Il teorema di Morley

Teorema(di *Morley*): Le trisettrici di un trangolo qualunque si incontrano a due a due in tre punti che definiscono i vertici di un triangolo equilatero.

Traccia: Va dimostrato che dato il triangolo equilatero **PQR**, le coppie di rette (**AV**, **AW**), (**BU**, **BW**), (**CU**, **CV**) costruite in modo tale che i triangoli **VPR**, **WUV**, **URQ** siano isosceli, sono le trisettrici del triangolo **ABC**

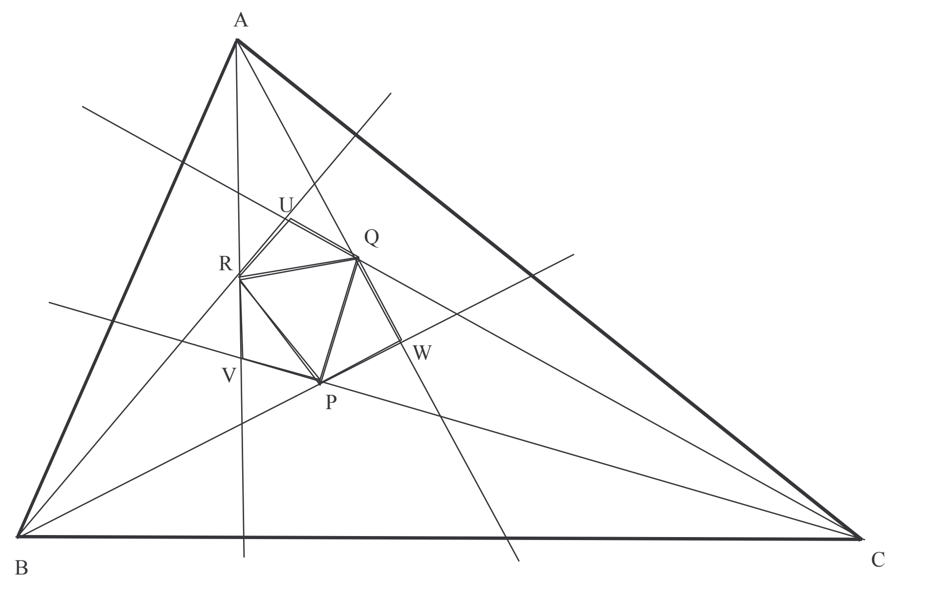

Figura 1

Dimostriamo, prima il

Lemma: *Sia* ***a*** *un angolo di un triangolo; l'angolo* ***d*** *formato dall'intersezione delle bisettrici degli altri angoli del triangolo e` pari alla somma di* ***a*** *e di un angolo retto.*

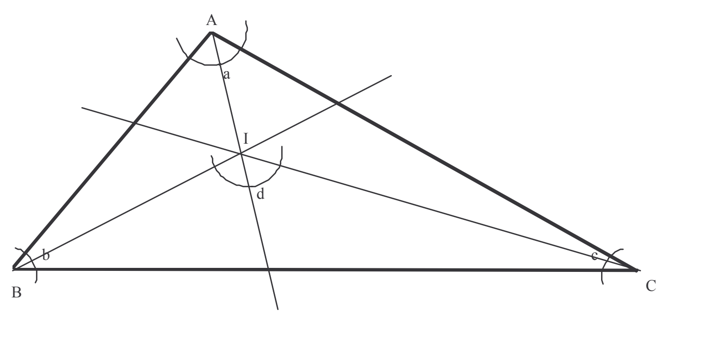

Figura 2

In sostanza, si ha che:

$$d = \frac{\pi}{2} + \frac{a}{2}$$

Infatti deve essere, per i *due* triangoli **ABC** e **IBC**:

$$\begin{cases} a + b + c = \pi \\ d + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{2} = \pi \end{cases}$$

Ricavando $b+c$ dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda, si ha la tesi del Lemma. Si noti che vale anche l'inverso: *Se* $d = \frac{\pi}{2} + \frac{a}{2}$, *allora* ***I*** *e` l'****incentro*** *del triangolo.*

Q.E.D. (Lemma)

Con riferimento alla figura 1, consideriamo un triangolo equilatero **RPQ** e costruiamo i punti **U**, **V** e **W** tali che i triangoli **URQ**, **VPR** e **WQP** siano isosceli. Sia poi **A** l'intersezione dei prolungamenti di **RV** e **QW**, **B** l'intersezione dei prolungamenti di **UR** e **PW**, **C** l'intersezione dei prolungamenti di **UQ** e **VP**.

Allora, per il Lemma, si ha che $B\hat{P}C = \frac{\pi}{2} + \frac{B\hat{U}C}{2}$.

Quindi, **P** e\` l'**incentro** di **UBC**.

Lo stesso ragionamento e\` estendibile agli altri triangoli e si ha:

P	e\`	*l'incentro*	di	**UBC**
Q	"	″	"	**ACV**
R	"	″	"	**AWB**

Consideriamo ora i triangoli **UBC** e **AWB**: la retta **BW** e\` la bisettrice dell'angolo $U\hat{B}C$ cosi\` come la retta **BU** e\` la bisettrice dell'angolo $A\hat{B}W$. Allora, deve essere:

$$A\hat{B}U = U\hat{B}W = W\hat{B}C$$

e quindi **UB** e **WB** *trisecano* l'angolo $A\hat{B}C$.

Estendendo il ragionamento:

UB, WB	*trisecano*	l'angolo	$A\hat{B}C$
UC, PC	″	"	$A\hat{C}B$
VA, WA	″	"	$C\hat{A}B$

Q.E.D. (Traccia)

I punti di incontro delle trisettrici definiscono gli *incentri* dei triangoli formati da due trisettrici e un lato del triangolo originale:

P	e\`	*l'incentro*	di	**UBC**
Q	"	″	"	**ACV**
R	"	″	"	**AWB**

Essendo i triangoli **URQ**, **VPR** e **WQP** isosceli, **PQR** e\` equilatero.

Q.E.D. (Teorema)