Guido Fiorentino

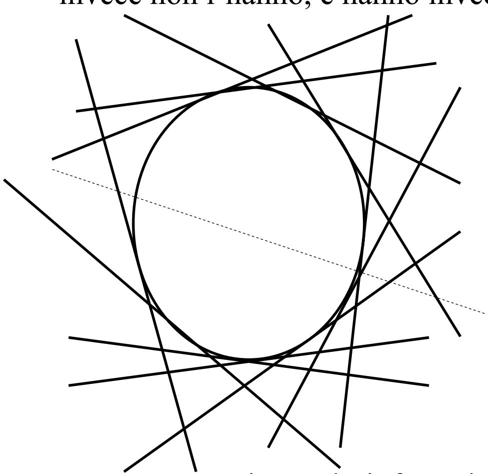
Concetti e attributi nella matematica e nelle Scienze cognitive

I concetti - rappresentati da sostantivi e proposizioni - e gli attributi - tipicamente aggettivi - sono componenti del nostro linguaggio entrambi essenziali, ma differenti. Sin dai tempi della scuola abbiamo imparato a distinguerli dal punto di vista grammaticale, ma la loro ben più rilevante differenza sul piano concettuale, nettamente percepita dai fisici, non lo è altrettanto dai matematici e dagli studiosi delle Scienze cognitive: qui si intende mostrare che, anche in quei campi, la distinzione non è solo opportuna, ma consente di risolvere alcuni problemi di rilievo niente affatto trascurabile. A comprenderlo potrà essere d'aiuto il percorso logico che ha messo in luce quell'aspetto usualmente trascurato, spingendo quindi a far parte delle considerazioni che ne derivano.

*

Di cosa i siano *concetti* sono state date numerose differenti definizioni, essenzialmente prescrittive, nessuna però veramente soddisfacente. Per le finalità che qui si propongono appare più utile cercare di spiegare come i concetti possano istintivamente emergere nella nostra mente, dal concorso di una pluralità di caratteristiche di particolare rilievo per l'esistenza, che intuitivamente riconosciamo in quanto percepiamo - o meglio, nei ricordi che ne conserviamo – che nel nomale linguaggio sono indicate da *attributi*: aggettivi o espressioni equivalenti: una rappresentazione simbolica può aiutare a comprenderlo.

Nella figura, gli attributi sono rappresentati dai segmenti[1] che, nel *piano degli eventi*, idealmente separano i ricordi in cui la nostra mente riconosce la caratteristica ad essi corrispondente, da quelli che invece non l'hanno, e hanno invece la caratteristica complementare.



Ad esempio, ciascuno dei segmenti non tratteggiati separa i ricordi in cui è implicita una caratteristica appropriata per un cibo, indicata da un *attributo* come "buono", "saziante", "nutriente", "abbondante", "raggiungibile", e così via, dai ricordi che non l'hanno, hanno quindi quella complementare: un processo di astrazione porta così a isolare il ristretto *insieme* dei ricordi che posseggono tutte assieme quelle *caratteristiche*, nella cui combinazione risiede la *proprietà* esclusiva che contraddistingue il concetto "cibo", per cui rientrano nella linea chiusa del "diagramma di Venn" che idealmente lo rappresenta.

Ulteriori attributi – le linee tratteggiate che attraversano il concetto – possono delimitarne dei sottoinsiemi, rispondenti a caratteristiche più restrittive: ad esempio, "cibo crudo".

Per quanto in modo informale, la figura mostra che *i concetti* sono *insiemi di ricordi*, in cui la mente intuitivamente riconosce una comune *proprietà fondamentale* "p", *somma* (*logica*) delle caratteristiche "c_i" comuni a tutti i ricordi che in esso rientrano, indicate da aggettivi o espressioni equivalenti composte di più parole: $p = c_1 \wedge c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots$. Tutte assieme, quelle caratteristiche concorrono a far emergere il concetto[6], delimitando l'insieme dei ricordi che condividono la proprietà "p", in cui sta il significato del concetto, che li accomuna al di là di altre particolari *caratteristiche accessorie* che permettono di distinguerli: se non fossero distinguibili, non avrebbe senso parlare di *insiemi*.

Ai concetti così concepiti sono molto vicini i *frames* di Marvin Minsky; dice infatti il *Manuale di scienza cognitiva*, di Pessa-Penna:

> Un *frame* è una collezione di attributi corrispondenti ad apposite caselle, o *slots*, ciascuna delle quali può contenere il valore attuale dell'attributo ad essa associato o essere vuota. Ogni *frame* descrive in modo unitario un dato schema concettuale.[2]

Con la sola importante eccezione di quelli numerici e geometrici - su cui si torna più sotto - gli attributi sono necessariamente di natura soggettiva; necessariamente soggettivi sono quindi anche i concetti che ne traggono origine, ma nessun discorso sul linguaggio e le sue caratteristiche sarebbe evidentemente possibile, se non si presume che i ricordi individuali siano abbastanza simili perché si possa ragionevolmente parlare di significati condivisi, come pare lecito fare per i parlanti di quella che - con un'approssimazione accettabile - si può chiamare la *stessa* lingua naturale.

Dalla figura appare evidente che, per quanto grande, potenzialmente anche infinito possa essere il numero dei ricordi inclusi in qualsiasi concetto, costituisce pur sempre una frazione infinitesima della totalità T dei ricordi che condividono l'illimitato *piano degli eventi*, con cui il negato del concetto - ciò che *non è* - viene sostanzialmente a coincidere, privo di alcun significato come il negato della proprietà "p", unione di tutte le caratteristiche che il concetto *non ha*: $\neg p = \neg c_1 \vee \neg c_2 \vee \neg c_3 \vee \ldots$

Anziché alla logica binaria degli attributi che concorrono a delimitarli, i concetti obbediscono quindi a una logica *unaria*, che ammette l'affermazione solo per smentire un'affermazione precedente. Una cosa è infatti la partizione dei ricordi inclusi nel concetto determinata da un ulteriore attributo - nella figura, la linea tratteggiata - che delimita due concetti, suoi sottoinsiemi. uno con la caratteristica dell'ulteriore attributo, l'altro con quella complementare, che ne è il negato; ben diversa è invece la contrapposizione fra l'*insieme significativo* dei ricordi inclusi nel concetto, e l'assenza di alcun significato di tutti gli altri ricordi, che stando al di fuori ne costituiscono il negato: non un insieme, né quindi un concetto.

I concetti che riconosciamo sono però troppi per poterli *lessicalizzare* tutti, ossia associare a ciascuno un codice specifico del vocabolario capace di rappresentarlo ed evocarlo, perché di gran lunga eccederebbe la capacità della nostra memoria di ricordarli: l'evoluzione del linguaggio ha risolto il problema di distinguerli usando più parole, anche intere proposizioni; ma in modo assolutamente prevalente associando ai concetti degli attributi, e valendosi delle caratteristiche accessorie che essi indicano.

Per le nostre capacità di espressione e d'immaginazione(3), la combinazione di concetti e attributi ha costituito un progresso assolutamente determinante, permettendo di designare un numero illimitato di differenti oggetti, personaggi, eventi, ecc. senza dover coniare per ciascuno di essi, un termine specifico né ricordare il significato della combinazione, che emerge dall'interazione logica fra i rispettivi significati, drasticamente riducendo il numero dei codici da creare, e memorizzare(4).

Un numero grande, ma contenuto, di sostantivi, designa i *concetti semplici*: insiemi di ricordi particolarmente importanti per il carattere generale della loro proprietà e la frequenza del loro uso, lessicalizzati - ossia designati da singoli sostantivi; gli altri sono invece designati quali *concetti compositi*, sottoinsiemi di quelli semplici, delimitati da attributi - aggettivi pure lessicalizzati, o espressioni logicamente equivalenti accostati ai sostantivi(5), che indicano le particolari caratteristiche accessorie che differenziano i ricordi inclusi dagli altri del concetto semplice.

Collocati al predicato della proposizione, gli attributi designano invece a quali particolari sottoinsiemi dei ricordi evocati dal concetto al soggetto, intende riferirsi ciò che la proposizione afferma.

*

Analogamente, finché le esigenze del conteggio si limitavano alle poche unità che le condizioni primitive dell'esistenza davano motivo di riconoscere e specificare, appariva naturale, e sufficiente, specializzare allo scopo i concetti, ad esempio modificando la desinenza dei sostantivi secondo le occorrenze numeriche: la persistenza in alcune lingue del duale fa pensare che così facessero i nostri antenati; ma evidentemente per quella strada non si poteva andare lontano: il problema è stato risolto radicalmente, scindendo dai *termini* noti o incogniti dei concetti - che nei calcoli non hanno parte(6) - gli attributi: gli aggettivi numerici, che quali *coefficienti* ne specificano le *caratteristiche quantitative*.

Anche per il linguaggio matematico i concetti e gli attributi son cosi venuti a costituire due componenti entrambi essenziali, ma differenti: per le modalità e le possibilità del calcolo, il progresso è stato persino più decisivo che la notazione posizionale dei numeri; mai i fisici vi potrebbero certo rinunziare, e anche i matematici nelle espressioni algebriche ovviamente li distinguono, e vi si attengono nei calcoli; ma sul piano teorico considerano i concetti e gli attributi sostanzialmente inscindibili: tuttora seguono Aristotele che, per semplificare la logica, giocando sul "valore di verità" dei concetti ne fa sostanzialmente un tutt'uno(7). Dice infatti Odifreddi:

> L'analisi logica riduce le più semplici proposizioni del linguaggio alla struttura «oggetto-predicato» dove per «oggetto» si intende qualunque cosa che fa parte del mondo, e per «predicato» qualunque modo di pensare a oggetti (attraverso aggettivi e verbi che ne descrivono proprietà e azioni)(8).

Se pure indirettamente, la "prova" che Gödel ha dato del suo Teorema d'incompletezza ha però fatto emergere che ignorare la differenza di concetti e attributi non ècorretto, né conveniente.

Come è noto, all'*Entscheidunsproblem*, di Hilbert, egli diede la risposta, in modo pressoché unanime considerata indiscutibile[9], che l'aritmetica è incompleta; ma in realtà, di proposizioni aritmetiche come Hilbert le intendeva, non dimostrabili né refutabili, non se ne sono viste[10], mentre il metodo utilizzato da Turing per la sua dimostrazione del Teorema - tanto più semplice e comprensibile - permette di dare la prova veramente indubitabile che le proposizioni dell'aritmetica sono invece complete[11]: con quelle algebriche, e della geometria considerate da Hilbert, verosimilmente le sole che lo possono essere[12].

E' tuttavia usuale dare al quesito di Hilbert e alla risposta di Gödel un'interpretazione più estensiva, riferita a tutte le proposizioni della matematica: la risposta è necessariamente più articolata, perché *dipende dalla natura delle proposizioni*, e per gli altri rami della matematica, e per la metamatematica, il *no* di Gödel è pienamente giustificato. La differenza, usualmente non rilevata, è che le proposizioni aritmetiche comprendono esclusivamente aggettivi numerici, per loro stessa natura privi di incertezze e imprecisioni, mentre in tutte le altre sono necessariamente presenti dei sostantivi, che esprimono dei concetti, di cui, per la loro origine dal nostro pensiero, inevitabilmente informale, gli assiomi mai potranno garantire la completezza.

L'alternativa è adombrata in tutte le formulazioni del Teorema d'incompletezza, che fanno riferimento, a *un sistema sufficientemente potente*, senza però specificare come va inteso: è invece il caso di precisare che "sufficientemente potenti", quindi incomplete, sono le proposizioni che comprendono *dei concetti*. Si potrà, ad esempio adattare l'efficace formulazione del Teorema d'incompletezza che si trova in Licata:

> *Ogni sistema sufficientemente potente, coerente ed assiomatizzabile è sintatticamente incompleto*. Questo risultato esprime che è sempre possibile produrre a partire da un sistema di assiomi A una proposizione P indecidibile. ossia della quale è impossibile stabilire, con gli strumenti del sistema, né la verità né la falsità[13].

modificandola in:

> Un sistema coerente ed assiomatizzabile *che non tratta esclusivamente numeri, ma anche concetti*, è sintatticamente incompleto. Questo risultato esprime che è sempre possibile produrre a partire da un sistema di assiomi A una proposizione P indecidibile, ossia della quale è impossibile decidere né la verità né la falsità.

Naturalmente, ciò non significa che nulla si può fare per completare le proposizioni con i concetti, almeno quanto è necessario per evitare le situazioni più evidenti d'indecidibilità, e nemmeno che i calcoli non sono possibili con i computer, perché non conoscono i concetti; come si accenna più sotto, però richiedono procedure ipercomputazionali ben più impegnative dei normali calcoli numerici. Si può però andar oltre.

L'assenza di incertezze - essenziale per la completezza – differenzia gli aggettivi numerici e geometrici dagli altri aggettivi, per loro natura inevitabilmente soggettivi: qualitativi, dimostrativi, possessivi, e dalle forme concettualmente equivalenti composte di più parole; sono però tutti *attributi* che, sia pure con criteri differenti, designano alcune caratteristiche particolari dei concetti cui sono associati: come si è detto, nel linguaggio, ma anche nella logica e nella matematica, assieme ai concetti essi hanno un ruolo essenziale ma differente, non soltanto dal punto di vista grammaticale, che non si possono ignorare.

La simmetria fra l'affermazione e la negazione, propria della logica binaria vale con alcune riserve, per gli attributi come *vero/falso*[14], non vale invece assolutamente per i concetti, perché - come si è detto e risulta evidente dalla figura - per tutti indistintamente, qualsiasi cosa salvo il concetto stesso corrisponde a ciò che *non è*: i concetti obbediscono a una logica *unaria*, che ammette unicamente l'affermazione, salvo come smentita di una precedente affermazione o quanto meno presunzione. Ma seguendo Aristotele i logici e i matematici tuttora lo ignorano

Invero, manca usualmente il motivo di negare i concetti, ma nei ragionamenti viene naturale di valersi del *modus tollens* della logica medioevale anche per i concetti, come si usa fare con gli attributi; ma non è corretto: la logica binaria indubbiamente semplifica i ragionamenti e le dimostrazioni, ma per i concetti non vale, perché il negato di qualsiasi concetto è sostanzialmente privo di significato, per cui nessuna deduzione significativa si può trarre da ciò che il concetto *non è*.

*

Nella *Teoria degli insiemi* sia i concetti che gli attributi hanno un ruolo essenziale, ma distinto: gli assiomi di Zermelo e Fraenkel (ZF, o ZFC se si include l'ipotesi della scelta) però non li distinguono, e nemmeno menzionano i concetti come insiemi, né gli attributi; e non è senza conseguenze.

Con la famosa antinomia dell'"Insieme di tutti gli insiemi che non includono se stessi quali elementi", Russell decretò il fallimento del tentativo di Frege di fondare sugli insiemi l'aritmetica, condizionando anche i successivi sviluppi delle teorie insiemistiche; tuttavia, se pure ciò che Russell definisce *appare vero se, e solo se, non è vero*, e c'è l'antinomia, un *insieme* è un concetto: non si può definirlo per quello che *non è*, né l'insieme per quello che i suoi elementi *non fanno*, perché sostanzialmente qualsiasi cosa vi corrisponde. In sostanza, quello di Russell *non è un insieme*, per cui qualsiasi ragionamento su di esso relativo agli insiemi risulta privo di senso.

Tuttavia, la vera causa del fallimento di Frege è un'altra. Dicono infatti Mangione e Bozzi:

> L'antinomia di Russell metteva in crisi proprio il concetto di estensione concettuale, perché faceva vedere che l'assumere, col principio di comprensione, l'esistenza e l'"oggettualità" di tale estensione relativamente a *ogni* concetto era un'assunzione contraddittoria.[16]

Per l'"insieme" di Russell, l'assunzione era contraddittoria; ma non lo è affatto necessariamente per "ogni concetto", purché però sia veramente *un concetto*, e quelli di Frege non lo erano.

La definizione di Cantor dell'*insieme*, del 1895 non precisa la natura degli "oggetti" che la soddisfano:

> Con *insieme* intendiamo ogni collezione in un tutto *M* di oggetti definiti e distinti *m* (che saranno chiamati gli elementi di *M*) della nostra intuizione o del nostro pensiero[17].

Attenendosi a un suo "principio di astrazione"[18], Frege riteneva di poter utilizzare gli attributi: ad esempio, di poter definire il *numero tre* come l'insieme delle *triple*[19]; ma non è una definizione valida, ed è quello il vero motivo - in cui il paradosso di Russell non c'entra - per cui il suo tentativo era condannato a fallire: mai l'insiemistica avrebbe potuto nascere se così Cantor avesse inteso gli "infiniti"; i suoi erano infatti (*numeri*) *infiniti*, ossia *concetti*. Solo i concetti sono atti a definire gli insiemi: gli assiomi ZF lo ignorano, per cui non possono suggerire dei criteri efficaci.

Così, la causa del fallimento di Frege è ricercata *nell'autoriferimento* del paradosso[20], e il problema della corretta definizione degli insiemi è tuttora considerato irrisolto. Dice infatti Hao Wang:

> Prese alla lettera, le limitazioni di Zermelo del non troppo ristretto e del non troppo ampio sono piuttosto deboli e lasciano spazio a una grande arbitrarietà, in quanto molte teorie degli insiemi reciprocamente incompatibili sono soluzioni possibili. Inoltre, implicitamente sussiste un'ulteriore arbitrarietà nel decidere quali risultati devono essere presi come dati per la ricostruzione, poiché è chiaro che il concetto di "aver valore" (che probabilmente implica anche "essere affidabile") è troppo ambiguo. Supponendo di avere un'idea abbastanza precisa di quali siano i dati, il nostro compito così come è stato descritto suona assai simile a un rompicapo combinatorio che in linea di principi o ammette varie soluzioni. Una situazione del genere non soddisfa il nostro intelletto nemmeno quando si tratta di scienze empiriche[21]

Russell cercò la soluzione nella sua *Teoria dei tipi*, ma i soli "tipi" da distinguere sono i concetti e gli attributi: il *principio di comprensione* va inteso nel senso che, per definire correttamente gli insiemi, valgono le *proprietà* dei concetti, semplici, o anche compositi - purché ovviamente non designino insiemi vuoti, né paradossali come quello di Russell; le *caratteristiche* degli attributi possono solo delimitarne dei sottoinsiemi: è quella la soluzione, molto semplice, del problema di definire correttamente gli insiemi.

L'attenzione dei matematici per gli insiemi trae origine dai problemi degli infiniti: ad essi è esclusivamente rivolta; e in funzione di quell'unica applicazione gli insiemi sono considerati, ignorando la loro origine dal linguaggio: gli insiemi, e ancor più i sottoinsiemi risultano entità astratte. Manca l'interesse per la natura e le caratteristiche degli elementi: gli assiomi parlano genericamente di *variabili*, per cui teoricamente potrebbero essere sia concetti che attributi; ma non è indifferente, perché elementi degli insiemi possono essere solo concetti; gli attributi permettono solo di delimitare dei sottoinsiemi, per cui gli assiomi risultano incompleti, e quella carenza si ripercuote su diversi aspetti della Teoria.

Ad esempio, si dà l'unione e l'intersezione fra insiemi come ugualmente possibili; ma mentre per l'unione - somma delle proprietà degli insiemi - non ci sono problemi, l'intersezione è ammissibile solamente fra sottoinsiemi di uno stesso insieme, definiti da differenti attributi[22]; considerazioni simili valgono per la complementarietà, che ha senso solo fra sottoinsiemi dell'insieme. Soprattutto, però, ignorando l'esistenza stessa degli attributi, sfugge il ruolo che essenziale che potrebbero, anzi dovrebbero avere nella delimitazione dei sottoinsiemi, risolvendo nel modo più semplice, e naturale, il problema - che Odifreddi considera molto serio - di "generare tutti gli insiemi di uso corrente":

Naturalmente, la classe delle *classi* che non appartengono a se stesse è contraddittoria [...] L'assioma di comprensione va dunque riformulato, dicendo che una proprietà di *insiemi* determina sempre una classe. Ma in questa forma esso perde molta della sua forza, perché permette allora soltanto di definire classi a partire da insiemi, i quali devono essere già definiti in qualche modo.

E non ci sono soluzioni indolori o eleganti al problema, visto che quella naturale fornita dall'assioma di comprensione è risultata inagibile. Si tratta allora di abbandonare l'approccio «logico», che vorrebbe procedere in base a principi generali, e di adottare un approccio «matematico», limitandosi a elencare una serie di principi particolari di esistenza e di costruzione di insiemi, che permettano pragmaticamente di generare l'utile, cioè tutti gli insiemi di uso corrente, ma allo stesso tempo di evitare il dannoso, cioè tutte le classi paradossali.(23)

Se si riconosce la funzione distinta, ma complementare, degli attributi rispetto ai concetti, e si evitano le associazioni improprie, che delimitando *insiemi vuoti* danno origine a "classi paradossali", si ha infatti la piena possibilità "pragmaticamente di generare l'utile, cioè tutti gli insiemi di uso corrente" - la cui stessa funzione risulta altrimenti difficile da comprendere - senza dover "abbandonare l'approccio «logico»" con soluzioni "non indolori" né "eleganti" come l'"approccio «matematico»" complesso e macchinoso dell'*insieme potenza*.

Tutti i "sottoinsiemi di uso corrente" dell'insieme possono infatti essere generati nel modo più semplice e naturale, quali sottoinsiemi dei concetti delimitati dalle caratteristiche stesse che devono avere, indicate dagli attributi, come implicitamente aveva fatto Cantor coi vari "infiniti": sottoinsiemi di quell'insieme generico, delimitati dai differenti attributi: "naturale", "razionale", ecc.

*

Riconoscere la distinzione fra concetti e attributi è importante anche in altri problemi: può darne un'idea quello noto come *P versus NP*, uno dei sette "problemi del millennio", per la cui soluzione il *Clay Mahematics Institute*, di Cambridge, Massachussets, ha offerto un premio di un milione di dollari: detto in modo molto succinto, si tratta di dimostrare se la soluzione di un problema di programmazione dei computer richiede, oppure no, più tempo della sua verifica(24).

Verosimilmente, il premio mai potrà essere riscosso, perché il regolamento prescrive espressamente una dimostrazione formale, ma la materia stessa non lo consente. La risposta molto semplice è infatti *dipende*: dipende dalla natura del problema, se cioè vi hanno un ruolo anche i concetti, o soltanto gli attributi. Una cosa è, di fatto, se si ha a che fare con problemi esclusivamente numerici, o in cui i concetti non hanno comunque motivo di intervenire nella soluzione, come ad esempio un "conto della spesa", in cui i calcoli interessano esclusivamente i normali aggettivi numerici, che i computer sono predisposti a trattare; altro, e ben più complicato, è invece se i calcoli coinvolgono i concetti, perché gli attributi sono di altra natura, e richiedono operazioni logiche booleane anziché esclusivamente numeriche(25), o perché la natura stessa del problema – ad esempio la soluzione di un "puzzle" – coinvolge nei calcoli i concetti, che i computer non conoscono.

Possono essere istruiti a risolvere anche quei problemi tanto più complessi e difficili: sono di fatto disponibili programmi, basati su algoritmi ipercomputazionali, che per l'emulazione richiedono Macchine di Turing non deterministiche, ampiamente collaudati, ma con NP necessariamente ben maggiore di P. Nel caso, ad esempio, del problema *del commesso viaggiatore*, che deve scegliere il percorso che permette di toccare in sequenza ciascuna delle città che deve visitare, minimizzando la distanza totale da percorrere, i programmi danno soluzioni pienamente soddisfacenti; solo però finché il numero delle città è contenuto, perché col loro numero cresce esponenzialmente il tempo richiesto dalle soluzioni per tentativi.

I problemi che coinvolgono i concetti, la nostra mente li risolve intuitivamente, in modo analogico anziché digitale, necessariamente approssimativo, ma proprio per i casi più complessi come quello, in cui la precisione non è determinante, l'elasticità delle soluzioni mentali può rappresentare un vantaggio, che l'enorme velocità del calcolo digitale del computer non basta a compensare: può essere più conveniente usare il nostro "colpo d'occhio" innato per tracciare su una carta geografica i pochi percorsi ragionevoli che l'intuito ci suggerisce, e i calcoli del computer dovranno verificare, scartando *a priori* gli innumerevoli chiaramente sfavorevoli, che per la sua natura al computer è molto più difficile riconoscere.

*

La presenza dei concetti ha un ruolo determinante, ma tuttora ignorato, anche nella Scienza cognitiva: è infatti la caratteristica che in primo luogo contraddistingue l'Intelligenza artificiale *forte*, come pure l'approccio veramente intelligente dei nostri ragionamenti, e lo differenzia da quello invece logico, ma sostanzialmente meccanico, del calcolo, e dell'IA debole, limitati al rapporto esclusivamente fra attributi alla portata dei normali computer.

Già nel 1956 la *Logic Theory Machine* di Newell e Simon, era capace di dimostrare teoremi di Logica matematica, e il *General Problem Solver*, o GPS, del 1957, di risolvere problemi di carattere generale, però pur sempre relativi solo ad attributi; e ciò vale anche per i *sistemi esperti*, oggi di larghissimo uso, che permettono di individuare dei concetti - ad esempio delle malattie – deducendoli però dai valori di loro attributi tratti dalla nostra esperienza, in quel caso i sintomi. L'IA forte non può invece ignorare l'aspetto concettuale, quindi il ruolo semantico, o forse meglio *para-semantico* dei dati, di concetti e non solo attributi(26).

L'approccio *subsimbolico* usuale all'Intelligenza artificiale non fa invece alcuna distinzione. Per il *Manuale di scienza cognitiva*, di Pessa-Pennna:

> Il presupposto fondamentale dell'approccio subsimbolico è che i processi cognitivi sono da considerarsi fenomeni macroscopici, emergenti alla stregua di processi collettivi dall'azione cooperativa di un gran numero di costituenti microscopici della conoscenza stessa. A differenza dei simboli utilizzati dall'approccio computazionale simbolico, i costituenti microscopici della conoscenza non sono dotati di per sé di significato, almeno non di un significato globale. Essi possono essere visti alla stregua di microcaratterstiche indispensabili per definire un pattern o un concetto, ma nessuna delle quali, da sola, può bastare per caratterizzare una data situazione(27).

Parrebbe naturale identificare quelle "microcaratteristiche" subsimboliche con gli attributi che specificano le caratteristiche accessorie dei concetti, e puntare su di esse l'attenzione; secondo il libro, l'approccio prevalente cerca invece di emulare globalmente, con dispositivi da noi costruiti, le nostre reti neurali naturali:

> In definitiva i processi cognitivi, secondo l'approccio subsimbolico, vanno considerati come coincidenti con particolari configurazioni di microcarattetisiche ciascuna delle quali rappresenta un oggetto che giustamente si può denotare come «subsimbolico». Il modo più efficiente per descrivere una tale situazione è quello di far ricorso alle cosiddette *reti neurali*. Con questo nome si designano dei sistemi, di natura molto generale, costituiti da *unità* e da *interconnessioni* tra le unità. Ogni unità è caratterizzata da un opportuno *grado di attivazione* (detto anche *uscita*), dipendente a sua volta dai segnali ricevuti in ingresso dall'unità stessa tramite una opportuna *legge* o *funzione di attivazione*. Le interconnessioni servono a veicolare l'attivazione, alla stregua di un segnale, dall'uscita di una unità all'ingresso di un'altra. Ogni interconnessione è associata a un valore numerico, detto *peso* o *coefficiente di connessione*, che modula il valore dell'attivazione che la attraversa(28).

E' però una specie di fuga in avanti: non è facile credere che "il modo più efficiente per descrivere una tale situazione" possano essere le *reti di computer*, con cui si cercano di simulare i meccanismi neurifisiologici che presiedono alla costruzione e all'interpretazione del linguaggio, di cui pressoché nulla sappiamo, ignorando ciò che invece conosciamo per esperienza diretta, come la differenza fra i concetti e gli attributi: parrebbe più ragionevole chiarire prima di tutto cosa quelle architetture cognitive fanno, quindi in primo luogo cosa si deve intendere come "concetti, su cui - come riconosce il *Manuale* - le posizioni sono molto variegate, e ben più incerte di quella delineata più sopra:

> Infatti, nell'ambito dell'approccio computazionale simbolico si riconosce che gli eventi possono innescare l'attivazione di un concetto, ma che, nello stesso tempo, non vi è una corrispondenza biunivoca tra concetti e classi di eventi. Come si spiegherebbe, altrimenti, il significato di concetti quali quello di numero naturale, quello di «paura» o quello stesso di «concetto»? In tutti questi casi non esiste, in linea di principio, un insieme di caratteristiche osservabili comuni a tutti gli eventi descrivibili da ciascuno dei concetti sopra esposti. Quali proprietà fisiche, infatti, accomunano (tanto per fare un esempio) due sedie, due cavalli, o due pianeti, tutti esemplari, in linea di principio ugualmente rappresentativi, del concetto di «due»?(29)

La risposta molto semplice è che "due" non è un concetto, ma un attributo - di natura del tutto differente - che in quel caso particolare accomuna concetti quali sedie, cavalli e pianeti: bisogna didtinguerli, ma la tesi di Church-Turing lo ignora, e come è detto nella nota 11, così fa anche la Macchina di Turing. Ma non si può disinteressarsi di cosa i simboli rappresentano: se solo attributi, o anche concetti, perché è la presenza dei concetti che distingue la IA forte, da quella debole, riferita esclusivamente ai *valori* degli attributi.

Per trovare soluzioni ignote, i computer richiedono metodi euristici, anziché quelli normali algoritmici; ma non è lo stesso se è IA debole, in cui i problemi, riguardano solo degli attributi: grazie alla grande velocità e memoria, del computer per la soluzione possono bastare le normali computazioni, attribuendo ai concetti in gioco dei valori ricavati dalla nostra esperienza, negli scacchi, ad esempio, quello dei diversi pezzi. Altro è invece se è IA forte, per cui nei calcoli intervengono i concetti.

In base alla nostra esperienza, possiamo insegnare ai computer processi ipercomputazionali che permettono di risolvere i problemi, ma non è pensabile che possano arrivarvi da soli i computer, che i concetti li ignorano. Non è però nemmeno da escludere che, in un futuro, grazie alle loro doti continuamente crescenti di memoria e velocità, anche i computer non possano arrivare – quand'anche in modo altro da noi, macinando enormi quantità di dati - a riconoscere le combinazioni di attributi da cui i nostri concetti traggono la loro origine.

* * *

1) Più precisamente, i segmenti possono appartenere sia a linee *aperte*, relative ad attributi di natura qualitativa, che alle linee invece *chiuse* di attributi operativi, ad esempio numerici.

2) Eliano Pessa e M. Pietronilla Penna, *Manuale di scienza cognitiva*, Bari, Laterza 2000, pp. 150-151. Il brano prosegue: "Il grosso limite delle rappresentazioni basate sui *frames* è che esse sono progettate per tener conto dei vincoli assai stretti cui la maggior parte delle strutture concettuali deve soddisfare. In altri termini, la costruzione dei *frames* e delle loro reciproche relazioni è lasciata completamente all'arbitrio dell'utente, in quanto questo tipo di rappresentazioni non contiene meccanismi naturali che impediscano la presenza di relazioni contraddittorie, impossibili o contrarie al buon senso." Non meno che per i *frames*, però ciò vale per i nostri concetti.

3) Ci sarebbe altrimenti molto difficile, se non impossibile, immaginare entità inesistenti, puramente immaginarie, quali l'araba fenice e la moltitudine degli dei che popolano il mondo delle mitologie.

4) Ipotizzando che la memoria abbia la capacità di ricordare *n* distinti codici equamente divisi fra sostantivi e aggettivi, combinarli uno a uno permetterebbe di designare ben $n^2/4$ differenti concetti compositi. Ovviamente non tutti gli accoppiamenti sono validi: se concetti e attributi sono estranei, come ad esempio "bontà veloce", "o peggio contraddittori, come "verità falsa", possono assumere un significato solo in particolari contesti, altrimenti designano *insiemi vuoti* dando origine a *paradossi*; per contro però, più differenti attributi possono essere associati a uno stesso concetto, designando ulteriori concetti quali sotto-sottoinsiemi, e così via.

5) In italiano, ma non in altre lingue, gli attributi possono sia precedere che seguire i concetti cui si riferiscono, sia pure con differenze anche rilevanti di significato; al predicato, delimitano invece i ricordi inclusi nel concetto che costituisce il soggetto della proposizione.

6) La sola eccezione riguarda la velocità, che per valori che via via si approssimano a quella della luce, non rispetta più le leggi della somma.

7) Dice Aristotele, *Categorie*, 1b 25-28: "I termini che si dicono senza alcuna connessione esprimono, caso per caso, o una sostanza, o una quantità, o una qualità, o una relazione, o un luogo, o un tempo, o l'essere in una situazione, o un avere, o un agire, o un patire. Per esprimerci concretamente, sostanza è, ad esempio, "uomo" o "cavallo"; quantità è "di due cubiti", "lunghezza di tre cubiti"; qualità è "bianco", "grammatico"; relazione è "doppio", "maggiore"; luogo è "nel Liceo", "in piazza"; tempo è "ieri", "l'anno scorso"; essere in una situazione è "si trova disteso", "sta seduto"; avere è "porta le scarpe", "si è armato"; agire è "tagliare", "bruciare"; patire è "venir tagliato", "venir bruciato".

8) Piergiorgio Odifreddi, *Il diavolo in cattedra*, Torino, Einaudi 2003, p. 131.

9) Invero i motivi di perplessità: in modo molto sintetico, la famosa proposizione su cui la "prova" si fonda: "La proposizione G non è dimostrabile", già di per sé non è dimostrabile né refutabile, perché di G nulla si sa; così è per forza anche il *gödeliano* che la rispecchia in forma aritmetica come prodotto di fattori, ma la responsabilità non è certo dell'aritmetica; come è stato spiegato, non è poi accettabile il ragionamento basato sull'uso dei negati di concetti e proposizioni, per noi privi di significato. Certamente la logica binaria semplifica la soluzione dei problemi, ma solo la presenza di concetti e proposizioni è significativa, non l'assenza, che è la regola.

10) Nel suo discorso al Congresso di Paigi del 1900 in cui pose il problema, Hilbert specificò: "Essenzialmente gli assiomi aritmetici non sono altro che le note regole di calcolo con l'aggiunta degli assiomi di continuità" (dal testo del suo intervento, in inglese, da Google). I teoremi, come quello di Goodstein, che si vedono citati non sono relativi all'indimostrabilità di ciò che le proposizioni aritmetiche affermano, ma di alcune loro caratteristiche particolari: l'unica "prova" della loro presunta esistenza rimane la dimostrazione piuttosto complessa che Gödel ne ha dato, più ammirata che compresa e - come è detto nella nota precedente - per più versi discutibile.

11) Il ragionamento è molto semplice: non si può sapere, per principio, se una Macchina di Turing si fermerà oppure no: su ciò si basa la prova dell'incompletezza data da Turing. Però così è, perché non si ha idea di cosa siano i dati su cui la Macchina opera, cioè quale ne sia il significato; ma se invece lo si sapesse, la situazione sarebbe diversa. Supponendo infatti di avere un normale computer, che compie una qualsiasi semplice operazione

aritmetica, ad esempio 2 + 2 = 4, la Macchina di Turing lo può emulare: non può sussistere alcun dubbio che si fermerà; non invece con le proposizioni che comprendono concetti e aggettivi di altra natura, i cui codici, a differenza di quelli esclusivamente numerici, obbedienti a precise regole di codificazione, delle proposizioni aritmetiche, sono stabiliti in modo sostanzialmente arbitrario.

12) Gli aggettivi numerici delle espressioni aritmetiche si riferiscono a concetti sottintesi, che possono essere qualsiasi, quindi ignorati; lo stesso vale per quelle algebriche, in cui i simboli si riferiscono a dei concetti, ma lì ne rappresentano solo il valore numerico, e per quelle della geometria Euclidea, di cui Hilbert stesso aveva dimostrato la completezza.

13) Ignazio Licata, *La logica aperta della mente*, Torino, Codice, 2008, p.85.

14) Ciò vale solo in via teorica, perché in realtà nel linguaggio ci sono proposizioni né vere né false. Gli attributi qualitativi ammettono un negato, però tanto meno significativo quanto è più ampia è la gamma dei valori possibili; per quelli numerici, sia positivi che negativi, che sono infiniti, il negato è privo di senso come per i concetti

16) Corrado Mangione e Silvio Bozzi, *Storia della logica da Boole ai nostri giorni*, Milano, Garzanti 1993, pp. 355- 357.

17) Riportata da Hao Wang a p. 201 di *Dalla matematica alla filosofia*, Torino, Boringhieri 1974.

18) Dice Paolo Zellini a p. 62 di *Il calcolatore universale*, Milano, Adelphi 2003: "In ogni caso, quel che sarebbe stato chiaro di lì a poco era l'incompatibilità del principio che Frege aveva posto a fondamento della pensabilità di una classe: il principio, cioè, di. astrazione (o *comprensione*). Tale principio, nella classica equivalenza tra classi e attributi, poteva riassumersi nel credere che a ogni attributo (o concetto o predicato) corrispondesse la propria 'estensione', cioè l'insieme di tutti gli oggetti per cui era predicabile quell'attributo".

19) Dice Martin Davis, *Il calcolatore universale*, Milano, Adelphi 2003, a pp. 77-78: "Dunque Frege voleva arrivare a definire i numeri naturali in termini puramente logici per poi derivare le loro proprietà utilizzando proprio la sua logica. Così, doveva diventare un concetto logico, per esempio, il numero 3. Come ci si poteva arrivare? Un numero naturale è una proprietà di un insieme, e per l'esattezza il numero dei suoi elementi; dunque il numero 3 è una cosa che hanno in comune collezioni come l'insieme dei cavalli che tirano una troika, l'insieme delle foglie di un trifoglio (nei casi normali), l'insieme *{a,b,c}* delle lettere *a*, *b, c.* Si può dire che due qualsiasi di questi insiemi hanno lo *stesso* numero di elementi senza mai parlare del 3: basta metterli in corrispondenza elemento per elemento. Ebbene, Frege ebbe l'idea di identificare il numero 3 con la collezione di tutti questi insiemi, ovvero con l'insieme delle triple".

20) Dice Elliott Mendelson nella *Introduzione alla logica matematica*, Boringhieri, Torino 1972, a p. 13: "L'analisi dei paradossi ha condotto a diverse proposte per evitarli. Tutte queste proposte sono restrittive, per un verso o per l'altro, dei concetti "ingenui" che intervengono nella derivazione dei paradossi. Russell mise in luce che in tutti i paradossi è presente un autoriferimento e propose di associare a ogni oggetto un intero non negativo definito come suo "tipo". Perciò l'espressione "x è un elemento dell'insieme y" è *significante* se e solo se il tipo di y è maggiore del tipo di x. Questo tentativo, conosciuto come teoria dei tipi e sistematizzato e sviluppato da Russell-Whitehead (1910-13), riesce a eliminare i paradossi noti,' ma è macchinoso nella pratica per quanto concerne l'applicazione e presenta alcuni inconvenienti".

21) A p. 201 del libro della nota 17.

22) Come si dice più sotto, senza fare riferimento agli attributi risulta pesino difficile parlare si sottoinsiemi. Gli insiemi sono mutuamente esclusivi; al più gli *iponimi* possono essere inclusi negli *ipernimi*, come i "mammiferi" negli "animali; fa eccezione solo il caso anomalo degli omonimi parziali, quali, ad esempio, *guerra*, e *conflitto*.

23) Nel libro della nota 8, p. 205.

24) In realtà, il quesito usa come riferimento il "tempo polinomiale" richiesto per la verifica di un problema cosiddetto "NP completo" dei più semplici.

25) Dalla figura relativa alla nascita dei concetti, risulta evidente che sono una funzione complessa degli attributi concorrono, che richiede delle capacità di *soddisfacibilità booleana* (SAT), che i computer non sono predisposti a soddisfare: non per nulla, il primo problema che nel 1971 Stephen Cook dimostrò NP completo, fu quello di assegnare i valori alle variabili di una logica booleana. Fu questo il problema preso come riferimento per valutare il grado di difficoltà per risolverli.

26) Gli aspetti semantici riguardano propriamente il significato delle singole parole, siano esse concetti o attributi.

27) Nel libro della nota 2, pp. 18-19.

28) Ivi, p. 19.

29) Ivi. p. 23.

Ivrea. 6/11/2013