Guido Fiorentino

Alcune considerazioni sui problemi di Hilbert

Il Congresso internazionale di Matematica di Parigi, del 1900, ha rappresentato una tappa molto importante per lo sviluppo della matematica.

Il discorso con cui Hilbert ha iniziato la presentazione dei famosi 23 problemi, che vi ha posto, conserva una piena attualità:

> Chi di noi non sarebbe lieto di sollevare il velo dietro il quale è nascosto il futuro; di gettare uno sguardo sui prossimi progressi della nostra scienza e i segreti del suo sviluppo nei prossimi secoli? Quali saranno i prossimi obiettivi verso cui punteranno i massimi spiriti matematici delle generazioni future? Quali nuovi metodi e nuovi fatti i prossimi secoli riveleranno nel campo del pensiero matematico?
>
> La storia mostra la continuità nello sviluppo della scienza. Noi sappiamo che ogni epoca ha i suoi problemi, che negli anni successivi sono risolti, o messi da parte perché infruttuosi e sostituiti da nuovi problemi. Se riusciamo ad avere un'idea del probabile sviluppo delle conoscenze matematiche nell'immediato futuro, dobbiamo far passare davanti alle nostre menti le questioni irrisolte e rivedere i problemi che la scienza di oggi pone e di cui dal futuro ci aspettiamo la risposta. La giornata odierna mi pare ben adatta a una tale rassegna di problemi che giacciono all'incrocio dei secoli. Perché la chiusura di una grande epoca ci invita a considerare il passato, ma indirizza anche il nostro pensiero al futuro incognito.
>
> Il profondo significato di certi problemi per il progresso della scienza matematica in generale e l'importanza del suo ruolo nel lavoro dei singoli ricercatori non può essere negato. Finché un ramo della scienza offre problemi in abbondanza è viva; la mancanza di problemi nasconde l'estinzione, o la cessazione di sviluppi indipendenti. Come ogni impresa umana persegue certi obiettivi, così anche la ricerca matematica ha bisogno dei suoi problemi. E' con la soluzione dei suoi problemi che l'investigatore controlla la tempera del suo acciaio; trova nuovi metodi e nuove prospettive e domina un orizzonte più ampio e libero.
>
> E'difficile, e spesso impossibile giudicare correttamente in anticipo il valore di un problema; perché la ricompensa finale dipende dal guadagno che la scienza ottiene da questo problema.(1)

Diversi dei problemi hanno trovato una soluzione; però un velo che grava sul rapporto fra i teoremi aritmetici e quelli metamatematici, non è ancora stato sollevato.

Hilbert è il creatore della metamatematica come scienza che, esplorando la matematica, per così dire, dall'esterno, consente di arrivare dove con la sola aritmetica non è possibile. Per Gregory Chaitin:

> A compiere il primo passo verso uno studio matematico del potere della matematica fu David Hilbert, circa un secolo fa: ai miei occhi, è lui il creatore della metamatematica. Fu sua l'idea che per poter esplorare le possibilità della matematica: si debbano innanzitutto specificare in maniera completa le regole del gioco. Fu sua l'idea di creare un sistema assiomatico formale (SAF) per tutta la matematica, un sistema che avrebbe eliminato ogni imprecisione nell'argomentazione matematica, e ogni dubbio sulla correttezza di una dimostrazione.(2)

Partendo da un numero finito di proposizioni, il metodo assiomatico permette di generare tutti i teoremi della Teoria. Come poeticamente lo presenta Marcus de Sautoy:

> Una volta che il matematico ha osservato una montagna in lontananza, il suo compito successivo è spiegare agli altri come raggiungerla.
>
> Si inizia in un luogo dove il paesaggio è familiare e non ci sono sorprese. Dentro i confini di questa regione conosciuta si trovano gli assiomi della matematica, le verità ovvie che riguardano i numeri, insieme alle proposizioni che sono già state dimostrate. Una dimostrazione è come un sentiero che, attraverso il paesaggio matematico, conduce da questo territorio familiare fino a vette remote.(3)

In moltissimi casi non sapremmo proprio come tradurre in forma aritmetica le intuizioni, per cui il ricorso alla metamatematica costituisce l'unica strada; però non si può ignorare la differenza veramente essenziale, ma usualmente non rilevata, che distingue le proposizioni e i teoremi metamatematici da quelli aritmetici.

A parte i segni operativi, quelli aritmetici comprendono esclusivamente *attributi*: aggettivi numerici o funzioni cui pare legittimo attribuire un valore obiettivo, che possono riferirsi a qualsiasi *concetto*, ma lì non c'è, per cui possono essere tradotti in *formule* suscettibili di un controllo diretto, che anche le macchine possono confermare.

Nulla del genere è invece possibile per le proposizioni e i teoremi metamatematici, la cui validità è necessariamente condizionata dal linguaggio in cui sono necessariamente espressi, per cui coinvolgono dei concetti, che per la loro origine dai nostri processi di pensiero sfuggono a qualsiasi rigorosa formalizzazione.

Ciò si riflette sul valore euristico delle proposizioni che in forma solamente linguistica - perciò metamatematica - esprimono ipotesi come quelle di Fermat, o di Riemann, che non si è riusciti a tradurre in formule esclusivamente aritmetiche, per cui si potranno chiamare para-aritmetiche. La validità di ciò che affermano, e la possibilità di provarla, non risultano però paragonabili a quelle delle proposizioni aritmetiche.

Ma ben più determinanti sono gli assiomi su cui si fondano le proposizioni e i teoremi più propriamente metamatematici, che non hanno per oggetto esclusivamente operazioni aritmetiche; invece esprimono attraverso il linguaggio delle considerazioni di carattere generale che proprio non sapremmo come tradurre in altra forma, come, ad esempio, per Gödel l'incompletezza e la coerenza degli assiomi dell'aritmetica, e l'ipotesi del continuo di Cantor; e i matematici usano fondarle su assiomi che implicitamente dipendono da un assioma che risale ad Aristotele, ma né da lui né da altri è mai stato esplicitamente formulato – perciò si può chiamare *l'assioma nascosto di Aristotele* – che nel nostro linguaggio non trova riscontro, perciò per noi non vale. Ma tuttora condiziona la validità di ciò che affermano, e la possibilità di dimostrarla.

*

Aristotele aveva riconosciuto la differenza fra sostanze, e accidenti, piuttosto bene corrispondenti a *concetti* e *attributi*, nel nostro linguaggio tipicamente rappresentati da sostantivi e aggettivi, e le rispettive proprietà, primarie e secondarie; però aveva preferito semplificare la logica, giocando sul "valore di verità" dei concetti per assimilarli agli attributi. Dice nelle *Categorie*:

"I termini che si dicono senza alcuna connessione esprimono, caso per caso, o una sostanza (ousia), o una quantità, o una qualità, o una relazione, un luogo, o un tempo, o l'essere in una situazione, o un avere, o un agire o un patire. Orbene, per esprimerci concretamente, sostanza è, ad esempio "uomo", "cavallo"; quantità è "lunghezza di due cubiti", "lunghezza di due cubiti"; qualità è "bianco", "grammatico"; relazione è "doppio", "maggiore"; luogo è "nel Liceo", "in piazza"; tempo è "ieri", "l'anno scorso"; essere in una situazione è "si trova disteso", "sta seduto"; avere è "porta le scarpe' "si è armato"; agire è "tagliare", "bruciare"; patire è "venir tagliato", "venir ciò bruciato.(4)

Il "valore di verità" molto discutibile che accomuna quel coacervo di concetti e di attributi, formato da "sostanza, quantità, qualità, relazione, luogo, tempo, situazione, avere, agire, patire", ecc., basta ad Aristotele per ignorare la distinzione fra i concetti e gli attributi, considerando, ad esempio, "uomo buono" come l'associazione dei due concetti "uomo" e "buono"; e a una tali approssimative assimilazioni, trasmessa dalla Scolastica, tuttora si attengono i matematici.

Alla *verità* fanno infatti riferimento, ad esempio, gli *Appunti di Logica Matematica*, del Prof. Francesco Bottacin dell'Università di Padova:

1 - Logica proposizionale: Una proposizione è un'affermazione che esprime un valore di verità, cioè una affermazione che è VERA oppure FALSA.(5)

Ma nel linguaggio, che riflette il nostro modo di pensare, i concetti e gli attributi hanno caratteristiche e funzioni nettamente differenti, che non possono essere confuse.

Accostati ai concetti, gli attributi formano un unico *concetto composito*, ad esempio "buon uomo", "carta geografica", ecc.; però di regola designano le caratteristiche che attribuiscono ai concetti cui si riferiscono. In nessun caso sono assimilabili ai concetti: obbediscono a una logica differente, e nella negazione ciò è evidente: mentre il negato di un attributo è un altro attributo significativo, che ne è il complemento; qualsiasi cosa corrisponde invece nel nostro linguaggio a ciò che un concetto non è, per noi perciò privo di significato. E per gli assiomi ciò non può esser ignorato.

Per de Sautoy,

La maggioranza dei matematici pensa che le indagini future non faranno mai crollare gli assiomi che sono considerati verità lampanti relative ai numeri. Secondo loro, le leggi della logica che si adottano per edificare sopra quelle fondamenta, se applicate correttamente, produrranno dimostrazioni di asserzioni sui numeri che non saranno mai invalidate da nuove intuizioni. Forse è un'idea ingenua dal punto di vista filosofico, ma certamente è il principio fondamentale della setta dei matematici.(6)

Ma facendo un tutt'uno delle proprietà esclusive dei concetti, e delle caratteristiche esclusive degli attributi, comuni a un numero illimitato di concetti, l'assioma nascosto di Aristotele, altera profondamente la prospettiva delle situazioni su cui i matematici, che ad esso si attengono usano ragionare: si riferiscono a un mondo astratto, ristretto e deformato, che non è il nostro, per cui le conclusioni che se ne possono trarre per noi.non valgono.

Ma se - come fa Hilbert e i matematici ancora usano fare - all'assioma nascosto ci si attiene, l'assioma stesso costituisce un pesante velo, usualmente ignorato, che impedisce di rendersene conto.

Facendo di concetti e attributi un tutt'uno, la caratteristica veramente essenziale che differenzia le proposizioni e i teoremi aritmetici da quelli metamatematici: che non comprendono concetti, ma soli attributi, non può infatti apparire; èer cui non può essere rilevata.

Passa inosservata, e la ben maggiore attendibilità, quindi valore euristico che ne deriva per le proposizioni e i teoremi aritmetici, e in modo esclusivo li contraddistingue, inevitabilmente sfugge.

Sfugge infatti a Hilbert, che nella presentazione, più avanti dice:

> D'altra parte, pur insistendo sul rigore della prova come requisito per la soluzione perfetta di un problema, vorrei oppormi all'opinione che solo i concetti dell'analisi, o persino i soli aritmetici, sono suscettibili di una trattazione pienamente rigorosa. Considero completamente sbagliata questa opinione, occasionalmente espressa da uomini eminenti. Tale interpretazione unilaterale della richiesta di rigore porterebbe presto a ignorare tutti i concetti originati dalla geometria, dalla meccanica e dalla fisica, ad arrestare il flusso di nuovo materiale dal mondo esteriore, e infine, come ultima conseguenza, al rifiuto delle idee sul continuo e i numeri irrazionali. Ma quale nervo importante, vitale per la scienza matematica, sarebbe tagliato con l'estinzione della geometria della fisica matematica! Al contrario io penso che ogniqualvolta, dalla teoria o dalle conoscenze, in geometria o nelle scienze fisiche naturali nascono delle idee matematiche, sorge il problema per la scienza matematica di investigare i principi loro sottostanti, e di inquadrarle in un sistema semplice e completo di assiomi, in modo che l'esattezza delle nuove idee e la possibilità di deduzioni non sia sotto alcun aspetto inferiore a quella dei vecchi concetti aritmetici.[7]

Attenendosi all'assioma nascosto, a Hilbert pareva infatti naturale attribuire le inevitabili carenze delle proposizioni e dei teoremi metamatematici, anche a quelli aritmetici, che invece ne sono esenti, quindi rifiutare l'idea "che solo i concetti dell'analisi, o persino i soli aritmetici, sono suscettibili di una trattazione pienamente rigorosa", e affermare che "l'esattezza delle nuove idee e la possibilità di deduzioni non sia sotto alcun aspetto inferiore a quella dei vecchi concetti aritmetici"; ma si riferiva a un mondo che non è il nostro, e ciò gli impediva di rendersi conto che nel nostro le proposizioni e i teoremi aritmetici sono realmente ben più attendibili e dimostrabili di quelli metamatematici.

Attenendosi all'assioma nascosto di Aristotele, come faceva Hilbert e tuttora fanno i matematici, non è però possibile rendersene conto, per cui sono usualmente collocati tutti su uno stesso piano, e quelli metamatematici sono anzi talvolta persino privilegiati[8].

L'impropria assimilazione di concetti e attributi dovuta all'assioma nascosto, implicitamente tocca tutti i 23 problemi: non per nulla alcuni sono stati riconosciuti non risolubili; in modo particolare interessa però il primo, sul *continuo*, e il secondo sulla completezza degli assiomi dell'aritmetica, per quanto affermano, e per la possibilità della dimostrazione, il decimo, relativo all'ipotesi di Riemann.

*

Continuo è un attributo: è stato attribuito al cosiddetto insieme dei numeri reali: il primo dei problemi che Hilbert pone è se si può dimostrare - come Cantor ipotizzava - che *riguardo all'equivalenza ci sono solo due assemblaggi di numeri, l'assemblaggio numerabile e il continuo*[9].

Il problema è stato considerato irresolubile. Per Gregory Chaitin:

> Una pietra miliare fu la dimostrazione, ottenuta grazie agli sforzi combinati di Gödel e di Paul Cohen, che gli assiomi usuali della teoria assiomatica degli insiemi (non dell'originaria, «ingenua» e paradossale, teoria cantoriana degli insiemi) non sono sufficienti per decidere in un senso o nell'altro.[10]

Attenendosi all'assioma nascosto di Aristotele che di concetti e attributi si fa un tutt'uno, come fa la Teoria degli insiemi di Zermelo e Fraenkel, il problema non può avere soluzione: gli insiemi si riducono ad "assemblaggi" - come Hilbert li designa ponendo il quesito - generici, con un contenuto che da nessun elemento, dell'*insieme vuoto***,** può arrivare alla totalità di ciò che può essere pensato, del continuo: semplici mucchi, del tutto inadatti a svolgere la funzione per cui gli insiemi sono nati, di far emergere dal mare sterminato delle caratteristiche di tutto ciò che è percepito o pensato, le proprietà di rilievo per i nostri processi di pensiero: facendo di concetti e attributi un tutt'uno, tutto si appiattisce.

Non possono svolgere la loro funzione originale gli insiemi. di attributi, su cui Frege intendeva fondare l'aritmetica(11): il paradosso di Russell lo indusse alla rinuncia; ma non è quella la vera causa del suo fallimento: una collezione, quale gli insiemi propriamente intesi sono, deve avere una motivazione ragionevole; ma per "l'insieme tutti gli insiemi che non includono se stessi come elementi", di Russell, che lo indusse a desistere dal suo tentativo(12), non è certo facile ravvisarla: è paradossale, ma non definisce alcunché, tanto meno una collezione. Sostanzialmente qualsiasi cosa corrisponde a ciò che non è, o non si fa; non è un insieme.

Nel nostro mondo solamente i concetti, sono atti a definire propriamente gli insiemi; ma tale esigenza essenziale non è ancora riconosciuta, e attenendosi all'assioma nascosto non può essere soddisfatta, per cui il problema del continuo non può avere soluzione.

Dice infatti de Sautoy,

> Ciò che Cohen aveva dimostrato è quanto segue: è impossibile dimostrare, in base agli assiomi che attualmente usiamo in matematica, che esiste un insieme di numeri la cui dimensione è strettamente maggiore di quella dell'insieme di tutti i numeri frazionari e strettamente inferiore a quella dell'insieme di tutti i numeri reali; allo stesso modo, è impossibile dimostrare che un tale insieme non esista. Di fatto, Cohen era riuscito a costruire due differenti mondi matematici che soddisfacevano gli assiomi utilizzati in matematica. In uno di questi mondi la risposta al quesito di Cantor era «sì»; nell'altro mondo la risposta era «no».(13)

Ma se si riconosce che solo i concetti, e non gli attributi, sono insiemi discreti e numerabili, al quesito si può invece rispondere: il cosiddetto "insieme **R**", dei numeri reali non è numerabile, nessun insieme può perciò essere maggiore degli infiniti algebrici, non il continuo "*c*", che *non è un insieme*; anzi, ne è proprio l'opposto. Designando con "C" un insieme, o classe, o concetto, è: $\sim C = \aleph_1 = c$.

Il secondo dei 23 problemi, sulla completezza degli assiomi dell'aritmetica, interessava a Hilbert perché ne dipendeva la validità di quelli della geometria, che aveva dimostrato.

Deludendo le sue aspettative, nel 1931 Gödel rispose al quesito col suo famoso teorema, decretando l'incompletezza in un modo, magari con qualche perplessità, unanimemente considerato indiscutibile.

Dice infatti Palle Yourgrau:

> Quando il matematico Paul Cohen, un vincitore della Medaglia Fields che aveva dimostrato l'indipendenza dell'ipotesi del continuo, si imbatté per la prima volta nel teorema di Gödel, era scettico, e osservò che gli sembrava più simile alla filosofia che alla matematica. Dopo avere discusso sul problema col logico Steven Kleene, però, i suoi dubbi svanirono. Tuttavia in seguito commentò: «Ero piuttosto depresso quando mi resi conto che Gödel aveva ragione».(15)

Gödel poteva aver ragione, ma in riferimento al mondo dei matematici, che non è il nostro. L'incompletezza degli assiomi dell'aritmetica è di fatto assurta a una sorta di dogma, facilmente frainteso come affermazione della reale esistenza di semplici proposizioni aritmetiche corrispondenti al quesito come Hilbert l'aveva posto non dimostrabili né refutabili, che non si sono viste(16). L'unica "prova" di ciò che il teorema afferma però è rimasta la dimostrazione piuttosto contorta(17), e per più versi criticabile, che Gödel ne ha dato nella dimostrazione del teorema(18).

Per contro, una prova veramente indiscutibile della correttezza dei teoremi su cui le proposizioni aritmetiche si fondano, può essere suggerita dalla dimostrazione che Turing ha dato del suo teorema d'incompletezza, basata sulla fermata della sua Macchina, ben più comprensibile di quello di Gödel, con cui ha poco a che fare.

Nulla si usa dire dei dati su cui la Macchina opera, che perciò si devono ritenere casuali, ed è del tutto improbabile che corrispondano ai requisiti ai requisiti di Hilbert: non è perciò possibile prevedere se la Macchina si fermerà; ma se invece, la Macchina opera su dati aritmetici corretti, come necessariamente succede se emula un normale computer che compie una qualsiasi nomale operazione aritmetica, non vi può essere alcun dubbio che si fermerà, dando così la prova indiscutibile della completezza: diversamente da quanto Hilbert pensava, è proprio vero che per le proposizioni e i teoremi aritmetici, e algebrici(19), sono i soli suscettibili di una trattazione pienamente rigorosa; ma facendo di concetto e attributi un tutt'uno, ciò inevitabilmente sfugge.

*

La differenza fra le proposizioni e i teoremi metamatematici si fa sentire anche nella dimostrazione. Giuseppe Berto dice:

La metamatematica era considerata da Hilbert come una vera e propria nuova branca della matematica: quella branca che si occupa di dare dimostrazioni intorno a ciò che si può, o non si può, dimostrare in matematica. Perciò essa viene chiamata anche *teoria della dimostrazione* [...] La distinzione fra un sistema **S** che formalizza una certa porzione della matematica, e la sua descrizione metamatematica, o in termini di teoria della dimostrazione, era centrale per la seconda fase del programma di Hilbert. Egli propose infatti di risolvere la crisi dei fondamenti *dimostrando mctamaticamente la coerenza dell'aritmetica formalizzata con metodi puramente finitari*.[20]

La dimostrazione delle proposizioni e dei teoremi metamatematici non può però mai essere semplice ed esauriente come quella che le formule offrono offrono per i teoremi aritmetici: una volta riconosciute valide, lo sono per tutte, sono esse stesse la prova: per i teoremi aritmetici, piuttosto che di assiomi e dimostrazioni pare legittimo parlare semplicemente di *regole*, che sanciscono dei dati di fatto sicuramente accertati, che solo ragionamenti capziosi possono mettere in dubbio.

La differenza è perciò radicale per i teoremi più propriamente metamatematici, espressi in forma esclusivamente linguistica, in cui la dimostrazione è affidata alle stesse armi solamente linguistiche, non certo sempre affilate né affidabili del ragionamento che li hanno foggiati, e a sua vita condizionata dall'assioma nascosto di Aristotele, da cui anch'essa dipende[21].

Ciò che le proposizioni metamatematiche para-aritmetiche affermano può invece essere tradotto in precise espressioni aritmetiche, che ne consentono la verifica. Per de Sautoy:

Forse l'argomento più convincente per spiegare perché la cultura della matematica dia tanto valore al fatto di dimostrare che un'asserzione è vera, è che, a differenza delle altre scienze, essa concede il lusso di poterlo fare. In quante altre discipline esiste qualcosa di paragonabile alla possibilità di affermare che la formula di Gauss per i numeri triangolari non mancherà mai di dare la risposta corretta? Forse la matematica è una materia eterea, circoscritta alla mente, ma la sua mancanza di realtà tangibile è più che compensata dalle certezze che forniscono le dimostrazioni.[22]

Per la dimostrazione di queste proposizioni il calcolo ha certo un ruolo molto importante, ma limitato ai singoli casi: non può avere il valore generale, e determinante di una formula.

De Sautoy si domanda:

Sono arroganti i matematici a ritenere di aver accesso a dimostrazioni assolute? Si può sostenere che la dimostrazione del fatto che qualsiasi numero è esprimibile come prodotto di numeri primi ha le stesse probabilità di essere demolita di quelle che hanno la fisica newtoniana o la teoria di un atomo indivisibile?.

La maggioranza dei matematici pensa che le indagini future non faranno mai crollare gli assiomi che sono considerati verità lampanti relative ai numeri. Secondo loro, le leggi della logica che si adottano per edificare sopra quelle fondamenta, se applicate correttamente, produrranno dimostrazioni di asserzioni sui numeri che non saranno mai invalidate da nuove intuizioni. Forse è un'idea ingenua dal punto di vista filosofico, ma certamente è il principio fondamentale della setta dei matematici.

C'è poi l'eccitazione emotiva che il matematico prova mentre traccia nuovi percorsi attraverso, il paesaggio della matematica. C'è un'incredibile sensazione di euforia nello scoprire una via per raggiungere la sommità di un monte lontano che è visibile da generazioni.[23]

Il calcolo permette una verifica di ciò che i teoremi il para-aritmetici affermano, e i matematici hanno il privilegio di poterla compiere con molto più rigore che in qualsiasi altra scienza; ma non ha il valor assoluto di una formula: dimostra che le cose possono effettivamente essere come dicono, ma non garantisce l'impossibilità di controesempi.

Non per nulla, un numero pur molto grande di conferme offerte dai risultati, non è considerato dagli stessi matematici una vera prova. Dice infatti sempre de Sautoy,

Il matematico è ossessionato dalla dimostrazione, e la semplice prova sperimentale di un'ipotesi matematica non lo soddisfa. Questo atteggiamento è spesso oggetto di stupore e persino di scherno in altre discipline scientifiche. La congettura di Goldbach è stata verificata per tutti i numeri fino a 400.000.000.000.000 ma non è stata accettata come teorema. In quasi tutte le altre discipline scientifiche si sarebbe felici di considerare questi dati numerici schiaccianti come un argomento più che convincente e si passerebbe a qualcos'altro. Se poi un giorno dovessero spuntare nuovi dati che impongono di riconsiderare quel canone matematico, allora lo si farà. Se per le altre scienze va bene così. perché non per la matematica? [24]

Mostrando l’attendibilità di ciò che le proposizioni para-aritmetiche affermano, i calcoli possono dimostrare la grande capacità d’intuizione dell’intelletto umano, ma non hanno un valore di prova paragonabile alle formule; che però certo non sempre possono darla.

Per alcuni problemi la traduzione delle intuizioni in formule, anche se non sintetiche come quella di Gauss, può valersi di metodi indiretti: ad esempio, la geometria analitica, per i teoremi della geometria; ma quanto più complesse ed elaborate sono le ipotesi che si intendono esprimere, diventa difficile o del tutto impossibile: esprimere in forma para-aritmetica ciò che non possiamo tradurre in formule aritmetiche, molto spesso una vera prova, con tutti i crismi, rimane irraggiungibile, e il ricorso alla metamatematica rimane l’unica soluzione rimane l’unica strada, perché non lo sappiamo fare, o veramente esula da quanto l’aritmetica permette di fare.

Quello è, ad esempio, il caso se da dimostrare non è che determinate situazioni si verificano, ma che si verificano sempre, evitando la necessità di infiniti controlli, come a rigore è indispensabile per le proposizioni para-aritmetiche; si fa infatti sentire la dissimmetria fra l’affermazione e la negazione dei concetti, che non si può tradurre in formule dell’aritmetica: è il caso della famosa congettura di Riemann, che nonostante gli ormai milioni di calcoli che l’hanno confermata, tale con tutta probabilità tale continuerà a essere considerata.

L’affidabilità che le proposizioni para-aritmetiche possono garantire è comunque enormemente maggiore di quella delle proposizioni e dei teoremi più propriamente metamatematici, che per la natura generica e inevitabilmente piuttosto vaga di ciò che affermano, non sono suscettibili di alcuna verifica veramente oggettiva.

Sono perciò necessariamente valutati con un criteri differenti, e necessariamente tanto meno rigorosi. Paradossalmente, però, per ciò stesso sono tanto più facilmente dati per realmente provati, e come tali accreditati; e con una mentalità platoniana, anche a scapito dell’aritmetica.

*

Concludendo l’introduzione, Hilbert dice:

> L’assioma della risolvibilità di ogni problema è una caratteristica peculiare del pensiero matematico, o può essere una legge generale inerente alla natura della mente, che tutti i problemi che si pone abbiano una risposta? [...].
>
> La convinzione della risolvibilità di ogni problema matematico è un potente incentivo per il lavoratore. Sentiamo dentro di noi il perpetuo invito. C’è il problema. Cerca la soluzione. La puoi trovare con la sola ragione, perché in matematica non ci sono *ignorabimus*.
>
> Il rifornimento di problemi matematici è inesauribile, e appena un problema è risolto, numerosi altri saltano fuori al suo posto. Permettetemi, nel seguito, di menzionare tentativamente, come sono, alcuni problemi particolari presi da vari rami della matematica, dalla cui discussione ci si può attendere un progresso della scienza.(25)

Non si possono però ignorare le caratteristiche degli strumenti di cui disponiamo. In particolare, non è certo lo stesso affrontare i problemi matematici riferendosi al mondo ristretto e deformato dei matematici, condizionato dall’assioma nascosto di Aristotele, o invece a quello in cui viviamo, per quanto ci è dato di conoscerlo da quanto ne traspare nel linguaggio.

Quell’assioma grava particolarmente sulle proposizioni propriamente metamatematiche, ma si fa sentire anche in tutte le considerazioni che ad si attengono. Parrebbe però opportuno non soltanto sollevare, ma rimuovere il velo che tuttora grava su tanta parte della matematica, e che ragioni storiche possono spiegare, ma non giustificare; ma la revisione dell’immane patrimonio di conoscenze ormai accumulato che richiederebbe, è evidentemente impensabile; e non è nemmeno indispensabile.

Usualmente il buon senso ci aiuta infatti a riconoscere ciò che per noi non vale, per cui nelle applicazioni le discrepanze teoriche, fra le conclusioni che l’assioma nascosto porta a trarre, e ciò che a noi veramente risulta, non comportano conseguenze di rilievo.

Sollevare il velo non è però per questo inutile: permette di riconoscere che il panorama della matematica è ben più ricco e variegato di come i matematici usano rappresentarlo, e di tenerne il dovuto conto.

* * *

Note:

1) Da Google, tradotto dalla versione inglese.

2) Gregory Chaitin, *Alla ricerca di Omega*, Milano, Feltrinelli, 2007, p. 38.
3) Marcus, de Sautoy ne *L'enigma dei numeri primi*, Milano, Rizzoli 2004, p. 47.
4) Aristotele, *Cat*. 4. ib25-2°4.
5) Francesco Bottacin, *Appunti di logica proposizionale,* http://www.math.unipd.it/~bottacin/books/logica.pdf. esclusivamente il valore numerico.
6) Nel libro della nota 3, p.51.
7) vedi 1.
8) E' il caso del teorema d'incompletezza di Gödel che afferma l'incompletezza degli assiomi dell'aritmetica.
9) Nella presentazione di Hilbert del problema, vedi 1.
10)Nel libro della nota 2, p. 127.
11) Per Paolo Zellini a p. 62-63 di *La ribellione dei numeri*, Milano, Adelphi 1985: "In ogni caso, quel che sarebbe stato chiaro di lì a poco era l'incompatibilità del principio che Frege aveva posto a fondamento della pensabilità di una classe: il principio, cioè, di astrazione (o *comprensione*). Tale principio, nella classica equivalenza tra classi e attributi, poteva riassumersi nel credere che a ogni attributo (o concetto o predicato) corrispondesse la propria 'estensione', cioè l'insieme di tutti gli oggetti per cui era predicabile quell'attributo".
12) Nel libo della nota 3, p. 272.
13) Dice Martin Davis, *Il calcolatore universale,* Milano, Adelphi 2003, a pp. 77-78: "Dunque Frege voleva arrivare a definire i numeri naturali in termini puramente logici per poi derivare le loro proprietà utilizzando proprio la sua logica".
14) "Da questo teorema seguirebbe immediatamente che il continuo ha il primo numero cardinale successivo a quello degli assemblaggi numerabili; perciò la prova di questo teorema creerebbe un nuovo ponte fra gli assemblaggi numerabili e il continuo",. Vedi 1..
15) Palle Yourgrau, *Un mondo senza tempo*, Milano, Il Saggiatore 2006, p.70.
16) "Essenzialmente gli assiomi aritmetici non sono altro che le note regole di calcolo con l'aggiunta degli assiomi"; nella presentazione del problema, vedi 1. Le situazioni che si vedono citate a sostegno del teorema d'incompletezza, come quella del Teorema di Goodstein, non si riferiscono in realtà a ciò che le proposizioni aritmetiche affermano, ma a loro particolari aspetti.
17) Dice Marcus de Sautoy nel libro della nota 3, a p. 249: "Nel 1930, subito dopo aver saputo che il programma di Hilbert era stato completamente demolito da Gödel, in Newman nacque il forte desiderio di esplorare alcuni degli aspetti più difficili delle idee di Gödel. Cinque anni dopo aveva acquisito una sicurezza sufficiente per annunciare una serie di lezioni sul teorema di incompletezza di Gödel. Turing vi assistette, inchiodato alla sedia dalle tortuosità della dimostrazione di Gödel".
18)00 Molto sinteticamente, la famosa proposizione: "La proposizione G non è dimostrabile", su cui si fonda, già di per sé non è dimostrabile né refutabile, perché null'altro se ne sa: per forza lo è anche il *gödeliano* che la rispecchia in forma aritmetica come prodotto di fattori; ma la responsabilità non è certo dell'aritmetica. Soprattutto discutibile, è però l'uso del negato di concetti e proposizioni, ossia di ciò che qualcosa *non è*, per noi privo di alcun reale significato.
19) Le proposizioni algebriche comprendono dei simboli relativi a concetti, che però ne rappresentano
20) Francesco Berto, *Tutti pazzi per Gödel*, Bari, Laterza 2008, p.3.
21) Quell'assioma condiziona anche le espressioni paramatematiche di cui Gödel si vale: nella "prova" dei suoi teoremi, in cui usa termini, come esempio "¬Dim", negato della dimostrazione, e "¬G", della famosa proposizione, cui nel nostro mondo non pare possibile attribuire alcun significato, tanto meno aritmetico.
22) Nel libro della nota 3, p. 50.
23) Ivi, p. 48-49.
24) Ivi, p. 51.
25) Vedi 1.

Ivrea, 18/10/2014