Guido Fiorentino

Un esperimento mentale sui fondamenti logici della matematica

Nel nostro linguaggio i *concetti* e gli *attributi* hanno entrambi un ruolo essenziale, ma differente: sono gerarchicamente differenti, come indicano i nomi stessi con cui sono designati i loro rappresentanti più tipici, rispettivamente sostantivi, e aggettivi che implica un carattere solo accessorio; lo sono però ancor più come natura: i concetti sono *insiemi di ricordi* accomunati da una *proprietà fondamentale*, mentre gli attributi indicano *caratteristiche* solo *accessorie* che vi riconosciamo e, come dice la parola, attribuiamo.

Aristotele aveva riconosciuto una differenza molto simile fra sostanze e accidenti, e le relative proprietà, primarie e invece secondarie; aveva però preferito semplificare la logica, giocando sul "valore di verità" dei concetti per considerarli dal punto di vista logico sostanzialmente equivalenti agli attributi:

> I termini che si dicono senza alcuna connessione esprimono, caso per caso, o una sostanza, o una quantità, o una qualità, o una relazione, o un luogo, o un tempo, o l'essere in una situazione, o un avere, o un agire, o un patire. Per esprimerci concretamente, sostanza è, ad esempio, "uomo" o "cavallo"; quantità è "lunghezza di due cubiti", "lunghezza di tre cubiti"; qualità è "bianco", "grammatico"; relazione è "doppio", "maggiore"; luogo è "nel Liceo", "in piazza"; tempo è "ieri", "l'anno scorso"; essere in una situazione è "si trova disteso", "sta seduto"; avere è "porta le scarpe", "si è armato"; agire è "tagliare", "bruciare"; patire è "venir tagliato", "venir bruciato".(1)

Di fatto Aristotele considera i concetti relativi a "sostanze", indicati da sostantivi come "uomo", o "cavallo" - eventualmente accompagnati da attributi, come "lunghezza di due cubiti" - logicamente equivalenti a semplici attributi, nel linguaggio tipicamente aggettivi, relativi a "una quantità o una qualità", come "bianco", "grammatico" ecc., e su quella sostanziale equivalenza dei concetti con gli attributi – anche se non proprio con i più complessi e discutibili esempi del brano - si fondano sia la logica aristotelica, che quella "predicativa" dei logici e dei matematici, che ad essa si attiene e fra i concetti e gli attributi non fa differenza.

Dice infatti Piergiorgio Odifreddi:

> L'analisi logica riduce le più semplici proposizioni del linguaggio alla struttura «oggetto-predicato» dove per «oggetto» si intende qualunque cosa che fa parte del mondo, e per «predicato» qualunque modo di pensare a oggetti (attraverso aggettivi e verbi che ne descrivono proprietà e azioni).(2)

Dà quindi per scontato che obbediscono a una stessa logica, e in base a tale premessa, i concetti ammettono il negato "¬"come gli attributi. Ma il quadro della logica cui i concetti e gli attributi obbediscono nel linguaggio è più complesso.

Solamente pochi attributi, molto importanti, ma particolari, come "vero" e "falso", obbediscono a una logica rigorosamente binaria in cui - sempreché si ignorino le situazioni né vere né false, perché prive di senso o incomprensibili, che non mancano - *tertium non datur*, e i due valori, l'uno negato dell'altro, sono entrambi significativi. Vale invece solo approssimativamente per gli altri attributi, che contemplano tutta una gamma di valori - magari indicati da nomi appositi, come i *colori* - per cui il negato risulta tanto meno significativo quanto più ampia è la gamma dei valori tra i quali si lascia la possibilità di scegliere *come non sono*. Il negato è poi del tutto privo di significato se i valori sono infiniti, come i numeri, più precisamente *aggettivi numerici*, per cui qualunque altro corrisponde al *negato* di un numero (il che nulla ha a che fare col *segno*, positivo o negativo).

Più in generale, lo stesso vale per i numeri quali sostantivi: come per tutti i concetti il negato non ha significato, perché qualsiasi altro corrisponde a *cosa* un concetto *non è*: anziché alla logica aristotelica almeno approssimativamente binaria, che ammette la negazione, i concetti obbediscono a una logica di cui usualmente non si parla, *unaria* perché ammette unicamente l'affermazione; la negazione è ammessa solo come smentita di una precedente affermazione, o quanto meno presunzione.

La distinzione fra i concetti e gli attributi non è quindi una questione di nominalismo, e non può essere ignorata, perché i concetti e gli attributi sono ontologicamente differenti: anche se in gran parte dei casi attenersi alla logica aristotelica che la ignora non dà origine a problemi di rilievo, nel campo matematico non è affatto sempre così.

L'esperimento dimostra che la distinzione è quanto mai opportuna, in primo luogo per la discriminazione fra i due differenti rami in cui si articolano le attività nel campo matematico:

1 - La matematica dei calcoli, in cui intervengono esclusivamente attributi: aggettivi numerici espressi in forma decimale, binaria, o altra, anche simbolica, che obbediscono a una logica rigorosamente binaria(3), del tutto indipendenti, o quasi, dal riferimento a concetti(4): con la logica booleana, vi rientra la scienza dei normali computer, capaci di elaborazioni anche molto complesse, che per i concetti però non vanno oltre il riconoscimento degli aspetti formali dei codici che li rappresentano.
2 - Quella che più propriamente si dovrebbe chiamare metamatematica, in quanto comprende le considerazioni sulla matematica e le sue operazioni, coinvolgendo sia concetti che attributi: è di nostra esclusiva competenza, perché i computer - salvo forse in qualche misura quelli programmati per le ricerche di intelligenza artificiale (AI) - i concetti non sono in grado di elaborarli, anche se ovviamente possono essere di grande aiuto.

La discriminazione è importante, perché secondo che ciò cui ci si riferisce riguarda solo attributi, o anche concetti, appartiene quindi all'uno o all'altro ramo, alcune proposizioni possono risultare vere o false; come il teorema di Church, che Wikipedia così esprime:

> Non esiste nessuna macchina di Turing in grado di determinare se una formula della logica predicativa è valida oppure no.(5)

Se nelle formule della logica predicativa si includono quelle del ramo 1, aritmetiche e algebriche(6), o che comunque comprendono esclusivamente degli attributi – e non c'è alcun valido motivo per non farlo - ciò che il teorema afferma non è vero, perché i computer, e le macchine di Turing, ne possono accertare la validità(7): come l'esperimento suggerisce, ai requisiti per la computabilità corrispondono solo le proposizioni del ramo 1, che non comportano l'intervento di concetti, ma esclusivamente di attributi.

Ciò vale anche per gli Algoritmi di Markov; dice infatti Elliott Mendelson:

> Si ritiene che una funzione $f(x_1, ..., x_n)$ sia effettivamente computabile se esiste un procedimento meccanico per determinare il valore $f(k_1, ..., k_n)$ quando sono dati gli argomenti $k_1, ..., k_n$. La frase "procedimento meccanico" non è certo precisa; ciò che si intende è un procedimento che non richieda alcuna abilità per essere eseguito. Un esempio banale è l'addizione di due numeri interi espressi in notazione decimale. Un altro caso molto noto è l'algoritmo di Euclide per ottenere il massimo comune divisore tra due interi. In questi due esempi sembra intuitivamente chiaro che le funzioni date sono effettivamente computabili; e ciò avviene in generale quando un procedimento effettivo è già stato scoperto. Tuttavia sempre più spesso in matematica ci troviamo ad affrontare il compito di dimostrare che non esistono funzioni effettivamente computabili di un certo tipo o che non esiste alcun procedimento effettivo per risolvere un'ampia classe di problemi.(8)

Simile è anche il caso del *Lambda calculus*, di cui Wikipedia dice:

> **Lambda *calculus*** (also written as **λ-calculus** or called "**the lambda calculus**") is a formal system in mathematical logic for expressing computation by way of variable binding and substitution. It was first formulated by Alonzo Church as a way to formalize mathematics through the notion of functions, in contrast to the field of set theory.(9)

Poiché è un *calcolo*, ha a che fare solo con aggettivi numerici, ossia attributi, per cui il *Lambda calculus* appartiene al ramo 1, non in contrasto ma a differenza della *teoria degli insiemi*, che invece appartiene al ramo 2, perché si interessa in primo luogo ai concetti, e di attributi usualmente nemmeno parla, anche se – come si dice più sotto – vi hanno anch'essi un ruolo essenziale.

In questo stesso ramo rientra la dimostrazione che Gödel ha dato dei suoi teoremi con una metodologia assolutamente innovativa, attenendosi alla logica aristotelica: nella "prova" intende i fattori del gödeliano sia quali aggettivi numerici, che come sostantivi stabiliti dalla codificazione(10), e usa il negato anche per i concetti, che per noi non è ammesso(11), per cui le conclusioni cui giunge attenendosi a una logica binaria che non è la nostra(12) risultano quanto meno dubbie(13).

Pare quindi opportuno rinunziare agli apparenti vantaggi della sostanziale identificazione di concetti e attributi, tanto più di fronte a quelli ben più consistenti che, secondo l'esperimento, la distinzione comporta, particolarmente nel campo insiemistico.

*

Come scienza, l'*insiemistica* nasce con Cantor, che per le ricerche sugli infiniti ebbe l'intuizione di prendere a prestito dal normale linguaggio il nome, e il concetto di *insieme*; i suoi fondamentali risultati hanno però fatto sì che l'insiemistica si identificasse sostanzialmente con le applicazioni matematiche, come se gli insiemi non preesistessero di gran lunga, portando a ignorare i suggerimenti che ne possono venire per la stessa matematica, che l'esperimento mette in luce.

Sono infatti *insiemi* in primo luogo i concetti, che traggono origine dall'esigenza di mettere un minimo di ordine in tutto quanto ci è dato di percepire e pensare, più precisamente nei relativi ricordi, per ricavarne le informazioni indispensabili per l'esistenza. Però i ricordi sono tanti, che mai si potrebbero prendere in considerazione uno per uno, per cui la nostra mente li raggruppa in *concetti*: *insiemi* – anche infiniti, come quelli di Cantor - *di ricordi* in cui riconosce comuni *proprietà* di rilievo per le esigenze della vita.

I concetti che riconosciamo sono però troppi per potervi associare altrettanti codici specifici capaci di rappresentarli ed evocarli nel linguaggio, perché di gran lunga eccederebbero la capacità della nostra memoria di ricordarli: l'evoluzione ha risolto il problema con la distinzione fra *concetti semplici* e *complessi*.

Un numero grande, ma contenuto, di *concetti semplici*, designati da sostantivi o proposizioni, raggruppa i ricordi particolarmente importanti per il carattere generale delle loro *proprietà* e la frequenza dell'uso; gli altri concetti più specifici sono invece designati quali *concetti complessi*: loro *sottoinsiemi* delimitati da *attributi*, aggettivi o forme concettualmente equivalenti ad essi associati, che indicano le *caratteristiche accessorie* che differenziano i ricordi inclusi in essi dagli altri del concetto semplice.

Per le potenzialità espressive del nostro linguaggio, e per il nostro stesso modo di pensare, l'uso combinato di concetti e attributi ha rappresentato un progresso assolutamente determinante: un numero finito di sostantivi e aggettivi, o forme equivalenti, permette di designare un numero illimitato di differenti oggetti, personaggi, eventi, ecc., senza dover coniare altrettanti termini specifici, né ricordare il significato delle illimitate possibili associazioni, che è logicamente determinato dalla loro combinazione. Sfugge però usualmente un'insidia che vi si nasconde.

Le associazioni ai concetti di attributi ne possono delimitare dei sottoinsiemi - a loro volta insiemi a pieno titolo - solo se non sono pleonastiche perché le caratteristiche indicate sono possedute da *tutti* i ricordi del concetto, ma soprattutto se non delimitano degli *insiemi vuoti*, privi di significato perché *nessun* ricordo le possiede. E mentre le parole singole designano *insiemi vuoti* solamente se sono prive di significato, le associazioni di concetti e attributi entrambi significativi possono farlo molto facilmente,se non sono compatibili perché nessun ricordo dei concetti ha le caratteristiche indicate dagli attributi.

Nulla impedisce però di associarli, definendo insiemi vuoti privi di significato; e se poi gli attributi sono quelli particolari, come *vero/falso*, almeno idealmente a due e sue soli valori, ne hanno origine le situazioni particolari che si usano chiamare *paradossi*.

Tipico è ad esempio il caso "paradosso del mentitore", che nella sua "Introduzione alla logica matematica" Elliott Mendelson chiama "semantico"[(14)].

Fra le tante versioni, da "Questa proposizione è falsa", con una sorta di processo alle intenzioni è usuale trarre la conclusione che la proposizione *è vera se e solo se è falsa*, intendendo che ciò che afferma sarebbe vero se "falso" fosse il predicato, un po' arbitrariamente qualificando così il *negato*, ossia il complemento dell'attributo, in quel caso particolare significativo. Ma, comunque, così com'è "proposizione falsa" definisce un insieme vuoto: *non è* una proposizione, perché non propone nulla: è un'espressione priva di significato, ed è questa la sola cosa che conta.

Ragionevolmente, non varrebbe quindi la pena di perdere tempo ad arzigogolare, come invece si usa fare col "mentitore", che ha fatto scorrere fiumi d'inchiostro; lo stesso vale per le formulazioni del tutto analoghe, in cui che l'attributo che delimita un insieme vuoto dando origine al paradosso, anziché dall'aggettivo "falsa" è designato da più parole, o da intere proposizioni con funzione equivalente, o è implicito, come nell'"Io mento", o costituisce la necessaria conseguenza di ciò che si dice, come per Eubulide, che in quanto cretese dice sempre il falso.

Più in generale, le stesse considerazioni valgono per tutte le situazioni paradossali di cui si usa dire che *sono vere se e solo se non lo sono*, quindi anche per i paradossi che Mendelson chiama "logici"[(15)], anziché a proposizioni, relativi a *definizioni* comunque espresse, anche da interi discorsi: è il caso dei paradossi "di Richard", "di Berry", "di Grelling", ecc., in cui concetti e attributi sono volutamente associati perché definiscano insiemi vuoti. Ad esempio, in quello Grelling, l'attributo "eterologico", indica una caratteristica usualmente casuale, e del tutto irrilevante, delle parole la cui forma non ne rispecchia il significato, presa in considerazione solo perché la parola non è eterologica.

E’ però del tutto simile anche il caso - che dovrebbe costituire poco più di una curiosità - in cui gli accoppiamenti incompatibili che danno origine a paradossi, verosimilmente non sono volontariamente scelti, come per quello “del barbiere” cui è ordinato di radere chi non rade se stesso, e soprattutto per il paradosso, o antinomia, “di Russell”, dell’”insieme di tutti gli insiemi che non includono se stessi”, che, mise fine alla speranza di Frege di fondare sugli insiemi la matematica, per cui nell’insiemistica assunse un ruolo determinante.

*

Dice Odifreddi:

L’insiemistica si fonda su due soli principi, che riducono gli insiemi alle proprietà che li definiscono. Anzitutto, il principio di estensionalità, già enunciato da Gottfried Wilhelm Leibniz: un insieme è completamente determinato dai suoi elementi, e due insiemi con gli stessi elementi sono uguali. Inoltre, il principio di comprensione: ogni proprietà determina un insieme, costituito dagli oggetti che soddisfano la proprietà; e ogni insieme è determinato da una proprietà, che è appunto quella di essere un oggetto appartenente all’insieme.[16]

Per Mangione e Bozzi,

La scoperta che su due principi cosi semplici e logicamente elementari si potesse fondare l’intera matematica, fu considerata il punto d’arrivo della sua storia: la geometria era stata ridotta all’analisi, l’analisi all’aritmetica, e ora il lavoro di Cantor e Frege mostrava che l’aritmetica era a sua volta riducibile alla teoria degli insiemi, cioè alla pura logica. [17]

Ma – sempre secondo Mangione e Bozzi - con la sua antinomia Russell ne dimostrò l’impossibilità, storicamente decretando il fallimento del tentativo di Frege:

L'antinomia in questione, forse la più celebre di tutte le antinomie antiche e moderne, o comunque senz'altro la più nota almeno per i riflessi che ha avuto, si può brevemente descrivere come segue. In base al principio di comprensione, a ogni proprietà corrisponde una classe, un insieme ben determinato, il quale a sua volta può essere considerato come un elemento passibile di eventuali predicazioni, e cioè, in termini fregeani, un oggetto, un ente saturo. Orbene, consideriamo la proprietà “non essere elemento di se stesso”; sulla base di quel principio ad esso corrisponderà la classe di tutte e solo quelle classi che non contengono se stesse come elemento; indichiamo tale classe con *R* (da Russell) e chiediamoci: “*R* appartiene o no a se stessa, è cioè elemento di se stessa oppure no? Supponiamo allora che R non appartenga a se stessa: in questo caso, essa dovrà però appartenere a se stessa, in quanto per definizione è proprio la classe di tutte le classi che non si appartengono. Entrambe le ipotesi portano quindi a una contraddizione, siamo cioè di fronte a un’antinomia. [...]

L’antinomia di Russell metteva in crisi proprio il concetto di estensione concettuale, perché faceva vedere che l’assumere, col principio di comprensione, l’esistenza e l’”oggettualità” di tale estensione relativamente a *ogni* concetto era un’assunzione contraddittoria.[18].

Il paradosso indusse Frege ad abbandonare il tentativo di fondare sugli insiemi la matematica: quella fu la causa occasionale, ma impropria, perché se è vero che “l’assumere, col principio di comprensione, l’esistenza e l’”oggettualità” di tale estensione relativamente a *ogni* concetto era un’assunzione contraddittoria”[19], non lo è però affatto necessariamente per *ogni* concetto, ma solo per quelli privi di significato, come l’insieme vuoto definito da Russell col suo paradosso. Il tentativo di Frege era però veramente condannato a fallire, ma il motivo è un altro.

La definizione di Cantor, del 1895:

Con *insieme* intendiamo ogni collezione in un tutto *M* di oggetti definiti e distinti *m* (che saranno chiamati gli elementi di *M*) della nostra intuizione o del nostro pensiero[20].

non fa distinzioni circa la natura, di concetti o attributi, degli “oggetti della nostra intuizione o del nostro pensiero”, atti a soddisfare la “proprietà” richiesta dal principio di comprensione; e Frege, attenendosi al “principio di astrazione”, forzando il “principio di Hume”[21], nei “concetti” includeva gli attributi, per cui riteneva ad esempio di poter definire il numero “tre” servendosi di aggettivi come le “triple”[22].

Mai però l’insiemistica avrebbe potuto nascere se in quel modo Cantor avesse inteso gli “infiniti”: i suoi erano infatti *numeri infiniti*, ossia concetti, e solo i concetti sono atti a definire gli insiemi, non gli attributi con le loro caratteristiche, possedute da un numero illimitato di differenti concetti, che possono solo delimitare dei sottoinsiemi di insiemi esistenti.

Per Paolo Zellini:

Quel che sarebbe stato chiaro di lì a poco era l'incompatibilità del principio che Frege aveva posto a fondamento della pensabilità di una classe: il principio, cioè, di. astrazione (o *comprensione*). Tale principio, nella classica equivalenza tra classi e attributi, poteva riassumersi nel credere che a ogni attributo (o concetto o predicato) corrispondesse la propria 'estensione', cioè l'insieme di tutti gli oggetti per cui era predicabile quell'attributo. Si trattava perciò di uno strumento più o meno consapevole della "libera" attività immaginativa del matematico e del logico, che doveva contrapporsi al clamoroso controesempio dell'antinomia di Russell. Quest'antinomia prospettava appunto un predicato (l'essere una classe elemento di se stessa) cui non corrispondeva una classe non contraddittoria, come dire un attributo senza estensione, una proprietà senza la chiara individuazione degli oggetti che dovevano soddisfarla.(23)

Era però - e tuttora è - opinione indiscussa che la causa del fallimento fosse il paradosso, per cui furono fatti diversi tentativi per evitarlo. Dice Elliott Mendelson:

Tutte queste proposte sono restrittive, per un verso o per l'altro, dei concetti "ingenui" che intervengono nella derivazione dei paradossi. Russell mise in luce che in tutti i paradossi è presente un autoriferimento e propose di associare a ogni oggetto un intero non negativo definito come suo "tipo". Perciò l'espressione "x è un elemento dell'insieme y" è *significante* se e solo se il tipo di y è maggiore del tipo di x. Questo tentativo, conosciuto come teoria dei tipi e sistematizzato e sviluppato da Russell-Whitehead (1910-13), riesce a eliminare i paradossi noti,' ma è macchinoso nella pratica per quanto concerne l'applicazione e presenta alcuni inconvenienti. Una differente critica dei paradossi logici è diretta contro l'assunzione che per ogni proprietà P(x) esiste un insieme corrispondente di tutti gli oggetti x che soddisfano P(x). Se rifiutiamo questa assunzione allora i paradossi logici non sono più derivabili. Tuttavia è sempre necessario introdurre nuovi postulati che ci permettano di dimostrare l'esistenza di quegli insiemi che costituiscono una necessità quotidiana nella pratica matematica. La prima teoria assiomatica degli insiemi di questo genere fu elaborata da Zermelo (1908).(24)

Secondo Mangione e Bozzi, i criteri di scelta degli elementi proposti da Zermelo e Fraenkel per definire gli insiemi, evitando il paradosso, si rivelarono poco efficaci:

Prese alla lettera, le limitazioni di Zermelo del non troppo ristretto e del non troppo ampio sono piuttosto deboli e lasciano spazio a una grande arbitrarietà, in quanto molte teorie degli insiemi reciprocamente incompatibili sono soluzioni possibili. Inoltre, implicitamente sussiste un'ulteriore arbitrarietà nel decidere quali risultati devono essere presi come dati per la ricostruzione, poiché è chiaro che il concetto di "aver valore" (che probabilmente implica anche "essere affidabile") è troppo ambiguo. Supponendo di avere un'idea abbastanza precisa di quali siano i dati, il nostro compito così come è stato descritto suona assai simile a un rompicapo combinatorio che in linea di principi o ammette varie soluzioni. Una situazione del genere non soddisfa il nostro intelletto nemmeno quando si tratta di scienze empiriche.(25)

L'esperimento suggerisce il criterio logico molto semplice ed efficace che, indipendentemente dal paradosso, solo i concetti sono atti a definire validamente gli insiemi, non gli attributi, sono i soli "tipi" da distinguere.

La teoria di Zermelo non lo fa: di volta si riferisce agli uni o agli altri, ma non è indifferente. Ad esempio, l'unione e l'intersezione fra insiemi si danno come ugualmente possibili; ma mentre per l'unione, come somma delle proprietà degli insiemi, non ci sono problemi, l'intersezione è ammissibile solamente fra sottoinsiemi di uno stesso insieme, altrimenti le proprietà che li definiscono risultano mutuamente esclusive. Considerazioni simili valgono per la complementarietà, che ha senso solo fra sottoinsiemi di uno stesso insieme, che posseggono attributi, complementari.

*

Degli attributi, nei trattati però nemmeno si parla; eppure, se sono le *proprietà* degli elementi a determinare *cosa* sono gli insiemi, e i concetti che li rappresentano nel linguaggio, sono invece i loro attributi che, indipendentemente dalla loro natura specifica, li qualificano stabilendo *come* sono, ossia caratteristiche quali la cardinalità e le equivalenze, e se sono attributi omogenei, come gli aggettivi numerici, l'ordinamento. Di fatto, nel designare gli insiemi – ad esempio {1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ...} - i trattati lasciano sottintesi i concetti cui si riferiscono, che in realtà possono essere qualsiasi, purché compatibili, indicando come elementi quelli che in realtà ne sono gli attributi(26).

Gli attributi sono in effetti i soli che contano a quei fini, ma non sono riconosciuti né indicati come tali, e della loro stessa esistenza e funzione, pure essenziali, i trattati nemmeno parlano: ne fanno un tutt'uno con i concetti; ma se si riferiscono agli uni, necessariamente ignorano gli altri, e ciò impedisce di riconoscere il ruolo fondamentale che potrebbero, anzi dovrebbero avere, a complemento dei concetti, per risolvere nel modo più semplice, e naturale, il problema - che Odifreddi considera molto serio - di "generare tutti gli insiemi di uso corrente" evitando il paradosso di Russell:

> Naturalmente, la classe delle *classi* che non appartengono a se stesse è contraddittoria ... L'assioma di comprensione va dunque riformulato, dicendo che una proprietà di *insiemi* determina sempre una classe. Ma in questa forma esso perde molta della sua forza, perché permette allora soltanto di definire classi a partire da insiemi, i quali devono essere già definiti in qualche modo.
>
> E non ci sono soluzioni indolori o eleganti al problema, visto che quella naturale fornita dall'assioma di comprensione è risultata inagibile. Si tratta allora di abbandonare l'approccio «logico», che vorrebbe procedere in base a principi generali, e di adottare un approccio «matematico», limitandosi a elencare una serie di principi particolari di esistenza e di costruzione di insiemi, che permettano pragmaticamente di generare l'utile, cioè tutti gli insiemi di uso corrente, ma allo stesso tempo di evitare il dannoso, cioè tutte le classi paradossali
>
> Una prima lista fu compilata da Zermelo nel 1908, e richiede anzitutto l'esistenza di almeno un insieme, ad esempio dell'*insieme vuoto*, visto che essa non si può dimostrare sulla base dell'assioma di comprensione per le classi. Avendo a disposizione un punto di partenza, si possono poi costruire altri insiemi mediante svariate operazioni, di cui gli assiomi garantiscono appunto la fattibilità.
>
> Una di queste operazioni, la separazione da un insieme di un sottoinsieme definito da una proprietà, costituisce una versione limitata della comprensione. Le altre operazioni costituiscono l'analogo insiemistico delle operazioni aritmetiche: ad esempio, *l'unione*, il *prodotto cartesiano* e l'*insieme potenza* (di tutti i sottoinsiemi) sono versioni della somma, del prodotto e dell'elevamento a potenza per i numeri (oltre che dei connettivi disgiunzione, congiunzione e implicazione).[27]

Se si riconosce la funzione distinta, e complementare, degli attributi rispetto ai concetti, quindi si evitano le associazioni improprie che delimitando insiemi vuoti dando origine a classi paradossali, si ha piena possibilità "pragmaticamente di generare l'utile, cioè tutti gli insiemi di uso corrente" quali sottoinsiemi dei concetti, definiti da tutte le possibili combinazioni dalle *caratteristiche* dei ricordi inclusi, fino a quella che le possiede tutte, che è l'insieme stesso con la *proprietà* fondamentale che lo contraddistingue.

Tutti i sottoinsiemi possono così essere definiti molto semplicemente, e direttamente, dalle caratteristiche stesse che devono avere, esplicitamente indicate dagli attributi, senza essere costretti ad "abbandonare l'approccio «logico»", e "adottare un approccio matematico" complesso come l'elevazione a potenza[28] per generarli, né servirsi delle liste di assiomi né dell'assioma di scelta, di cui para Odifreddi:

> La lista di assiomi di Zermelo fu aggiornata da Fraenkel nel 1922 con l'aggiunta del cosiddetto assioma di rimpiazzamento, che asserisce che i valori di una funzione definita su un insieme costituiscono ancora un insieme: al sistema complessivo ci si riferisce dunque come alla teoria di Zermelo e Fraenkel.
>
> Un ultimo assioma di scelta garantisce la possibilità di effettuare, come dice appunto il suo nome, scelte arbitrarie in insiemi non vuoti, anche senza particolari regole. Ad esempio, se si hanno infinite paia di scarpe e di calze, senza l'assioma si può scegliere una scarpa da ciascun paio (quella destra, o quella sinistra), ma l'assioma è necessario per scegliere una calza da ciascun paio. Applicazioni meno frivole sono ubique in matematica.[29]

*

I concetti sono insiemi di ricordi accomunati da proprietà esclusive, mentre le *caratteristiche* indicate dagli attributi sono comuni a un numero illimitato di ricordi. Di caratteristiche i ricordi inclusi nei concetti ne posseggono una pluralità: un processo di astrazione – diverso da quello fregeano che ignora la differenza fra concetti e attributi – ignora le differenze fra le caratteristiche accessorie dei ricordi inclusi, per concentrarsi su quelle invece comuni, nella cui esclusiva combinazione risiede la *proprietà* che tutte le assomma e contraddistingue i concetti: di lì la loro logica, *unaria*, rispetto a quella binaria che vale per gli attributi, in cui i logici e i matematici vorrebbero costringerli.

Dalla conoscenza delle proprietà dei concetti si possono dedurre le caratteristiche che concorrono a determinarli: anche i computer lo potrebbero fare; ma un processo inverso: la sintesi da una somma di caratteristiche a un concetto che vi corrisponda, non può essere il frutto di un procedimento meccanico: una dissimmetria che ricorda quella fra la deduzione e l'induzione, che Popper ha messo in evidenza[30].

La deduzione è almeno teoricamente possibile come processo logico, mentre l'induzione - chiamando con questo nome il processo inverso, qualunque ne siano le modalità – richiede un colpo d'ala, l'intervento della fantasia: è una nostra prerogativa. Così è anche per la capacità di immaginare e manipolare i concetti: le macchine sono in grado di trattare ed elaborare attributi come i numeri anche meglio di noi, ma cosa sia un concetto solo noi siamo capaci di dirlo.

* * *

1) Aristotele, *Categorie*, 1b 25-28.
2) Piergiorgio Odifreddi, *Il diavolo in cattedra*, Torino, Einaudi 2003, p. 131.
3) Ciò non è in contrasto con quanto detto più sopra della negazione degli aggettivi numerici, perché riguarda il loro *valore*, che può essere indifferentemente essere positivo o negativo.
4) L'unica eccezione molto particolare è rappresentata dai calcoli della velocità, che non può superare quella della luce, per cui per valori prossimi a quella non può rispettare le leggi dell'aritmetica.
5) 4/8/2012.
6) Nelle formule algebriche compaiono anche dei simboli non numerici, usualmente alfabetici, che si riferiscono a dei concetti, ma ne rappresentano esclusivamente il valore numerico, come attributi.
7) Lo dice anche Wikipedia il 4/8/2012, a proposito di una possibile implicazione del teorema: "The universe is not equivalent to a Turing machine (i.e., the laws of physics are not Turing-computable), but incomputable physical events are not "harnessable" for the construction of a hypercomputer. For example, a universe in which physics involves real numbers, as opposed to computable reals, might fall into this category. The assumption that incomputable physical events are not "harnessable" has been challenged, however, by a proposed computational process that uses quantum randomness together with a computational machine to hide the computational steps of a Universal Turing Machine with Turing-incomputable firing patterns".
8) Elliott Mendelson, *Introduzione alla logica matematica*, Boringhieri, Torino 1972, p. 252.
9) "Il ***calcolo*** **Lambda** (anche scritto **λ-calcolo** o chiamato "**calcolo lambda**") è un sistema formale in logica mathematica per esprimere la computazione per mezzo di legame variabile e sostituzione. Fu per primo formulata da Alonzo Church come mezzo per formalizzare la matematica attraverso la nozione di funzioni, in contrasto al campo della teoria degli insiemi". 4/8/2012.
10) In *Cinque platonici a Princeton*, Raffaello Cortina, 2005, John L. Casti riporta a p. 72 quanto lo stesso Gödel afferma: "Un anno dopo aver completato la mia tesi, ho scoperto un modo di codificare qualunque asserzione relativa ai numeri mediante un numero stesso. Tale schema di codifica mi ha consentito di fare in modo che l'aritmetica parlasse di se stessa. Così mi è stato possibile usare i numeri in modo sia sintattico sia semantico. Da una parte, un dato numero rappresentava una codifica di qualche asserzione relativa a relazioni tra numeri, e dunque aveva un contenuto semantico all'interno dell'aritmetica; dall'altra era semplicemente un numero e, in quanto tale, non aveva altro significato. Questo duplice carattere dei numeri mi ha consentito di creare, per qualunque sistema logico coerente, un enunciato della teoria dei numeri che fosse indecidibile – non poteva essere né dimostrato, né refutato - all'interno di quel sistema".
11) Di quella possibilità Gödel si vale per la sua *Prova matematica dell'esistenza di Dio*, a cura di Gabriele Lolli e Piergiorgio Odifreddi, Torino, Bollati Boringhieri 2006 e - come Gabriele Lolli dice nella presentazione di quel libro – per la dimostrazione dei famosi Teoremi del 1931: "Nel 1961 **G**ödel scrisse quattro lettere alla madre esprimendo le sue ragioni per credere in un'altra vita. Altre volte si era limitato a osservare che l'esistenza di Dio e di una vita dopo la morte non erano mai state refutate. Lo stesso dicasi per la possibilità della trasmigrazione delle anime. Qualche volta dava l'impressione di pensare che qualunque credenza potesse essere legittimamente assunta, se non era stata provata logicamente contraddittoria. D'altra parte il suo teorema di completezza della logica afferma proprio questo, per la matematica.".
12) Dice *La prova di Gödel*, di E. Nagel e J. R. Newman, Torino, Boringhieri 1974: "Giungiamo finalmente alla *coda* della stupefacente sinfonia intellettuale di Gödel. Sono stati mostrati i passi con i quali egli ha stabilito la proposizione metamatematica: 'se l'aritmetica è coerente, essa è incompleta'. Ma è possibile anche dimostrare che questa proposizione condizionale, *considerata come un tutto,* è rappresentata da una proposizione *dimostrabile* nell'ambito dell'aritmetica formalizzata.

Questa formula cruciale è facilmente costruibile. Come è stato spiegato […], la proposizione metamatematica 'l'aritmetica è coerente' risulta equivalente alla proposizione 'vi è almeno una proposizione dell'aritmetica che non è dimostrabile'. Quest'ultima è rappresentata nel calcolo formale dalla seguente formula, che chiamiamo 'A': $(\exists y)$ (x) ~Dim (x, y)". [p. 102]: nell'ambito dell'aritmetica formalizzata c'è senza dubbio una formula "~ Dim(x,z)", che rappresenta la proposizione metamatematica: 'la sequenza di formule con numero di Gödel x non è una dimostrazione della formula con numero di Gödel *z*, interpretata in linguaggio metamatematico, la formula afferma che 'vi è almeno una formula dell'aritmetica per la quale nessuna sequenza di formule costituisce una dimostrazione'[p. 93]"; da cui la conclusione che vi è almeno un numero *y* tale che, per ogni numero *x*, *x* non sta

nella relazione Dim con *y*'". Però il nostro mondo non è binario, per cui di "numeri *y*, che *non stanno* in quella relazione", su cui la "prova" si fonda, ce n'è un'infinità, ma non l'*x* che dovrebbe provare l'incompletezza delle proposizioni aritmetiche.
13) In realtà, di proposizioni rigorosamente aritmetiche non dimostrabili né refutabili, di cui i Teoremi affermano l'esistenza non se ne sono viste; sono anzi verosimilmente le sole che possono essere *complete*: per Alfio. Licata, *La logica aperta della mente*, Torino, Codice, 2008, p. 85, un linguaggio sintatticamente preciso e a-semantico costituisce infatti un requisito essenziale per la completezza sintattica. Secondo quanto Casti riporta a p. 145 del libro della nota 10: "«Bene, continuò Weyl, quando ha saputo del teorema di incompletezza, secondo cui ci sono essenzialmente più verità di quelle che riusciamo a dimostrare, Austin ha reagito»: «Chi avrebbe mai pensato il contrario?». Credo che questa battuta riassuma i sentimenti anche di altri matematici, i quali considerano questo teorema più come un trucco linguistico che come un vero e solido risultato matematico".
14) Nel libro della nota 8, p. 11.
15) Ivi, p. 10. La distinzione è molto sottile, perché le proposizioni soggetto-predicato sono in sostanza definizioni.
16) Piergiorgio Odifreddi: *La matematica del Novecento*, Torino, Einaudi 2000, p.201.
17) Corrado Mangione e Silvio Bozzi, *Storia della logica da Boole ai nostri giorni*, Milano, Garzanti 1993, p. 205
18) Ivi, pp. 355- 357.
19) Dice Odifreddi nel libro della nota 4, a p. 212: "La distinzione di Cantor, basata sulla contraddittorietà, è stata riformulata in maniera più efficace da Von Neumann nel 1925. Anzitutto, le «molteplicità» vengono tutte chiamate classi. Le classi che appartengono ad altre classi si chiamano poi insiemi, e quelle che non appartengono ad altre classi si chiamano classi proprie".
20) Riportata da Hao Wang a p. 201 di *Dalla matematica alla filosofia*, Torino, Boringhieri 1974.
21) Dice Âystein Linnebo, dell'University of Bristol: "Neo-Fregean logicism attempts to base mathematics on abstraction principles, that is, on principles of the form: $\S\,\alpha = \S\,\beta \leftrightarrow \alpha \sim \beta$, where the variables 'α' and 'β ' range over items of a certain sort, '§' is operator taking items of this sort to objects, and '~ ' expresses an equivalence relation on this sort of item. At the heart of the neo-Fregean programme lies, for example, the claim that Hume's principle is acceptable as an implicit definition of number: $\#F = \#G \leftrightarrow F \sim G$, where $F \sim G$ states that the concepts F and G are equinumerous". Da Wikipedia, *Abstraction principle*, 9/7/2012.
22) Dice Martin Davis, *Il calcolatore universale*, Milano, Adelphi 2003. pp. 77-78: "Dunque Frege voleva arrivare a definire i numeri naturali in termini puramente logici per poi derivare le loro proprietà utilizzando proprio la sua logica. Così, doveva diventare un concetto logico, per esempio, il numero 3. Come ci si poteva arrivare? Un numero naturale è una proprietà di un insieme, e per l'esattezza il numero dei suoi elementi; dunque il numero 3 è una cosa che hanno in comune collezioni come l'insieme dei cavalli che tirano una troika, l'insieme delle foglie di un trifoglio (nei casi normali), l'insieme *{a,b,c}* delle lettere *a*, *b, c.* Si può dire che due qualsiasi di questi insiemi hanno lo *stesso* numero di elementi senza mai parlare del 3: basta metterli in corrispondenza elemento per elemento. Ebbene, Frege ebbe l'idea di identificare il numero 3 con la collezione di tutti questi insiemi, ovvero con l'insieme delle triple. Possiamo, più in generale, *definire* il numero degli elementi di un insieme dato come la collezione di tutti gli insiemi che possono essergli associati bi univocamente."
23) Paolo Zellini, *La rivolta del numero*, Milano, Adelphi 1885, pp. 62-63.
24) Nel libro della nota 8, p. 205.
25) Nel libro della nota 17, p. 13.
26) Invero, quei numeri potrebbero essere intesi come concetti, tuttavia di *ordinamento* pare più ragionevole parlare in relazione ad aggettivi numerici che ai corrispondenti sostantivi.
27) Nel libro della nota 4, p. 213. Nella stessa pagina, c'è un accenno a questo problema, che l'adesione al principio di astrazione rende insolubile: "La separazione da un insieme di un sottoinsieme definito da una proprietà, costituisce una versione limitata della comprensione".
28) Dice Wikipedia, 18/7/2012: "Dato un generico insieme *A*, esiste un insieme $\mathcal{P}(A)$ tale che, dato un generico insieme *B*, *B* è un elemento di $\mathcal{P}(A)$ se e solo se *B* è un sottoinsieme di *A*.

Per l'assioma di estensionalità questo insieme è unico. Chiamiamo l'insieme $\mathcal{P}(A)$ *insieme potenza* di *A*. Taesto insieme è indicato con il simbolo $\mathfrak{P}(E)$. Quindi l'essenza dell'assioma è: Ogni insieme ha un insieme potenza".
29) Nel libro della nota 4, p. 214.
30) Karl Popper, *Logica della scoperta scientifica*, Torino, Einaudi 1970.

Ivrea, 8/10/2012