Divisibilità per 3 degli elementi di particolari sequenze numeriche - Marco Ripà

Pubblicato online su AtlantIQ Magazine in data 01/09/2010

In questo breve articolo affronterò un'accezione del noto "unsolved problem" n°15 (che richiede di individuare, se esistono, quali elementi della sequenza consecutiva – 1,12,123,1234,… - sono numeri primi), proposto da Florentin Smarandache nella sua pubblicazione, datata 1993, "Only problems, not solutions!" [1].
In particolare mi occuperò del problema della divisibilità di una classe (piccola in senso assoluto, ma con moltissime varianti) di successioni di numeri naturali (interi positivi escluso lo zero), andando ad intersecare anche alcuni degli altri quesiti introdotti dal summenzionato testo.
In seguito fornirò una semplice formula per restringere molto il campo di ricerca dei possibili primi (ciò che viene richiesto di individuare), accompagnata dalla percentuale di "candidati numeri primi" fra tutti i generici elementi della successione. Non darò (purtroppo) una risposta definitiva al quindicesimo quesito, ma svilupperò un semplice criterio, estendibile (con piccolissime modifiche) anche ad altri tipi di successioni "affini".

Sappiamo che un numero naturale si dice primo quando è divisibile solo per 1 e per sé stesso e che l'unità non rientra nella cerchia dei numeri primi. Un numero è invece divisibile per 2 se finisce con cifra pari (0, 2, 4, 6 o 8), mentre la divisibilità per 3 è assicurata dalla condizione che il risultato della somma di tutte le cifre del numero che ci proponiamo di fattorizzare sia a sua volta divisibile per 3. Infine, ricordo che tutti i numeri terminanti con il 5, annoverano sempre 5^n (con $n \geq 1$) fra i propri divisori[1] [2].
Indichiamo con $a_1,a_2,a_3,\dots$ i singoli elementi che compongono la "sequenza consecutiva" 1,12,123,…,123456789,12345678910,1234567891011,…
Pertanto abbiamo che a_i, è semplicemente pari ad $a_{i-1}\_g_i$ (con l'underscore faccio riferimento alla posposizione del suffisso "i" al termine che precede tale simbolo, mentre con "g_i" indico l'i-esimo *tassello* – formato da "#Cf" cifre[2] -).

Il caso $a_1=1$ è ovviamente banale.
a_2 ci permette di sfruttare il criterio della divisibilità per 2 e la medesima considerazione vale per tutti gli altri elementi della sequenza connotati dal pedice $i=2*n$ $(n \in \aleph)$.

---

[1] Mi sto implicitamente riferendo al sistema di numerazione in base 10 (quello che quotidianamente utilizziamo). Ad esempio, ponendoci nel sistema binario, la successione con cui dovremmo confrontarci sarebbe 1,110,11011, 11011100,…; nel sistema ottale avremmo invece 1,12,123, …,1234567,123456710,12345671011,1234567101112,… e così via.

[2] E' evidente che $g_i=i$, $g_{i-1}=i-1$ ecc… La scelta di introdurre il simbolo "g" è unicamente volta alla semplificazione, espositiva e visuale.

Studiando la divisibilità per 3 si hanno risultati senz'altro più interessanti. Indicando con g_i gli elementi costitutivi della sequenza che via-via si pospongono all'ultimo di quelli già presenti, come spiegato poc'anzi, abbiamo a_i=g_1_g_2_g_3_..._g_i.

Il generico elemento g_l (con $1\leq l\leq i$) sarà composto da un numero di cifre (#Cf) pari a $\#\mathrm{Cf(l)} = \min\left\{k: \frac{g_l}{10^k} \leq 1\right\}$, con $k \in \aleph \setminus \{0\}$.

Definiamo le singole cifre di g_l come c_1,c_2,c_3,...: per k_{min}= $\#Cf_{(l)}$, si ha che g_l=c_1_c_2_c_3_..._$c_{\#Cf(l)}$.

A questo punto, notiamo che la condizione postulante la divisibilità per 3 di a_i (che se verificata impone la non primalità dell'elemento a_i), risulta soddisfatta (C.S.) se lo era per l'elemento a_{i-1} e contemporaneamente anche "i" risulta essere divisibile per 3 (i=3*n). Lo stesso vale se è divisibile l'elemento a_{i-2} e i-1+i=2*i-1 annovera il 3 (con esponente arbitrario maggiore o uguale all'unità) tra i propri fattori (2*i-1=3*n).
In seguito dimostrerò che i casi possibili, che si possono verificare concretamente, sono solo due dei tre seguenti[3]:

$A_1 := \sum_{h=1}^{i} \sum_{l=1}^{\#Cf_h} c_l = 3 * n$ (ovvero A_1:=a_i≡$\sum_{h=1}^{i} g_h = 3 * n$),

$A_2 := \sum_{h=1}^{i-1} \sum_{l=1}^{\#Cf_h} c_l = 3 * n$ (ovvero A_2:=a_{i-1}≡$\sum_{h=1}^{i-1} g_h = 3 * n$),

$A_3 := \sum_{h=1}^{i-2} \sum_{l=1}^{\#Cf_h} c_l = 3 * n$ (ovvero A_3:=a_{i-2}≡$\sum_{h=1}^{i-2} g_h = 3 * n$).

Basta infatti osservare che A_3 è ridondante[4], poiché esso è interamente coperto (alternativamente) dal caso A_1 e da quello A_2. La corrispondente successione relativa al problema n°15, indicando con A_0 il caso "sui generis" a_1=1, è appunto A_0,A_1,A_1,A_2,A_1,A_1,A_2,A_1,A_1,A_2,...; ovvero ∀i≥1,$\sum_h g_h$=A_1 se i=2+3*m oppure i=3*(m+1) $(m \in \aleph \geq 0)$ e $\sum_h g_h$=A_2 nei casi rimanenti (i=1+3*m).

Ne segue che la somma delle cifre di qualsiasi tripletta di elementi consecutivi (g_{l-1}, g_l, g_{l+1}) forma un numero divisibile per 3 (ovvero g_{l-1}+g_l+g_{l+1}=3*g_l). Operativamente parlando, se per esempio volessimo verificare la divisibilità per 3 di a_i, andremmo a studiare quella di $\sum_{h=1}^{i-2} \sum_{l=1}^{\#Cf_h} c_l + \sum_{l=1}^{\#Cf_{(i-1)}} c_l + \sum_{l=1}^{\#Cf_i} c_l$: se $\sum_{h=1}^{i-2} \sum_{l=1}^{\#Cf_h} c_l$=3*n ci troveremo nell'ambivalente situazione A_3, se $\sum_{h=1}^{i-2} \sum_{l=1}^{\#Cf_h} c_l + \sum_{l=1}^{\#Cf_{(i-1)}} c_l$=3*n saremmo nelle condizioni A_2, mentre se $\sum_{h=1}^{i-2} \sum_{l=1}^{\#Cf_h} c_l + \sum_{l=1}^{\#Cf_{(i-1)}} c_l + \sum_{l=1}^{\#Cf_i} c_l$=3*n ricadremo nel caso denominato A_1.

Essendo A_3, A_2 e A_1 divisibili per 3, possiamo eliminare tutti i g_h corrispondenti e limitarci a studiare i termini restanti della sequenza (rispettivamente due, uno e zero)[5]. Se la somma delle cifre

---

[3] E' lecito scrivere le successive uguaglianze, in quanto esse sono legittimate dalla relazione di congruenza 10^n (mod 3)≡1.

[4] Usando un pizzico di logica spicciola, è aprioristicamente chiaro che le opzioni vere e proprie sono soltanto due: o un numero è divisibile per un altro, oppure no. Alla prima situazione associamo A_1, viceversa abbiamo A_2.

[5] In questo frangente ho preferito tornare a ragionare anche in termini di A_3, per non appesantire inutilmente l'articolo. Sappiamo bene che il tassello g_h che non si elide (se c'è) è uno solo (i→A_2) e non ci sarebbe bisogno di fare ulteriori valutazioni, poiché A_1 implica automaticamente la divisibilità per 3, mentre da A_2 si deduce immediatamente l'esatto contrario.

di questo/i tassello/i è a sua volta divisibile per 3, allora lo sarà l'intero a_i. Osservando lo schema definito da a_i per $i \to \infty$, appare nitidamente qual è la sequenza degli a_i divisibili per 3. Combinando quest'ultima con quella degli $a_i=2*n$ (descritta in apertura), possiamo facilmente depennare la maggior parte di loro dal novero dei candidati numeri primi. Sovrapponiamo a questo punto lo schema degli a_i terminanti con il 5 (e dunque divisibili per 5) ed otteniamo una relazione che esclude quasi l'87% degli a_i dall'insieme (potenzialmente vuoto) dei papabili numeri divisibili solo per uno e per sé stessi (definiamoli per comodità $\mathbf{a_j}$)[6].

La formula finale risulta essere dunque:

$$\begin{cases} \mathbf{j = 1 + 6 * n} \\ \mathbf{n \neq 4 + 5 * k} \end{cases} \qquad (n \in \aleph \backslash \{0\}, k \in \aleph).$$

Il rapporto $\frac{a_j}{a_i}$ *100 indica la percentuale dei "candidati numeri primi" all'interno della nostra sequenza, in relazione al loro totale; ne consegue che la probabilità di $a_i \equiv a_j$ è compresa tra un massimo assoluto di $\frac{3}{19}$ ≈0.15385 (registrabile in corrispondenza di n=3) ed il valore asintotico: $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{1+6*n} - \frac{n}{24+6*n*5}\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{30} = \frac{1}{7.5} = 0.1\bar{3}$.

Ho verificato direttamente (con gli strumenti forniti da [3]) che i termini a_i con i < 217 (i primi 28 a_j) sono tutti numeri composti, riuscendo altresì ad individuare alcuni pattern tra le relative fattorizzazioni [4]. Tuttavia la primalità di qualche a_i resta assolutamente possibile e questo articolo non fornirà alcuna risposta in merito.

In virtù delle proprietà commutative dell'addizione, la regola inerente la divisibilità per 3 degli a_i si estende anche alle altre sequenze contenenti tutti i tasselli di a_i in ordine sparso, anzi, ad una classe ancora più vasta di serie numeriche.
Se una generica sequenza S contiene solo elementi s_j costituiti dagli stessi quantitativi di cifre di alcuni degli a_i, possiamo limitarci ad applicare la regola del 3 appena vista proprio in quel contesto. Basterà esprimere gli s_j in termini dei corrispettivi a_i, effettuare la sostituzione e studiare questi ultimi per poi trasporne l'esito agli s_j. Non solo potremo usare quanto illustrato per studiare la divisibilità per 3 di tutte le possibili permutazioni degli "i" tasselli della sequenza consecutiva canonica, ma avremo facoltà di includere anche tutte le permutazioni delle $\sum_{l=1}^{i} \# Cf_l$ cifre che la

---

[6] Quanto detto per i fattori 2, 3 e 5 potrebbe essere astrattamente ripetuto anche per il 7, l'11, il 13, ecc…, purché si tenga conto di un ulteriore variabile, vale a dire il numero delle cifre di "i": quando questo elemento varia, mutano pure le regole da applicare. Sarebbe sufficiente implementare le note semplificazioni metodologiche, inerenti la divisibilità per i suddetti fattori, per poi generalizzare i risultati ottenuti, al fine di restringere ulteriormente il cerchio dei possibili candidati numeri primi. Ad esempio, ho studiato che per 95≤i≤996, $a_i \mid 7 \Rightarrow i=95+\sum_s d_s$, dove d_s=0,5,9,5,9,5,9,5,9,… per s=0,1,2,3,…,129. Infatti la successione degli incrementi d_s è periodica - di periodo Δs=2 - a partire da s=1 (gli incrementi +5 e +9 si alternano al crescere del valore assunto dall'indice "s"). Analogamente, $a_i \mid 11 \Rightarrow i=106+\sum_s d_s$, in cui d_s=0,7,15,7,15,7,15,7,15,… per s=0,1,2,3,…,81. Anche qui si ha che d_s - la successione degli incrementi - ha periodo Δs=2 per 1≤s≤81.

compongono. La sequenza circolare rientra perfettamente in questa casistica, insieme alla "sequenza sinistra-destra" (e a quella destra-sinistra) con termini naturali e a un'infinità di altre[7].
Le considerazioni circa la divisibilità per 2 e per 5 restano le solite (le stesse già fatte discutendo la sequenza consecutiva canonica).

Appendice:

12 3 45 6 78 9 1011 12 1314 15 1617 18 1920 21 2223 24 2526 27 2829 30 3132 33 3435 36 3738 39 ...
...1767 ...17681769 ...1770 ...17711772 ...1773 ...17741775 ...1776 ...17771778 ...1779 ...17801781 ...

Dimostrazione che a_i <u>non</u> è divisibile per 3 se e solo se g_i=1+3*n (si ricordi che - per definizione - g_i≡i).

In una successione consecutiva, come Sm_N, si ha che l'incremento del totale della somma delle cifre, passando da a_i ad $a_{i+1,}$ è costante in modulo 3 e forma a sua volta una sequenza puramente periodica, se computata in tale modulo. Indicando con T(i) la somma delle cifre di a_i, abbiamo che, inizializzando T per un certo i, [T(i-1)](mod 3)≡0, [T(i)](mod 3)≡[T(i-1)](mod 3)+g_i(mod 3)≡1, [T(i+1)](mod 3)≡[T(i)](mod 3)+g_{i+1}(mod 3)≡[1+2](mod 3)≡0 e [T(i+2)](mod 3)≡[T(i+1)+3](mod 3)≡[T(i-1)](mod 3)≡0.
La congruenza in modulo 3 di T(i-1) e T(i+2) impone:
g_i(mod 3)≡[T(i)](mod 3)≡[T(i+Δi)](mod 3)≡[T(i)+Δi](mod 3) per Δi=3*n. L'asserto segue automaticamente, poiché g_i(mod 3)≡[T(i)+Δi](mod 3)≡[T(i)](mod 3)+Δi(mod 3)≡1 □

Nel nostro caso, essendo Sm1=1 – pari a 1(mod 3) -, risulta che Sm2(mod 3)≡0 e Sm3(mod 3)≡0.
Più in generale, [Sm(1+3*k)](mod 3)≡1 e [Sm(2+3*k)](mod 3)≡[Sm(3*k)](mod 3)≡0 $\forall k \in \aleph_0$.

Pertanto si verificano solo i casi A_1 e A_2 visti precedentemente ed il $66.\bar{6}$% degli Sm_N risulta essere divisibile per 3. Lo stesso dicasi per tutte le possibili permutazioni delle cifre che compongono a_i∈Sm_N.

---

[7] **Tra gli esempi più lampanti, vi è l'inverso della sequenza appena studiata; la si ottiene sostituendo g_1 con g_i, g_2 con g_{i-1}, e così di seguito, fino ad arrivare allo "swap" tra g_i e g_1. In tal caso, il risultato relativo alla divisibilità per 3 non muta di una virgola, proprio in virtù della proprietà commutativa della somma. E' stato verificato che tra i primi 10000 termini della sequenza, solo l'ottantaduesimo è un numero primo (82818079…4321) [5].**

Krematura dei 499501 termini iniziali della sequenza circolare ed esplicitazione dei più piccoli 31 numeri primi in essa contenuti - Marco Ripà

Pubblicato online in data 03/09/2010

Studio della primalità degli elementi della "sequenza circolare" (in analogia con quanto fatto per la sequenza consecutiva), nell'ambito del sistema di numerazione decimale.

Il termine generico della sequenza circolare (cfr. unsolved problem n°16) è esprimibile tramite la formula proposta da Vassilev-Missana & Atanassov [6-7]:
Indicando, come sempre, il primo "tassello" di ogni $a_i \equiv a(i)$ con g_1, il secondo con g_2 e così di seguito fino a g_i, rendiamo consistente la formula in questione con le notazioni che abbiamo finora utilizzato.
Sia a(i) l'i-esimo termine della sequenza circolare, per ogni numero naturale "i", risulta:

a(i)=s_(s+1)_..._k_1_2_..._(s-2)_(s-1),

dove $k \equiv k(i) = \left\lfloor \frac{\sqrt{8*i+1}-1}{2} \right\rfloor$

e $g_1 := s \equiv s(i) = i - \frac{k*(k+1)}{2}$ (infatti, $i = \sum_{l=1}^{r-1} l + g_1 = \frac{k*(k-1)}{2} + g_1$).

Il cui sviluppo è il seguente:

$\underbrace{\boxed{1}}_{M1}, \underbrace{\boxed{12},21}_{M2}, \underbrace{\boxed{123},231,312}_{M3}, \underbrace{\boxed{1234},2341,3412,4123}_{M4}, \underbrace{\boxed{12345},23451,34512,45123,51234}_{M5}, \underbrace{\boxed{123456},234561,345612,456123,561234,612345}_{M6},$

$\underbrace{\boxed{1234567},2345671,3456712,4567123,5671234,6712345,7123456}_{M7}, \underbrace{\boxed{12345678},23456781,34567812,45678123,56781234,67812345,}_{M8}$

$\underbrace{78123456,81234567}, \underbrace{\boxed{123456789},234567891,345678912,456789123,567891234,678912345,789123456,891234567,912345678}_{M9},$

$\underbrace{\boxed{12345678910},23456789101,34567891012,45678910123,56789101234,67891012345,78910123456,89101234567,91012345678,}_{M10}$

$\underbrace{10123456789}, \underbrace{\boxed{1234567891011},2345678910111,3456789101112,4567891011123,5678910111234,6789101112345,7891011123456,...}_{M11}$

Come mostrato nella figura sovrastante, uno specifico sottogruppo degli elementi della sequenza circolare può essere estratto ed usato per costruire una sottosequenza, chiamiamola O(r), formata dai soli termini tali che $g_1=1, g_2=g_1+1, \ldots, g_i=g_{i-1}+1$. E' evidente che gli o_r, i primi elementi di ogni raggruppamento M(r), coincidono con i "vecchi" a_i che abbiamo incontrato studiando la sequenza consecutiva[8].

Essendo tutti gli "r" elementi di ogni sottogruppo M(r) delle particolari permutazioni del relativo o_r, abbiamo che gli elementi di M(r), in virtù della commutatività della somma[9], sono divisibili per 3 se e solo se lo è anche il corrispondente o_r.

Il pattern degli M(r) risulta dunque essere il seguente: $A_2,A_1,A_1,A_2,A_1,A_1,A_2,A_1,A_1,A_2\ldots$

Gli M(r) <u>non</u> sono divisibili per 3 $\Leftrightarrow$ $r:=j\equiv 1+3*n$ $\quad (\forall n \in \aleph_0)$

A questo punto, possiamo essere ancora più selettivi eliminando tutti gli elementi degli M(j) che terminano per 0,2,4,5,6 o 8, in quanto saranno certamente divisibili per 2 e/o 5 e quindi non primi.

Possiamo riferirci ad uno specifico componente della sequenza (in termini di M(r)), ovvero a quello ($\in$M(r)) che ha come primo "tassello costitutivo" un dato g_1, osservando che esso si trova, per costruzione, in posizione $\sum_{t=1}^{r}(t-1)+g_1$ (dove con "t" faccio riferimento al numero di termini $a_i \in M(t)$). A partire da a_2, cioè per $r \geq 2$, la formula precedente equivale a $\sum_{t=1}^{r-1} t + g_1 = \frac{r*(r-1)}{2} + g_1$.

Se indichiamo con b_j i termini di M(j), con j=1+3*n (assumiamo n positivo in quanto è palese che $M(1)\equiv 1$ non è un numero primo), possiamo agevolmente calcolare la percentuale di b_j all'interno dei sottogruppi M(j) associati all'evenienza A_2, come:

$$\frac{b_j}{b_i} := \frac{b_i \pmod{10} \equiv \{1,3,7,9\}}{b_i \pmod{10} \equiv \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}};$$

$$\lim_{i \to +\infty} \frac{b_j}{b_i} = \frac{4}{10}.$$

Al tendere di "i" ad infinito, la percentuale dei possibili candidati numeri primi, tra i generici termini della sequenza circolare, raggiunge - come prevedibile - il valore $\frac{4}{10} * \frac{1}{3} = \frac{1}{7.5} = 0.1\overline{3}$; pari appunto alla percentuale associata alla sequenza consecutiva. (Q.E.D.)

Andando ad analizzare questi termini (ho personalmente studiato i possibili candidati per M<211 – M(211) è formato da numeri di 525 cifre -), si ha che il più piccolo valore del pedice, tale che a_i è un numero primo, risulta essere i=8 (il secondo componente di M(4)), ovvero $a_8\equiv$**2341**. I successivi 30 termini, non divisibili per altri numeri diversi dall'unità e da sé stessi, sono (nell'ordine):

$a_{53}\equiv$**89101234567**,

$a_{82}\equiv$**45678910111213123**,

---

[8] **Faccio rapidamente notare che $\sum_{r=1}^{m} M(r)$, è sempre pari ad un numero triangolare; per la precisione, sommando i primi "m" M(r), otteniamo l'm-esimo numero triangolare.**

[9] **Dato $o_r \in M(r)$, un generico termine della sequenza consecutiva, $\sum_{h=1}^{r} g_h = \frac{r*(r+1)}{2}$.**

a_{302}≡**23456789101112131415161718192021222324251** (si tratta del primo elemento della sequenza M, per un fissato j, ad essere un numero primo - al netto dell'eliminazione dei numeri terminanti per 0,2,4,5,6 o 8 -),

a_{591}≡**30313233341234567891011121314151617181920212223242526272829**,

a_{1055}≡**202122232425262728293031323334353637383940414243444546123456789101112131415 16171819**,

a_{1077}≡**424344454612345678910111213141516171819202122232425262728293031323334353637 38394041** (è un esempio di 2 primi racchiusi all'interno dello stesso M(j)→M(46)),

a_{1340}≡**141516171819202122232425262728293031323334353637383940414243444546474849505 15212345678910111213**,

a_{1499}≡**141516171819202122232425262728293031323334353637383940414243444546474849505 15253545512345678910111213**,

a_{1890}≡**606112345678910111213141516171819202122232425262728293031323334353637383940 414243444546474849505152535455565758 59** (questa volta, il numero primo è rappresentato dall'ultimo dei possibili "candidati" della sequenza M(j)),

a_{2231}≡**202122232425262728293031323334353637383940414243444546474849505152535455565 75859606162636465666712345678910111213141516171819**,

a_{3109}≡**282930313233343536373839404142434445464748495051525354555657585960616263646 566676869707172737475767778791234567891011121314151617181920212223242526 27**,

a_{3145}≡**646566676869707172737475767778791234567891011121314151617181920212223242526 27282930313233343536373839404142434445464748495051525354555657585960616263**,

a_{3620}≡**505152535455565758596061626364656667686970717273747576777879808182838485123 45678910111213141516171819202122232425262728293031323334353637383940414243444546 474849**,

a_{3878}≡**505152535455565758596061626364656667686970717273747576777879808182838485868 788123456789101112131415161718192021222324252627282930313233343536373839404142 43 444546474849** (curiosamente risulta congruente in mod 10^{89} al precedente numero primo della sequenza),

a_{4405}≡**343536373839404142434445464748495051525354555657585960616263646566676869707 172737475767778798081828384858687888990919293941234567891011121314151617181920 21 2223242526272829303132 33**,

a_{6248}≡**323334353637383940414243444546474849505152535455565758596061626364656667686 970717273747576777879808182838485868788899091929394959697989910010110210310410 51 061071081091101111121234567891011121314151617181920212223242526272829303 1**,

a_{8878}≡**100101102103104105106107108109110111112113114115116117118119120121122123124 125126127128129130131132133123456789101112131415161718192021222324252627282930 31 323334353637383940414243444546474849505152535455565758596061626364656667686970 71**

727374757677787980818283848586878889909192939495969799 (il particolare valore assunto dal primo "tassello" di tale numero - g_1=100 – gli conferisce un'indiscutibile armonia),

a_{8888}≡**110111112113114115116117118119120121122123124125126127128129130131132133123
45678910111213141516171819202122232425262728293031323334353637383940414243444546
47484950515253545556575859606162636465666768697071727374757677787980818283848586
87888990919293949596979899100101102103104105106107108109**,

a_{11329}≡**45678910111213141516171819202122232425262728293031323334353637383940414243
44454647484950515253545556575859606162636465666768697071727374757677787980818283
84858687888990919293949596979899100101102103104105106107108109110111112113114115
11611711811912012112212312412512612712812913013113213313413513613713813914014114
2143144145146147148149150151123**,

a_{11439}≡**11411511611711811912012112212312412512612712812913013113213313413513613713
81391401411421431441451461471481491501511234567891011121314151617181920212223242
52627282930313233343536373839404142434445464748495051525354555657585960616263646
56667686970717273747576777879808182838485868788899091929394959697989910010110210
3104105106107108109110111112113** (faccio notare che questo numero è più piccolo del precedente termine primo della sequenza),

a_{12310}≡**646566676869707172737475767778798081828384858687888990919293949596979899 10
01011021031041051061071081091101111121131141151161171181191201211221231241251261
27128129130131132133134135136137138139140141142143144145146147148149150151152153
15415515615712345678910111213141516171819202122232425262728293031323334353637383
9404142434445464748495051525354555657585960616263**,

a_{12344}≡**98991001011021031041051061071081091101111121131141151161171181191201211221
23124125126127128129130131132133134135136137138139140141142143144145146147148149
15015115215315415515615712345678910111213141516171819202122232425262728293031323
33435363738394041424344454647484950515253545556575859606162636465666768697071727
3747576777879808182838485868788899091929394959697**,

a_{13323}≡**12012112212312412512612712812913013113213313413513613713813914014114214314
41451461471481491501511521531541551561571581591601611621631234567891011121314151
61718192021222324252627282930313233343536373839404142434445464748495051525354555
65758596061626364656667686970717273747576777879808182838485868788899091929394959
6979899100101102103104105106107108109110111112113114115116117118119**,

a_{13747}≡**525354555657585960616263646566676869707172737475767778798081828384858687 88
89909192939495969798991001011021031041051061071081091101111121131141151161171181
19120121122123124125126127128129130131132133134135136137138139140141142143144145
14614714814915015115215315415515615715815916016116216316416516612345678910111213
1415161718192021222324252627282930313233343536373839404142434445464748495051**,

a_{15883}≡**13013113213313413513613713813914014114214314414514614714814915015115215315
41551561571581591601611621631641651661671681691701711721731741751761771781234567**

**89101112131415161718192021222324252627282930313233343536373839404142434445464748
49505152535455565758596061626364656667686970717273747576777879808182838485868788
89909192939495969798991001011021031041051061071081091101111121131141151161171181
19120121122123124125126127128129,**

a_{17471}≡**808182838485868788899091929394959697989910010110210310410510610710810911 01
11112113114115116117118119120121122123124125126127128129130131132133134135136137
13813914014114214314414514614714814915015115215315415515615715815916016116216316
41651661671681691701711721731741751761771781791801811821831841851861871234567891
01112131415161718192021222324252627282930313233343536373839404142434445464748495
05152535455565758596061626364656667686970717273747576777879,**

a_{17985}≡**30313233343536373839404142434445464748495051525354555657585960616263646566
67686970717273747576777879808182838485868788899091929394959697989910010110210310
41051061071081091101111121131141151161171181191201211221231241251261271281291301
31132133134135136137138139140141142143144145146147148149150151152153154155156157
15815916016116216316416516616716816917017117217317417517617717817918018118218318
41851861871881891901234567891011121314151617181920212223242526272829,**

a_{19815}≡**11411511611711811912012112212312412512612712812913013113213313413513613713
81391401411421431441451461471481491501511521531541551561571581591601611621631641
65166167168169170171172173174175176177178179180181182183184185186187188189190191
19219319419519619719819912345678910111213141516171819202122232425262728293031323
33435363738394041424344454647484950515253545556575859606162636465666768697071727
37475767778798081828384858687888990919293949596979899100101102103104105106107108
109110111112113** (ci sono esattamente 29 numeri primi tra i primi 20000 termini della sequenza),

a_{20335}≡**34353637383940414243444546474849505152535455565758596061626364656667686970
71727374757677787980818283848586878889909192939495969798991001011021031041051061
07108109110111112113114115116117118119120121122123124125126127128129130131132133
13413513613713813914014114214314414514614714814915015115215315415515615715815916
01611621631641651661671681691701711721731741751761771781791801811821831841851861
87188189190191192193194195196197198199200201202123456789101112131415161718192021
2223242526272829303132 33** (tra i termini della sequenza circolare formati da meno di 500 cifre, 30 sono numeri primi),

a_{21676}≡**14814915015115215315415515615715815916016116216316416516616716816917017117
21731741751761771781791801811821831841851861871881891901911921931941951961971981
99200201202203204205206207208123456789101112131415161718192021222324252627282930
31323334353637383940414243444546474849505152535455565758596061626364656667686970
71727374757677787980818283848586878889909192939495969798991001011021031041051061
07108109110111112113114115116117118119120121122123124125126127128129130131132133
134135136137138139140141142143144145146147** (termine primo formato da oltre 500 cifre – 516 -).

Tutti i precedenti risultati sono stati verificati utilizzando il metodo delle curve ellittiche e pertanto non soggiacciono ai rischi d'errore peculiari di un approccio di tipo probabilistico.

Dunque, dei primi 22155 termini della sequenza circolare, 31 sono numeri primi[10].
Non ci si deve certo stupire nel constatare che nessun termine iniziale, tra i primi 210 M(r), è primo. Ciò era facilmente deducibile a priori, in quanto tali elementi coincidono con quelli della sequenza consecutiva canonica, che ho verificato personalmente non contenere numeri primi fra i 216 componenti iniziali. Si sono tuttavia ravvisati termini per i quali il primo elemento della sequenza circolare, per un dato j, (considerando unicamente gli elementi da non saltare a priori - in quanto terminanti per 1,3,7, o 9 -) è effettivamente un numero primo: il più piccolo tra loro è a_{302}∈M(25).

Un quesito interessante (problema aperto) è il seguente:

Poiché la probabilità di vedere soddisfatta la condizione di primalità di un certo numero, all'interno di un intervallo comprendente "tot" numeri da testare, si riduce al crescere della dimensione di tali numeri; è plausibile che 2 sia il massimo quantitativo di numeri primi che si possono reperire all'interno di M(r), ovvero M(j), per un fissato valore di r (e dunque di j)[11]? Inoltre, se ciò non fosse vero, è possibile, stabilendo un valore "l" arbitrario, trovare un intero j tale che M(j) contenga almeno "l" numeri primi? Se anche questa affermazione si rivelasse erronea, qual è il massimo valore di "l" per cui il precedente risultato risulta verificato (da quanto visto, è evidente che l≥2)?

Enuncerò adesso, in maniera sintetica, quello che ho denominato (con molta fantasia) "**criterio di esclusione**". Si tratta banalmente di un metodo iterativo per pervenire, nell'ambito di un range di termini ben delimitato, a delle percentuali "accettabili" di "candidati numeri primi" (considerando le relazioni proprie di un prefissato quantitativo di fattori primi - che dividono gli elementi della sequenza consecutiva/circolare -). In questa circostanza, considererò solamente gli elementi (delle due sequenze che ci interessa analizzare) composti da un quantitativo di cifre variabile tra 192 e 2899.
Il procedimento si basa sulla cancellazione, dalla lista dei numeri che potrebbero essere primi, degli elementi della sequenza che sappiamo essere divisibili per un certo fattore. E' qualcosa di estremamente simile a quanto già visto nel caso del 3, ma con la differenza sostanziale che le regole a cui ci appelleremo non sono valide per tutti gli infiniti termini da studiare. Altro principio cardine, è rappresentato da una proprietà che accomuna determinati elementi della sequenza circolare: in precisi frangenti, si ha che tutti gli M(r) hanno (almeno) un fattore comune. Una volta individuate queste relazioni fondamentali, possiamo prevedere quando tali evenienze si verificheranno di nuovo ed evitare di "preoccuparci" dei corrispondenti termini della sequenza. Su queste premesse, essendo Sm_N≡O(r) strettamente contenuta nella sequenza circolare, si avrà certamente che un numero primo le divide entrambe, ma non è detto che sia vero il contrario: la divisibilità per "p" di un generico o_r, rappresenta una C.N. ma <u>non</u> sufficiente, affinché p divida anche tutti gli altri "r-1" elementi di M(r).

[10] **Anzi, 31 numeri primi su 22156 termini, se ci aggiungiamo anche o_{211} - che sappiamo già essere composto -.**

[11] **In verità, dobbiamo altresì tenere conto dell'effetto mitigatore relativo al fatto che pure la numerosità dei b_j∈M(j) - gli elementi da testare - aumenta al crescere di j, quindi il risultato appare tutt'altro che scontato (anche in ottica probabilistica).**

Mi asterrò dal dimostrare rigorosamente ogni legge riportata nelle prossime pagine, a differenza di quanto fatto relativamente alla divisibilità per 3 di Sm_N. A patto di tenere a mente che i valori della variabile r devono tassativamente essere composti da 3 cifre (ovvero $100 \leq r < 1000$), le note proprietà della somma algebrica, unite al fatto che noi consideriamo solo i termini dispari all'interno di uno specifico M(r) - per un fissato valore di r -, dovrebbero essere sufficienti a condurre il lettore diligente alla fine del processo associativo richiesto. Altro discorso è verificare che la proprietà sia generalizzabile per un arbitrario insieme di fattori primi, restando tutto da provare che essi dividono gli o_r (e gli M(r)) con cadenza strettamente periodica (funzione di "r").

Potremmo porci la seguente domanda: "E' efficiente questo criterio di esclusione (almeno per gli elementi formati dallo stesso numero di cifre)?"

Risposta: No, almeno non ha speranze di esserlo in senso assoluto. Infatti ciò non ci fornisce informazioni su cosa avviene all'interno di un dato M(r), una volta che "r" ha superato tutti gli sbarramenti (ed è quindi da considerarsi un serbatoio di candidati numeri primi - r:=j -). Considerando la sequenza consecutiva, il discorso non cambia più di tanto; per rendersene conto è sufficiente osservare la fattorizzazione, ad esempio, del 133-esimo termine: il suo più piccolo fattore primo è infatti composto da ben 19 cifre!

Perseverando con ostinazione nella direzione precedente, ci chiederemmo magari se, sovrapponendo tutti questi termini (innumerabili), fosse astrattamente possibile giungere a coprire l'intero insieme Sm_N.
Nel caso della sequenza circolare, ci si potrebbe domandare se ciò fosse vero da un certo punto in poi (visto che la periodicità non è sicuramente pura) o meno. A questo punto però, lascerei volentieri l'onere della risposta a chi fosse tanto ostinato da insistere su tale argomento .
Conscio che questo metodo iterativo difficilmente sarà in grado di condurci alla risposta definitiva, almeno mi riserbo il diritto di confidare che ciò possa costituire un punto di partenza per più valide argomentazioni future, fondate su una maggior mole di dati, rispetto a quanti ho potuto metterne assieme allo stato attuale.

Criterio di esclusione, valido per $i \in [100,1000); r \in [100,1000)$:

Algoritmo operativo per la ricerca di numeri primi nell'ambito dei termini di Sm_N≡a_i (se esistono) e campionatura esaustiva degli M(r) che possono contenere numeri primi, per alcuni valori selezionati delle variabili $i, r \in [100, 999)$:

Leggi di esclusione, valide per Sm_N (a_i con $100 \leq i < 1000$):

$a_i \mid 2 \Rightarrow i=100+2*k$

$a_i \mid 3 \Rightarrow i=101+3*k$ oppure $i=102+3*k$

$a_i \mid 5 \Rightarrow i=100+5*k$

$a_i \mid 7 \;\Rightarrow i=100+\sum_s d_s$, dove d_s=0,9,5,9,5,9,5,… per s=0,1,2,3,…,129

$a_i \mid 11 \Rightarrow i=106+\sum_s d_s$, dove d_s=0,7,15,7,15,7,15,… per s=0,1,2,3,…,81

$a_i \mid 13 \Rightarrow i=113+\sum_s d_s$, dove d_s=0,7,19,7,19,7,19,… per s=0,1,2,3,…,68

E potremmo continuare in questo modo, estendendo l'analisi ai successivi numeri primi (maggiori di 13).

Leggi di esclusione, valide per ogni M(100≤r<1000):

$M(r) \mid 3 \;\Rightarrow r=101+3*k$ oppure $r=102+3*k$

$M(r) \mid 7 \;\Rightarrow r=100+14*k$

$M(r) \mid 11 \Rightarrow r=106+22*k$

$M(r) \mid 13 \Rightarrow r=120+26*k$

Ecc…

Reminder*: <u>non</u> tutti i termini rimasti sono dei candidati numeri primi, in quanto, snocciolando gli elementi all'interno di ogni M(r≡j) residuo, dovremo vagliare solo i valori terminanti per 1,3,7 oppure 9.*

Prendendo unicamente in considerazione i criteri di esclusioni del 3, del 7 , dell'11 e del 13, registreremmo un rapporto $\frac{a_j}{a_i}$ (per "i(r)" che varia nel range 4951-499500) pari a 28.29845314*0.40042158≈**0.11331** [12].

Se non fossimo ancora soddisfatti, potremmo migliorare ulteriormente il risultato ottenuto, riducendo ancora il valore $\frac{a_j}{a_i}$ (sia per Sm_N che per M(r)), osservando, ad esempio, che

$M(r) \mid 37 \Leftrightarrow a_i \mid 37 \;\Rightarrow r \text{ (ed i)}=123+\sum_s d_s$, dove d_s=0,12,25,12,25,12,25,… per s=0,1,2,3,…,47

E così via.

---

[12] **In questo caso, il valore 40.042158…%=$\frac{56039}{139950} * 100$ è un numero esatto; rappresenta la percentuale di possibili termini primi all'interno degli M(r≡j), con 100≤r≤999. Nella seconda appendice del presente paper, risolverò invece il caso generale – quesito apparso a pag. 25 del testo "Comments and topics on Smarandache's notions and problems" di Kenichiro Kanashihara (1996) -.**

Una curiosità: per r=172 si verificano 3 delle precedenti condizioni allo stesso tempo; infatti M(r=172) risulta al contempo divisibile per 11, 13 e 37. Ciò significa che tutti i 172 M(172) sono divisibili per 5291 (ed ovviamente nessuno di loro potrà essere primo).

Riprendendo per un attimo in considerazione la sequenza consecutiva canonica, possiamo provare ad applicare all'unisono i criteri relativi a 2,3,5,7,11,13 - ed aggiungerci anche l'appena illustrata regola relativa al 37 -. Perveniamo così, per $100 \leq a_i \leq 1002$, ad un rapporto $\frac{a_j}{a_i}$ traducibile in una percentuale inferiore all'**8.54%** (dei 902 elementi compresi tra Sm100 e Sm1002 – estremi inclusi – solo 77 elementi non sono escludibili per mezzo delle condizioni che abbiamo imposto).

Le nuove regole che ho formulato, circa la divisibilità di Sm_N/M(r), sono valide quando la variabile indipendente assume valori a 3 cifre, ma non lo sono più per $10^3 \leq i < 10^4$ (rispettivamente $10^3 \leq r < 10^4$), in quanto i criteri di divisibilità su cui mi sono basato sono strettamente legati al quantitativo di cifre che compongono il numero da fattorizzare. Dunque, se volessimo applicare il criterio di esclusione ad M(r≥1000), bisognerebbe ripartire da zero ed individuare i nuovi pattern, relativi a fissati numeri primi>5, che ci potranno condurre alla formulazione di leggi analoghe a quelle appena viste e che saranno applicabili per $10^4 \leq r < 10^5$.

Per chi volesse avventurarsi nella ricerca di numeri primi più grandi, consiglio di partire da elementi della sequenza Sm_N≡O(r) (se se ne conosce la fattorizzazione) il cui più piccolo fattore – della forma a^b – abbia una base "a" molto grande. Ovvero numeri che, fattorizzati, siano esprimibili tramite il prodotto di numeri primi dei quali il più piccolo è a sua volta un grande primo!

Questo è il prospetto riassuntivo dei 241 macro-candidati M(100≤r<1000) all'interno dei quali, basandosi sulle menzionate regole del 3, del 7, dell'11, del 13 e del 37, non è escludibile la presenza di numeri primi (ho già testato i valori associati ad r<211 ed i risultati sono quelli riportati nel presente articolo):

103,109,112,115,118,121,124,127,130,133,139,145,151,154,157,163,166,169,175,178,181,187,190,193,196, 199,202,205,208,**211,214,217,220,223,229,232,235,241,244,247,256,259,262,265,274,277,280,283,286,289, 292,295,298,301,307,313,316,319,322,325,331,334,337,340,343,346,349,355,358,361,364,367,373,376,379, 385,388,391,397,400,403,409,412,415,418,421,424,427,430,433,439,442,445,448,451,454,457,460,463,466, 469,472,475,481,487,490,496,499,508,511,514,517,523,526,529,532,535,538,541,544,547,550,553,556,559, 565,571,574,577,580,583,586,589,592,595,598,601,607,610,613,619,622,625,628,631,637,643,649,652,655, 658,661,664,667,670,673,676,679,682,685,694,697,703,706,709,712,721,724,733,736,739,742,745,748,751, 754,757,760,763,769,775,778,781,784,787,790,793,799,802,805,808,811,817,820,823,829,835,841,844,847, 850,853,859,862,865,868,871,877,880,883,886,889,892,895,901,904,907,910,913,916,919,922,925,928,931, 934,943,946,955,958,961,967,970,973,976,979,985,988,991,994,997.**

(Se si hanno le prove che gli o_r - per r≤k - sono tutti composti, è lecito escludere ogni primo elemento di M(r≤k) dalla ricerca – ovvero gli "r" termini $a_{\sum_{t=1}^{r}(t-1)+1}$ della sequenza -).

N.B.

Il numero degli M(j), nei quali non è escludibile la presenza di termini divisibili unicamente per l'unità e per sé stessi, dipende da quanti e da quali fattori primi abbiamo impiegato per estendere il criterio di esclusione (per

“r” all’interno dell’intervallo fissato): ad esempio, ponendo r=118, si ha che l’83 è un fattore fisso per tutti i termini della sequenza circolare formati da 246 cifre, ma non c’è speranza di rilevare tale proprietà basandosi unicamente sulle 5 relazioni che abbiamo scelto di considerare.

Appendice 1:

Formalizzazione delle condizioni di esclusione, che un candidato numero primo della sequenza consecutiva deve rispettare, fintanto che $100 \le i < 1000$ – tenendo conto solamente dei divisori 2,3,5,7,11,13 e 37 -:

$$\begin{cases} i = 103 + 6 * k \\ i \neq 100 + 3 * k \\ i \neq 100 + 5 * k \\ i \neq 100 + 14 * k \\ i \neq 109 + 14 * k \\ i \neq 106 + 22 * k \\ i \neq 113 + 22 * k \\ i \neq 113 + 26 * k \\ i \neq 120 + 26 * k \\ i \neq 123 + 37 * k \\ i \neq 135 + 37 * k \end{cases}$$

Le corrispondenti regole, affinché $a_i \in M(100 \le r < 1000)$ sia un candidato primo della sequenza circolare - considerando i divisori 3,7,11,13 e 37 e sottintendendo che $a_i \pmod{10} \equiv \{1,3,7,9\}$ - sono invece:

$$\begin{cases} r = 100 + 3 * k \\ r \neq 100 + 14 * k \\ r \neq 106 + 22 * k \\ r \neq 120 + 26 * k \\ r \neq 123 + 37 * k \\ r \neq 135 + 37 * k \end{cases}$$

Appendice 2:

A pag. 25 del suo testo “Comments and topics on Smarandache’s notions and problems”, Kenichiro Kanashihara cita anche la sequenza circolare, ponendo due addizionali quesiti riguardanti la serie in questione. Mentre il secondo non è affatto attinente al presente articolo, una variante del primo è già stata affrontata di sfuggita, quando ho dovuto calcolare la percentuale dei termini di M(j) (con $100 \leq j \leq 999$) che possono essere costituiti da un unico numero primo. In tale circostanza ho computato la somma delle probabilità associate a $c \in \{1,3,7,9\}$ per i termini della sequenza, compresi tra il 4951-esimo e il 499500-esimo, tali che $r \equiv j$.

Pertanto, la domanda a cui risponderò in questa seconda appendice, è legata all’estensione di quel calcolo: “Qual è la probabilità che un generico elemento della sequenza circolare termini con una data ultima cifra - $c \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ -?”

Per essere breve, ometterò di descrivere dettagliatamente come ho individuato le successive relazioni, essendo la verifica della loro veridicità relativamente semplice e veloce. Con $p(c=k)$ indicherò la probabilità che $a_i \equiv a(r) \in M(r)$ - un generico elemento della sequenza circolare compreso tra a_1 ed $a_{\sum_{t=1}^{r} t}$ - abbia k come cifra finale (cioè che $a_i (\mathrm{mod}\ 10) \equiv k$). Ho scelto di considerare “r” come parametro (anziché “i”) per non complicare eccessivamente l’esposizione. Ricordo comunque che, per conoscere l’esatta probabilità associata ai primi a_h (con $\sum_{t=1}^{r-1} t = \frac{r*(r-1)}{2} < h < \frac{r*(r+1)}{2} = \sum_{t=1}^{r} t$) termini della sequenza, è sufficiente inserire a numeratore, nel rapporto che definisce la probabilità che ci proponiamo di calcolare, i “casi di successo” tra gli elementi[13] contenuti negli $M(t \leq r-1)$, aggiungere ad essi gli altri successi, associati ai rimanenti termini della sequenza (di numerosità certamente inferiore ad r), ed infine dividere il tutto per $h \equiv \frac{r*(r-1)}{2} + g_1$ (il complesso dei termini considerati). Rimanendo intatta la sostanza del procedimento, mi riferirò, come già detto, ai soli $a_i \leq a_{\sum_{t=1}^{r} t}$.

Nello specifico, si ha che:

$$p(c=0) = \begin{cases} 0 & \text{se } r \leq 9 \\ \dfrac{10 * \sum_{l=0}^{m_0} l + (m_0+1) * [r - (m_0 * 10 + 9)]}{\sum_{i=1}^{r} i} & \text{se } r \geq 10 \end{cases}$$

nella quale $m_0 \equiv \left\lfloor \frac{r-10}{10} \right\rfloor$

---

[13] **Tali elementi sono esattamente $\frac{r*(r-1)}{2}$.**

$$p(c=9)=\begin{cases}0 & \text{se } r \leq 8\\ \dfrac{10*\sum_{l=0}^{m_9} l+(m_9+1)*[r-(m_9*10+8)]}{\sum_{i=1}^{r} i} & \text{se } r \geq 9\end{cases}$$

nella quale $m_9 \equiv \left\lfloor \frac{r-9}{10} \right\rfloor$

$$p(c=8)=\begin{cases}0 & \text{se } r \leq 7\\ \dfrac{10*\sum_{l=0}^{m_8} l+(m_8+1)*[r-(m_8*10+7)]}{\sum_{i=1}^{r} i} & \text{se } r \geq 8\end{cases}$$

nella quale $m_8 \equiv \left\lfloor \frac{r-8}{10} \right\rfloor$

$$p(c=7)=\begin{cases}0 & \text{se } r \leq 6\\ \dfrac{10*\sum_{l=0}^{m_7} l+(m_7+1)*[r-(m_7*10+6)]}{\sum_{i=1}^{r} i} & \text{se } r \geq 7\end{cases}$$

nella quale $m_7 \equiv \left\lfloor \frac{r-7}{10} \right\rfloor$

E lo stesso dicasi per gli altri 6 casi restanti. In generale, se indichiamo con “k” il valore assunto da “c”, vale la seguente relazione:

$$\mathbf{p(c=k)}=\begin{cases}\mathbf{0} & \textbf{se } \mathbf{r \leq k-1}\\ \mathbf{2*\dfrac{10*\sum_{l=0}^{m_k} l+(m_k+1)*[r-(m_k*10+(k-1))]}{r*(r+1)}} & \textbf{se } \mathbf{r \geq k}\end{cases}$$

dove $\mathbf{m_k} \equiv \left\lfloor \frac{\mathbf{r-k}}{\mathbf{10}} \right\rfloor$

($\lfloor x \rfloor$ indica l’operatore “floor” ovvero il più piccolo intero rispetto ad x $\in \mathcal{R}^+$).

Svolgendo i calcoli, possiamo riscrivere più compattamente il tutto come:

$$\mathbf{p(c=k)}=\begin{cases}\mathbf{0} & \textbf{se } \mathbf{r \leq k-1}\\ \mathbf{2*\dfrac{\left\lfloor\frac{r-k}{10}\right\rfloor*\left(-5*\left\lfloor\frac{r-k}{10}\right\rfloor+r-k-4\right)+r-k+1}{r*(r+1)}} & \textbf{se } \mathbf{r \geq k}\end{cases}$$

Ricordando che, per definizione, r≥1, dalla precedente si ricava che l'ultimo dei 6 casi, che ho evitato esplicitare, è quello al quale è associata la probabilità di successo più elevata,$\forall r \in \aleph \backslash \{0\}$. Infatti, per k=1, risulta:

$$p(c=1) = \frac{10 * \sum_{l=0}^{m_1} l + (m_1+1) * [r-(m_1 * 10)]}{\sum_{i=1}^{r} i} = 2 * \frac{m_1 * (-5 * m_1 + r - 5) + r}{r * (r+1)}$$

con $m_1 \equiv \left\lfloor \frac{r-1}{10} \right\rfloor$

Logicamente, ∀r, p(c=1)+p(c=2)+p(c=3)+…+p(c=9)+p(c=0)=1 ed inoltre

$\lim_{r\to+\infty} p(c=0) = \lim_{r\to+\infty} p(c=9) = \lim_{r\to+\infty} p(c=8) = \cdots = \lim_{r\to+\infty} p(c=1)$, poiché, al tendere della variabile indipendente ad infinito, risulta valida la catena di uguaglianze:
$\lim_{r\to+\infty} m_0 = \lim_{r\to+\infty} m_9 = \lim_{r\to+\infty} m_8 = \cdots = \lim_{r\to+\infty} m_1$.

Per curiosità, possiamo analizzare il caso nel quale p(c)>0 ∀ c∈{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, caratterizzato dalla massima discrepanza di valori (sotto la nostra condizione iniziale). E' facile capire che mi sto riferendo all'evenienza r=10:

$p(c=0) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{10} i} = 0.0\overline{18}$,

$p(c=9) = \frac{2}{\sum_{i=1}^{10} i} = 2 * p(c=0) = 0.0\overline{36}$,

$p(c=8) = \frac{3}{\sum_{i=1}^{10} i} = 3 * p(c=0) = 0.0\overline{54}$,

…

$p(c=1) = \frac{10}{\sum_{i=1}^{10} i} = 10 * p(c=0) = 0.\overline{18}$.

In definitiva, per ogni numero finito di termini della successione, si ha che

p(c=0) < p(c=9) < p(c=8) < p(c=7) < p(c=6) < p(c=5) < p(c=4) < p(c=3) < p(c=2) < p(c=1) [14].

---

[14] **Dunque, per stimare la probabilità che un generico elemento della sequenza, compreso tra il primo e l'h-esimo, termini con la cifra k, sarà sufficiente calcolare – con le formule appena illustrate - quali sono i valori estremi dell'intervallo nel quale (con assoluta certezza) ricadrà p(c=k):**
Essendo $\sum_{t=1}^{r-1} t \le h \le \sum_{t=1}^{r} t$, p_h(c=k) sarà compresa tra la probabilità associata ad r'≡(r-1) ed r''≡r.
Dato che p(r')<p(r'') per k=(1,2,3,4,5) e p(r')>p(r'') per k=(6,7,8,9,0), se 1≤k≤5 l'intervallo sarà p(r')≤p(c=k)≤p(r''), altrimenti si avrà p(r'')≤p(c=k)≤p(r').

La sequenza "consecutiva-permutazionale" e la primalità dei suoi termini - Marco Ripà

Come ho spiegato nella prima parte del paper, il criterio di divisibilità per 3 è commutativo; tanto che possiamo rifarci ad una sua versione "estesa", la quale si concentra sui raggruppamenti delle cifre, anziché sulla loro somma. Dunque, combinando questa considerazione con quanto visto in apertura, a proposito di Sm_N, possiamo creare una sequenza molto più "vasta" in possesso della medesima proprietà. Tale sequenza, scelta la solita base di riferimento (che per noi è quella decimale), è costituita da tutte le permutazioni di Sm_N, collocate in ordine crescente[15]: stabilito il numero di elementi della sequenza (che per sua natura è illimitata), prendiamo ciascun termine e scriviamo tutte le possibili permutazioni delle sue cifre. Adesso ordiniamo questi numeri, partendo dal più piccolo fino ad arrivare al maggiore. I primi elementi della nuova sequenza, indicata sinteticamente con P(i(r)), - al variare di "r" - coincidono con gli o(r) di quella consecutiva, ma solo quando r<10; infatti, per r=10 (ed oltre), il primo elemento del gruppo è p_{409114}≡01123456789, che, per convenzione, riscriviamo come 1123456789. In questo modo, per r≥10, alcuni termini del medesimo gruppo hanno un diverso numero di cifre, anche se il totale degli elementi di un dato gruppo resta sempre $\#Cf_{o(r)}!$ (il fattoriale del numero delle cifre di o(r)).
Applicando il "criterio del 3", è evidente che $p_{i(r)}$ non risulta divisibile per 3 se e solo se r:=j=1+3*n ($\forall n \in \aleph \backslash \{0\}$). Perciò occupiamoci solamente dei gruppi (formati da $\#Cf_{o(r)}!$ elementi) che sono congruenti, in (mod 10), a {1,3,7,9} e che soddisfano altresì la condizione r=j.

In conclusione, ci possiamo porre i seguenti interrogativi:

-Qual è la formula che esprime il termine generico della sequenza?
-Quanti termini sono numeri primi (è possibile sintetizzarli in una formula)?
-Ci sono termini che possono essere espressi come potenze di un numero primo?
-Qual è la probabilità che la cifra finale del termine generico della sequenza sia (0,1,2,3,4,5,6,7,8 oppure 9) – anche qui si ricerca un'espressione generale -?

Circa la prima e l'ultima domanda, ricordate che, fissato un valore "k", il quantitativo di termini p_i:=$p_{(r \leq k)}$ è $p_{\sum_{r=1}^{k}[\#Cf_{o(r)}!]}$ (che risulta sempre ≥ di $p_{\sum_{r=1}^{k} r!}$).

La precedente conclusione può essere facilmente estesa per individuare la formula che esprime la numerosità dei termini della sequenza P, che sono formati, al più, da "k" cifre. E' sufficiente calcolare $p_{\sum_h h!}$ prendendo come "h" gli "r" valori di h(r)≡$(r+1) * \lfloor \log_{10} r \rfloor + 1 - \frac{10^{\lfloor \log_{10} r \rfloor + 1} - 1}{9}$ tali che h(r)≤k (cfr. [8]).

---

[15] **Ciò implica che il generico elemento "p_i" è strettamente minore di "p_{i+1}", $\forall i \in \aleph \backslash \{0\}$.**

Per rispondere al secondo problema, proviamo a considerare i più piccoli termini della sequenza che sono "numeri primi". Il risultato potrebbe apparire abbastanza interessante.

Tra i primi 1000 termini ($p_i \leq 1325467$), dobbiamo testare soltanto questi 62 elementi:

1243, **1423**, **2143**, **2341**(tre numeri primi consecutivi - per p(j=4) -), 2413, 2431, 3241, 3421, 4123, 4213, **4231**, 4321,

1234567≡o(7), **1234657**, 1235467, 1235647, 1236457, 1236547, 1243567, 1243657, 1245367, 1245637, 1245673, **1245763**, 1246357, **1246537**, **1246573**, 1246753, **1247563**, 1247653, 1253467, 1253647, **1254367**, 1254637, **1254673**, 1254763, **1256347**, 1256437, 1256473, 1256743, **1257463**, 1257643, 1263457, **1263547**, 1264357, **1264537**, **1264573**, 1264753, **1265347**, 1265437, 1265473, 1265743,1267453, 1267543, 1274563, 1274653, 1275463, 1275643, **1276543**, **1324567**, 1324657, 1325467.

Ho sottolineato solo i termini che sono dei numeri primi. Potrebbe sembrare che il rapporto $\frac{\text{numeri primi}}{p_{i(j)}}$ sia insolitamente elevato ($\frac{20}{62} = 32.26\%$), ma non è effettivamente così. Anche se questo valore, calcolato considerando i termini compresi tra 1234567 e 1325467, è all'incirca lo stesso ($\frac{20}{50} = 32\%$), secondo il criterio generale sulla distribuzione dei numeri primi, noi dovremmo aspettarci un risultato nei pressi di $\frac{1}{\ln(1234567)} \approx 0.071$ (o di $\frac{1}{\ln(1325467)}$) [16].

Tenendo conto che non stiamo considerando i termini pari, gli elementi che terminano per 5 e quelli divisibili per 3, possiamo concludere che la regola generica descrive ottimamente anche la percentuale dei termini primi della sequenza P. Bisogna solo prestare attenzione al fatto che il mio criterio generalizzato (per i fattori più grandi del 5), non è valido per tutte le permutazioni delle cifre, anche se rimane applicabile per le semplici "rotazioni" delle stesse (ottenute tagliando la cifra iniziale del termine della sequenza consecutiva ed incollandola alla fine del numero[17], per formare un nuovo termine ancora divisibile per il fattore dato).

Questa nuova sequenza, racchiude al suo interno una gran mole di altre sequele di interi ben conosciute (consecutiva, invertita, circolare, sinistra-destra, destra-sinistra, ecc). Ciò significa che lo studio delle sue proprietà le riguarda da vicino e, per converso, la conoscenza delle loro caratteristiche (come la primalità dei termini) ci permette di capire meglio la sequenza consecutiva-permutazionale!

---

[16] Ho escluso, dalla lista dei "candidate primi", i termini di o(r), poiché è comprovato che non ci sono numeri primi tra i termini iniziali di quella sequenza.

[17] Il procedimento è iterabile, in modo da poter pervenire a "m" numeri distinti a partire da un elemento della sequenza consecutiva composto da "m" cifre.

A mio avviso, P è la più “naturale” delle sequenze, rimanendo nell’ottica delle regole di divisibilità (visto che esse si basano sulla somma-differenza delle cifre e sulla posizione delle stesse). In tal modo, lo studio di P(r) ed il criterio di divisibilità risultano intimamente collegati l’uno all’altro.

Bibliografia:

[1] F. Smarandache, “Only problems, not solutions!” 1993 (fourth edition)

[2] http://www.math.it/formulario/divisibilita.htm

[3] http://www.alpertron.com.ar/ECM.HTM

[4] http://www.asahi-net.or.jp/~kc2h-msm/mathland/matha1/micha.txt

[5] http://fs.gallup.unm.edu//s-number.htm

[6] M. Vassilev-Missana & K. Atanassov , “Some Smarandache problems”, Hexis, 2004

[7] “Scientia Magna” Vol. 1, No. 2, Nothwest University Xi ‘an, Shaanxi, P. R. China, 2005

[8] http://mathworld.wolfram.com/ConsecutiveNumberSequences.html