESTO PROBLEMA.

QUANTI SONO I NUMERI REALI FRA UNO E DUE?

INFINITI.

ECCO QUI A PORTATA DI MANO  
UNA SEMPLICISSIMA DIMOSTRAZIONE.  
CANTOR NOTO' CHE ERA SEMPRE  
POSSIBILE SCRIVERE UN NUMERO R,  
COMPRESO FRA UNO E DUE, CHE NON  
FOSSE NE' IL PRIMO, NE' IL SECONDO,  
NE' IL TERZO NUMERO FRA  
QUELLI DI UN DATO  
ELENCO.

↓  
1,485  
1,19191  
1,871137  
1,3

SAREBBE BASTATO SCRIVERE  
UN NUMERO LA CUI PRIMA CIFRA  
DECIMALE NON FOSSE UGUALE  
ALLA PRIMA CIFRA DECIMALE DEL  
PRIMO NUMERO IN ELENCO. E LA  
SECONDA CIFRA DECIMALE NON  
FOSSE UGUALE ALLA SECONDA  
CIFRA DECIMALE DEL SECONDO  
NUMERO IN ELENCO.

E LA TERZA  
CIFRA DECIMALE NON  
FOSSE UGUALE ALLA TERZA  
CIFRA DECIMALE DEL TERZO  
NUMERO IN ELENCO. E COSI'  
VIA, FINO A ESAURIRE  
TUTTI I NUMERI  
DELL'ELENCO.

↓  
④85  
1⑨191  
1,871137  
1,3

↓  
④85  
1⑨191  
87①137  
300②00

LE DIAGONALI DI CANTOR.

④  
⑨  
①  
②  
,5021~



④

INDIVIDUO  
LA PRIMA CIFRA  
DECIMALE DEL PRIMO  
NUMERO IN ELENCO  
E LA CAMBIO.

AGGIUNGO UNO  
PER VARIARLA, AD  
ESEMPIO.

,5

④  
⑨

STESSO  
PROCEDIMENTO  
PER LA SECONDA  
CIFRA DEL  
SECONDO  
NUMERO.

,50

④  
⑨  
①

PER LA TERZA.

,502

④  
⑨  
①  
②

E PER LA  
QUARTA.

,5021~

↓  
485

IN QUESTO MODO SONO SICURO DI SCRIVERE UN NUMERO CERTAMENTE DIVERSO DAL PRIMO.

5021~

↓  
485  
19191

DAL SECONDO.

5021~

↓  
105  
871137

DAL TERZO.

5021~

↓  
871137  
300000  
5021~

DAL QUARTO E VIA DI SEGUITO.

↓  
485  
19191  
871137  
300000  
5021~

E, A LUNGO ANDARE, CI SI ACCORGE CHE QUESTO GIOCHETTO FUNZIONA ANCHE SE L'ELENCO E' COMPOSTO DA INFINITI NUMERI CON INFINITE CIFRE DOPO LA VIRGOLA.

↓  
485  
19191  
871137  
300000  
5021~

E' SEMPRE POSSIBILE SCRIVERE UN NUOVO NUMERO E INTEGRARLO NELL'ELENCO.

1 2

R

DUNQUE, FRA UNO E DUE ESISTE UN'INFINITA' DI ALTRI NUMERI, E CANTOR SCOPRE UN NUOVO INFINITO RANNICCHIATO IN QUELL'INCREDIBILE ANFRATTO.

UN INFINITO DI ORDINE SUPERIORE.

X

ALPH.

E QUANDO PARLO DI UN INFINITO DI ORDINE SUPERIORE, INTENDO DIRE DI UN'ENTITA' IMMENSAMENTE PIU' GRANDE DELL'INFINITO CUI TENDONO I NUMERI NATURALI.

R

DETTO IN UN ALTRO MODO: ESISTONO PIU' NUMERI R FRA UNO E DUE DI QUANTI NUMERI N CORRANO SULLA RETTA DEI NUMERI NATURALI.



LA LUCE E L'IMMENZA  
CALEIDOSCOPICA INFINITA'  
CHE CANTOR VIDE  
FURONO ACCECANTI.

ESISTEVANO  
INFINITI DI GRANDEZZE  
DIVERSE...

CANTOR NE FU  
COSI' COLPITO CHE  
RIVOLUZIONO' ADDIRITTURA  
LA NOMENCLATURA  
MATEMATICA.

~~$\infty$~~   $\aleph_0$

CHIAMO' L'INFINITO  
DEI NUMERI NATURALI  
ALEPH ZERO.

POI IPOTIZZO  
CHE L'INFINITO DEI  
NUMERI REALI, PIU' DENS0  
DI ALEPH ZERO, POTESSE  
ESSERE ALEPH UNO.

$\aleph_1$

CANTOR MORI' CERCANDO DI  
DIMOSTRARE CHE ESISTEVANO,  
UNO DIETRO L'ALTRO, ALEPH  
ZERO E ALEPH UNO...

$\aleph_0 \dots \aleph_1 \dots \aleph_2 \dots \aleph_R$

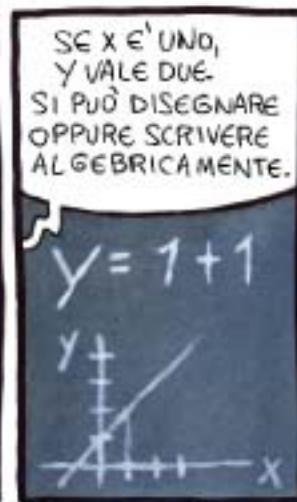
... ALEPH  
DUE E ALEPH  
TRE E, VIA VIA,  
TUTTI GLI  
ALTRI.

QUASI A SCIMMIOTTARE  
I LORO PROGENITORI.

1 2 3 4 5  
 $\aleph_1 \aleph_2 \aleph_3 \aleph_4 \aleph_5$

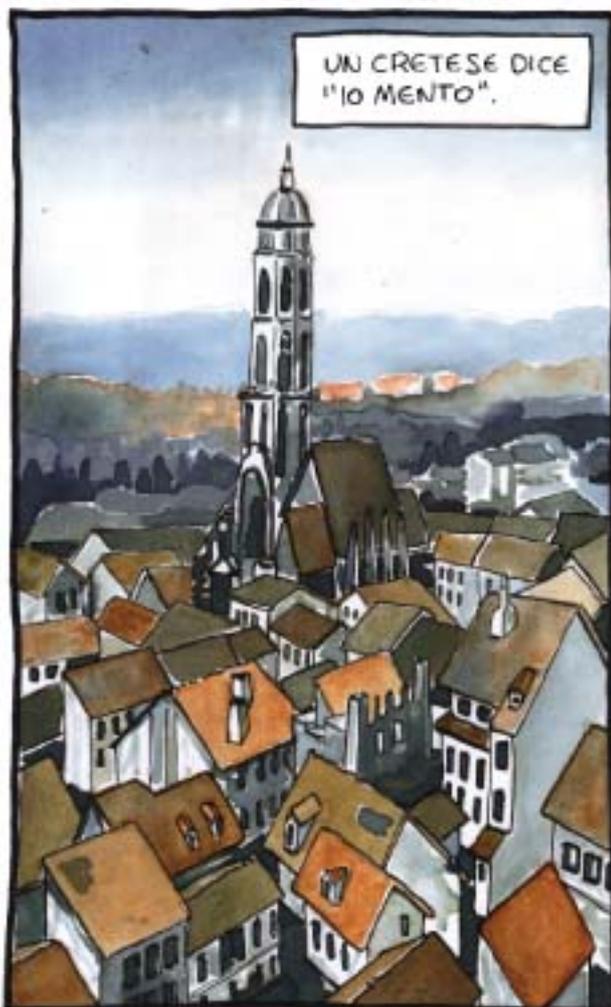
NON POTEVA  
IMMAGINARE DI ESSERE  
INCAPPATO IN UN PROBLEMA  
IRRISOLVIBILE.







UN CRETESE DICE  
"IO MENTO".



SE DICE LA VERITÀ,  
ALLORA STA  
MENTENDO.



E SI CONTRADDICE  
DA SOLO.



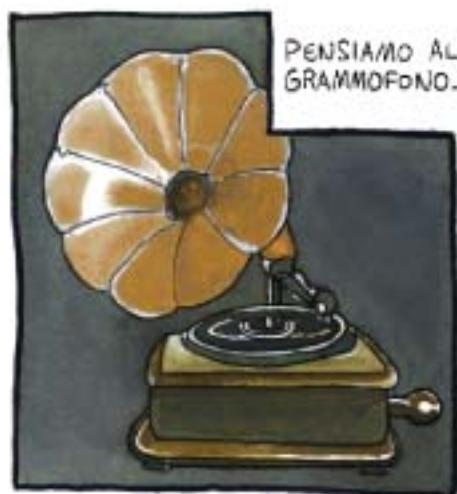
SE, INVECE, DICE IL FALSO,  
ALLORA NON MENTE.



MA, DI NUOVO, SI  
CONTRADDICE.







PENSIAMO AL GRAMMOFONO.



ALLA PUNTINA.



ALLA TROMBA.



AL PIATTO.

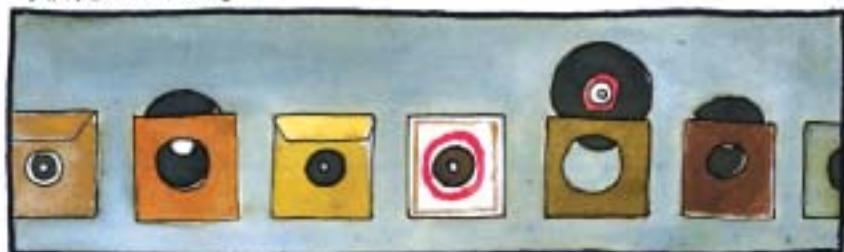


ALLA BASE.

PENSIAMO AI DISCHI.  
IL GRAMMOFONO SUONA I DISCHI.



FUOR DI METAFORA, IL GRAMMOFONO È LA MATEMATICA.  
I DISCHI SONO LE PROPOSIZIONI FORMALI, LE FUNZIONI MATEMATICHE.



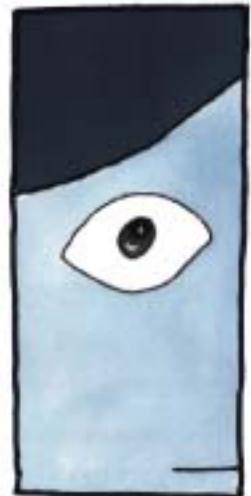
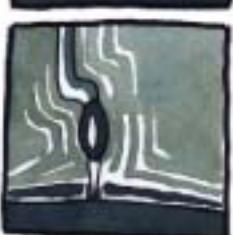
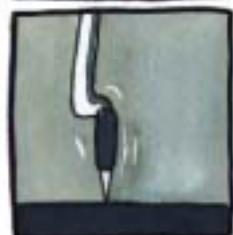
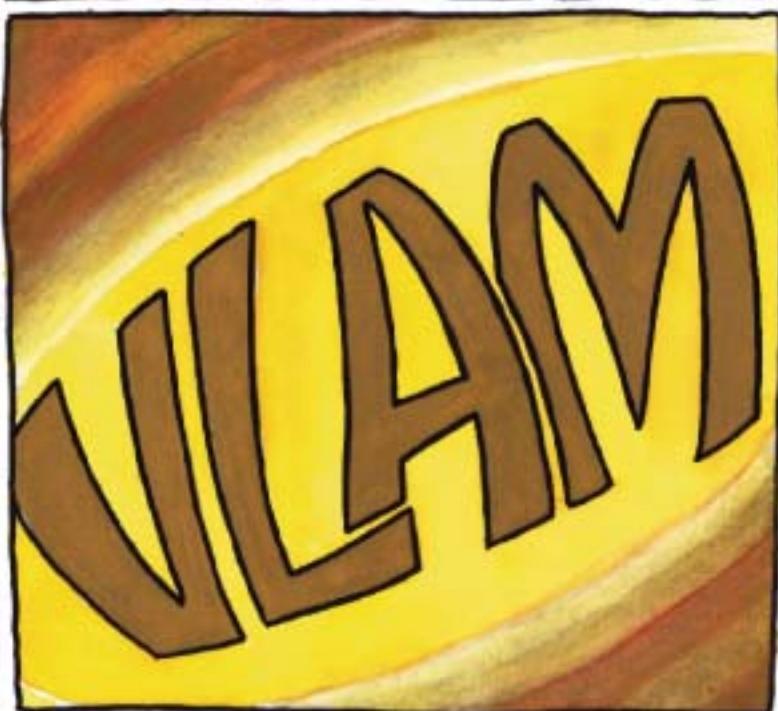
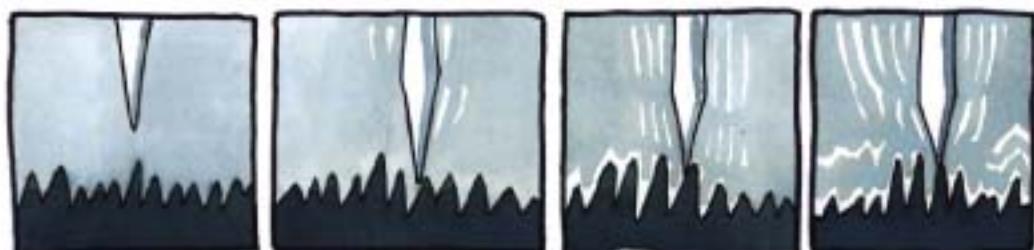
ED ECCO CHE POSSIAMO SUONARE UNA MOLTEPLICITÀ DI DISCHI, SECONDO LE OCCASIONI,  
MA C'È ALMENO UN DISCO PER OGNI GRAMMOFONO CHE NON PUÒ ESSERE SUONATO.



PENA: LA MESSA IN RISONANZA DELL'INTERO SISTEMA DISCO - GRAMMOFONO.  
MI SPIEGO: IL DISCO RECA INCISA LA FREQUENZA  $f$ . LA PUNTINA TRADUCE IL SOLCO E VIBRA  
COME  $f$  IMPONE. LA TROMBA CANTA  $f$  E FA VIBRARE DI  $f$  L'INTERO GRAMMOFONO.

ORA, OGNI SISTEMA, PER SUA PROPRIA CONFORMAZIONE E MASSA E VOLUME, HA UNA SUA PECULIARE FREQUENZA DI RISONANZA  $f_r$  E IL SISTEMA DISCO-GRAMMOFONO NON FA ECCEZIONE. SE IL DISCO RECA INCISA LA FREQUENZA  $f_r$ , CHE COSA SUONERA' IL GRAMMOFONO?

SE  $f$  E'  
UGUALE  
A  $f_r$ ...  
VLAM!...



GÖDEL SCOPRÌ CHE ESISTEVANO SITUAZIONI  
MATEMATICHE INDECIDIBILI, PARADOSSALI,  
LA CUI SOLUZIONE NON SI POTEVA ENUNCIARE.

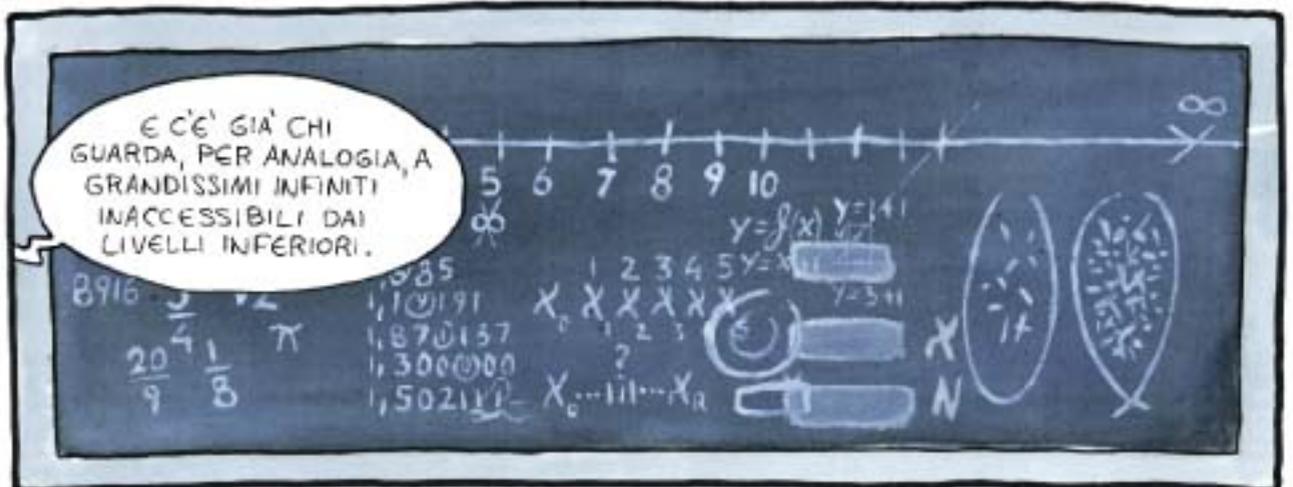
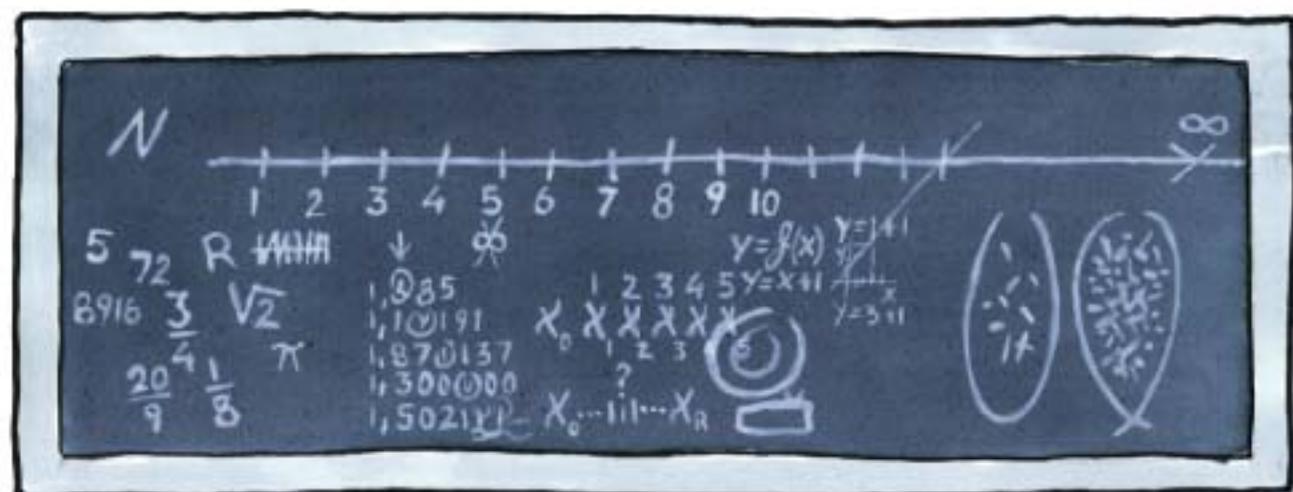
PROPRIO COME, NEL LINGUAGGIO COMUNE,  
NON È POSSIBILE STABILIRE SE IL CRETESE  
MENTE O DICE LA VERITÀ.

ESISTONO DISCHI CHE, SE SUONATI, MANDANO  
PER ARIA I GRAMMOFONI.

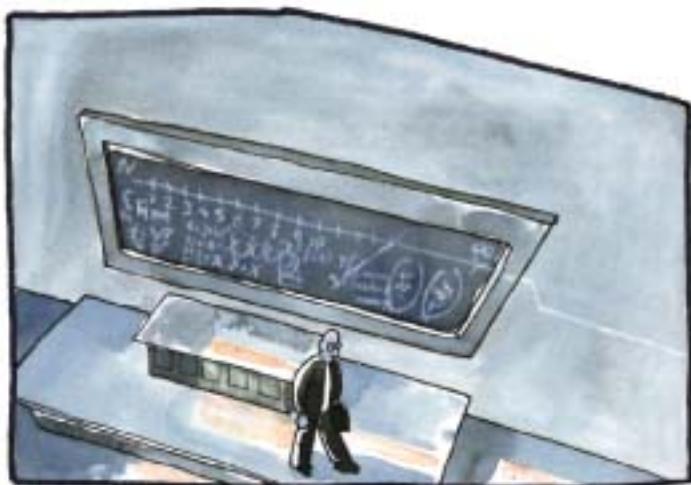
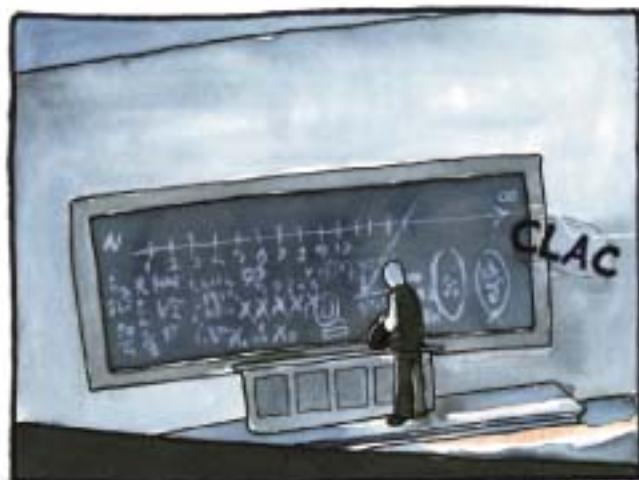
ESISTONO PROPOSIZIONI MATEMATICHE  
CHE INCASTRANO LA MATEMATICA.

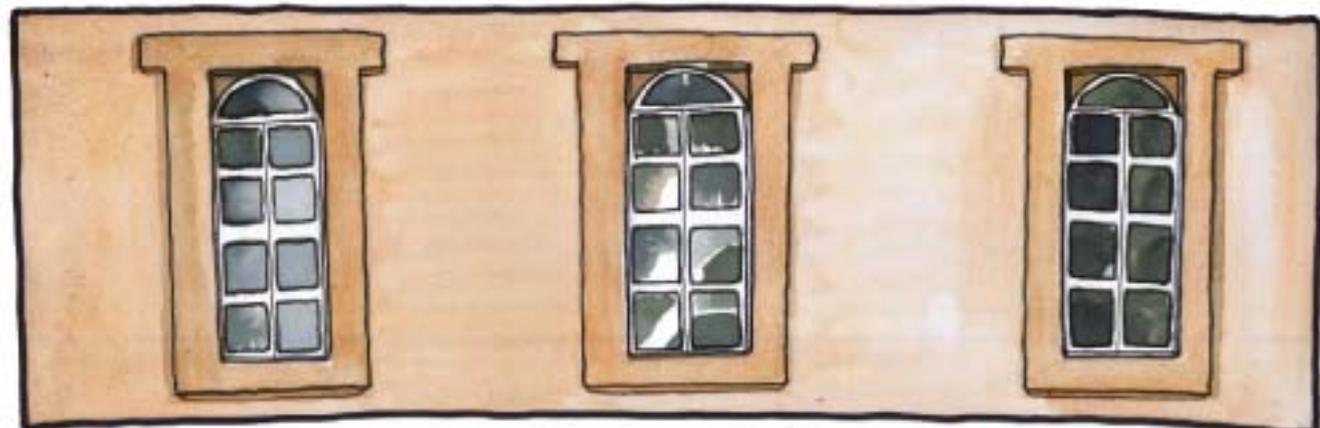
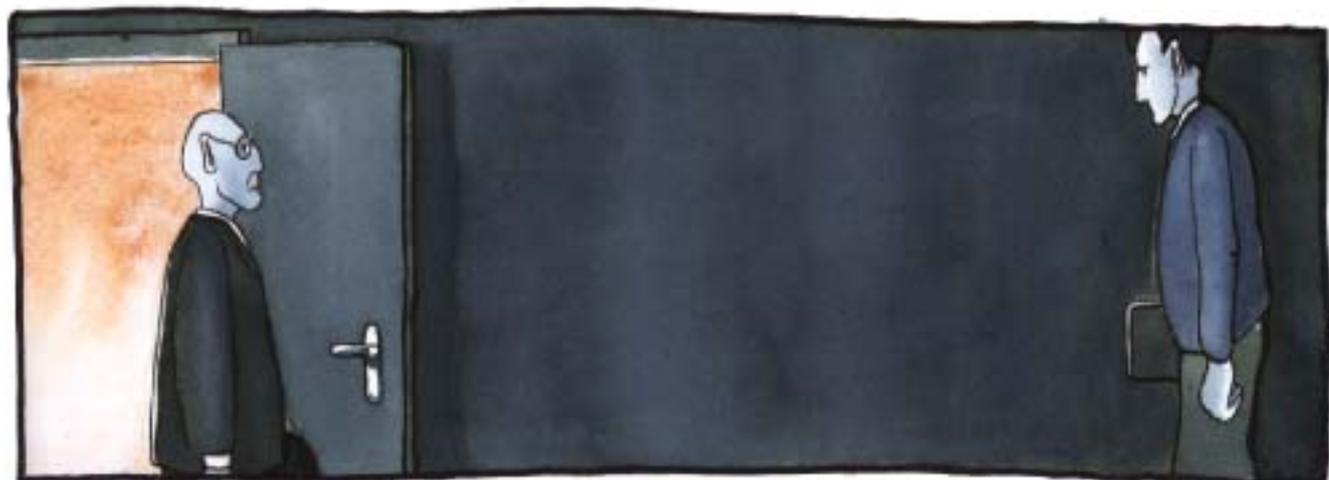
CANTOR, IGNARO DI QUESTA PARADOSSALE REALTÀ,  
INCAPPO' SUO MALGRADO IN UN PROBLEMA  
IRRISOLVIBILE: IL PROBLEMA DEL CONTINUO.

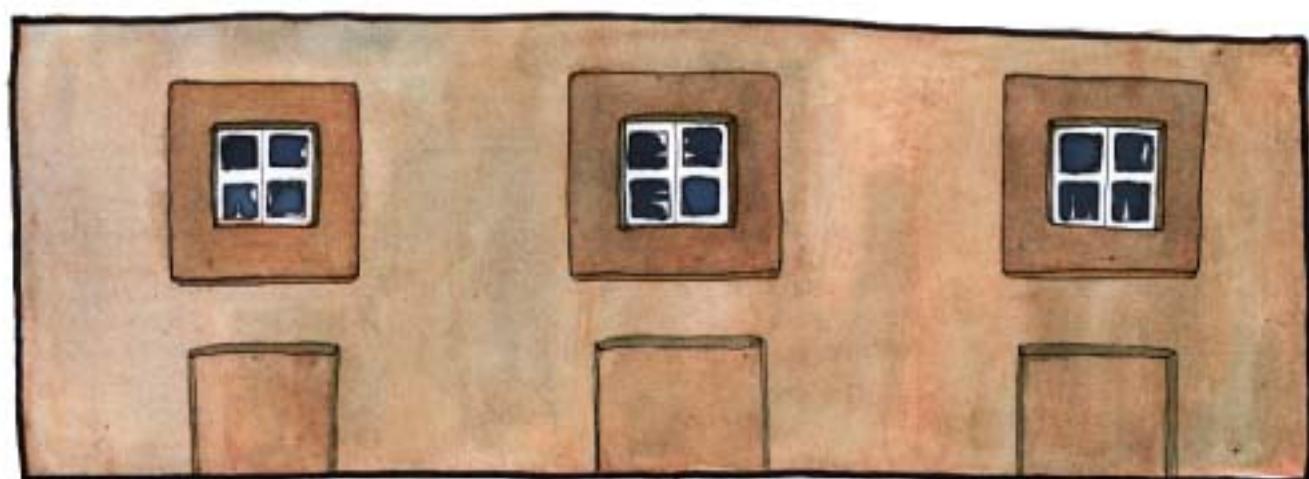












ORBENE, SE NON STAVO PARLANDO AI MURI, VARREBBE SÌ LA PENA DI CONTINUARE...

OCCORRONO DELLE PRECISAZIONI.

VEDE, IL PROBLEMA SU CUI SI ARENÒ CANTOR, NOTO COME IL PROBLEMA DEL CONTINUO, È DI UNA CERTA PORTATA.

L'HO POC'ANZI SFIORATO CON UN ESEMPIO SOMMARIO, CITANDO LE ORMAI FAMOSE DIAGONALIZZAZIONI, MA MERITA UN APPROFONDIMENTO.

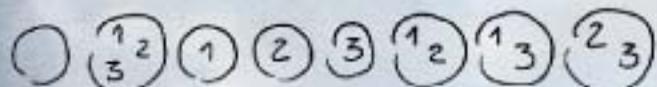
CANTOR, A QUELL' EPOCA, LAVORAVA SUGLI INSIEMI, E SCOPRÌ CHE L'INFINITO CUI TENDEVANO I NUMERI REALI ERA ASSAI PIÙ NUMEROSO DI QUELLO DEI NUMERI NATURALI. ERA GIÀ A CONOSCENZA DEL FATTO CHE ESISTEVANO INNUMEREVOLI INFINITI, MA LA SCOPERTA DELL'INFINITO DEI NUMERI REALI LO DESTABILIZZÒ...

FACCIA MENTE LOCALE SULL'INSIEME DEI PRIMI TRE NUMERI NATURALI.



QUANTI SONO I SOTTOINSIEMI CHE POSSONO ESSERE DERIVATI DALL'INSIEME DI PARTENZA?

OTTO. VALE A DIRE TUTTE LE COMBINAZIONI POSSIBILI DEI TRE ELEMENTI DI PARTENZA.



IL RISULTATO È GENERALIZZABILE COME:

$$2^3 = 8$$

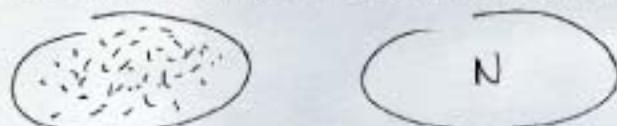
DUE PER DUE PER DUE.

3 È IL NUMERO DI ELEMENTI DI PARTENZA,

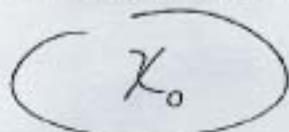
2 SONO LE POSSIBILITÀ CHE CIASCUN ELEMENTO HA DI FAR PARTE DI UN DATO SOTTOINSIEME: O L'ELEMENTO FA PARTE DEL SOTTOINSIEME (1), O NON NE FA PARTE (2).



ORA PENSI ALL'INSIEME DEI NUMERI NATURALI.



SAPPIAMO CHE GLI N SONO INFINITI.



DUNQUE, DALL'INSIEME DEI NUMERI NATURALI POSSIAMO DERIVARE

$2^{\aleph_0}$  SOTTOINSIEMI.

CAPISCE BENE CHE DUE ELEVATO A INFINITO E' MOOOOLTO PIÙ GRANDE DI INFINITO.

DUE PER DUE PER DUE PER DUE PER DUE PER DUE PER DUE ...

... PER INFINITE VOLTE.

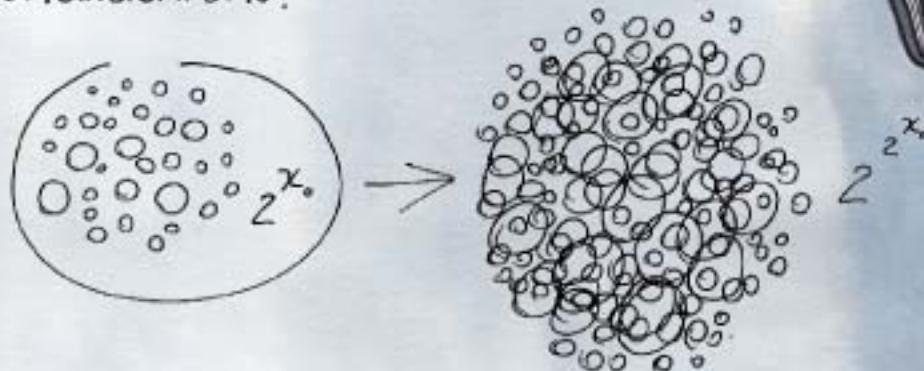
... UN INFINITO DI ORDINE SUPERIORE... ALEPH UNO.

MA SI PUÒ ANDARE OLTRE.

SE DALL'INSIEME DEGLI N, OTTENDO  $2^{\aleph_0}$  SOTTOINSIEMI,



QUANTI SOTTOINSIEMI OTTENDO DALL'INSIEME DEI SOTTOINSIEMI DI N?



DUE ELEVATO A DUE ELEVATO A INFINITO... ALEPH DUE.





1 → 2 → 3 → 4 → 5  
 $\aleph_0$  →  $\aleph_1$  →  $\aleph_2$  →  $\aleph_3$  →  $\aleph_4$

... CHE HANNO  
UNA PROGRESSIONE  
SIMILE A QUELLA DEI  
NUMERI MA, COME  
DIRE...

COSA  
C'ENTRANO  
LE DIAGONALI  
DI CANTOR?

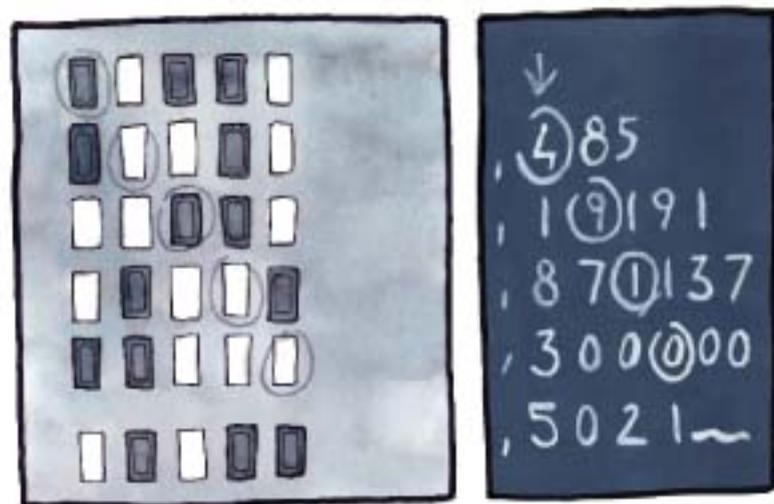


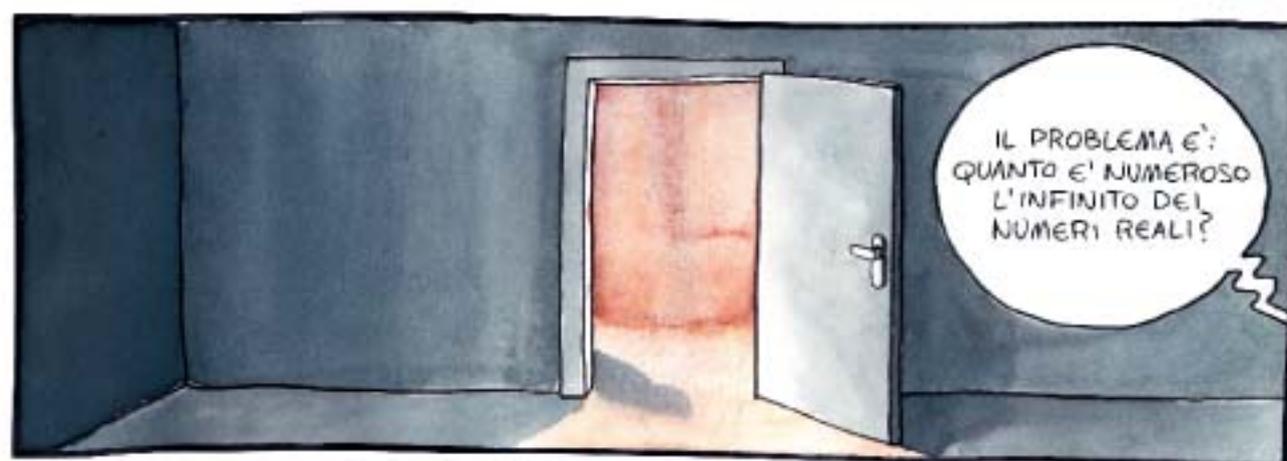


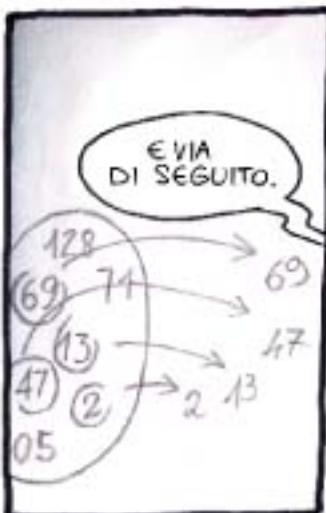
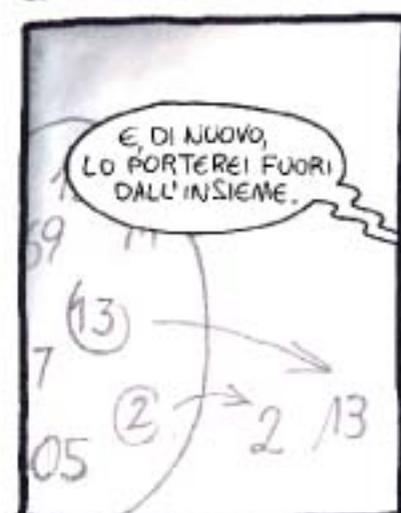
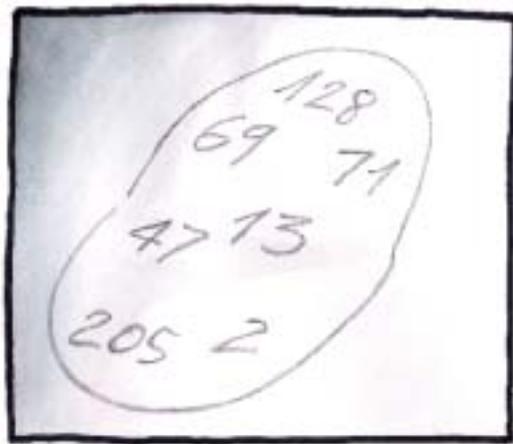




E' SEMPRE POSSIBILE FORMARE UN NUOVO INSIEME, DIVERSO DA TUTTI QUELLI DATI...









ECCO QUAL È IL PROBLEMA DEL  
CONTINUO: MANCA UNA PROCEDURA  
CHE CI PERMETTA DI ORDINARE GLI  
INFINTI...





SE FOSSE STATA ESCOGITATA, IL PROBLEMA DEL CONTINUO SAREBBE STATO RISOLTO, E LA FOLTA SCHIERA DI PARADOSSI GÖDELIANI AVREBBE PERSO UNO DEI SUOI PIÙ ILLUSTRI PERSONAGGI!





