LE CARTE DELLA FENICE

È solo dal castello che crolla che nasce il castello

L.A.Bachevski

§1 TOCCO E VEDO (MA NON CREDO)

«Se non vedo nelle sue mani il segno dei chiodi e non metto il dito nel posto dei chiodi e non metto la mia mano nel suo costato, non crederò». Tommaso, in questo passo del Vangelo secondo Giovanni, rappresenta l'uomo, portato a credere solo attraverso i suoi sensi, che crede perfetti. Spesso la ragione ci mostra che i sensi c'ingannano, fornendoci percezioni assolutamente paradossali del mondo esterno.

Il senso percettivo che da sempre l'uomo predilige, come portatore di verità, è la vista ("Se non lo vedo coi miei occhi, non ci credo!"). La scienza e l'arte ci hanno però mostrato come sia invece uno dei sensi più a rischio di abbagli.

Nella storia dell'arte il problema di rendere la tridimensionalità dello spazio nelle due dimensioni della tavola o della tela è stato affrontato più volte, trovando differenti soluzioni. Una di esse, la più antica e, forse, la più nota è la prospettiva geometrica, in cui tutte le linee costruttive parallele tendono d un unico punto di fuga, ma oltre ad essa vi sono anche la prospettiva ottica, teorizzata da Leonardo da Vinci, la messa a fuoco e la sfocatura, per mostrare la profondità spaziale. Gli artisti erano anche ben consci di strani effetti tridimensionali che potevano ottenere nella bidimensionalità, per esempio le anamorfosi.

Tra gli anni Cinquanta e Sessanta del secolo scorso un artista, Maurits Cornelis Escher, al termine della sua carriera affrontò i paradossi legati alla riduzione delle tre dimensioni a due, indagando sullo spazio e sulla sua riproduzione grafica.

L'arte di Escher maturo ruota attorno al concetto di spazio: non più spazio come semplice riproduzione, mediante le leggi della prospettiva scientifica, di un ambiente tridimensionale su una superficie bidimensionale, ma come universo popolato da oggetti ambigui che nascono dall'innaturale appiattimento dello spazio stesso. Escher adopera, infatti, particolari accorgimenti geometrici per sfruttare situazioni limite in cui la percezione umana si fa incerta, mostrando immagini di oggetti esistenti nelle due dimensioni, con parvenza, illusione, di tridimensionalità, ma impossibili nelle tre dimensioni.

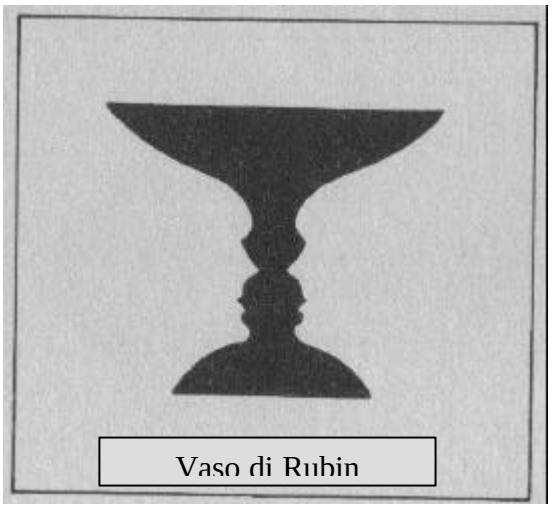
Rifacendosi ad una tradizione fiamminga inserisce nelle sue opere, usando varî punti di vista e prospettive multiple, oggetti che non potrebbero esistere nella realtà tridimensionale che noi percepiamo. Abbiamo così opere come "Belvedere" in cui i rapporti prospettici tra i varî piani della struttura rappresentata non sono rispettati, attraverso una grande abilità tecnica che, ad uno sguardo poco attento, non mostra nulla di straordinario, grazie alle curate proporzioni delle diverse parti che compongono l'edificio. Escher descrisse così quest'opera: «In basso a sinistra, in primo piano, c'è un foglio di carta sul quale sono disegnate le linee di un cubo. Due cerchi indicano i punti nei quali si intersecano le linee. Quale delle linee si trova davanti e quale dietro? In un mondo tridimensionale non possono esistere davanti e dietro contemporaneamente, quindi non possono neanche venir così rappresentati. Si può però disegnare un oggetto il quale, visto dall'alto, ci ridà un'altra realtà, diversa da quella vista dal basso. Il ragazzo seduto sulla panca ha in mano una simile assurdità cubica [detta cubo di Necker]. Egli osserva pensieroso l'oggetto incomprensibile ed evidentemente non sa che il belvedere alle sue spalle è stato costruito allo stesso impossibile modo. Sul pavimento del piano inferiore, all'interno della casa, c'è una scala sulla quale stanno salendo due persone. Una volta salite di un piano, si trovano al di fuori dell'edificio e devono, perciò, rientrarvici. Vi sembra ancora strano che nessuna di queste persone si preoccupi del destino del prigioniero nel seminterrato il quale, lamentandosi, infila la testa fra le sbarre?»

M.C.Escher
Belvedere
1958

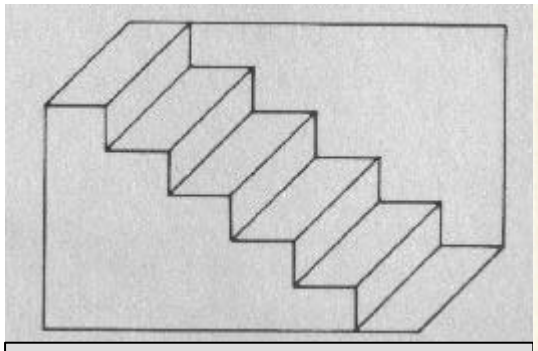
Sempre su questa via di sperimentazione degli edifici impossibili possiamo incontrare una delle opere più belle di Escher: “Cascata”. Scrisse lo stesso Escher di essa: «In un articolo del British Journal of Psychology, R. Penrose pubblicò il disegno prospettico di una costruzione triangolare di travi [detta Triangolo di Penrose]. Essa è composta da travi quadrangolari poste rettangolarmente una contro l’altra. Se seguiamo con gli occhi tutti i componenti di questa costruzione non siamo in grado di trovare nessun errore. Si tratta, invece, di un insieme impossibile, infatti subentrano dei cambiamenti nell’interpretazione della distanza tra il nostro occhio e l’oggetto. Nel disegno, questo triangolo impossibile è stato impiegato tre volte. L’acqua, cadendo, mette in funzione la ruota del mulino per poi scorrere lentamente a zig zag verso il basso in un ripido canale fra due torri, fino al punto dove ricomincia nuovamente la cascata. Il mugnaio deve versarvi, di tanto in tanto, un secchio d’acqua, per compensarne la perdita per evaporazione. Ambedue le torri sono della stessa altezza, ciononostante quella a destra è più bassa di un piano di quella a sinistra.»

M.C.Escher
Cascata
1961

Escher raggiunge dunque con questa opera una delle più mirabili espressioni dell'ambiguità della percezione visiva umana, che viene smascherata nella sua limitatezza e imprecisione: ci mostra infatti che quella che noi possiamo considerare, in due dimensioni, una corretta rappresentazione delle tre non può essere tale, ma deve esserci qualche errore insito nella stessa riduzione dimensionale, tale da ingannare il nostro occhio. Ma la limitatezza dell'occhio umano non è legata solo ai paradossi del passaggio da tre a due dimensioni: vi sono un'infinità di altri paradossi visivi, tanto nelle due quanto nelle tre dimensioni. Alcuni di essi sono: le ruote a raggi, che a certe velocità paiono ferme o addirittura andare al contrario, la stanza di Ames, costruita in modo da scontrarsi con il nostro senso comune prospettico, il cubo di Necker e il triangolo di Penrose di cui abbiamo parlato prima, il vaso di Rubin, che può essere visto sia come una coppa che come due profili, il libro di Mach, che non è chiaro se mostri il dorso o l'interno, e la scala di Schröder, che può sembrare sia vista dal basso che dall'alto, le rette di Zöllner, che sembrano incidenti, ma sono parallele.

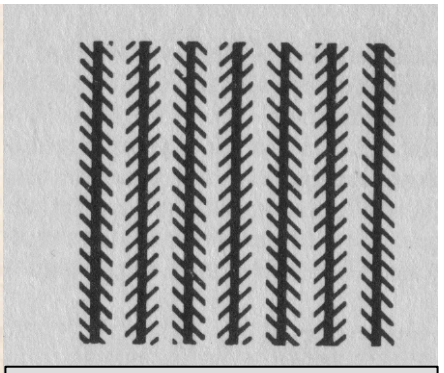


Vaso di Rubin



Scala di Schröder

Libro di Mach



Rette di Zöllner

Ma la vista non è il solo senso limitato da percezioni più o meno paradossali: in situazioni analoghe ci si ritrova, anche se meno frequentemente in virtù del loro minore utilizzo, con gli altri sensi. Ad esempio per l'udito abbiamo l'effetto Doppler, che modifica lo stesso suono a seconda che esso sia in avvicinamento o in allontanamento; per il tatto il paradosso delle "mani immerse", per cui, dopo aver immerso una mano in acqua calda e l'altra in acqua fredda, ponendole entrambe nello stesso bacile d'acqua a temperatura ambiente sentiremo la stessa acqua contemporaneamente fredda e calda.

§2 RIMESCOLIAMO LE CARTE?

Introduzione

Nell'arte moderna, letteraria, visiva, musicale, la coscienza razionalizzatrice e discriminante del lettore si perde nello scomporsi della struttura tradizionale. Come nella struttura rigida ed organizzata domina l'entropia, che aumenta con l'evolversi e lo stabilizzarsi dell'Universo, così è dal caos che l'energia generatrice può creare nuova vita. Di fronte ad una certa arte, pittura, musica, letteratura, che si limita ad una neutra registrazione di una realtà volutamente caotica, di un flusso ininterrotto di ciò che esiste, il lettore può scegliere di usare l'inevitabile senso di sgomento che prova come punto di partenza per trovare un nuovo sistema di giudizio che possa spiegare ciò che il vecchio non era più in grado di spiegare. Di fronte "al fascino del labirinto in quanto tale, del perdersi nel labirinto, del rappresentare quest'assenza di vie d'uscita come la vera condizione dell'uomo… quel che la letteratura può fare è definire l'atteggiamento migliore per trovare la via d'uscita, anche se questa via d'uscita non sarà altro che il passaggio da un labirinto all'altro. È la sfida al labirinto, che vogliamo salvare, è una letteratura della sfida al labirinto, che vogliamo enucleare e distinguere dalla letteratura della resa al labirinto", da I.Calvino, *Menabò*, 1962, n. 5.

In questo perdersi nelle mille immagini di un gioco di specchi, passato e presente, individuo e collettività, interiorità e mondo esterno si confondono. Le carte sul tavolo da gioco sono tutte rimescolate: al lettore spetta la scelta di rinunciare al gioco o di rischiare un gioco di cui non conosce più le regole.

Petronio

In una realtà di questo tipo si immergono e nuotano i personaggi del Satyricon di Petronio: uomini senza una professione, senza un passato, senza uno spazio proprio, che a caso si raggruppano e a caso si dividono, disposti sempre a nuove esperienze, destinati sempre a nuovi fallimenti.

Eludendo gli schemi della letteratura classica attraverso la forma "aperta" del romanzo, Petronio descrive nel Satyricon –il titolo non è dato a caso e si rifà a *satura*- questo rimescolamento di valori, di stili, di culture, di genti… che cominciavano a mettere in crisi la fino ad allora solida struttura dell'Impero romano.

Il Satyricon di Petronio è un testo di grande originalità, se collocato nel contesto storico cui appartiene: è infatti un'opera che non può essere inserita in alcuno dei generi precedenti, da ciascuno di essi prende un poco per rimescolarlo con il resto.

Svariati i generi letterari confluiscono nel Satyricon. Di ognuno di essi Petronio ha conservato qualche elemento, scartando gli altri, in modo da poter fondere il tutto in maniera più agevole. Dalla satira menippea recupera l'uso del prosimetro, cioè dell'alternanza tra prosa e versi, dal romanzo greco la coppia protagonista del racconto e le peripezie, pur con alcune differenze, dalla fabula Milesia le situazioni licenziose non solo nel racconto principale, ma anche nelle digressioni novellistiche quali la matrona di Efeso, dalla tradizione italica del mimo e dell'Atellana le situazioni e i toni triviali, dalla satira l'ironia e il distacco nella descrizione della società contemporanea nei suoi lati peggiori. Riprende anche il poema epico, in particolare nelle descrizioni di peripezie in viaggio, pur in tono parodistico.

Il genere del romanzo e lo stile da lui usato gli servono a caratterizzare un mondo umano che ha perduto quel legame stretto e forte con la realtà, che aveva costituito la forza e la sicurezza della Roma classica: "Et facere et pati fortia Romanum est" (Tito Livio a proposito di Muzio Scevola).

Ma la visione della realtà come contrasto di forze non implica necessariamente una scelta: Petronio descrive il suo tempo con spietata precisione, ma senza ira o passione. Non è né Persio né Giovenale, più violenti nelle loro denunce, ma non è nemmeno Orazio, che sa comprendere e giustificare e per questo distinguere così lucidamente tra il bene e il male. È piuttosto vicino a Marziale. Anche Marziale ama guardare in maniera distaccata e la sua fedeltà nel tradurre ciò che vede, nel

suo rifletterlo come uno specchio, lo porta a distanziarsi dalla realtà che descrive. Se non che Marziale è lui stesso uomo di questa società e non saprebbe viverne fuori, mentre Petronio è sempre al di là della pagina che scrive, guardando ad essa con sguardo attento ma severo.

Tra i tanti personaggi, non ce n'è uno che egli segua con occhio benevolo, tra tante pagine non ce n'è una che riveli un minimo di pietà o simpatia, ma neppure si scandalizza mai, né condanna, qualunque cosa gli capiti di descrivere, lasciandone l'onere al lettore. Se qualche volta un guizzo di rabbia o di stizza gli sfugge è solo là dove la realtà del romanzo coincide con la letteratura e l'arte in genere (pittori egittizzanti dell'epoca pompeiana, retorica asiana) e i termini del giudizio non sono quelli del bene e del male, ma del buono e del cattivo gusto; nella cena Encolpio e Trimalcione rappresentano i due poli opposti: da un lato una finezza di lingua e di modi, un po' astratta ed esangue, dall'altra una volgarità chiassosa e sanguigna.

Dante e il mondo cabbalistico

Di fronte alla consapevolezza della complessità del mondo, della sua mutevolezza e inafferrabilità, la resa all'oggettività è solo una delle opzioni possibili. Un'altra strada è quella di chi, arrivato a capire che le cose fanno parte di un sistema complesso, tenta con nuovi strumenti di organizzare un modello che lo aiuti nell'analisi del sistema stesso.

Dante pellegrino della Terra si trova in Paradiso, un mondo ultraterreno completamente diverso da quello che conosce (non erano così né l'Inferno né il Purgatorio), per cui deve fare un salto oltre la logica comune e, partendo da quello che sa, avanzare a poco a poco nella conoscenza di questa nuova realtà con elementi che ritrova nel Paradiso stesso: salendo verso l'Empireo cielo dopo cielo, man mano che la luce aumenta, aumenta anche la sua capacità visiva di sopportarla e solo affondando lo sguardo nella Vergine potrà giungere alla visione di Dio (Canto XXXII Bernardo, Canto XXIII Trionfo di Cristo).

E quando contempla Dio, Dante stesso dice: "Io credo per l'acume ch'io soffersi
Del vivo raggio, ch'i' sarei smarrito
Se li occhi miei da lui fossero aversi".

In questo contesto si inserisce anche il colloquio che Dante ha con Piccarda Donati nel canto III, quando le chiede se "[…]voi che siete qui felici,
disiderate voi più alto loco
per più cedere e più farvi amici?"

La risposta della beata è, in sostanza, che così ha deciso Dio e così a loro va bene: la loro volontà è talmente pervasa dallo spirito di carità che desidera solo ciò che le è dato e nulla più, anche perché, se volessero salire più in alto, cadrebbero miseramente al suolo, come capitò a Lucifero e, nel mito greco, a Icaro.

Ancora una volta, quando cambia la realtà, l'uomo deve mutare il modo di considerarla, perché appena egli crede assoluta una delle sue conquiste si preclude la possibilità di avanzare nella ricerca del vero. In questo senso va collocato il rimprovero di Beatrice "…Tu stesso ti fai grosso
col falso immaginar, sì che non vedi
ciò che vedresti se l'avessi scosso."
(Canto I). Questo è uno dei problemi filosofici più importanti di tutti i tempi . Ed è significativo che già nel 1300 si accennasse alla necessità di un'interpretazione dialettica della realtà, cioè un'interpretazione che seguisse la dialettica delle cose.

La conquista della verità è uno dei drammi più silenziosi ed ignorati ma più gravi dell'uomo. È un processo sempre volto a superare il nuovo ostacolo che troviamo sulla strada della verità non appena abbiamo affrontato il precedente, un po' come il continuo superare il non-io da parte dell'Io nel cammino verso l'Assoluto illustrato da Fichte. Il poeta sa quanti nobili spiriti abbiano sofferto per la conquista della verità , quanti intelletti si siano affaticati fra discussioni ed errori, quante anime si siano perse nell'ingannevole suggestione dei sofismi del male (Guido da Montefeltro "tu non credevi ch'io loico fossi", Inferno, XXVII) o dei falsi ragionamenti di chi se ne serve per interessi

personali, oppure che si perdono nella ricerca di verità astratte. Al proposito è chiarissimo l'incipit del canto XI:

"O insensata cura de'mortali,
quanto son difettivi sillogismi
quei che ti fanno in basso batter l'ali!
Chi dietro a *iura* e chi ad amforismi
Sen giva, e chi seguendo sacerdozio,
e chi regnar per forza o per sofismi,
e chi rubare e chi civil negozio,
chi nel diletto della carne involto
s'affaticava e chi si dava a l'ozio,
quando, da tutte queste cose sciolto,
con Bëatrice m'era suso in cielo
cotanto glorïosamente accolto."

Nei cieli non conta più la logica umana, le solite vie d'apprendimento non sono sufficienti: bisogna saper leggere oltre le apparenze; in Paradiso, come nella Commedia, bisogna oltrepassare il significato letterale delle esperienze che si vivono e trovare i messaggi nascosti. È Dante stesso che più volte nel corso del suo viaggio ci avverte di andare oltre alla lettura diretta, passando ad altri livelli: quello allegorico, quello analogico e, infine, quello anagogico, che ci porta a Dio. Un primo appello è nell'Inferno, al canto IX: "O voi ch'avete li'ntelletti sani,
mirate la dottrina che s'asconde
sotto 'l velame de li versi strani."

All'inizio del Paradiso subito nel canto II, Dante si rivolge a coloro che lo seguono, affamati e assetati di verità e di Dio: "O voi che siete in piccioletta barca,
desiderosi d'ascoltar, seguiti
dietro al mio legno che cantando varca,
tornate a riveder li vostri liti:
non vi mettete in pelago, ché forse,
perdendo me, rimarreste smarriti.
[…]
Voialtri pochi che drizzaste il collo
per tempo al pan de li angeli, del quale
vivesi qui ma non sen vien satollo,
metter potete ben per l'alto sale
vostro navigio, servando mio solco
dinanzi a l'acqua che ritorna equale."

È un avviso accorato, un "memento" che richiama l'attenzione sulla pericolosità delle esperienze esoteriche: si può perdere la strada e non saper più né proseguire né tornare alla propria spiaggia.

Questo è ciò che avvenne ai primi rabbini che sperimentarono l'estasi mistica della Cabbala. Secondo la leggenda, il rabbino Akiva e tre compagni entrarono insieme nei palazzi della meditazione. La loro esperienza fu così intensa che il primo, il rabbino Ben Azai, diede uno sguardo alla luce infinita e morì, perché la sua anima desiderò raggiungere la fonte della luce tanto ardentemente da abbandonare il corpo e svanire. Il secondo, il rabbino Elisha ben Abuya, diede uno sguardo alla luce infinita e vide due esseri invece di uno; così divenne un apostata. Il terzo rabbino, Ben Zoma, vide la luce infinita della veste di Dio e perse la ragione, perché non riuscì a riconciliare la vita di ogni giorno con tale visione. Soltanto il rabbino Akiva riuscì a sopravvivere a questa esperienza. Il cabbalista rimescola continuamente le carte, in questo caso le lettere di un testo, ma è ben conscio che non si tratta di un gioco: non si scherza con la Torah, essa è il Libro, dalle sue lettere si è formato il mondo; trascrivere la Torah, o una delle sue innumerevoli permutazioni, è un'opera divina, da

portare a termine con diligenza assoluta, perché una sola lettera in più o in meno può determinare la distruzione del mondo. Il cabbalista opera permutazioni del testo, con la Temurah, associazioni tra parole e tra concetti, attraverso la Gematriah, cioè lo studio del numero associato ad un oggetto o un pensiero qualsiasi dal nome che lo identifica, che può essere uguale a quello di un altro concetto, determinando una relazione tra i due. Non nominare il nome di Dio invano, recita il secondo Comandamento; ma il Nome di Dio, quello che ha dato origine all'Universo, è in ogni cosa, quindi non si può affrontare la cabbala per gioco, non bisogna mai scherzare con le conoscenze esoteriche.

Un autore che utilizzò il rimescolare le parole per far riflettere è James Joyce. Egli usò la parola e le parole in modo assolutamente innovativo.

James Joyce and his word usage

Words begin as sounds and end as symbols. While we are growing into articulation, gradually the representative quality of words supersedes in importance their significance as sound. We cease to trouble ourselves about their success as echoes, and speak not so much in words as by means of words. The same thing happens to Stephen Dedalus, for example in Portrait of the artist as a young man, where we find:
His mother said:
-O, Stephen will apologise.
Dante said:
-O, if not, the eagles will come and pull out his eyes. -
Pull out his eyes,
Apologise,
Apologise,
Pull out his eyes.

Apologise,
Pull out his eyes,
Pull out his eyes,
Apologise.

Stephen's reaction is primarily to sound. We can see the same thing in another passage of the portrait: " Suck was a queer word… But the sound was ugly. Once he had washed his hands in the lavatory of the Wicklow Hotel and his father had pulled the stopper up by the chain after and the dirty water went down through the hole in the basin. And when it had all gone down slowly the hole in the basin had made a sound like that: suck. Only louder." Stephen has grown up, so this childish attitude to sounds cannot be attributed to his age anymore: it is the future artist. As the boy grows older, words come to fill him with strange sensations. We know, from Joyce's writings, that the unnamed narrator of the first three stories of Dubliners is Stephen himself. The age of the narrator in the first stories of *Dubliners* is not clear, so that one cannot correlate exactly his reaction there with those in the *Portrait*, but the same preoccupation is recorded: "Every night I gazed up at the window I said softly to myself the word paralysis. It had always sounded strangely in my ears, like the word gnomon in Euclid and the word simony in the Catechism."

Similar thoughts and feelings move the boy throughout his adolescence. It is noteworthy, however, that his artistic yearnings are almost completely submerged during one phase of his religious experience. The incubus of sin crushes every impulse of the artist. But, at last, Stephen, the fearful Jesuit, gives way to Dedalus the artist. In fact, with his entry into the university, Stephen gives full rein to his artistic inclinations. He plays on words as on the strings of a delicate instrument, he listen intently for all the overtones, he lives almost exclusively in a world of word-sensations.

The *Portrait* describes Joyce's linguistic childhood, in which he is gathering strength for *Ulysses*, the product of his manhood. There he has put into applied form his dissatisfaction, the speculations, and the experiments with words which he went through during his nonage. The variety and the ubiquity of the application are unparalleled, and it is difficult to approach the work from any one point of view without becoming involved in a number of others. Joyce usually manages to *reincarnate* a word which today has become so abstract that it is applied almost exclusively to mental experiences, to give it body again. He, for example, drives *translate* all the way back to his original meaning of picking up a concrete thing from a concrete rest, moving it across an intervening space, and bringing it down again on another concrete rest.

In addition to this trick of refreshing a word by pushing it back to an older, more palpable meaning, Joyce employs a grammatical device: the changeability of parts of speech into one another, an adjective into a verb, a noun into an adverb, and so on, either in their existing forms or with syntactical modifications. For example in the Proteus episode, third chapter, Stephen uses the verb *almosting*; Joyce himself remarked apropos of this word: "That's all in the Protean character of the thing. Everything changes: land, water, dog, time of day. Parts of speech change, too. Adverb becomes verb." In this second form of manipulation Joyce does not revivify old words; that is the function of the first form. Here he generally creates new meanings for existing words by extending their usage to other parts of speech. Thus, his renovation of language falls into two categories, the one historical, the other creative.

As regards innovation in the mixed repertory Joyce offers us the most prominent form is onomatopoeia. It may be expressed in various ways, in the order of words, in their choice, in their form.

The order of words is so important, in *Ulysses*, that without it whole sentences would be superfluous. Joyce not only writes a sentence in imitation of a physical fact, but repeats the information in a second sentence, adding nothing new, yet, by a change in order, heightening the imitation: "Gross booted draymen rolled barrels dullthudding out of Prince's stores and bumped them up on the brewery float. On the brewery float bumped dullthudding barrels rolled by grossbooted draymen out of Prince's Stores."

In the choice of words Joyce again and again impresses the ear as well as the eye. Very striking is the description of the clap of the thunder: "A black crack of noise in the street here, alack, bawled back." One sound, used with recurrence and interval, evokes the crackling staccato of sudden, loud, tearing thunder.

Then comes Joyce's experiment with the individual word. In exerting every effort to render the experience in as well as by means of the word, he inevitably meets some which have not been recorded, and the result is neologism. For example, the cat in Bloom's household, impatiently awaiting her morning milk, utters a crescendo of protests:

-Mkgnao!…

-Mrkgnao! the cat cried.…

-Mrkrgnao! the cat cried loudly.

Joyce not only invents new forms of onomatopoeia; he also strikes off the shackles which keep existing forms stiff and unmoving. The imitation is dynamic, extending over a period, reproducing duration, catching in the word the process.

Another form of innovation used by Joyce extensively is distortion. Words are rearranged, lengthened, shortened, often amputated to what D.H.Lawrence called "cabbagestumps". For them the internal monologue is the most fertile soil. Here the characters, communing with themselves, utilize half-words and broken phrases with great frequency.

But the most important principle in the Ulyssean word-technique is the anastomosis of style and subject. The fusion of style with subject has given us some of the most successful of Joyce's chapters, such as the episode of the Citizen, written in Dublin idiom, or the examination paper when Bloom is finally back home.

With each chapter written in a language of its own, no better commentary is needed on the importance of the word in Joyce.
…and yes I said yes I will Yes

James Joyce ed il suo modo di usare la parola

Le parole iniziano come suoni e finiscono come simboli. Mentre sviluppiamo il nostro linguaggio, la qualità rappresentativa delle parole soppianta gradualmente per importanza il loro significato come suoni. Cessiamo di preoccuparci del loro successo come echi e parliamo non più tanto in parole, ma per mezzo di parole. La stessa cosa succede a Stephen Dedalus, per esempio, in Ritratto dell'artista come giovane uomo, dove leggiamo:

His mother said:	Sua madre disse:
- O, Stephen will apologise.	"Oh, Stephen chiederà scusa."
Dante said:	Dante disse :
-O, if not, the eagles will come and pull out his eyes.-	"O sennò verranno le aquile a cavargli gli /
Pull out his eyes,	Cavargli gli occhi, occhi".
Apologise,	Chiederà scusa,
Apologise,	Chiederà scusa,
Pull out his eyes.	Cavargli gli occhi.
Apologise,	Chiederà scusa,
Pull out his eyes,	Cavargli gli occhi,
Pull out his eyes,	Cavargli gli occhi,
Apologise.	Chiederà scusa.

Stephen reagisce in primo luogo al suono. Possiamo vedere la stessa cosa in un altro passaggio del Ritratto: "Succhio era una parola strana……ma il suono era brutto: una volta si era lavato le mani nei bagni dell'hotel Wicklow e suo padre aveva tolto il tappo tirandolo per la catenella e l'acqua sporca era scesa attraverso il buco nel lavabo. E dopo che era scesa tutta lentamente il buco nel lavabo aveva fatto un suono come quello: succhio. Solo, più forte." Stephen è cresciuto, pertanto questa attitudine infantile nei confronti dei suoni non può più venire attribuita alla sua età: è il futuro artista. Man mano che il ragazzo cresce, le parole arrivano a riempirlo di sensazioni strane. Sappiamo, dagli scritti di Joyce, che l'anonimo narratore dei primi tre racconti di Gente di Dublino è lo stesso Stephen. L'età del narratore nei primi racconti di Gente di Dublino non è chiara e pertanto non si può correlare con esattezza la sua reazione lì con quella nel Ritratto, ma è la stessa preoccupazione a venire registrata: "Ogni notte fissavo la finestra mi dicevo sottovoce la parola paralisi. Era sempre suonata strana alle mie orecchie, come la parola gnomone in Euclide e la parola simonia nel Catechismo".

Pensieri e sentimenti simili commuovono il ragazzo attraverso tutta la sua adolescenza. E' tuttavia degno di nota che i suoi intensi desideri artistici siano stati quasi completamente sommersi in una fase della sua esperienza religiosa. L'incubo del peccato stritola ogni impulso dell'artista. Ma, alla fine, Stephen, il pauroso Gesuita, cede il passo a Dedalus, l'artista. Di fatto, con il suo ingresso nell'università, Stephen dà briglia sciolta alle sue inclinazioni artistiche. Egli suona le parole come corde di un delicato strumento, egli ascolta attentamente tutte le sfumature, egli vive quasi esclusivamente in un mondo di sensazioni verbali.

Il Ritratto descrive l'infanzia linguistica di Joyce, nella quale egli raccoglie le forze per l'Ulisse, il prodotto della sua maturità. Là egli ha posto in forma applicata la sua insoddisfazione, le speculazioni e gli esperimenti con le parole attraverso i quali era passato nel suo noviziato. Varietà ed ubiquità di questa applicazione sono senza pari ed è difficile accostarsi all'opera da un qualsivoglia punto di vista, senza venire coinvolti in molti altri. E' tipico di Joyce riuscire a *reincarnare* una

parola, diventata oggi così astratta da venire utilizzata quasi solo in riferimento ad esperienze mentali, e ridarle corpo. Egli, per esempio, riconduce *tradurre* all'indietro, sino al suo significato originale di prendere un oggetto concreto da un sostegno concreto, trasportarlo attraverso uno spazio intermedio per posarlo di nuovo su un altro sostegno concreto.

Oltre a questo trucco, ridare freschezza ad una parola sospingendola all'indietro sino ad un senso più vecchio e più tangibile, Joyce utilizza un congegno grammaticale: la possibilità di cambiare parti del discorso in un'altra, un aggettivo in un verbo, un nome in un avverbio e così via, sia in forme esistenti, sia con modificazioni sintattiche. Nell'episodio di Proteo, nel terzo capitolo, per esempio, Stephen usa il verbo quasare (almosting); Joyce stesso a proposito di questa parola osservò: "E' tutto nel carattere di Proteo della cosa. Tutto cambia, terra, acqua, cane, momento del giorno. Anche parti del discorso cambiano. Un avverbio diventa verbo". In questa seconda forma di manipolazione, Joyce non rianima vecchie parole, che è la funzione della prima forma. In questa forma, in generale, crea nuovi significati per parole esistenti, per mezzo dell'estensione del loro uso ad altre parti del discorso. I suoi rinnovamenti del linguaggio ricadono così in due categorie: una storica, l'altra creativa.

Per quanto riguarda l'innovazione, nell'assortito repertorio che Joyce ci offre, la forma più importante è l'onomatopea. Può essere espressa in vari modi, nell'ordine delle parole, nella loro scelta, nella loro forma. Nell'*Ulysses* l'ordine delle parole è di tale importanza, che, senza di esso, intere frasi sarebbero superflue. Joyce non solo scrive una frase ad imitazione di un fatto fisico, ma ripete l'informazione in una seconda frase, senza aggiungere nulla di nuovo, accrescendo tuttavia l'imitazione, per mezzo di una variazione dell'ordine: "Grossbooted draymen rolled barrels dullthudding out of Prince's stores and bumped them on the brewery float. On the brewery float bumped dullthudding barrels rolled by grossbooted draymen out of Prince's stores" (Carrettieri dagli stivali grossolani rotolavano barili con tonfi sordi fuori dai magazzini Prince e li sbattevano sul carro della fabbrica di birra. Sul carro della fabbrica di birra sbattevano con tonfi sordi barili rotolati da carrettieri dagli stivali grossolani fuori dai magazzini Prince).

Nella scelta delle parole Joyce colpisce ripetutamente sia l'orecchio che l'occhio. Particolarmente impressionante la descrizione del rombo del tuono: "A black crack of noise in the street here, alack, bowled back" (crepitare nero di rumore qui nella strada, ohibò, respinto indietro). Un suono utilizzato ripetutamente, ad intervalli, evoca il crepitante staccato di un improvviso, forte, straziante tuono.

Poi ci sono gli esperimenti di Joyce sulla singola parola. Compiendo ogni sforzo per rendere l'esperienza nella - allo stesso tempo che per mezzo della - parola, egli inevitabilmente ne incontra di non ancora codificate ed il risultato è un neologismo. Per esempio la gatta in casa di Bloom, che aspetta con impazienza il suo latte mattutino, recita un crescendo di proteste:
-Mkgnao!….
-Mrkgnao! Miagolò la gatta….
-Mrkrgnao! Miagolò forte la gatta.

Joyce non solo inventa nuove forme di onomatopea, ma strappa anche le catene che mantengono le forme esistenti rigide e incapaci di commuovere. L'imitazione è dinamica, estesa a tutta la frase, per riprodurre la durata e catturare il processo nella parola.

Un'altra forma di innovazione ampiamente usata da Joyce è la distorsione. Le parole vengono risistemate, allungate, accorciate, spesso amputate sino a ridurle a quanto D.H. Lawrence ha chiamato "torsi di cavolo". Per questi il terreno più fertile è rappresentato dal monologo interiore, nel quale i personaggi, mettendosi in comunione con sé stessi, utilizzano frequentemente mezze parole e frasi mozze.

Ma il principio di maggior importanza nella tecnica della parola dell'*Ulysses* è l'anastomosi di stile e soggetto. La fusione dello stile col soggetto ha prodotto alcuni dei capitoli di maggiore successo di Joyce, come l'episodio del Cittadino, scritto nel dialetto di Dublino, o il compito d'esame, quando Bloom, alla fine, è tornato a casa.

Con ogni capitolo scritto in un proprio linguaggio, non è necessario alcun ulteriore commento sull'importanza della parola in Joyce.
…..and yes I said yes I will Yes.

Raymond Queneau

Il rimescolare le carte sul tavolo, nel senso del giocare con parole e frasi, viene ripreso, con spirito ludico, da Raymond Queneau (1903-1976). A differenza dell'Ulisse e delle altre opere di Joyce, quelle di Queneau non lasciano in bocca al lettore un senso di amaro, di incompiuto, di necessità di una spiegazione: sono opere concluse in se stesse. Magari lasciano un po' di rimpianto, per il loro essere terminate, ma il messaggio nascosto dalle parole è, in genere, assai chiaro, così come quello celato dai giochi con le parole che egli propone al lettore. Egli stesso descrisse le sue opere usando l'immagine di una cipolla: ad ogni strato della buccia di questo vegetale corrisponde un possibile livello di lettura, ognuno valido quanto gli altri; non c'è il messaggio dell'autore, ognuno vi legge qualcosa e n'è soddisfatto.

Come esempio possiamo considerare gli "Esercizi di stile" (1947), in cui il medesimo, banale, episodio viene raccontato in 99 modi diversi. È facile fare un paragone con l'Ulisse e la sua sperimentazione stilistica, ancora più immediato è il parallelo con il decimo episodio dell'opera, "Le strade", in cui si narra lo stesso spazio temporale secondo le diverse prospettive dei vari personaggi. Ma, a differenza di Joyce, Queneau non vuole trasmetterci nessun messaggio nascosto, ma mostrarci le immense potenzialità del linguaggio ordinario; è solo una sperimentazione retorica, non vuole essere un'accusa alla frenetica società di oggi, è un gioco, di cui l'autore ci propone le regole e alcuni esempi, sfidandoci poi a continuare da soli.

Queneau, però, oltre che scrittore è anche matematico, cosicché, ad uno sguardo un po' più profondo, possiamo rintracciare elementi matematici in ogni sua opera; a volte sono appena accennati, a volte più evidenti. Di questo secondo gruppo fa sicuramente parte "Centomila miliardi di poesie" (1961), volume in cui Queneau ha scritto dieci sonetti in cui ogni verso è stampato sopra una striscia di carta, che può essere spostata per mostrare il verso corrispondente del sonetto successivo; in questo modo, dai dieci sonetti di quattordici versi ciascuno, si possono formare 10^{14} diversi sonetti, cioè 100.000.000.000.000, i centomila miliardi del titolo. Il concetto matematico su cui si basa questa raccolta è il calcolo combinatorio. La caratteristica più inquietante è che noi possiamo leggere tutti i versi (sono solo 140), ma non potremo mai, nell'arco di una vita, leggere tutti i sonetti possibili: calcolando per la lettura di un sonetto un tempo di 45 secondi, avremo bisogno di $45 \cdot 10^{14}$secondi; in un minuto abbiamo 60 secondi, in un'ora 60 minuti (cioè 3600 secondi), in un giorno 24 ore (cioè 86400 secondi) e in un anno 365 giorni (che equivalgono a $31536000=31536 \cdot 10^3$ secondi); di conseguenza, tanto per farci un'idea del tempo, dividiamo il tempo necessario in secondi con il numero di secondi in un anno e avremo come risultato il numero di anni necessari alla lettura completa (N.B. in quegli anni non si può fare nient'altro), ebbene il risultato è 142.694.063,92694… anni, che è un numero mostruoso (ah, non abbiamo calcolato che in realtà potrebbero essere un po' meno a causa degli anni bisestili, ma in così tanti anni potrebbe anche non esistere più la Terra). Questo mostra senza dubbio sia le potenzialità del linguaggio che quelle del genio umano, ma sottolinea anche che la matematica non è estranea ad alcun ambito della vita.

§3 LA MATEMATICA PERDUTA

Filosofia della scienza

La filosofia della scienza, o epistemologia, è una disciplina abbastanza recente, sviluppatasi nell'Ottocento, ma si possono trovare anticipazioni dei temi da essa trattati fin dalla filosofia antica: si pensi ad esempio alla dottrina aristotelica della scienza, alla metodologia galileiana, a quella cartesiana, alla teoria dell'induzione di Francis Bacon, all'indagine gnoseologica portata avanti da Kant nei *Prolegomeni ad ogni futura metafisica che si presenterà come scienza*. Nonostante queste anticipazioni, è solo nell'Ottocento, in seguito alle profonde trasformazioni che subiscono le scienze, tanto nei contenuti, quanto nel metodo, che inizia la crescita della filosofia della scienza propriamente detta, che nel giro di un secolo si libererà da ogni legame di subordinazione alla gnoseologia.

Per quanto riguarda gli argomenti della filosofia della scienza, essi possono essere distinti, per una comoda esposizione, in cinque gruppi, pur essendo numerosi e tutt'altro che trascurabili i legami tra tali raggruppamenti.

1. Problemi relativi a quella che può essere chiamata un'opera di chiarimento e precisazione delle nozioni strutturali del discorso scientifico. Uno dei compiti principali della filosofia della scienza è, infatti, quello di offrire una delucidazione dei concetti basilari e più generali (ovvero comuni alle varie discipline) in cui si articola il discorso scientifico.
2. Un secondo gruppo di argomenti riguarda la classificazione delle diverse discipline scientifiche e i fondamenti delle diverse scienze. Rientra in questo ambito la questione se, ed eventualmente come, sia possibile tracciare una distinzione tra le scienze formali (matematica, logica) e quelle empiriche o reali, a loro volta distinte in scienze naturali (fisica, chimica…) e scienze umane (psicologia, sociologia, storiografia…).
3. Un terzo gruppo di problemi concerne il rapporto teoria-esperienza nella ricerca scientifica. Rientrano in tale settore tanto le discussioni sull'esistenza di una dicotomia tra linguaggio teorico e linguaggio osservativo, quanto le ricerche volte a chiarire la natura dell'esperimento scientifico e della possibilità logica dell'inferenza scientifico-sperimentale con le contrapposizioni fra razionalismo ed empirismo e fra deduttivismo e induttivismo a proposito dei criteri di valutazione e di accettazione delle ipotesi scientifiche.
4. Un ulteriore gruppo di problemi riguarda il processo di sviluppo della conoscenza scientifica e la portata conoscitiva delle teorie scientifiche; ci si chiede, in poche parole, se le costruzioni teoriche della scienza vadano considerate descrizioni più o meno esatte e particolareggiate dell'effettiva struttura della natura, oppure, al contrario, pratici strumenti intellettuali con cui gli uomini hanno ritenuto opportuno modellizzare le proprie rappresentazioni mentali della struttura interna del cosiddetto mondo reale.
5. L'ultimo gruppo di problemi riguarda i rapporti tra la scienza e le altre forme della cultura (arte, religione, politica, morale…), nonché l'organizzazione economico-sociale. Rientrano in questa tematica la trattazione dei problemi concernenti i condizionamenti storici dell'opera degli scienziati (cfr. Marx), le implicazioni sociali dell'organizzazione e dei risultati del lavoro scientifico e, più in generale, il rapporto tra le attività scientifiche e il mondo dei valori umani.

Auguste Comte, nato a Montpellier nel 1798 e morto a Parigi nel 1857, è considerato il padre del Positivismo. È il primo ad elaborare una vera e propria filosofia della scienza, la quale si basa su una legge di sviluppo della conoscenza umana per stadi, su una diversa e innovativa classificazione delle scienze, su un nuovo rapporto tra scienza (e filosofia della scienza) e società e su una nuova filosofia della storia. Secondo quest'ultima il progresso dell'uomo deve avvenire in tre tappe fondamentali e successive: lo stadio teologico o fittizio, lo stadio astratto o metafisico e lo stadio scientifico o positivo.

Nel primo stadio l'uomo cerca la spiegazione degli eventi naturali nelle entità religiose. In questo stadio la caratteristica umana predominante è la fantasia, ovvero la tendenza a immaginare divinità e forze magiche. La società corrispondente è fondata sullo schiavismo e sulla guerra; il governo è di tipo teocratico-militare.

Il secondo stadio è critico e distruttivo nei confronti dei resti del primo stadio; l'umanità cerca la spiegazione dei fenomeni naturali non più in entità magiche o divine, ma in concetti astratti. Nella società il secondo stadio si riflette con l'individualismo, l'egoismo, l'utilitarismo che spaccano uno Stato fondato su un patto che troppo spesso viene trascurato in nome di interessi economici, politici o ideologici.

Il terzo stadio è quello che nasce dalle teorie scientifiche di metodo proposte da Galileo, da Cartesio e da Bacone: si sostituisce alla fantasia e al ragionamento astratto l'osservazione e l'attinenza ai fatti. Non è più il *perché* il primo punto da indagare, ma il *come*, da cui si derivano le leggi della natura che puntano innanzitutto all'osservazione e, solo in seguito, alla previsione. Lo stadio positivo dell'umanità sarà completamente attuato solo quando tutte le attività umane avranno adottato il metodo scientifico.

Comte distingue poi le scienze in tre categorie, in ordine crescente di semplicità e generalità: fisica organica (biologia, sociologia), fisica inorganica (astronomia, fisica, chimica) e matematica, che, per il suo carattere di massima generalità e semplicità, serve di base a tutte le altre.

Per Comte il compito della filosofia positiva è aiutare l'introduzione del metodo scientifico in tutte le branche del sapere umano. Essa diviene studio della consequenzialità logica e si occupa di studiare i linguaggi che stanno alla base delle scienze.

John Stuart Mill (1806-1873) insistette sulla sociologia comtiana, condividendo il principio secondo il quale è possibile una scienza dei fenomeni umani modellata sulla fisica. Oltre a questo indagò a fondo sulla logica, di cui sosteneva l'origine psicologica, non soltanto dei procedimenti, ma anche degli stessi principi di base. Egli rifiuta la conoscenza umana dell'universale e dà di conseguenza solo valore parziale all'induzione e alla deduzione. Da ciò deriva che anche la conoscenza debba essere legata al particolare e vada dal particolare al particolare: non è possibile trovare una legge certa, una teoria può essere definita vera finché l'esperienza non la contraddice, pur nei limiti riconosciuti della conoscenza empirica e delle percezioni umane. Si può vedere in Mill un primo spunto di quella che sarà poi la filosofia intuizionista.

A questo punto si inserisce il dibattito sui fondamenti della matematica, che si svilupperà poi come una branca parallela, di cui parleremo più avanti.

Arriviamo così al Neopositivismo, nato in Austria dopo la prima guerra mondiale. Tre dei suoi sostenitori, Hahn, Neurath e Carnap, stesero un manifesto programmatico nel 1929, intitolato "La concezione scientifica del mondo"; qui essi sostenevano i punti salienti del pensiero neopositivista: la volontà di raggiungere l'unificazione della scienza (nello spirito positivista), la necessità del lavoro collettivo all'interno della scienza, l'identificazione del metodo della chiarificazione dei concetti con l'analisi logica dei predicati, il programma di distruzione della metafisica, lo sviluppo di linguaggi formali per superare le ambiguità dei linguaggi ordinari e creare una lingua scientifica perfetta e il rifiuto di ogni apriorismo. A partire dal manifesto possiamo individuare nei vari filosofi che hanno aderito al neopositivismo alcune caratteristiche comuni:

1. le uniche proposizioni che hanno significato conoscitivo sono quelle suscettibili di verifica empirica o fattuale (criterio di significanza)
2. poiché la scienza si basa sulla verifica, essa rappresenta l'attività conoscitiva per eccellenza
3. le proposizioni della metafisica sono senza senso nell'ambito della conoscenza, trascendendo l'umanamente verificabile
4. attività come la metafisica, la religione e l'etica non forniscono conoscenza, in quanto si configurano soltanto, nelle parole di Carnap, come "il bisogno dell'uomo di esprimere il

proprio sentimento della vita, il proprio atteggiamento emotivo e volitivo verso l'ambiente, la società, i compiti cui è dedito e le traversie che deve sopportare"

5. gli enunciati significanti possono venire classificati secondo la dicotomia humeana tra enunciati di relazioni tra idee (come gli enunciati matematici) e di fatti (come quelli della fisica): i primi, secondo l'insegnamento di Wittgenstein, sono visti come tautologie, mentre i secondi acquistano verità solo se testimoniati dall'esperienza; i primi sono analitici, i secondi sintetici, come sosteneva Kant
6. la filosofia non è una scienza, ma un'attività chiarificatrice che ha come compito principale l'analisi del linguaggio della scienza e la denuncia dell'insensato linguaggio metafisico
7. la scienza, al di là della differenziazione delle singole discipline, è una sola; ciò consente di elaborare una visione unitaria e unificata del sapere, che comprende tanto le scienze naturali quanto le scienze sociali come l'economia e la sociologia
8. il discorso scientifico è esclusivamente logico e formale; ha il compito di tradurre le procedure scientifiche in modelli linguistici aventi valore di norma e di previsione.

Tra i neopositivisti riveste un ruolo assai importante, specie nelle indagini sul linguaggio, Rudolf Carnap (1891-1970). Carnap considera sin dall'inizio della sua indagine il linguaggio come un contesto di relazioni, piuttosto che come un atomismo di proposizioni, come era nel Tractatus di Wittgenstein. Inoltre riconosce il carattere arbitrario e convenzionale del sistema di relazione in cui il linguaggio (logico) consiste. Egli generalizza il concetto hilbertiano di metamatematica e studia le regole formali che valgono per un certo linguaggio, operando sui segni e sulle espressioni e prescindendo dal loro significato. Questo è possibile parlando di un linguaggio-oggetto in un linguaggio di livello superiore, detto metalinguaggio, procedimento che consente di distinguere gli enunciati ben formati da quelli che violano le regole di formazione. Carnap sostiene, enunciando il principio di tolleranza, che non esiste il linguaggio assoluto e corretto a priori, ma esiste una molteplicità di linguaggi diversi tra loro: "Non è nostro compito stabilire proibizioni, ma soltanto giungere a convenzioni… In logica non c'è morale. Ognuno può costruire come vuole la sua logica, cioè la sua forma di linguaggio. Se vuole discutere con noi, deve solo indicare le regole sintattiche con cui lo vuole fare, non argomenti filosofici." Esistono quindi regole ben definite valide per qualsiasi linguaggio, a fianco di regole proprie di ognuno. Le regole comuni sono regole di natura sintattica, cioè esprimono esclusivamente la possibilità di combinazione dei termini linguistici negli enunciati. In questa formalizzazione dei linguaggi è possibile individuare, a partire dalle regole assegnate, le proposizioni prive della dovuta correttezza, come quelle della metafisica.

Fondamenti della matematica

Nel corso della storia si è tentato più volte di basare la matematica su solide fondamenta. Questa tendenza non è venuta meno nel Novecento, anche se c'è stata una svolta: le fondazioni non si basano più sugli oggetti della matematica classica, ma su nuovi concetti, che hanno mutato l'identità formale e sostanziale della matematica stessa.

Gli insiemi

Una delle prime fondazioni tentate, già alla fine dell'Ottocento è quella legata agli insiemi: Frege sviluppò l'approccio insiemistico al problema dei fondamenti della matematica con il fine di mostrare che la matematica aveva, in fin dei conti, una natura esclusivamente logica, sia nei concetti che negli oggetti. Egli diede quindi vita a quella che fu successivamente detta teoria ingenua degli insiemi, basata su due soli principi, tali che riducessero gli insiemi alle relazioni che li generavano: il principio di estensionalità, introdotto già da Leibniz, che afferma che un insieme è determinato dai suoi elementi e, quindi, insiemi aventi elementi uguali sono uguali, e il principio di comprensio-

ne, che afferma che ogni proprietà determina un insieme degli oggetti che soddisfano tale proprietà e che ogni insieme è determinato da una proprietà.

Lo scenario risultante era idilliaco, per i filosofi della matematica che si occupavano di fondazionismo: la geometria era stata ridotta all'analisi, mediante la geometria analitica, l'analisi all'aritmetica e ora l'aritmetica, attraverso due soli principi era ridotta alla teoria degli insiemi, cioè a pura logica. Per fare ciò Frege parte da tre concetti primitivi, oltre ai due principi già enunciati. I tre concetti sono: *insieme*, *insieme vuoto* (che dimostra essere unico) ed *equipotenza* o *equinumerosità*. Egli comincia mostrando che da questi tre concetti, o meglio dai primi due, si possono ottenere tutti i numeri naturali. Per fare ciò associa ad ogni insieme (o classe, in questa fase i due termini sono ancora equivalenti), partendo dall'insieme vuoto, la sua potenza o cardinalità, cioè il numero di elementi che esso contiene. Procede in questo modo: prende l'insieme vuoto e gli associa il numero di elementi che contiene, cioè 0, poi considera l'insieme che contiene l'insieme vuoto e gli associa il numero 1, ancora considera l'insieme che contiene sia l'insieme vuoto sia l'insieme che contiene l'insieme vuoto e gli associa il numero 2 e così via.

Ma già nel 1902 Bertrand Russell mostrò che questa fondazione non era consistente: il principio di comprensione, infatti, generava paradossi ed era quindi contraddittorio. L'esempio portato fu questo: l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi appartiene o no a se stesso? Se appartiene a se stesso significa che non appartiene a se stesso, ma se non appartiene a se stesso allora deve appartenere a se stesso. La soluzione del dilemma passa attraverso la distinzione tra insieme e classe: un insieme è una classe che appartiene ad altre classi, le classi che non sono insiemi sono dette classi proprie. In questo modo Russell pose la base per la successiva teoria dei tipi, cioè di classi che non possono appartenere a classi dello stesso tipo, ma solo a classi del tipo successivo.

Altre soluzioni per porre rimedio all'inconsistenza del principio di comprensione sono quelle che passano attraverso la fondazione assiomatica della teoria degli insiemi. Il sistema di assiomi che oggi è utilizzato è quello di Zermelo-Fraenkel[1], anche se Kurt Gödel ha dimostrato, nel 1931, con il teorema di incompletezza che è impossibile formulare un sistema di assiomi definitivo per la teoria degli insiemi.

Il logicismo

Dopo il fallimento del primo approccio di fine secolo ai fondamenti della matematica, parallelamente alla scuola assiomatica che aveva generato i primi sistemi, da cui si nascerà quello di Zermelo-Fraenkel, all'inizio del Novecento si svilupparono altre scuole di pensiero. La prima è nota come scuola logicista, i cui fondatori sono Bertrand Russell e Alfred North Whitehead. La scuola inizia sviluppando la logica stessa, da cui la matematica segue senza alcun assioma aggiuntivo. Nei Principia Mathematica , opera dei due matematici, la logica viene sviluppata a partire da alcuni assiomi di logica, da cui si sviluppano teoremi per i ragionamenti successivi. In questo modo vengono dimostrati, e non più presi come postulati, i principi stessi della logica, come il terzo escluso o i sillogismi aristotelici. Proseguono poi mostrando come la teoria dei tipi, che essi vanno sviluppando a partire dalle proposizioni logiche, sia esente dai paradossi che affliggono invece la teoria degli insiemi.

Dopo le proposizioni e le funzioni proposizionali, che sono relazioni associative basate su proposizioni logiche, i due autori passano alla teoria delle classi, per poi definire numero cardinale come la classe di tutte le classi simili ad una classe data, dove due classi simili sono due classi non

[1] Gli assiomi di Zermelo-Fraenkel sono: **1.** Due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi. **2.** Esiste un insieme privo di elementi, detto insieme vuoto. **3.** Se A e B sono degli insiemi, esiste un insieme i cui unici elementi sono A e B. **4.** L'unione di insiemi è un insieme. **5.** Esiste un insieme I di cui l'insieme vuoto è elemento e che, se x appartiene a I, l'unione di x e di {x} appartiene ad I. (Questo assioma implica l'esistenza di insiemi infiniti). **6.** Per ogni relazione R e per ogni insieme I, esiste un insieme I' che ha per elementi gli elementi di I che soddisfano la relazione R. **7.** Per ogni insieme I esiste un altro insieme avente per elementi i sottoinsiemi di I. **8.** Nessun insieme è elemento di se stesso. **9.** Dato un insieme qualsiasi di insiemi non vuoti disgiunti, esiste almeno un altro insieme che ha uno ed un solo elemento in comune con ciascuno dei suddetti insiemi non vuoti. (Assioma della scelta).

uguali che possono essere messe in relazione biunivoca. Dai cardinali o naturali, poi, è possibile costruire i sistemi dei numeri interi, razionali, reali, complessi, le funzioni e, di fatto, tutta l'analisi.

La teoria logicista ha sollevato molte critiche, di cui una particolarmente acuta: se l'idea logicista fosse corretta, allora tutta la matematica sarebbe una scienza formale, puramente deduttiva in cui i teoremi seguono dalle leggi del pensiero assiomatizzate. Non si spiega la nascita non logica né empirica di concetti matematici, come avviene attraverso la creatività degli individui che fanno matematica. Senza dubbio, però, il logicismo ha avuto il pregio di sviluppare enormemente la logica simbolica matematica.

L'intuizionismo

Un gruppo di matematici detti intuizionisti ebbe un approccio alla matematica completamente differente. La filosofia intuizionista nacque alla fine dell'Ottocento per opera di Kronecker: egli rifiutava tutti gli insiemi numerici che non avessero una strettissima correlazione con gli interi, il cui rapporto con essi non fosse intuitivo. Partendo da questo principio egli accettava i razionali, ma rifiutava gli irrazionali e i complessi, così come tutte le branche della matematica ad essi connesse, come l'analisi infinitesimale. Affermava che "Dio ha creato i numeri interi, tutto il resto è opera dell'uomo."

Agli inizi del XX secolo le sue idee furono riprese da Poincaré, che era come Kronecker contrario a tutto ciò che non fosse comprensibile intuitivamente e a tutti i concetti non definibili in un numero finito di parole, come gli insiemi transfiniti di Cantor, che non erano matematica ma misticismo.

Il principale esponente della corrente intuizionista fu però Brouwer. Per lui l'intuizione fondamentale è l'avvenire delle percezioni in successione temporale, quindi "la matematica nasce quando l'oggetto della dualità, che risulta dal passare del tempo, viene astratto da tutti gli avvenimenti particolari." Per Brouwer, dunque, i numeri e la matematica nascevano dal tempo, come avevano già asserito Kant e Schopenhauer. Egli concepisce il pensare matematico come un processo costruttivo che edifica un proprio universo, indipendente dall'universo della nostra esperienza e come un disegno libero, limitato solo dal fatto di essere basato sull'intuizione matematica fondamentale. Le idee matematiche, nella mente umana, vengono prima di linguaggio, logica ed esperienza: è l'intuizione, non la logica o l'esperienza, che determina l'accettabilità e la validità delle idee.

Per quanto riguarda la logica, Brouwer afferma che alcuni principi sono intuitivi, altri non lo sono e, a differenza dei primi, non possono essere usati per le inferenze: alla seconda categoria appartiene, per esempio, il principio del terzo escluso, che viene così negato, aprendo la porta alle proposizioni indecidibili. Un altro punto di rottura si ha con il concetto di infinito, che per gli intuizionisti ha senso solo in potenza, come esistenza sicura di un insieme finito più grande di un insieme finito dato, non in atto come nella teoria dei transfiniti, che gli intuizionisti rifiutano.

Il formalismo

La terza scuola, che fa capo a Hilbert, è nota come scuola formalista. Essi affermano che la matematica propriamente detta è un insieme di sistemi formali: ciascuno costruisce la propria logica insieme alla matematica, ciascuno ha i propri concetti, i propri assiomi, le proprie regole di deduzione dei teoremi, le proprie regole per l'uguaglianza e la sostituzione, i propri teoremi. Per i formalisti vale il principio del terzo escluso, fondamentale in analisi ed hanno pienamente senso gli insiemi transfiniti di Cantor. Per essi una proposizione è vera se e solo se può essere ottenuta come ultimo elemento di una successione di proposizioni tali che ogni proposizione della successione o è un assioma del sistema formale, o è a sua volta derivata da una delle regole di deduzione: per questo motivo è sempre verificabile la correttezza di una sequenza di proposizione e, di conseguenza la verità della proposizione data. Verità e rigore sono quindi ben definiti e oggettivi.

Tuttavia il risultato di Gödel, azzerando le certezze di completezza di un qualsiasi sistema formale, insieme agli assiomi di Zermelo-Fraenkel ha trascinato nell'abisso anche la teoria dei tipi e la matematica formalista. Weyl ebbe a commentare ciò con la storica frase "Dio esiste perché la matematica è coerente e il diavolo perché non possiamo dimostrarlo."

Le strutture

La fondazione insiemistica ha il grande svantaggio di aver avuto poca influenza sul mondo dei matematici, interessando più i logici e i filosofi della matematica, anche se ha fornito loro due contributi di grande valore: la teoria cantoriana degli insiemi infiniti e un pratico linguaggio simbolico per la formalizzazione univoca dei sempre più astratti concetti adoperati oggi in matematica. Negli anni '30 vi fu il tentativo di un'analisi non più logica, ma strutturale della matematica. In generale si tenta di astrarre dai concetti e dalle loro mutue relazioni le proprietà degli oggetti stessi. Le strutture (topologiche, d'ordine…) esistevano già prima di Bourbaki, il gruppo che portò avanti questo tentativo di fondazione matematica, ma il suo grande contributo fu mostrare che un numero abbastanza ristretto di strutture permetteva di fondare la matematica intera, essendo sufficiente per trattare un gran numero di campi il più disparati possibile.

Le categorie

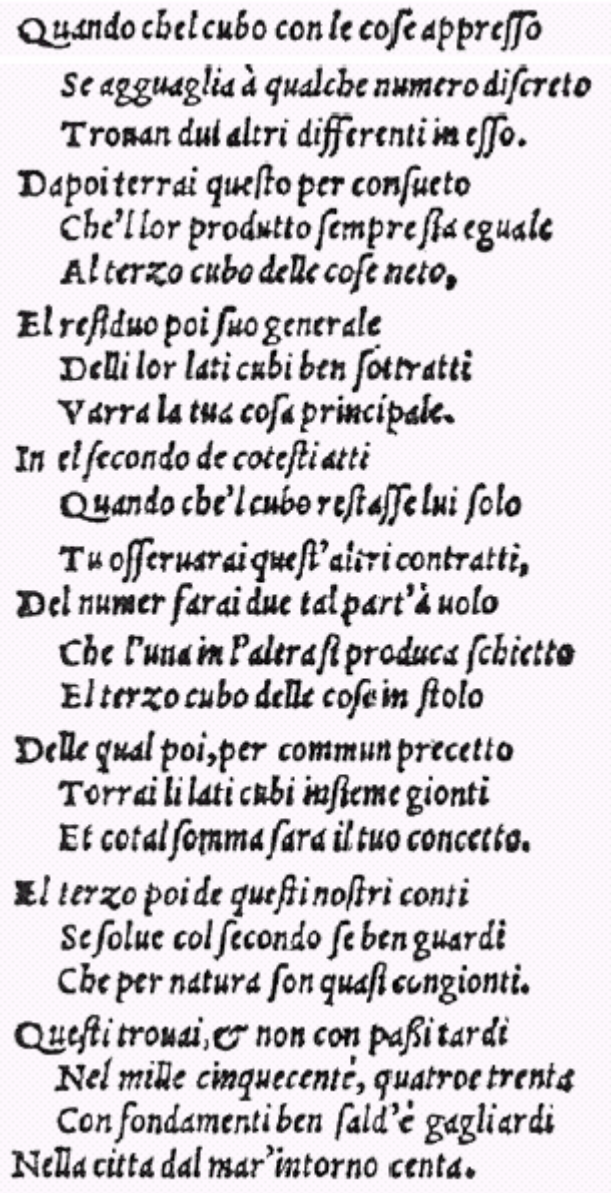
Nella maggior parte della matematica le fondazioni insiemistica e strutturalista furono considerate soddisfacenti, ma in alcuni campi, per quanto ristretti, esse non erano ancora sufficienti: vi era necessità di altri concetti più estesi. Furono quindi introdotte, negli anni '40, le categorie; esse invertivano il processo di astrazione portato avanti dall'insiemistica e dallo strutturalismo, considerando la classe di tutti i possibili esempi di una struttura di un certo tipo, collegati da tutte le possibili funzioni che ne preservano la struttura. Perché il concetto di categoria si possa però considerare un'analisi del concetto di struttura, è necessario un nuovo sforzo di astrazione: si tratta, cioè, di determinare che cosa ci sia di comune fra i vari esempi di categorie ottenuti dalle varie strutture. Un grande sviluppo in questo campo fu la scoperta che tutti gli esempi condividono il fatto di essere costituiti da una classe di insiemi collegati da funzioni che si possono comporre tra loro in maniera associativa, e fra le quali c'è sempre almeno la funzione identica.

Seguì poi l'osservazione che, poiché le funzioni portano automaticamente con sé gli insiemi dei loro argomenti e dei loro valori (dominio e codominio), di questi insiemi non c'è in realtà bisogno di parlare: in questo modo ci si stacca completamente dai residui della teoria ingenua degli insiemi e si fonda la matematica in maniera autosufficiente, non più sui concetti di insieme e di appartenenza, ma su quelli di funzione e composizione.

§4 LA MATEMATICA RITROVATA

La matematica come linguaggio

Nella sezione dedicata alla filosofia della scienza e della matematica abbiamo visto come il linguaggio della logica simbolica, cui noi siamo abituati ad associare la matematica, si sia sviluppato solo nell'Ottocento. Prima la matematica si faceva a parole, o meglio, ciascuno usava per i propri conti il suo simbolismo, poi l'esposizione avveniva a parole, senza simboli per l'uguaglianza, le operazioni o le incognite. Vi sono addirittura casi di matematici che hanno inviato le proprie soluzioni ai colleghi scrivendole sotto forma di filastrocche o brevi poesie, come Niccolò Tartaglia, che inviò la propria formula risolutiva dell'equazione di terzo grado al rivale Gerolamo Cardano nei versi che vediamo qui accanto. Se questa mancanza di simbolismi sembra assurda basta andare un po' indietro nel tempo per vedere come sia stata tarda l'introduzione dello zero e della notazione posizionale nella matematica occidentale: essa avvenne, per piccoli passi, solo tra il 1100 e il 1300.


Quando che'l cubo con le cose appresso
Se agguaglia à qualche numero discreto
Trouan dui altri differenti in esso.
Dapoi terrai questo per consueto
Che'l lor produtto sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose neto,
El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratti
Varra la tua cosa principale.
In el secondo de cotesti atti
Quando che'l cubo restasse lui solo
Tu osseruarai quest'altri contratti,
Del numer farai due tal part'à uolo
Che l'una in l'altra si produca schietto
El terzo cubo delle cose in stolo
Delle qual poi, per commun precetto
Torrai li lati cubi insieme gionti
Et cotal somma sara il tuo concetto.
El terzo poi de questi nostri conti
Se solue col secondo se ben guardi
Che per natura son quasi congionti.
Questi trouai, & non con passi tardi
Nel mille cinquecente, quatroe trenta
Con fondamenti ben sald'e gagliardi
Nella citta dal mar'intorno centa.

Tornando al linguaggio matematico: se fino a poco tempo fa non si usava il simbolismo attuale, perché quest'ultimo è stato introdotto? La risposta è molto semplice: a differenza di ciò che si crede il simbolismo semplifica l'esposizione di concetti matematici, in particolar modo di quelli astratti. Tuttavia è assolutamente necessario che nella trattazione di questi simboli si vada a capire il significato che essi portano con sé nel contesto, evitando di operare meccanicamente sui simboli con le regole assegnate.

Non è possibile infatti privare la matematica dell'atto creativo, dell'intuizione individuale: è impensabile che essa possa essere ridotta a banali calcoli (non solo coi numeri, ma anche colle stringhe logiche, come è stato reso possibile dalla formalizzazione dell'Aritmetica Tipografica e del Calcolo Proposizionale), da iterare sul calcolatore. La matematica, come tutte le altre discipline scientifiche, ma non solo, ha sempre avuto bisogno della creatività delle persone, attraverso la quale è possibile tentare di risolvere un problema, dimostrare una congettura o crearne una nuova. È la fantasia umana, o lo sguardo interiore, che permette di vedere connessioni tra campi completamente diversi e apparentemente ai poli opposti tra loro. Questa creatività non solo è importante nella matematica, ma è presente nella vita stessa degli uomini: già nel mondo antico Euripide, nell'Elena, mostrava allo spettatore come l'attività creativa, in questo caso mediata dal logos, dalla parola, sia un surrogato costruttivo della vera conoscenza. Elena e Menelao, prigionieri in Egitto, usano discorsi falsi per ingannare Teoclimeno, il re, e scappare; in questo modo superano l'impotenza conoscitiva con un atto creativo, che non produce la conoscenza obiettiva della verità,

il che è impossibile, ma è comunque una reazione alla Tuke, portata a termine cogliendo la possibilità che essa stessa ha dato all'uomo.

Il linguaggio matematico, anche se non ce ne accorgiamo, pervade la nostra vita: senza notarlo o senza esserne pienamente consci, siamo continuamente alle prese con proporzioni (tutto ciò che comporta una percentuale, come sconti o interessi è legato alla proporzionalità), ma anche con calcoli di moduli e classi di resto (ogni volta che guardiamo l'orologio e pensiamo che tra n ore saranno le h, facciamo conti con le classi di resto di modulo 12). Ancora più spesso manipoliamo oggetti che non potrebbero esistere senza matematica: prendiamo come esempio un libro. Il libro è stato scritto dall'autore sul suo PC, usando una codifica binaria per poterlo salvare. È stato poi inviato, in parte, per e-mail a una casa editrice e, per fare ciò, è stato compresso usando un algoritmo matematico. La casa editrice ha risposto e, avendo accettato, ha inviato il denaro pattuito all'autore, direttamente sul conto corrente attraverso Internet, cifrando il proprio codice segreto con un altro, più complesso, algoritmo. Infine, dopo molti passaggi matematici, il libro è stato stampato ed è arrivato in libreria; come ogni libro ha un codice di controllo, l'ISBN, che lo identifica univocamente nel mondo dei libri, indicando stato, casa editrice e libro; in fondo al codice c'è una cifra di controllo, che permette di essere certi della correttezza del codice: in questo modo la scuola, nell'adottare i libri, può affiancare, a titolo di garanzia, ad ogni volume il suo codice, per evitare acquisti errati da parte degli studenti.

Ci sono anche aspetti più divertenti della matematica: a tutti è capitato almeno una volta di fare (o subire) un indovinello la cui soluzione era legata alla logica o alla matematica. Ci sono esempi di indovinelli di ogni difficoltà: da "un mattone pesa un chilo più mezzo mattone: quanto pesa un mattone?" a "date una bilancia a due piatti e nove monete, di cui una falsa più leggera delle altre: siete in grado di individuarla con certezza in due sole pesate?".

Ma il bello della matematica è nelle generalizzazioni e nelle astrazioni. Prendiamo il secondo indovinello e proviamo a sostituire "2 pesate" con "3 pesate": fra quante monete possiamo individuare quella falsa ora? E generalizzando drasticamente, data una bilancia ad n piatti, fra quante monete potete individuarne una falsa in k pesate?

Proviamo.

Il problema delle bilance

<u>Bilancia a tre piatti</u>, posso trovare quella falsa in <u>due pesate</u> con 16 monete: divido le monete in quattro mucchi da quattro monete ciascuno, confronto sulla bilancia tre di questi quattro mucchi, ottenendo due possibili risultati a) uno dei mucchi pesa meno degli altri b) tutti i mucchi pesano uguale; nel caso a) prendo il gruppo "incriminato", confronto tra loro sulla bilancia tre monete, mettendo in disparte la quarta e posso aspettarmi aa) una moneta pesa meno delle altre ed è quella falsa ab) le monete pesano uguale e la moneta falsa è dunque quella in disparte; nel caso b) proseguo allo stesso modo, avendo cura di prendere in considerazione il mucchio messo in disparte all'inizio.

Questo caso mi mostra che per una <u>bilancia a n piatti</u> posso trovare una moneta falsa in <u>due pesate</u> se parto da $(n+1)^2$ monete.

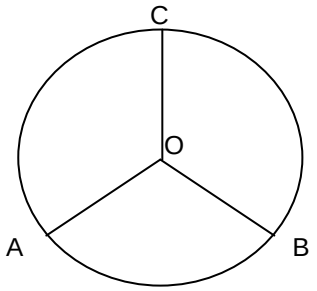
Infatti peso al primo giro n mucchi di n+1 monete, lasciandone fuori uno, potendo così identificare univocamente il mucchio contenente la moneta falsa; al secondo giro peso n monete, lasciandone fuori una, potendo ora individuare la moneta falsa o come quella più leggera o come quella esclusa.

<u>Bilancia a n piatti in k pesate</u>: posso trovare la moneta falsa in un mucchio di $(n+1)^k$

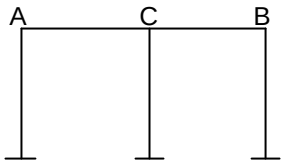
Ad ogni pesata scopro essere validi n mucchi su n+1. Il procedimento segue quello dei casi precedenti, generalizzando la consistenza dei mucchi in base al numero di piatti della bilancia, al numero di pesate massimo fissato e al numero di pesate già effettuato: all's-esima pesata di k (s=k) gli n+1 mucchi (di cui n saranno pesati) saranno composti ciascuno di $n+1^{k-s}$ monete.

n.ro pesata	mon/mucchio	aumento mon app vere	monete appurate vere
1	(n+1)^(k-1)	n*(n+1)^(k-1)	n*(n+1)^(k-1)
2	(n+1)^(k-2)	n*(n+1)^(k-2)	n*(n+2)*(n+1)^(k-2)
3	(n+1)^(k-3)	n*(n+1)^(k-3)	n*(n+1)^(k-3)(n^2+3n+3)
…	…		
k-1	n+1	n*(n+1)	(n+1)^(k)-(n+1)
k	1	n	(n+1)^(k)-1

<u>Come costruire una bilancia a n piatti, n=3.</u>



vista dall'alto



vista frontale

In questo disegno in A, B, C ci sono tre (n) carrucole cui sono appesi tre (n) piattini uguali, i piatti della bilancia. I fili (inestensibili, di peso uniforme trascurabile) uguali cui sono attaccati sono uniti tra loro in O, centro del cerchio. Per pesare degli oggetti basta metterli sui piattini e poi controllare gli spostamenti del punto di giunzione rispetto al centro del cerchio. N.B. AÔB e tutti gli altri angoli sono uguali in una bilancia a n piatti a 1/n di angolo giro.

Funziona solo in parte, però: con n=4 abbiamo un assurdo se due pesi a, b uguali tra loro e maggiori degli altri due pesi c, d uguali tra loro, si trovano sullo stesso diametro e così con tutti gli n pari.

Con n=3 la bilancia funziona: infatti poniamo il peso in A uguale a k; vogliamo che B (h) e C (l) equilibrino la bilancia, quindi

$$\begin{cases} l\cos 60 = h\cos 60 = k \\ k\cos 60 = l\cos 60 = h \\ h\cos 60 = k\cos 60 = l \end{cases}$$

che equivale a dire h=l=k.

Quello che dicevo della bilancia a quattro bracci è spiegabile con il fatto che il coseno, e quindi l'influenza che i pesi hanno su un equilibrio, si annulla a 90°. Per generalizzarlo ai pari, basta ipotizzare che tutti i pesi opposti rispetto al centro siano uguali; in questo modo gli influssi si annullano perché sono in effetti delle bilance a due piatti, in equilibrio, essendo i pesi uguali.

A questo punto possiamo introdurre il dibattito sulla bellezza ed eleganza in matematica. Tra gli addetti ai lavori raramente vi sono dubbi nel definire bella o meno una costruzione o una formula, così come è raro che vi sia disaccordo sull'eleganza di una dimostrazione. Si trovano invece in imbarazzo nel definire le condizioni che devono verificarsi per determinare l'eleganza. In genere le caratteristiche che una dimostrazione deve avere per ottenere il titolo sono: l'esistenza di un metodo alternativo semplice ma ripetitivo e con numerosi calcoli, mentre il metodo in esame è più indiretto, ma non troppo astruso, si deve dedurre agilmente dalle proprietà dell'oggetto che si sta trattando e deve essere facile da capire alla spiegazione, è un metodo più generale, ma non eccessivamente complicato.

Esaurita la parte ludica, ricordiamo che oltre alle applicazioni più o meno dirette che la matematica ha nella nostra vita di tutti i giorni, essa riveste un ruolo di grande importanza quale linguaggio semplice, versatile, formale e astratto per le altre scienze, tanto quelle cosiddette sociali quanto quelle naturali.

La matematica nell'economia

Nello studio dell'economia politica ha risalto particolare la teoria della moneta, sia nella sua prima formulazione quantitativa sia nella successiva critica keynesiana. Essa, nella sua versione moderna, si basa su un'equazione, redatta da Irving Fisher, detta equazione degli scambi, di formula M*V=P*Q, in cui M rappresenta la quantità di moneta in circolazione, V la velocità di circolazione della moneta stessa, P il livello generale dei prezzi e Q la quantità di beni prodotta e presente sul mercato.

Secondo la teoria quantitativa sia V che Q sono costanti. Le ragioni che essi adducono sono queste: V è costante in quanto dipende da fattori istituzionali e dalle abitudini di spesa degli individui, che variano solo nel lungo periodo, quindi nel breve periodo V può essere considerata costante; Q a sua volta dipende dalla produzione complessiva che, per i prekeynesiani, è costante, in quanto il mercato tende automaticamente all'equilibrio di piena occupazione (la mano invisibile di Adam Smith), quindi al poco variare dei mezzi produttivi varia poco anche la quantità di beni immessa sul mercato, di conseguenza Q si può considerare costante.

Sostituendo nell'equazione queste due costanti con i loro valori v e q ottengo Mv=Pq, che posso scrivere anche M=(q/v)*P che, sostituendo una costante k a q/v diventa M=kP, che evidenzia un rapporto di proporzionalità diretta tra M e P. questo può influenzare le politiche economiche di uno stato, infatti per abbassare il livello dei prezzi è sufficiente ridurre proporzionalmente la moneta in circolazione, mentre per rialzarlo basta coniare nuova moneta.

La moneta, secondo la teoria quantitativa, è neutrale rispetto all'andamento del mercato, è solo un pratico strumento per effettuare gli scambi.

Keynes criticò sia l'ipotesi di V costante, sia quella di Q costante. Egli operò sull'equazione degli scambi in modo da ottenere M=1/V·P·Q e notò che 1/V, scrivibile anche come D, è la quantità di moneta detenuta dagli individui, cioè quella che non circola. Di conseguenza l'ipotesi di V costante equivale al sostenere che D la sia. D soddisfa tre richieste dell'individuo: quella per motivo transazionale, come mezzo di pagamento, quella per motivo precauzionale, legata al reddito e al conseguente tenore di vita, quindi abbastanza costante, e quella per motivi speculativi, che è inversamente proporzionale al tasso di interesse,quindi facilmente variabile, anche nel brevissimo periodo; non ha quindi fondamento la pretesa di porre V costante. Per quanto riguarda Q egli portò esempi di situazioni in cui, in seguito al mancato intervento dello Stato con apposite politiche economiche, il livello di occupazione si era stabilizzato ben al di sotto del livello di piena occupazione, come nel caso della crisi del 1929. Venendo a mancare le due ipotesi su cui si basava, tutta la teoria quantitativa della moneta crolla e non è più possibile intervenire sulla moneta per influenzare il livello dei prezzi: la moneta assume un ruolo più importante nell'andamento dell'economia.

Fisica: la fecondità della matematica

La fisica è, forse, la scienza che più fa uso di equazioni, concetti e strumenti matematici. Così in meccanica affrontando i moti non uniformi, di cui abbiamo legge oraria, possiamo da essa sola ricavare, mediante la derivazione, la velocità e l'accelerazione istantanea in un qualsiasi attimo. Viceversa, integrando una funzione velocità-tempo possiamo ricavare lo spazio.

Ma dalle equazioni, se sappiamo ben guardare, otteniamo molte informazioni sul fenomeno che stiamo studiando e, sapendo porre in parallelo varie espressioni della stessa quantità, ad esempio l'energia, possiamo risolvere problemi per i quali i dati forniti ci sembravano insufficienti. Prendiamo come esempio un problema svolto in classe.

Problema:

In un televisore tra il catodo e lo schermo vi è una differenza di potenziale di 20000 volt. Con quale velocità arriva allo schermo un elettrone partito dal catodo?

A colpo d'occhio ci sembra che manchi qualcosa, la distanza o il tempo. Guardando più attentamente, però, notiamo che essendo ?V=-W/q (?V è la differenza di potenziale, W il lavoro, q la carica elettrica) possiamo esplicitare il valore di W, in quanto stiamo trattando con un elettrone e^-, di cui conosciamo la carica elettrica, $-1.60\cdot10^{-19}$ C. Abbiamo quindi $W=2\cdot10^4\cdot1.60\cdot10^{-19}$, che semplificato dà $W=3.2\cdot10^{-15}$. Dalla meccanica classica, però, sappiamo la relazione tra lavoro, forza e distanza: $W=F\cdot s$; qui possiamo sciogliere la forza F nel prodotto di massa m e accelerazione a, per cui $W=m\cdot a\cdot s$. Di queste tre variabili noi conosciamo il valore della prima: la massa dell'elettrone è $9.11\cdot10^{-31}$; dobbiamo però ottenere dalle altre due variabili una sola incognita. Sappiamo che l'accelerazione è uguale al rapporto velocità-tempo, per cui possiamo sostituire a con v/t; allo stesso modo sappiamo che in un moto accelerato, come questo, lo spazio è uguale a metà del prodotto dell'accelerazione e del quadrato del tempo, $s=1/2at^2$. Sostituisco nell'equazione e ottengo $W=9.11\cdot10^{-31}\cdot v/t\cdot1/2\cdot v/t\cdot t^2$, in cui le t si semplificano fino a $W=v^2\cdot9.11\cdot10^{-31}\cdot1/2$. ora eguaglio quest'espressione di W all'altra ottenuta precedentemente e ho, esplicitando rispetto a v, $v=v[(6.4\cdot10^{-15})/(9.11\cdot10^{-31})]$ che, con pochi calcoli, diventa $v=0.84\cdot10^8$ m/s, che è la soluzione che stavamo cercando.

Anche se di equazioni ne abbiamo in gran quantità, un ruolo importante è rivestito anche dai concetti matematici astratti, cui la fisica ricorre per spiegare certi fenomeni. Ad esempio il concetto di campo vettoriale, cioè una funzione che associa ad ogni punto P dello spazio uno e un solo vettore, viene utilizzato in fisica per esprimere il campo elettrico o il campo gravitazionale, associando ad ogni punto dello spazio il vettore risultante dalla formula della forza presa in considerazione, la forza elettrica nel primo caso e quella gravitazionale nel secondo.

§5 TUTTI INSIEMI APPASSIONATAMENTE

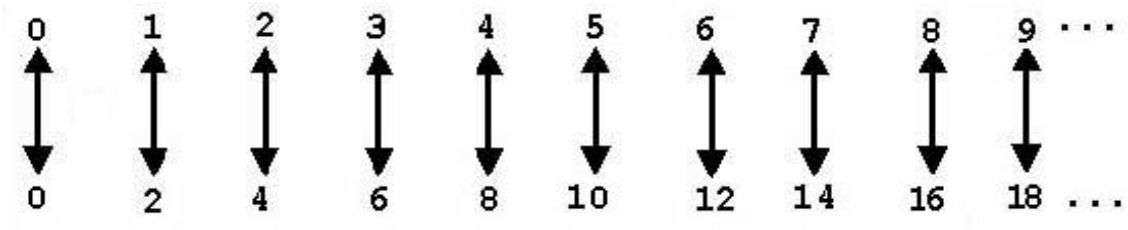
La matematica, tuttavia, non sviluppa solo strumenti da applicare ad altre scienze, o concetti da condividere con altre discipline: a volte, in particolare in teoria dei numeri, affronta problemi che non hanno alcun rapporto immediato con la realtà e con le applicazioni. Un esempio è dato dalla teoria insiemistica di Cantor, ideata nella seconda metà dell'Ottocento e sviluppata sino alla prima metà del Novecento.

La grandissima originalità del lavoro di Cantor sta nell'aver trattato non solo gli insiemi finiti, ma anche gli insieme infiniti, considerando un infinito in atto che rompeva con tutta la tradizione matematica che aveva considerato sempre e solo l'infinito in potenza.

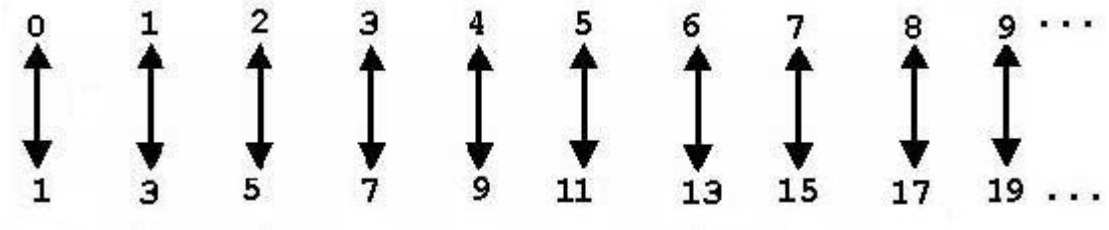
Insiemi transfiniti numerabili

Un insieme si dice infinito o, più correttamente, transfinito, se può essere messo in relazione biunivoca con un suo sottoinsieme proprio. Ad esempio l'insieme N dei numeri naturali può essere messo in relazione biunivoca con il suo sottoinsieme proprio dei numeri interi positivi, cioè tutti i naturali tranne lo 0; per porlo in relazione basta che ad ogni numero n del primo insieme sia associato il numero (n+1) del secondo: N è transfinito. Il motivo per cui la definizione più corretta è transfinito, piuttosto che infinito, è teologico-religioso; Cantor era colpito, infatti, da questa attualizzazione dell'infinito mediante i suoi numeri cardinali, ritenendo che l'infinito attuale fosse espresso solo in Dio; coniò così il termine transfinito dopo un periodo di intensa riflessione teologica (1885-1888) e ottenne il Nulla Osta della Chiesa. Si dice cardinalità, potenza o numerosità di un insieme il numero dei suoi elementi: per esempio un insieme di una scarpa, una ciabatta e una torta ha cardinalità tre, avendo tre elementi. La cardinalità di un insieme A si indica con #A. Cantor esportò il concetto di cardinalità anche nella teoria dei transfiniti, abbiamo così N che si dice numerabile od ordinato; la sua cardinalità, infinita, è chiamata $?_0$. Due insiemi si dicono equipotenti o equinumerosi se è possibile stabilire tra i loro elementi una corrispondenza biunivoca; per gli insiemi finiti è facile vedere che se due insiemi hanno entrambi tre elementi basta associare il primo elemento di un insieme al primo elemento dell'altro e così via, per gli insiemi infiniti, la questione è un po' diversa. Non possiamo, infatti, associare gli elementi uno per uno, ma dobbiamo trovare una funzione biettiva che associ tutti gli elementi del primo insieme a tutti e soli gli elementi del secondo. Possiamo ora dimostrare che i numeri pari e i numeri dispari, i quadrati perfetti e i numeri interi sono tutti insiemi numerabili.

(a) Numeri pari: associo ad ogni numero di N il suo doppio, in questo modo ho una relazione biunivoca tra l'insieme dei naturali e quello dei pari. L'insieme dei numeri pari è quindi numerabile, essendo equipotente a N, ed ha cardinalità $?_0$.

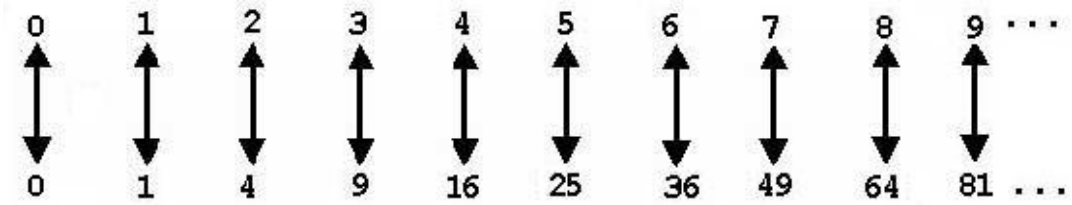


(b) Numeri dispari: associo ad ogni n appartenente a N il numero (2n+1), in questo modo stabilisco una relazione biunivoca tra l'insieme dei naturali e quello dei numeri dispari, che avrà

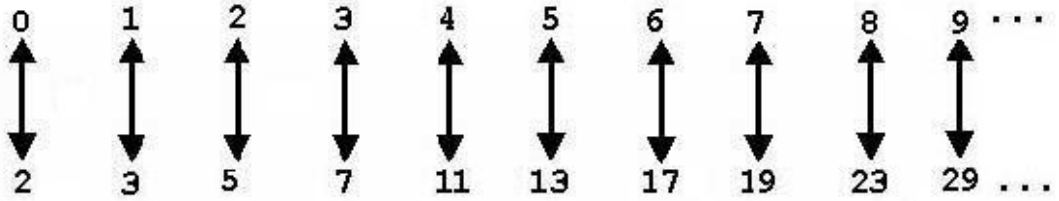


la stessa cardinalità.

(c) Quadrati perfetti: questa associazione fu trovata già da Galileo; associo ad ogni numero naturale il suo quadrato e ancora una volta ho una relazione biunivoca tra N e l'insieme dei quadrati perfetti, che ha quindi cardinalità $?_0$.

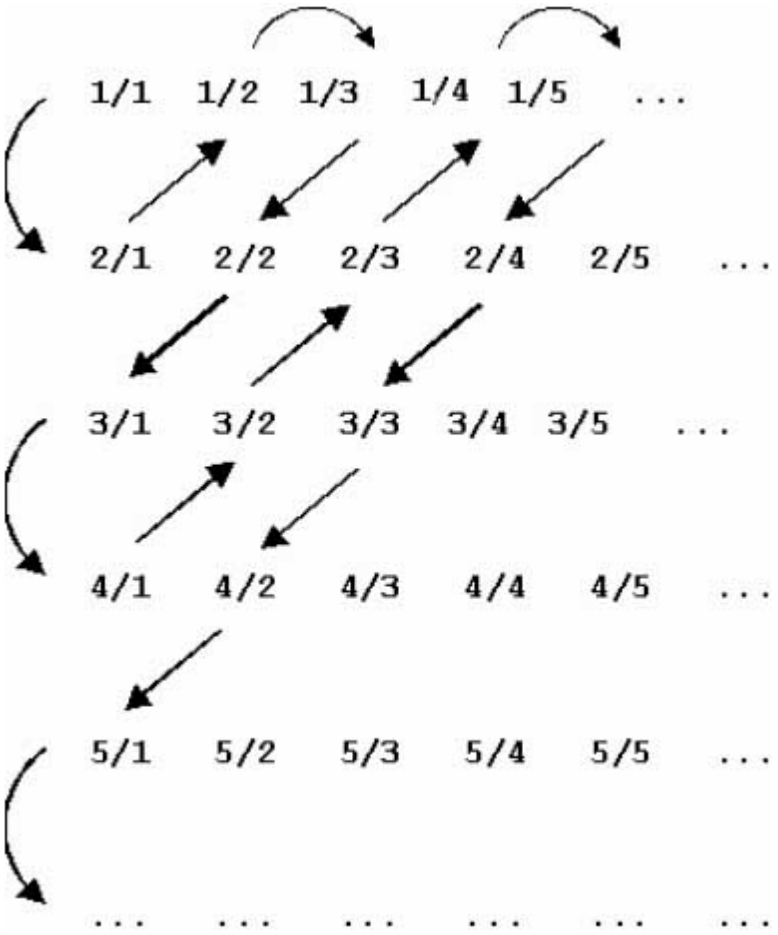


(d) Numeri primi: infatti essi sono un sottoinsieme di N, ma sono infiniti, per la dimostrazione di Euclide, ed hanno un ordine, di conseguenza ha senso parlare del primo numero primo, del secondo, dell'n-simo. Posso dunque affermare che l'insieme dei primi è numerabile ed ha cardinalità $?_0$.



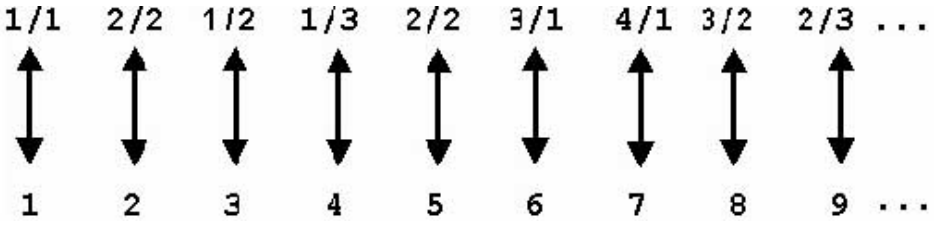
(e) Numeri interi: anche l'insieme Z dei numeri interi può essere messo in relazione biunivoca con N. Associo gli interi largamente positivi ai naturali dispari, come in (b), mentre associo i negativi ai naturali pari, moltiplicandoli per (-2). In questo modo mostro che vi è equipotenza tra questi due insiemi e posso affermare che anche Z è numerabile ed ha cardinalità $?_0$.

Ci sono tanti altri insiemi transfiniti di cardinalità $?_0$, per esempio i numeri di Fibonacci e, se è vera la dimostrazione presentata poche settimane fa, anche i numeri primi gemelli (primi che differiscono di 2, come 3 e 5, 11 e 13…). C'è anche un insieme che sembra essere "più numeroso" di N, un insieme non più discreto ma denso: l'insieme Q dei razionali.



(f) Numeri razionali: Cantor giunse a questa dimostrazione mediante una geniale schematizzazione: innanzitutto egli prese in considerazione solo i razionali positivi, sapendo che, per ogni n finito, $n*?_0=?_0$, come aveva potuto dimostrare mettendo in evidenza la numerabilità dei numeri appartenenti alle varie classi di resto modulo m. poi dispose i numeri in una matrice bidimensionale, in modo che tutti i numeri, espressi come rapporti, su una stessa linea avessero lo stesso numeratore e tutti quelli su una stessa colonna avessero lo stesso denominatore. Giunto a ciò, egli costruì una spezzata che

passasse in ogni punto della matrice una e una sola volta e che fosse autosimile, cioè che si ripetesse all'infinito nella stessa forma. Come si può vedere nella figura soprastante la spezzata è composta da diagonali parallele di verso alterno; essa passa per ogni punto, assegnando i questo modo a ciascun numero razionale un ben determinato numero d'ordine.



Raggiunto questo risultato, Cantor passò a considerare la cardinalità del continuo, cioè dell'insieme dei numeri reali. Qui, invece, è inserita una breve parentesi su un altro insieme numerabile: quello dei reali algebrici.

(g) Innanzitutto definisco numero reale algebrico ogni numero che è radice di un'equazione polinomiale con coefficienti razionali. A questo punto osservo che se un'equazione polinomiale di grado n ha coefficienti razionali ($a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$) è sempre possibile ricondurla ad un'altra equazione equivalente avente coefficienti interi, moltiplicando ogni coefficiente per il MCD dei denominatori dei coefficienti. Proseguo notando che ogni equazione di grado n ha n+1 coefficienti che la caratterizzano e che posso usare per individuarla univocamente. Posso quindi suddividere i punti che individuano le n-uple di radici in 2^n matrici (n+1) dimensionali, in cui i valori da assegnare ai coefficienti siano sempre naturali e solo l'intestazione dell'asse mi dica che i valori assunti sono positivi o negativi. Il fatto che le matrici siano 2^n deriva dal fatto che gli (n+1) coefficienti possono essere +o- (2^{n+1} combinazioni), ma moltiplicando ambo i membri per –1 posso eliminare tutti i casi per cui a_0 è negativo, riducendo le combinazioni possibili a 2^n, appunto. Come matrici prendo degli (n+1) cubi indefiniti aventi il punto O come origine degli n assi infiniti, intestati a_0, a_1 ecc e su cui siano riportati i valori naturali che possono assumere i coefficienti. Per ordinare i punti di queste matrici adopero i simplessi n-dimensionali, in modo da ricondurmi ogni volta alla dimensione inferiore, sino a giungere alla prima dimensione.

(1) Dimostro innanzitutto che l'unione di due insiemi numerabili è anch'essa numerabile. Associo a ciascun elemento del primo insieme il doppio del suo numero d'ordine e a ciascun elemento del secondo il doppio più uno del numero d'ordine; ora unisco gli insiemi dei numeri d'ordine (che hanno la stessa cardinalità degli insiemi di partenza in quanto ad ogni numero d'ordine corrisponde uno e un solo elemento e viceversa) e ottengo N, quindi l'unione di due insiemi numerabili è anch'essa numerabile.

(2) Dimostro ora che l'unione di n (con n finito) insiemi numerabili è anch'essa numerabile. Procedo come nella dimostrazione precedente, associando ad ogni insieme una diversa classe di resto modulo n sommata al prodotto n*numero d'ordine. Unisco ora gli insiemi così ottenuti e ho N, come volevo dimostrare.

Per n=1 ho lo schema tradizionale di Cantor: due triangoli illimitati che ordino individuandovi degli 1-simplessi, cioè dei segmenti successivi (1 punto, 2 punti, 3 punti…) che unisco con una linea spezzata in modo da ordinarli. A questo punto posso associare ad ogni elemento del primo schema il doppio del suo numero d'ordine e ad ogni elemento del secondo il (doppio più uno) del suo numero d'ordine. In questo modo posso unire i due "elenchi", mettendo la loro unione in relazione biunivoca con i naturali, dimostrando la loro numerabilità.

(3) In modo analogo dimostro che il prodotto cartesiano di due insiemi numerabili è ancora numerabile: associo ad un asse gli elementi di un insieme e all'altro asse gli elementi dell'altro insieme.

Per n=2 prendo quattro tetraedri illimitati che ordino individuandovi dei 2-simplessi, cioè dei triangoli successivi (1punto, 3 punti, 6 punti…) che a loro volta posso ordinare attraverso gli 1-

simplessi di prima. In questo modo posso costruire una spezzata che tocca tutti i punti della matrice. Adesso associo ad ogni elemento della prima matrice il quadruplo del suo numero d'ordine, della seconda il quadruplo più uno del suo numero d'ordine e così via, fino a porre la loro unione in relazione biunivoca con l'insieme N, dimostrando la numerabilità. A questo punto devo moltiplicare la cardinalità dell'insieme per 2, in quanto le radici sono a coppie (al massimo), ma per la (2) l'insieme che ottengo è ancora numerabile.

Per n generico prendo 2^n n-simplessi illimitati che ordino individuandovi degli (n-1)-simplessi (che ordino individuandovi degli (n-2)-simplessi (…)), costruendo così una spezzata che passa per tutti i punti della matrice. Adesso associo ad ogni elemento della m-sima ($1=m=2^n$) matrice [(2^n·numero d'ordine)+(m-1)]. Unisco gli insiemi così ottenuti fino a porli in relazione biunivoca con N. Ora moltiplico la cardinalità dell'insieme per n, ma per la (2), esso resta numerabile.

Ho quindi dimostrato che per ogni n naturale le radici formano un insieme numerabile. Ma per la (3) ho anche che l'unione di infiniti (numerabili) insiemi numerabili è numerabile, ovvero $?_0*?_0=?_0$, cioè che, più in generale, $?_0^n=?_0$, con n finito.

Insiemi transfiniti non numerabili

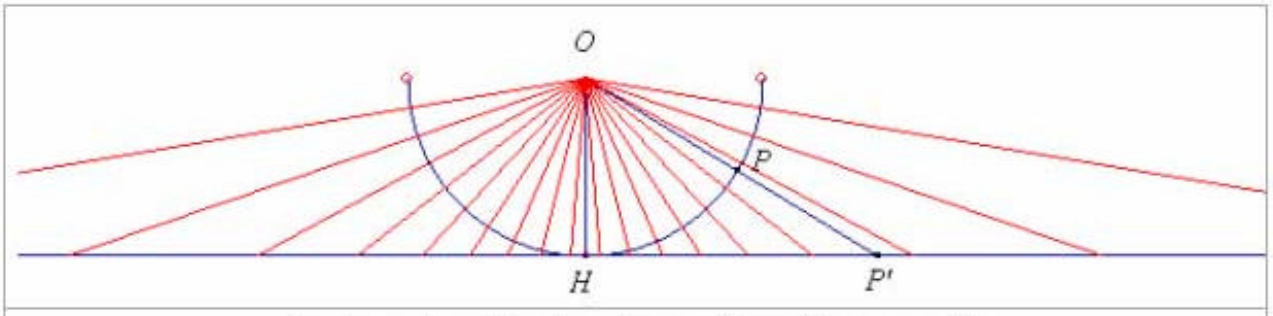
Abbiamo appena dimostrato che i numeri razionali e i reali algebrici sono numerabili. Ora si potrebbe supporre, così come avvenne storicamente, che gli stessi numeri reali siano numerabili. Cantor produsse però una dimostrazione che ciò non può essere vero, utilizzando un procedimento che va sotto il nome di diagonale.

Innanzitutto Cantor dimostrò che l'intervallo aperto (0,1) ha la stessa cardinalità dell'asse reale. Per fare ciò noi passeremo attraverso alcune dimostrazioni preliminari.

(1) Vi è equipotenza tra un segmento senza estremi dell'asse reale e una semicirconferenza senza estremi, il cui diametro sia il segmento stesso. Infatti basta porre il segmento in modo che le congiungenti gli estremi del segmento con quelli della semicirconferenza siano perpendicolari al segmento stesso. Traccio ora le perpendicolari a ogni punto del segmento e noto che esse intersecano la semicirconferenza in uno e un solo punto ciascuna.

(2) Vi è equipotenza tra tutte le semicirconferenze senza estremi. Basta infatti porle in modo che i loro centri coincidano e che i loro diametri giacciano sulla stessa retta; ora dal centro comune si traccino tutte le rette che intersecano una delle semicirconferenze: esse intersecheranno tutte le altre in uno e un solo punto.

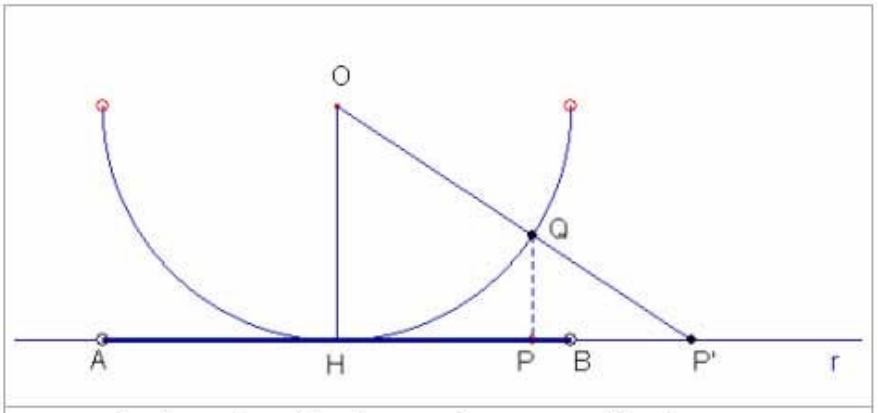
(3) Vi è equipotenza tra una qualsiasi semicirconferenza e l'asse dei numeri reali. Faccio giacere il centro della semicirconferenza sulla perpendicolare al punto 0, poi traccio dal centro della semicirconferenza tutte le rette che la intersecano e che intersecheranno ciascuna in uno e un solo punto la retta dei reali.



Corrispondenza biunivoca tra semicirconferenza e retta

(4) A questo punto, unendo la (1) e la (3) posso affermare che il segmento (0,1) ha la stessa cardinalità di R: posso infatti costruire una semicirconferenza di diametro pari al segmento con il centro giacente sulla perpendicolare al punto medio del segmento; traccio ora da ogni punto la perpendicolare al segmento, sinchè non interseca la semicirconferenza, poi, per il punto

di intersezione, traccio la retta passante per il centro, che interseca l'asse reale in uno e un solo punto. In questo modo ho stabilito l'equinumerabilità tra il segmento e la retta.

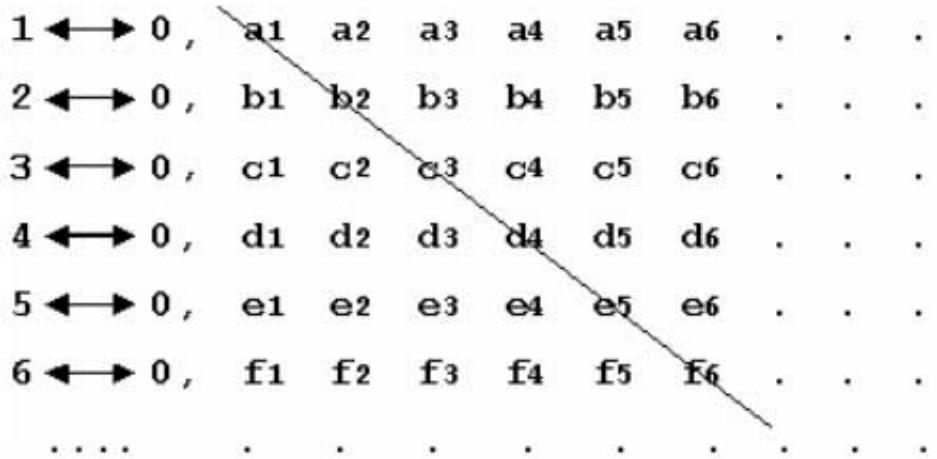


Corrispondenza biunivoca tra il segmento AB e la retta r.

(4bis) Ma dalla (1) e dalla (3) prese più in generale, posso affermare che qualsiasi segmento senza estremi ha la stessa cardinalità dell'asse reale.

Ottenuto questo risultato, Cantor poté dimostrare che l'insieme dei numeri reali, nella fattispecie il suo sottoinsieme (0,1), non è ordinabile ed ha quindi cardinalità superiore a quella dei numeri naturali. Per la dimostrazione adoperò questo ragionamento:

(5) Suppongo di aver messo in un ordine, qualsiasi, tutti i numeri reali compresi tra 0 e 1, tutti come allineamenti decimali infiniti, in caso di numeri che terminano con una cifra, essa verrà sostituita con la precedente, seguita da una catena infinita di 9. A questo punto posso costruire un numero reale, compreso tra 0 e 1 che non può essere nell'elenco. Per fare ciò considero la prima cifra decimale del primo numero dell'elenco e ne scrivo, per il nuovo numero, una diversa, poi prendo la seconda del secondo numero e così via: in questo modo il numero costruito non può essere già presente nell'elenco, perché differisce per l'n-sima cifra dall'n-simo numero dell'elenco. Questo procedimento è detto diagonale di Cantor, perché, come si vede dalla figura, il nuovo numero è costruito seguendo la diagonale.



Posso quindi affermare che la cardinalità di R è maggiore di quella di N; essa è in genere indicata con ?, non indiciato. Cantor ha anche dimostrato che $?=2^{?0}$, cioè la cardinalità dei reali è quella dell'insieme di tutti i sottoinsiemi possibili di N, l'insieme delle parti, comunemente indicato con P(N).

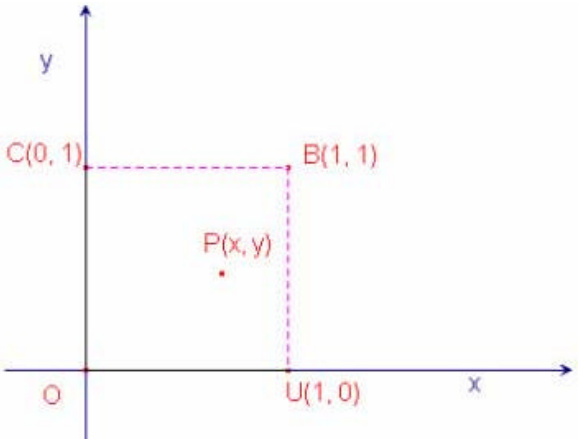
(6) Dimostro ora che una qualsiasi semiretta reale ha cardinalità ?. Considero una qualsiasi semiretta r e un segmento AB senza estremi ad essa interno. Posso affermare che il segmento è un sottoinsieme della semiretta e, di conseguenza, avrà cardinalità minore o uguale alla semiretta. Allo stesso modo la semiretta può essere vista come sottoinsieme dell'asse reale, per cui avrà cardinalità minore o uguale a quella dell'asse stesso. Ho quindi che

#AB=#r=#R. ma per la (4bis) ho che qualsiasi segmento ha cardinalità ? uguale a quella dell'asse dei reali. Posso quindi affermare, essendo ?=#r=?, che #r=? (in realtà quest'ultimo passaggio, così immediato nella matematica tradizionale, con i cardinali è risultato di un teorema astruso e non banale, trovato tra gli altri da Cantor, Bernstein e Schröder, che dimostra che, essendo a e ß due cardinali per cui valga a = ß e a = ß, allora a = ß; bisogna prestare attenzione, nel trattare i cardinali, a non dare nulla per scontato).

(7) Ogni segmento ha cardinalità ?, così come l'insieme unione di due segmenti. Ma se ?+?=?, a maggior ragione sarà ?+n=?, con n finito: infatti posso ancora una volta vedere il segmento senza estremi come sottoinsieme del segmento con gli estremi, a sua volta sottoinsieme dell'asse reale, ragion per cui la sua cardinalità non può che essere ?. Ma se l'unione di due segmenti ha ancora cardinalità ? e ognuno di essi può essere diviso in un numero n finito di parti, allora posso affermare che n*?=?. Ma posso ora considerare gli intervalli [0,1), [1, 2) ecc., che sono tutti di cardinalità ?, essendo segmenti senza estremi con l'aggiunta di un punto. Ora questi intervalli, nel semiasse positivo dei numeri reali, sono tanti quanti i numeri naturali, infatti posso associare ad ognuno di essi il suo limite inferiore. La loro unione è uguale al semiasse positivo dei numeri reali, che ha cardinalità ?, questo significa che $?_0$*?=?. Posso ora dimostrare che ?+$?_0$=?. Infatti posso sottrarre ai reali tutti gli interi, che hanno cardinalità $?_0$, e vedere che l'insieme differenza così ottenuto è ancora di cardinalità ?: la retta dei reali può infatti essere tassellata con infiniti (numerabili) segmenti senza estremi, ciascuno di lunghezza 1.

(8) Riprendo ora il risultato precedente della numerabilità dei reali algebrici. Ho appena dimostrato che ?-$?_0$=?. Ciò significa che se dai reali tolgo gli algebrici mi restano ancora infiniti (?) numeri: i trascendenti. In questo modo dimostro non soltanto l'infinità dei trascendenti, ma anche la loro non numerabilità, il che significa che essi sono infinitamente di più degli algebrici. Infatti $2^{?0}$-$?_0$ >$?_0$ e, come abbiamo già visto, ?-$?_0$=?, il che significa che restano tanti quanti. In teoria, se potessimo scegliere davvero a caso un punto dell'asse reale, esso sarebbe al 100% un numero trascendente.

A questo punto Cantor proseguì, mostrando che anche il quadrato di lato 1 determinato dai vertici (0,0), (1,0), (1,1), (0,1) determina un insieme di punti sempre di cardinalità uguale a R. É infatti possibile trovare una funzione, anche se non continua, che associa ad ogni punto del quadrato un punto del segmento.

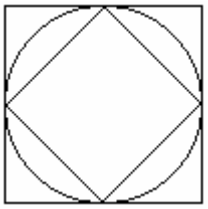


(9) Sia P un generico punto del quadrato, di coordinate (x, y), dove x e y sono due numeri reali scritti come allineamenti decimali infiniti, del tipo $x=0,a_1a_2a_3a_4a_5\ldots a_n$ e $y=0,b_1b_2b_3b_4b_5\ldots b_n$. A questo punto P del quadrato posso associare il punto Q del segmento, di coordinata $x=0,a_1b_1a_2b_2\ldots a_nb_n$. A noi serve, però, che questa funzione sia una biezione, quindi verifichiamo che, dato un punto qualsiasi Q del segmento, sia ancora possibile associare ad esso uno e un solo punto P del quadrato. Ho Q tale che la sua coordinata sia $x=0,c_1c_2c_3c_4\ldots c_n$, da esso ottengo il punto P di coordinate $x=0,c_1c_3c_5\ldots c_{2k+1}$ e $y=0,c_2c_4c_6\ldots c_{2k+2}$. In questo modo ho messo in relazione biunivoca i punti del segmento con quelli del quadrato e posso affermare che il quadrato preso in considerazione ha la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri reali R.

(10) Ho mostrato che il quadrato (0,0), (1,0), (1,1), (0,1) determina un insieme di punti di cardinalità ?. Dimostro ora che due quadrati qualsiasi hanno la stessa cardinalità. Dispongo i due quadrati, nelle tre dimensioni, in modo che i piani su cui essi giacciono siano paralleli e la retta congiungente i due centri sia perpendicolare ad ambo i quadrati. Costruisco ora la pi-

ramide indefinita a base quadrata di cui i due quadrati sono due sezioni e dal vertice della piramide traccio tutte le rette passanti per il quadrato più vicino al vertice: esse intersecano il secondo quadrato in tutti i suoi punti, ciascuna in uno e uno solo. Di conseguenza tutti i quadrati hanno la stessa cardinalità, ma, per la (9), almeno uno di essi ha cardinalità ?, allora essi hanno tutti cardinalità ?.

(11) Considero ora l'insieme A di punti del piano racchiusi da una circonferenza. Prendo il quadrato inscritto e quello circoscritto alla circonferenza e noto che: il quadrato inscritto è un sottoinsieme del cerchio, quindi ha cardinalità minore o uguale; allo stesso modo il cerchio è sottoinsieme del quadrato circoscritto e la sua cardinalità sarà minore o uguale di quella del quadrato. Ma per la (10) posso scrivere le disequazioni come ?=#A=?, che equivale a #A=?. Di conseguenza qualsiasi cerchio in R^2 ha cardinalità ?.



(12) Prendo ora un qualsiasi cerchio avente centro in (0,0) e costruisco, perpendicolarmente ad esso, una calotta semisferica che abbia il centro sulla perpendicolare di (0,0) e sia di raggio uguale a quello del cerchio. Procedo ora, in tre dimensioni, come avevo proceduto in (4) e (4bis) in due dimensioni. Traccio quindi da ogni punto del cerchio la perpendicolare al piano, che interseca la calotta in un punto, dal quale traccio la congiungente al centro della calotta, che prolungo sinchè non interseca il piano. Il piano è dunque equipotente al cerchio, che ho dimostrato avere cardinalità ?. La cardinalità di R^2 è quindi ?. Ciò mi permette di affermare che ?*?=?.

(13) Dalla (12) posso ottenere che anche R^3 ha cardinalità ?: infatti $R*R^2=R^3$, cioè ?*?=#R^3, ma per quanto appena visto, #R^3=?.

(14) Posso ora dimostrare che il cubo di vertici (0,0,0), (1, 0, 0), (1,1,0), (0,1,0), (0,1,1), (1,1,1), (1,0,1), (0,0,1) ha la stessa cardinalità del segmento (0,1). Procedo come per il quadrato: dato un punto P (x,y,z) associo ad esso un punto Q. Sia $x=0,a_1a_2a_3\ldots a_n$ $y=0,b_1b_2b_3\ldots b_n$ $z=0,c_1c_2c_3\ldots c_n$, allora il punto Q associato avrà coordinata $x=0,a_1b_1c_1\ldots a_nb_nc_n$. E viceversa, come in (9).

(15) Si può anche dimostrare genericamente, per i cubi in R^3, che la loro cardinalità è ?. Considero infatti un quadrato di lato minore o uguale a quello del cubo. Esso è un sottoinsieme del cubo e avrà per ciò cardinalità minore o uguale. A sua volta il cubo è sottoinsieme di R^3 e ha cardinalità minore o uguale. A questo punto mi ritrovo nella solita situazione ?(#quadrato)=#cubo=?(#R^3), da cui ottengo #cubo=?.

(16) Ma se tutti i cubi hanno cardinalità ? posso affermare che anche tutte le sfere sono equipotenti: posso infatti inscrivere e circoscrivere due cubi alla stessa sfera, ritrovandomi nella solita condizione dei sottoinsiemi. Da cui ho che tutte le sfere in R^3 hanno cardinalità ?.

Banach-Tarski: di ogni matematico, un mago

A volte una buona teoria ci per mette di risolvere situazioni paradossali, o meglio, ci può spiegare situazioni paradossali in cui essa stessa ci conduce. Questo è il caso del paradosso di Banach-Tarski, che è strettamente legato alla teoria dei transfiniti di cui abbiamo appena parlato. L'enunciato del paradosso afferma che, data una sfera in R^3, è possibile romperla in un numero finito di pezzi che possono essere rimessi insieme in modo da formare DUE sfere assolutamente identiche a quella di partenza. La prima cosa che colpisce il nostro senso comune non è tanto il fatto di ottenere due sfere dai pezzi di una sola, quanto il fatto che esse siano uguali in tutto e per tutto a quella di partenza. Pensiamo infatti a oggetti sferici materiali, che possiamo vedere e toccare (la solita diffidenza verso i Gedanksexperimenten), come una sfera di pongo: se io prendo una sfera di pongo, la spacco in un po' di pezzi e la rimetto assieme in due sfere posso ottenerle dello stesso volume di quella di partenza, ma la loro massa, e quindi la loro densità, sarà la metà della sfera di par-

tenza. Proviamo ad applicare ciò alla sfera matematica, fatta di punti dello spazio cartesiano: se l'ho fatto con la palla di pongo posso farlo anche con questa, la rompo e la rimonto in due sfere di ugual volume, ma con massa, in questo caso numero di punti, dimezzata. Questo significa che se prima la sfera aveva ? punti, come ho dimostrato precedentemente, ora ne avrà ?/2. ma da quanto ho affermato prima ?+?=?, cioè 2?=?, che equivale a dire ?/2=?, ragion per cui le due sfere sono uguali alla sfera di partenza in ogni loro caratteristica.

In realtà uno dei più importanti punti di dibattito riguardo al paradosso di Banach-Tarski è legato all'assioma della scelta che permette di rimettere insieme i pezzi della prima sfera in modo da formarne due, ma non è questa la sede per affrontare questo annoso dilemma.

§6 MI CONTRADDICO? EBBENE, MI CONTRADDICO

Linguaggi logici simbolici

Sin da Aristotele la logica ha rivestito una grande importanza in filosofia, in matematica e nelle altre scienze. Aristotele introdusse, nel quarto libro della metafisica, i principi fondamentali della logica classica: quello di non contraddizione e quello del terzo escluso. La logica sviluppata da Aristotele fondata sui sillogismi e sulle contrapposizioni particolare-universale positivo-negativo fu adoperata dalla scolastica durante tutto il medioevo, poi sopravvisse al Rinascimento, fino al 1800.

La logica classica, pur con le modifiche apportate nei secoli rimaneva imprecisa nel trattare, in particolare, le negazioni di frasi particolari e universali. Il paradosso del mentitore, nella sua formulazione classica, afferma che Epimenide, cretese, sostenne che "tutti i cretesi sono bugiardi". Da ciò si voleva ricavare un assurdo: se un cretese afferma che tutti quelli come lui sono bugiardi, sta mentendo, quindi tutti i cretesi dicono il vero, allora sta mentendo e così via. Una testimonianza di questo "paradosso" è presente nella *Lettera a Tito* (I, 10-12) di S.Paolo.

In seguito agli studi effettuati da Boole e poi da Frege, che introdusse i quantificatori universale ed esistenziale, risultò evidente che quello di Epimenide è un falso paradosso: infatti l'affermazione di Epimenide può essere formalizzata, in linguaggio logico moderno, come $?x,\langle x ? \ ?x\rangle$ che, negata, diventa $?x:?\langle x ? \ ?x\rangle$, in cui la parentesi negata può essere semplificata in questo modo (attraverso le tavole di verità) $\langle ?x:\langle x ? \ x\rangle\rangle ? \ \langle ?x:x\rangle$, il che equivale ad affermare che, tra i cretesi ce n'è almeno uno che dice la verità: basta porre che Epimenide non sia tra questi e il paradosso è superato. Frege propose i quantificatori insieme alla sua simbologia logica nell'Ideografia (1879), ma il suo simbolismo era troppo complicato, cosicché l'opera fu ignorata. Egli però la utilizzò anche nelle sue opere successive (motivo per cui esse ebbero scarsissimo successo), ma questo portò i quantificatori all'attenzione di Russell, che li adoperò e diffuse con i Principia Mathematica.

Intanto il matematico italiano Giuseppe Peano nel suo *Formulario di matematica* (1894 e sg.) si proponeva di sviluppare un linguaggio formalizzato che potesse contenere non solo la logica matematica, ma tutti i risultati dei più importanti settori della matematica. Se il suo programma attirò una vasta cerchia di collaboratori e discepoli, ciò lo si dovette in parte al suo rifiuto di usare qualsiasi linguaggio metafisico e alla sua scelta felice di un simbolismo che è in gran parte usato ancor oggi: i simboli per appartenenza, unione e intersezione sono quelli che usiamo tuttora. Questo simbolismo fu preferito a quello di Frege in quanto molto più semplice e "intuitivo".

Giuseppe Peano
(1858-1932)

Una visione logica della matematica: Peano

A differenza di Frege, Russell e tutti coloro che, più tardi, tenteranno una fondazione logicista della matematica, Peano non crede che la matematica debba essere fondata sulla logica, che definisce "ancilla mathematicae", ma solo giustificata attraverso di essa.

Peano scelse per il suo procedimento costruttivo tre concetti primitivi (zero 0, la classe non vuota dei numeri naturali N e la relazione successore (S), che associa ad ogni numero il suo successivo), i quali soddisfano cinque postulati o assiomi, detti assiomi di Peano (1889):

A1 Zero è un numero $0 ? \ N$

A2 Se n è un numero, Sn è un numero $\langle n ? \ N\rangle ? \ \langle Sn ? \ N\rangle$

A3 Zero non è il successore di nessun numero $?n ? \ N ? \langle Sn ? \ 0\rangle$

A4 Due numeri, i cui successivi sono uguali, sono essi stessi uguali. $\langle Sn\ ?\ Sm\rangle\ ?\ \ \langle n\ ?\ m\rangle$

A5 Se un insieme I di numeri contiene 0 e contiene anche il successore di ogni numero contenuto in I, allora ogni numero è contenuto in I. $\langle\langle 0?\ I\rangle\ ?\ \langle\langle n?\ I\rangle\ ?\ \ \langle Sn?\ I\rangle\rangle\rangle\ ?\ \ \langle I\ ?\ N\rangle$

L'ultimo postulato è, naturalmente, l'assioma di induzione. Con Peano il metodo assiomatico raggiungeva un grado di precisione mai raggiunto prima, non lasciando adito ad alcuna ambiguità di significato né ad alcuna assunzione tacita.
Altri assiomi sottintesi sono: proprietà simmetrica, riflessiva e transitiva dell'uguaglianza.
Ecco lo sviluppo di alcune proprietà a partire dagli assiomi.

ADDIZIONE

SOMMA $\oplus$ e proprietà

$$\begin{cases} n+0=n & (1) \\ n+Sk = S(n+k) & (2) \end{cases}$$

proprietà dell'addizione (def. di add.)

$I=\{k:\ n+k\in N\}$ dimostro che è induttivo

(3) $k=0$ $\quad n+0\in N$ [(1)]

(4) $n+k\in N$ $\quad S(n+k)\in N$ [A2] $\quad n+Sk\in N$ [(2)]

$\langle(3)\wedge(4)\rangle \Rightarrow I\equiv N \qquad n+k\in N\ \forall k\in N$ (5)

COMMUTATIVITÀ DELLO 0 RISP $\oplus$

$I=\{k:\ 0+k=k\}$

(6) $k=0$ $\quad 0+0=0$ [(1)]

(7) $0+k=k$ $\quad S(0+k)=Sk$ [A2] $\quad 0+Sk=Sk$ [(2)]

(8) $\langle(6)\wedge(7)\rangle \Rightarrow I\equiv N \qquad 0+n=n\ \forall n\in N$

(9) transit. [(1),(8)] $\quad 0+n=n+0 \quad \forall n\in N$

PREMESSA COMMUTATIVITÀ $\oplus$

$I=\{k:\ Sn+k=S(n+k)\}$

(10) $k=0$ $\quad Sn+0=S(n+0)$ $\quad Sn=Sn$ [(1)]

(11) $Sn+k=S(n+k)$ $\quad S(Sn+k)=S(S(n+k))$ [A2]

$Sn+Sk=S(n+Sk)$ [(2)]

(12) $\langle(10)\wedge(11)\rangle \Rightarrow I\equiv N \qquad Sn+k=S(n+k)\ \forall k\in N$

(13) transit [(12),(12)] $\quad Sn+k=n+Sk \quad \forall n,k\in N$

COMMUTATIVITÀ DEL ⊕

$I = \{k : n+k = k+n\}$

(14) $k=0$ $\quad n+0 = 0+n$ $\quad [(9)]$

(15) $n+k = k+n$ $\quad S(n+k) = S(k+n)$ $[A2]$ $\quad n+Sk = S(k+n)$ $[(2)]$

$n+Sk = Sk+n$ $[(12)]$

(16) $\langle (14) \wedge (15) \rangle \Rightarrow I \equiv \mathbb{N}$ $\quad n+k = k+n \quad \forall n,k \in \mathbb{N}$

ASSOCIATIVITÀ DEL ⊕

$I = \{k : (n+k)+m = n+(k+m)\}$

(17) $k=0$ $\quad (n+0)+m = n+(0+m)$ $\quad n+m = n+(0+m)$ $[(1)]$

$n+m = n+m$ $[(8)]$

(18) $(n+k)+m = n+(k+m)$ $\quad S((n+k)+m) = S(n+(k+m))$ $[A2]$

$(S(n+k))+m = S(n+(k+m))$ $[(12)]$ $\quad (S(n+k))+m = n+(S(k+m))$ $[(2)]$

$(n+Sk)+m = n+(S(k+m))$ $[(2)]$ $\quad (n+Sk)+m = n+(Sk+m)$ $[(12)]$

(19) $\langle (17) \wedge (18) \rangle \Rightarrow I \equiv \mathbb{N}$ $\quad (n+k)+m = n+(k+m) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

MOLTIPLICAZIONE ⊗ e proprietà

$\begin{cases} n \times 0 = 0 & (20) \\ n \times Sk = (n \times k)+n & (21) \end{cases}$ proprietà a priori del ⊗ (definizione di ⊗)

$I = \{k : n \times k \in \mathbb{N}\}$ dimostro che è interna

(22) $k=0$ $\quad n \times 0 = 0 \in \mathbb{N}$ $[(20)]$

(23) $n \times k \in \mathbb{N}$ $\quad (n \times k)+n \in \mathbb{N}$ $[(5)]$ $\quad n \times Sk \in \mathbb{N}$ $[(21)]$

(24) $\langle (22) \wedge (23) \rangle \Rightarrow I \equiv \mathbb{N}$ $\quad n \times k \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

COMMUTATIVITÀ DELLO 0 RISP. ⊗

$I = \{k : 0 \times k = 0\}$

(25) $k=0 \quad 0 \times 0 = 0 \quad [(20)]$

(26) $0 \times k = 0 \quad (0 \times k) + 0 = 0 + 0 \; [(5)] \quad 0 \times Sk = 0 + 0 \; [(21)]$

$0 \times Sk = 0 \; [(1)]$

(27) $\langle (25) \wedge (26) \rangle \Rightarrow I \equiv N \quad 0 \times k = 0 \quad \forall k \in N$

(28) Inem. $[(20), (27)] \quad 0 \times k = k \times 0$

ELEMENTO NEUTRO SO

$I = \{k : S0 \times k = k\}$

(29) $k=0 \quad S0 \times 0 = 0 \; [(20)]$

(30) $S0 \times k = k \quad (S0 \times k) + S0 = k + S0 \; [(5)] \quad S0 \times Sk = k + S0 \; [(21)]$

$S0 \times Sk = S(k+0) \; [(2)] \quad S0 \times Sk = Sk \; [(1)]$

(31) $\langle (29) \wedge (30) \rangle \Rightarrow I \equiv N \quad S0 \times k = k \quad \forall k \in N$

PREMESSA COMMUTATIVITÀ ⊗

$I = \{k : Sn \times k = (n \times k) + k\}$

(32) $k=0 \quad Sn \times 0 = (n \times 0) + 0 \quad 0 = 0 + 0 \; [(20)] \quad 0 = 0 \; [(1)]$

(33) $Sn \times k = (n \times k) + k \quad (Sn \times k) + Sn = ((n \times k) + k) + Sn \; [(5)]$

$Sn \times Sk = ((n \times k) + k) + Sn \; [(21)] \quad Sn \times Sk = ((n \times k) + k) + (n + S0) \; [(2)]$

$Sn \times Sk = (((n \times k) + k) + n) + S0 \; [(19)] \quad Sn \times Sk = ((k + (n \times k)) + n) + S0 \; [(16)]$

$Sn \times Sk = (k + ((n \times k) + n)) + S0 \; [(19)] \quad Sn \times Sk = (k + (n \times Sk)) + S0 \; [(21)]$

$Sn \times Sk = ((n + Sk) + k) + S0 \; [(16)] \quad Sn \times Sk = (n + Sk) + (k + S0) \; [(19)]$

$Sn \times Sk = (n \times Sk) + S(k+0) \; [(2)] \quad Sn \times Sk = Sk \; [(1)]$

(34) $\langle (32) \wedge (33) \rangle \Rightarrow I \equiv \mathbb{N} \quad Sn \times k = (n \times k) + k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

COMMUTATIVITÀ DEL (x)

$I = \{ k : n \times k = k \times n \}$

(35) $k = 0 \quad n \times 0 = 0 \times n \quad [(28)]$

(36) $n \times k = k \times n \qquad (n \times k) + n = (k \times n) + n \quad [(5)]$

$n \times Sk = (k \times n) + n \; [(21)] \quad n \times Sk = Sk \times n \; [(36_1)]$

(37) $\langle (35) \wedge (36) \rangle \Rightarrow I \equiv \mathbb{N} \quad n \times k = k \times n \quad \forall k \in \mathbb{N}$

DISTRIBUTIVITÀ DEL ⊗ RISPETTO AL ⊕

$I = \{ k : (n + m) \times k = (n \times k) + (m \times k) \}$

(38) $k = 0 \qquad (n + m) \times 0 = (n \times 0) + (m \times 0) \qquad 0 = 0 + 0 \; [(20)] \qquad 0 = 0 \; [(1)]$

(39) $(n + m) \times k = (n \times k) + (m \times k) \qquad ((n + m) \times k) + (n + m) = ((n \times k) + (m \times k)) + (n + m) \; [(5)]$

$(n + m) \times Sk = ((n \times k) + (m \times k)) + (n + m) \; [(21)] \quad (n + m) \times Sk = (((n \times k) + (m \times k)) + n) + m \; [(19)]$

$(n + m) \times Sk = (n + ((n \times k) + (m \times k))) + m \; [(16)] \quad (n + m) \times Sk = ((n + (n \times k)) + (m \times k)) + m \; [(19)]$

$(n + m) \times Sk = ((n \times Sk) + (m \times k)) + m \; [(21)] \quad (n + m) \times Sk = (n \times Sk) + ((m \times k) + m) \; [(19)]$

$(n + m) \times Sk = (n \times Sk) + (m \times Sk) \; [(21)]$

(40) $\langle (38) \wedge (39) \rangle \Rightarrow I \equiv \mathbb{N} \quad (n + m) \times k = (n \times k) + (m \times k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

ASSOCIATIVITÀ DEL ⊗

$I = \{ k : (n \times k) \times m = n \times (k \times m) \}$

(41) $k = 0 \quad (n \times 0) \times m = n \times (0 \times m) \qquad 0 \times m = n \times 0 \; [(20), (27)] \qquad 0 = 0 \; [(20)(27)]$

(42) $(n \times k) \times m = n \times (k \times m) \qquad ((n \times k) \times m) + (n \times m) = (n \times (k \times m)) + (n \times m) \; [(26)]$

$((n \times k) + n) \times m = \{ n \times ((k \times m) + m) \} \; [(40)] \quad (n \times Sk) \times m = n \times (Sk \times m) \; [(21)]$

(43) $\langle (41) \wedge (42) \rangle \Rightarrow I \equiv \mathbb{N} \qquad (n \times k) \times m = n \times (k \times m)$

ELEVAMENTO A POTENZA $\circledast$

$$\begin{cases} Sn \circledast 0 = S0 & (44) \\ Sn \circledast Sk = (Sn \circledast k) \times Sn & (45) \\ 0 \circledast Sk = 0 & (46) \end{cases}$$

(definizione di elevamento a potenza)

$I = \{k : Sn \circledast k \in \mathbb{N}\}$

(47) $k=0$ $\quad Sn \circledast 0 = S0$ [(44)] $\in \mathbb{N}$

(48) $Sn \circledast k \in \mathbb{N}$ $\quad (Sn \circledast k) \times Sn \in \mathbb{N}$ [(24)] $\quad Sn \circledast Sk \in \mathbb{N}$ [(45)].

(49) $\langle (47) \wedge (48) \rangle \Rightarrow I \equiv \mathbb{N}$ $\quad Sn \circledast k \in \mathbb{N} \ \forall n, k \in \mathbb{N}$

CASO PARTICOLARE

(50) $0 \circledast S0 = 0$

(51) $Sn \circledast S0 = (Sn \circledast 0) \times Sn$ [(45)] $\quad Sn \circledast S0 = S0 \times Sn$ [(44)]

$Sn \circledast S0 = Sn$ [(31)]

PROPRIETÀ DELL'ELEVAMENTO I (PRODOTTO DI POTENZE DI STESSA BASE)

$I = \{k : (Sn \circledast k) \times (Sn \circledast m) = Sn \circledast (k+m)\}$

(52) $(Sn \circledast 0) \times (Sn \circledast m) = Sn \circledast (0+m)$ $\quad (Sn \circledast 0) \times (Sn \circledast m) = Sn \circledast m$ [(8)]

$S0 \times (Sn \circledast m) = Sn \circledast m$ [(44)] $\quad Sn \circledast m = Sn \circledast m$ [(31)]

(53) $(Sn \circledast k) \times (Sn \circledast m) = Sn \circledast (k+m)$ [Hp] $\quad ((Sn \circledast k) \times (Sn \circledast m)) \times Sn = (Sn \circledast (k+m)) \times Sn$ [(24)]

$((Sn \circledast k) \times Sn) \times (Sn \circledast m) = (Sn \circledast (k+m)) \times Sn$ [(37),(43)]

$(Sn \circledast Sk) \times (Sn \circledast m) = Sn \circledast (S(k+m))$ [(45)]

$(Sn \circledast Sk) \times (Sn \circledast m) = Sn \circledast (Sk+m)$ [(12)]

(54) $\langle (52) \wedge (53) \rangle \Rightarrow I \equiv \mathbb{N}$ $\quad (Sn \circledast k) \times (Sn \circledast m) = Sn \circledast (k+m) \ \forall n, m, k \in \mathbb{N}$

PROPRIETÀ DELL' ELEVAMENTO II (ELEVAMENTO DI UN PRODOTTO)

Hp $I = \{k : (S_n \times S_m) \circledast k = (S_n \circledast k) \times (S_m \circledast k)\}$

(55) $(S_n \times S_m) \circledast 0 = (S_n \circledast 0) \times (S_m \circledast 0)$ $\quad S_0 = S_0 \times S_0$ [(44)] $\quad S_0 = S_0$ [(31)]

(56) $(S_n \times S_m) \circledast k = (S_n \circledast k) \times (S_m \circledast k)$ [Hp]

$((S_n \times S_m) \circledast k) \times (S_n \times S_m) = ((S_n \circledast k) \times (S_m \circledast k)) \times (S_n \times S_m)$ [(24)]

$(S_n \times S_m) \circledast S_k = ((S_n \circledast k) \times (S_m \circledast k)) \times (S_n \times S_m)$ [(45)]

$(S_n \times S_m) \circledast S_k = ((S_n \circledast k) \times S_n) \times ((S_m \circledast k) \times S_m)$ [(32), (43)]

$(S_n \times S_m) \circledast S_k = (S_n \circledast S_k) \times (S_m \circledast S_k)$ [(45)]

(57) $\langle (55) \wedge (56) \rangle \Rightarrow I \equiv \mathbb{N}$ $\quad (S_n \times S_m) \circledast k = (S_n \circledast k) \times (S_m \circledast k) \quad \forall m, n, k \in \mathbb{N}$

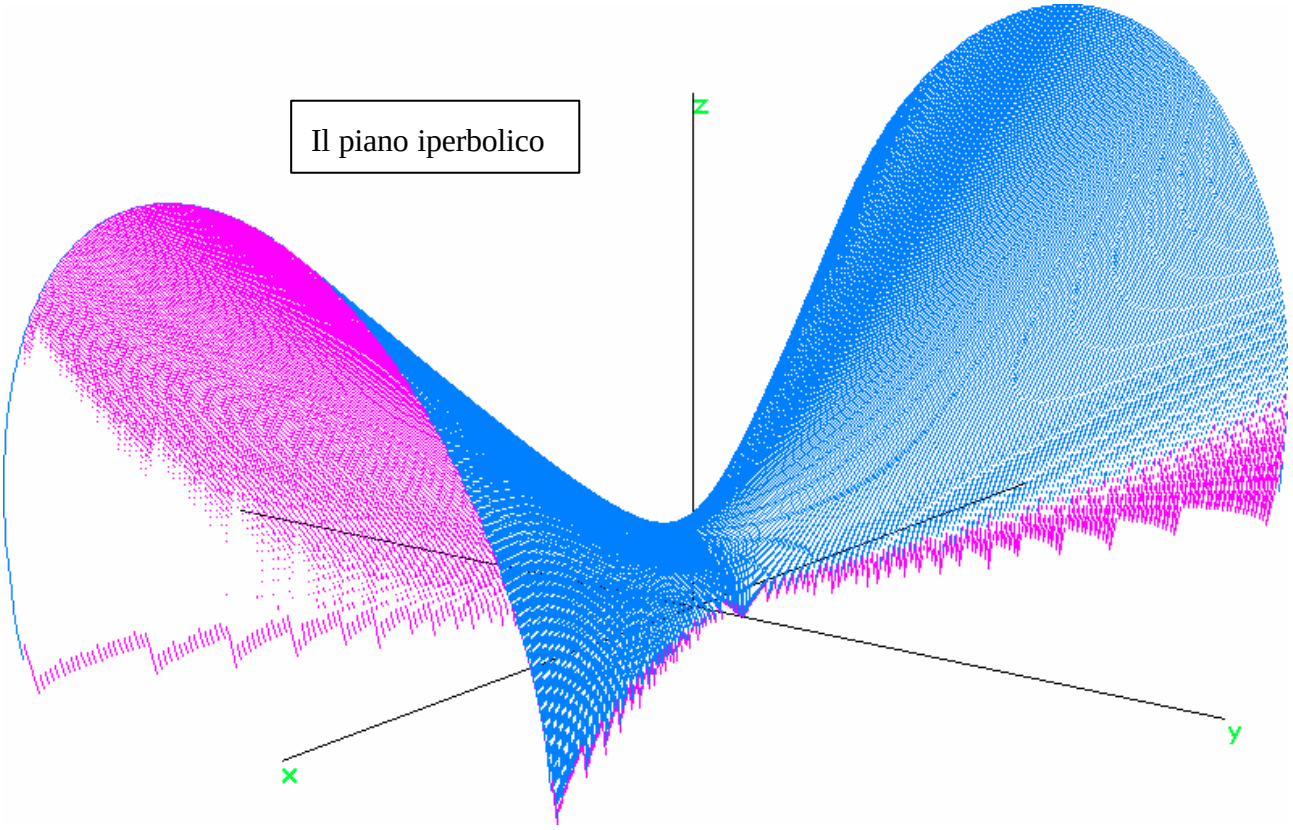
RELAZIONE D'ORDINE

$(m, n) \quad m \leq n \iff \exists k \in \mathbb{N} : m + k = n$

L'Ipotesi del Continuo

La logica formalizzata permise, partendo dagli assiomi le cui potenzialità aveva mostrato Peano, di costruire nuove teorie degli insiemi sempre più precise e costruttive, come il sistema assiomatico di Zermelo-Fraenkel. Su di esso venne costruita la moderna teoria degli insiemi, all'interno della quale trovò spazio, senza modifiche sostanziali, la teoria insiemistica transfinita cantoriana.

Una volta dimostrato che l'insieme dei reali R ha più elementi dell'insieme N dei naturali, Cantor notò che alcuni sottoinsiemi dei reali potevano essere posti in relazione biunivoca con N, per esempio i razionali, altri con R stesso, per esempio un qualunque segmento. A questo punto si chiese se tra $?_0$ e $2^{?0}$, cioè tra la cardinalità dei naturali e quella dei reali, ci fossero altri insiemi con cardinalità intermedie. Egli aveva già dimostrato che le cardinalità erano almeno di infinità numerabile: difatti data una cardinalità generica $?_n$ si poteva sempre trovarne una più grande $?_m=2^{?n}$. Il dubbio quindi riguardava in particolare le cardinalità intermedie ad $?_0$ e ?, più in generale quelle interne ad una qualsiasi coppia delle cardinalità generate a partire dagli insiemi delle parti. Il problema era di grande portata, ma di difficile risoluzione, tanto che Cantor impazzì nel tentare di risolverlo: una volta lo affrontava sicuro di poter dimostrare che non c'erano cardinalità intermedie, pochi mesi e un ricovero dopo avrebbe giurato che ne avrebbe trovata almeno un'altra, salvo poi avere una nuova crisi e ripartire da capo. David Hilbert inserì la congettura come primo dei 23 problemi da risolversi entro il secolo proposti al Congresso Internazionale di Parigi del 1900. Una prima dimostrazione sull'argomento fu data da Kurt Gödel nel 1937: in essa egli asseriva che l'Ipotesi del Continuo è compatibile con la teoria assiomatica degli insiemi, cioè che indipendentemente dal fatto che l'ipotesi di Cantor sull'assenza di cardinali intermedî tra $?_0$ e $2^{?0}$ sia vera, assumerne la verità non comporta alcuna contraddizione interna ai fondamenti della matematica. Nella primavera del 1963, infine, Paul Cohen, un giovane matematico di Stanford, dimostrò che l'Ipotesi del Continuo, così come l'assioma della scelta, è indipendente da tutti gli assiomi della teoria degli insiemi (compreso quello della scelta), utilizzando un metodo detto *forcing*. In sostanza ha dimostrato che, all'interno del sistema assiomatico di Zermelo-Fraenkel, non è possibile dimostrare né che l'Ipotesi del Conti-



nuo è vera, né che essa è falsa; per fare ciò servirebbe un nuovo sistema assiomatico, che prima dovrebbe dare garanzie di coerenza, correttezza e sufficiente completezza.

Una delle conseguenze profonde di questa dimostrazione è che, essendo i due assiomi indipendenti dagli altri e tra loro (considero assioma anche l'Ipotesi del Continuo, in quanto non dimostrabile), le diverse combinazioni di negazione e affermazione degli assiomi stessi generano nuove matematiche degli insiemi, così come dalla dimostrazione dell'indipendenza del quinto postulato di Euclide e dalla sua successiva negazione nacquero le geometrie non euclidee. Avremo quindi teorie degli insiemi in cui sarà vero l'assioma della scelta, ma in cui ci saranno cardinalità intermedie tra quella dei naturali e quella del continuo, altre che identificheranno la cardinalità del continuo con $?_1$, escludendone altre intermedie, accettando in ogni modo l'assioma della scelta, e così via.

In questo modo un apparente brutto colpo per la logica portò a sviluppi insperati di una branca della matematica.

Un paradosso

Pur essendo stata sviluppata una logica simbolica (formale) pratica e, come abbiamo visto, costruttiva, essa era ancora incompleta e rimanevano ancora insoluti alcuni problemi, in particolar modo in relazione ai paradossi. Uno di questi, finalmente un "vero" paradosso, era la versione più generale di quello di Epimenide: "Questa frase è falsa", detta paradosso generalizzato del mentitore. Il paradosso, di cui sono state redatte una gran quantità di versioni, tutte equivalenti, era d'ostacolo al trionfo della logica: finché rimanevano aperti questi problemi non era possibile consacrare definitivamente la logica come linguaggio perfetto. La proposizione incriminata (così come tutte le sue varianti) ricavava la sua paradossalità dal suo essere autoreferente, cioè dal predicare qualcosa di se stessa, essere oggetto oltre che soggetto.

Possibili soluzioni

Il problema non era recente: già nel mondo antico se ne parlava, come abbiamo visto parlando di Epimenide. Ma nel mondo antico si tentavano già le prime soluzioni e non solo in campo matematico o filosofico. Euripide, infatti, affrontò il problema uso-menzione di un oggetto (o di una persona) nella sua tragedia "Elena". Qui la protagonista è prigioniera in Egitto, mentre a Troia altro non v'è che la sua immagine, il suo "è?d????". La guerra, quindi, è stata combattuta solo per apparenza, per una vuota immagine. È questa una prima distinzione tra apparenza (opinione) e realtà, resa attraverso la distinzione che esiste tra significante e significato, la prima parte riguarda l'apparenza, la seconda l'essenza. Sempre Euripide, in Medea, ci mostra inoltre come esistano punti di vista diversi, e spesso opposti, per gli stessi avvenimenti, nello specifico il ruolo di Medea nella missione di Giasone. Questo sottolinea una volta di più come l'apparenza predomini, come fonte di informazioni, sull'essenza: se tutti avessero conoscenza dell'essenza non ci sarebbero discussioni né dubbi, tutto sarebbe chiaro e definito.

Oltre da Euripide il problema fu affrontato da altri, tra cui Aristotele, che propose di estirpare il problema alla radice, eliminando dalle proposizioni ben formate, e quindi trattabili logicamente, quelle contraddittorie (Metafisica, IV).

Dopo Aristotele fu il turno di Ockham, che con grande anticipo sui tempi distingue diversi livelli di linguaggio: le frasi che predicano qualcosa riguardo alla verità o alla falsità di una proposizione stanno ad un livello superiore rispetto alle frasi-oggetto. Di conseguenza la frase che contiene autoreferenza e predica della propria falsità è mal posta e non va considerata.

Un'altra soluzione proposta nel tempo antico introduce altri valori di verità, in questo caso l'indefinito (il moderno indecidibile), modificando il principio logico del terzo escluso.

La dicotomia tra simbolo e oggetto, nella filosofia contemporanea, è stata analizzata a fondo da Ludwig Wittgenstein e W.V.O.Quine, insistendo sulla distinzione tra uso e menzione, cioè al riferirsi al significato (uso) o al significante (menzione).

La musica e l'arte pittorica hanno anche loro intrapreso un cammino su questa strada; esse, infatti, hanno sempre espresso alcune idee mediante simboli (immagini, colori, accordi, ritmi), mentre nel Novecento è poco a poco venuta alla luce una necessità non più di esprimere o rappresentare (capacità ora delegate, sempre con maggior successo e fedeltà all'originale, alle invenzioni tecniche quali la fotografia e l'incisione prima di dischi, poi di nastri magnetici, sino ai moderni CD e DVD), quanto di essere. Nella musica sono significative le sperimentazioni di John Cage, nell'arte si segue invece un percorso un po' differente. Inizialmente si rinuncia alla rappresentazione, gradualmente, attraverso l'espressionismo (rappresentazione di emozioni) fino all'astrattismo, dove si perde ogni contatto con la realtà, anche emozionale. Dopo Mondrian vi fu una specie di passo indietro: il surrealismo, con cui un'arte estremamente figurativa venne utilizzata per impressionare, sconcertare, sbalordire. Tra i surrealisti vi è un artista in particolare che focalizza la sua attenzione sull'ambiguità del rapporto simbolo-oggetto: René Magritte. In "Il Tradimento delle Immagini" (1929) egli rappresenta una pipa, sotto la quale scrive "Ceci n'est pas une pipe", cioè "Questa non è una pipa": come lo spettatore considera la pipa dipinta come pipa reale cade nel trabocchetto dell'artista, che si premura di spiegargli, scrivendolo, che ciò che sta guardando non è, in effetti, una pipa, ma un quadro, una *rappresentazione* di una pipa.

René Magritte

Il tradimento delle Immagini

1929

Kurt Gödel, la Pizia del nostro tempo

Abbiamo accennato più volte a Kurt Gödel e alle sue dimostrazioni. Ora parleremo di lui un po' più in dettaglio. Kurt Friedrich Gödel nacque a Brno nel 1906; si iscrisse all'Università di Vienna, dove si laureò e ottenne anche il dottorato. In seguito agli avvenimenti politico-militari nel 1940 emigrò negli Stati Uniti, dove ottenne una cattedra a Princeton. Morì nel 1978 per malnutrizione: dall'anno precedente, per paura di un avvelenamento, aveva quasi smesso di mangiare.

Più della vita di Gödel, segnata dai suoi disturbi psichici, sono interessanti i risultati che ottenne, in particolare negli anni Trenta. La sua prima dimostrazione originale è del 1928, quando è ancora studente dell'università; in quell'occasione dimostra la completezza della logica predicativa,

terminando l'opera iniziata nel 1921 da Post, che aveva dimostrato la completezza della Logica proposizionale: la logica è dimostrata essere un linguaggio completo.

Prosegue poi nella sua opera di dimostrazioni di completezza, affrontando il sistema proposto nei Principia Mathematica da Russell e Whitehead. Con sua grande sorpresa, però, scopre che esistono nell'Aritmetica delle proposizioni vere che non sono teoremi del sistema. Comincia quindi ad elaborare la dimostrazione del Teorema di Incompletezza che porta a termine nel 1931, presentandola come tesi di dottorato. Gödel dimostra, come abbiamo già accennato, che nessun sistema di assiomi coerente abbastanza ricco da abbracciare la teoria dei numeri può, allo stesso tempo, essere completo.

Bisogna scegliere tra coerenza e completezza: se un sistema è coerente vi è sicuramente almeno una proposizione indecidibile, cioè che non può essere dimostrata. Gödel dimostrò questa tesi facendo vedere come è possibile costruire sempre una proposizione non dimostrabile in un dato sistema formale corretto F. Prendiamo in considerazione la formula G_F, che afferma di non essere dimostrabile in F (G_F? G_F non è dimostrabile in F); se G_F fosse dimostrabile in F, sarebbe vera per la correttezza del sistema, ma, essendo vera, non sarebbe dimostrabile; l'ipotesi che avevamo assunto è quindi assurda e G_F non è dimostrabile in F. Ciò è esattamente quello che essa predica di se stessa, quindi è vera: abbiamo ottenuto una formula vera ma non dimostrabile in F. Se la matematica, come sistema, non è completa, non può essere ridotta alla logica, che, per dimostrazione precedente, la è.

La frase utilizzata da Gödel ricorda quella, trattata prima, che generava il paradosso del mentitore, "Questa frase è falsa". È solo uno dei molti antefatti, una delle anticipazioni, delle fonti di ispirazione del lavoro di Gödel. Tra le altre non possiamo trascurare quella di Kant, che, con le antinomie della ragione[2], aveva mostrato che, se si richiede completezza alla ragione, permettendo la considerazione di idee al limite, si cade nell'inconsistenza.

Quali insegnamenti possiamo trarre da questo risultato? Brouwer vi vide, non a torto, la giustificazione della logica intuizionista. Hilbert e Zermelo la accettarono, il primo con rassegnazione, il secondo con gran strepito, come pietra tombale dei loro tentativi di formalizzare o assiomatizzare la matematica in maniera assoluta e definitiva, pur restando convinti dell'utilità dei sistemi di assiomi, che forniscono indicazioni operative ai matematici, ricordando loro cosa è possibile e cosa no, ma lasciando sottinteso che è sempre possibile arrivare a congetture indecidibili, che genereranno nuovi assiomi e nuovi mondi matematici.

Ciò che secondo me è importante, filosoficamente, in questo risultato è che Gödel si pone quale novella Pizia, riproponendo, in moderni termini logico-matematici, il motto delfico "µ?d?? ??a?", niente di troppo. Al contempo, tuttavia, mostra che, con una buona dose di fantasia, si possono costruire due o più mondi matematici partendo da ogni singola frase indecidibile che sembrava distruggere tutto ciò che era stato fatto in matematica fino a quel momento. È ancora una volta la vita che nasce dalla morte, dal caos, un nuovo castello costruito con le carte sparse sul tavolo, un nuovo mondo che si sviluppa fino a che le sue potenzialità non sono esaurite per poi collassare e rinascere in forma rinnovata.

È la fantasia, è la creatività umana ciò che rende l'arte e la matematica fenici in grado di risorgere dalle proprie ceneri.

[2] Ricordiamo brevemente le antinomie della ragione: 1. Il mondo è e non è limitato nello spazio e nel tempo; 2. La struttura del mondo è e non è atomica; 3. L'anima è e non è libera; 4. La causa prima esiste e non esiste.

CHI HO SACCHEGGIATO, OVVERO LA BIBLIOGRAFIA

«Non è richiesto che ai titoli corrisponda una trattazione né che essa, qualora ci sia, sia corrispondente al titolo» U.Eco, Il secondo diario minimo

Libri

Abbagnano, N.; Fornero, G. Protagonisti e Testi della Filosofia, voll. D1-D2 Paravia, 2000
Aczel, A.D. Il mistero dell'Alef Il Saggiatore, 2002
Boyer, C.B. Storia della matematica Oscar Mondadori, 1990
Courant, R.; Robbins, H. Che cos'è la matematica? Bollati Boringhieri, 2002[2]
Donati,S. I fondamenti della matematica nel logicismo di Bertrand Russell, Firenze Atheneum, 2003
Hofstadter, D.R. Gödel, Escher e Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante Adelphi, 2000[6]
Kline, M. Storia del pensiero matematico Einaudi, 1999
Odifreddi, P. La matematica del Novecento Einaudi, 2000
Odifreddi, P. Il diavolo in cattedra Einaudi, 2003
Prescott, J James Joyce, the man and his works Forum House, 1969
Su, F.E. The Banach Tarski Paradox (unpublished)
Tempini, N. (a cura di) Neoempirismo logico, semiotica e filosofia analitica La Scuola, 1983[2]
AA.VV. Enciclopedia Garzanti di filosofia Garzanti, 1991[2]

Riviste

I Quaderni di Le Scienze, n°19, Kurt Gödel
Lettera Matematica Pristem, n°50-51, Grandi matematici del Novecento
Rudi Mathematici, vari numeri

Altro

Bertani, G. Fotocopie
D'Alembert, R. Comunicazioni personali
Riddle, A. Comunicazioni personali
Silverbrahms, P.R. Comunicazioni personali
Odifreddi, P. Saggistica varia (in italiano e inglese) dal sito vialattea.net

INDICE

§1 Tocco e vedo (ma non credo).....pagina 3
§2 Rimescoliamo le carte.....7
Introduzione.....7
Petronio.....7
Dante e il mondo cabbalistico.....8
James Joyce and his word usage.....10
James Joyce e il suo modo di usare la parola.....12
Raymond Queneau.....14
§3 La matematica perduta.....15
Filosofia della scienza.....15
Fondamenti della matematica.....17
§4 La matematica ritrovata.....21
La matematica come linguaggio.....21
La matematica nell'economia.....24
Fisica: la fecondità della matematica.....24
§5 Tutti insiemi appassionatamente.....26
Insiemi transfiniti numerabili.....26
Insiemi tranfiniti non numerabili.....29
Banach-Tarski: di ogni matematico, un mago.....32
§6 Mi contraddico? Ebbene, mi contraddico.....34
Linguaggi logici simbolici.....34
Una visione logica della matematica: Peano.....34
L'Ipotesi del Continuo.....41
Un paradosso.....42
Possibili soluzioni.....42
Kurt Gödel, la Pizia del nostro tempo.....43

Bibliografia.....46
Indice.....47