

Block Notes Matematico

Frazioni continue e zeta di Riemann, connessioni con la teoria delle stringhe

Rosario Turco, Maria Colonnese, Michele Nardelli

Abstract

La Fisica e l'Astrofisica devono molto alla Matematica: la conoscenza dell'Universo sarebbe oggi impossibile senza di essa.

Quello che ogni giorno sorprende è la semplicità dei modelli fisici e matematici che la Natura utilizza.



Inoltre dietro ad argomenti elementari di Matematica come le frazioni continue si celano problemi di complessità maggiore.

Il disegno della Natura è come se fosse stato concepito in modalità "bottom up": dai piccoli mattoncini elementari, fino alla realizzazione delle "cattedrali dell'universo".

Si è scoperto relativamente da poco che anche altri settori scientifici come medicina, bioingegneria, musica, economia, etc possono attingere dei modelli matematici della Teoria dei numeri.

Gli autori in questo articolo mostrano come, partendo dalle semplici frazioni continue, si possa giungere alle più avanzate teoria della Fisica, come le connessioni tra i primi e le stringhe adiche, adeliche ed le stringhe-zeta; inoltre le connessioni tra i frattali ed il numero aureo.

In particolare i settori esaminati nel seguito sono: "zeta non-local scalar fields", "Lagrangians with Riemann zeta functions" e "Lagrangians for adelic strings".



Frazioni continue

Le frazioni continue sono del tipo:

$$\alpha = \frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}}$$

Ogni numero $\alpha \in \mathbb{P}$ può essere espresso in questa forma, con sviluppo finito o infinito a seconda se esso è razionale o irrazionale.

Esempio

$\alpha = 116/43$; con l'algoritmo di Euclide si ottiene

$$116 = 2 \times 43 + 30$$

Dividendo per 43 otteniamo ancora:

$$116/43 = 2 + 30/43 = 2 + 1/43/30$$

Al secondo passo:

$$43 = 1 \times 30 + 13$$

Dividendo per 30 otteniamo:

$$43/30 = 1 + 13/30 = 1 + 1/30/13$$

Se si prosegue fino a che l'Algoritmo di Euclide dà resto nullo, si ottiene che:

$$\frac{116}{43} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}} = [2, 1, 2, 3, 4]$$

L'algoritmo di Euclide permette di trovare il MCD(a,b) senza conoscere né i divisori di a, né quelli di b.

Fattorizzazione semiprimi ed espansioni periodiche

Tra le fattorizzazioni più curiose e simpatiche di un semiprimo $N=p \cdot q$ c'è la tecnica della "Espansione periodica in base 10 della frazione $1/N$ ".

Facciamo un esempio: $N=1517$. Occorrono tre step per la fattorizzazione del semiprimo.

Step 1: trovare la lunghezza del periodo $T(1/N)$ della frazione $1/N$

$$1/N=0.\mathbf{000659195781147}000659195781147$$

dove per semplicità abbiamo marcato in bold rosso solo la "parte periodica" della frazione $1/N$. Se contiamo le cifre di tale periodo (bold rosso) si ottiene che $T(1/N)=15$.

Step 2: *fattorizzare la lunghezza del periodo della frazione $1/N$*

Si fattorizza un numero inferiore di quello di partenza; in particolare fattorizziamo adesso la lunghezza del periodo $T(1/N) = 15 = 3 \cdot 5$. Stesso risultato è ottenibile da PARI/GP con `factor(15)`, dove $k_1=3$ e $k_2=5$.

Step 3: *trovare il MCD (in inglese GCD) di N con 10^{k_1-1} e di N con 10^{k_2-1}*

$$\begin{aligned} \text{GCD}(1517, 10^3-1) &= 37=p \\ \text{GCD}(1517, 10^5-1) &= 41=q \end{aligned}$$

Allora $N=1517=37 \cdot 41$.

Controprova

Facciamo la contro-prova del metodo di sopra. Sappiamo che $N=1517=37 \cdot 41$.

Ora cerchiamo per $p=37$ e $q=41$ i più piccoli valori k_1 e k_2 tali che siano intere le quantità:

$$\begin{aligned} (10^{k_1}-1)/p &= 3 \\ (10^{k_2}-1)/q &= 5 \end{aligned}$$

Cosa sono allora k_1 e k_2 ? Sono la lunghezza dei periodi delle espansioni di $1/p$ e $1/q$.

Come si dimostra che il tutto è vero? Intanto ricordiamo che lcm è il minimo comune multiplo (mcm), mentre LCM è il prodotto dei minimi comuni multipli in gioco; inoltre indichiamo con T il periodo di una frazione.

Se $N=p \cdot q$ allora è: $T(N)=LCM(T(p), T(q))$

Se indichiamo $g = \text{GCD}[T(p), T(q)]$ allora $T(N) = T(p)T(q) / g$.

Così per qualche fattorizzazione $T(N) = abg$ noi avremo:

$$T(p) = ag \text{ e } T(q) = bg$$

ed in conclusione:

$$\begin{aligned} p &= \text{GCD} [N, 10^{ag} - 1] \\ q &= \text{GCD} [N, 10^{bg} - 1] \end{aligned}$$

In tutto questo abbiamo usato la base $B=10$ ma nella dimostrazione al posto del 10 potevamo mettere genericamente B :

$$p = \text{GCD} [N, B^{ag} - 1]$$
$$q = \text{GCD} [N, B^{bg} - 1]$$

Simpatico no? E' un metodo che si applica bene e facilmente ad un numero semiprimo; mentre le cose si complicano di più se non è semiprimo o se il periodo non si riesce a individuare.

Se N è semiprimo ad esempio in PARI/GP possiamo saperlo con la funzione $\text{bigomega}(N)$: se N è semiprimo difatti essa restituisce 2. La bigomega fornisce il numero di fattori primi anche se ripetuti.

Esiste sempre un periodo? No, non sempre. Se N è primo, $1/N$ è periodica ad eccezione del caso $N=2$ e $N=5$. Se N è semiprimo $N=p*q$, allora $1/N$ non è periodica se $p = q$ oppure p e q sono fattori primi uguali a 2 o a potenze di 2 o uguali a 5 o a potenze di 5 o prodotti di 2 e 5. Ovviamente il risultato potrebbe dare anche un irrazionale oppure nessun periodo.

Le difficoltà:

1. In PARI/GP non esiste una funzione predefinita (built-in) che individua il periodo: occorre scrivere un algoritmo per $T(1/N)$;
2. Non sempre la frazione è periodica;
3. Per N grande, PARI/GP restituisce il valore in notazione esponenziale (esempio di notazione esponenziale: 23 E-21)

Per il punto 1 di sopra cercare il periodo di una frazione, da quanto visto sopra, significa cercare "il più piccolo valore k tale che $B^k = 1 \pmod N$ "; però una ricerca esaustiva di ciò non è sempre più veloce di una "Trial Division". Tuttavia in PARI/GP esiste un metodo semplice da collocare comunque nell'ambito di un algoritmo; ad esempio sappiamo che $\text{sqrt}(21) = 4, \underline{1,1,2,1,8}$ dove la parte sottolineata è il periodo $T(\text{sqrt}(21))$.

Se usiamo $\text{contfrac}(\text{sqrt}(21))$ otteniamo il vettore

$$[4,1,1,2,1,8,1,1,2,1,8,1,\dots]$$

Ora se a_1 è il primo elemento del vettore e a_j è il j -esimo elemento del vettore, allora il periodo $T(\text{sqrt}(21))=j-1$ se $a_j=2*a_1$. Ovviamente il metodo è poco applicabile se $a_1=0$, ovvero la frazione non è periodica ma è finita o infinita (numero irrazionale).

L'esempio di fattorizzazione precedente era un caso banale.

Esaminiamo, invece, $N = 66167$ $T(66167)=1092$.

La fattorizzazione di $1092 = 2*2*3*7*13$. Qui si deve vedere come combinare le possibili partizioni di 1092. Ad esempio dopo qualche

tentativo si vede $1092=21*26*2$ da cui $ag=42$ e $bg=52$. In questo caso $T(p)$ e $T(q)$ non sono coprimi.

Da qui:

$$\begin{aligned} \text{GCD}[66167,10^{(21*2)}-1] &= 127 \\ \text{GCD}[66167,10^{(26*2)}-1] &= 521 \end{aligned}$$

Ovviamente basta calcolarne solo uno dei fattori, l'altro è ottenibile per divisione, finché non si ottiene un fattore non banale tale che $\text{GCD}[N,B^k-1]$.

Questo tipo di fattorizzazione può lavorare su numeri inferiori rispetto a N , ed è utile soprattutto per i semiprimi. Ma, come visto, non è detto che sia più veloce di una fattorizzazione di tipo trial.

Cosa giustifica che il metodo delle frazioni continue sia corretto per fattorizzare un numero RSA o semiprimo?

Abbiamo visto in [8] che un metodo per fattorizzare un numero RSA è di usare un'equazione di secondo grado: difatti sia il prodotto delle soluzioni dell'equazione che la loro somma (somma legata alla congettura di Goldbach) permettono di fattorizzare un numero RSA.

Ora un'equazione di secondo grado del tipo:

$$x^2 + ax - b = 0$$

Si può riscrivere come:

$$\begin{aligned} x(x+a) &= b \\ x &= \frac{b}{a+x} \quad x = -a + \frac{b}{x} \end{aligned}$$

In entrambi i casi si può generare una frazione continua:

$$\begin{array}{c} \frac{b}{a + \frac{b}{a + \frac{b}{a + \dots}}} \end{array} \quad \begin{array}{c} -a + \frac{b}{-a + \frac{b}{-a + \frac{b}{-a + \dots}}} \end{array}$$

2. Le Frazioni continue e la zeta di Riemann

L'ipotesi di Riemann e la fattorizzazione sono due problemi sicuramente legati, ma non sono lo stesso problema. Inoltre non è affatto detto che la dimostrazione della RH porti ad un metodo veloce per la fattorizzazione: come si userebbero gli zeri non banali della zeta di Riemann ai fini della fattorizzazione? Se fosse vero, in realtà questo dovrebbe essere noto già fin da adesso, indipendentemente dalla dimostrazione della RH...

Precedentemente con "Fattorizzazioni semiprimi e espansioni periodiche", forse, è venuta anche a voi una certa associazione di idee: se le frazioni sono legate alla fattorizzazione, esse sono di conseguenza legate anche alla zeta di Riemann?

Avete provato a dimostrarlo? Non è semplice, se non sapete che è possibile scrivere la zeta di Riemann in un altro modo, attraverso la *trasformata di Mellin*:

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_0^1 h(x) x^{s-1} dx \quad (1)$$

Dove:

$$h(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \quad (2)$$

è detta "*mappa di Gauss*", che rappresenta l'espansione in frazioni continue di x : il simbolo 'quadre chiuse di sotto' indica il più grande valore minore o uguale di $1/x$.

In particolare è:

$$x = [a_1, a_2, a_3, a_4, \dots] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}}$$

Ovviamente $h(x)$ è l'inverso; cioè è un "*reverse shift operator*" sulla espansione delle frazioni continue.

Lo studio delle frazioni continue è molto importante, più di quanto possa sembrare: esse sono legate alla **zeta di Riemann**, alla soluzione dell'**equazione di Pell**¹, ai **frattali** (What? Yet Another

¹ Le frazioni continue hanno un ruolo anche nella risoluzione dell'equazione di Pell (vedi [6]), che è una equazione diofantea in due variabili del tipo:

$$x^2 - dy^2 = 1, \text{ oppure} \\ x^2 - dy^2 = -1$$

Simmetry? Allora ancora zeta di Riemann, Beta e Gamma!!!), ai **sistemi dinamici**, alle **frazioni di Farey** ed ai **"gruppi modulari simmetrici" $SL(2, \mathbb{Z})$** .

Vogliamo esagerare e dire che da qui si arriva anche alla **teoria delle stringhe**? Beh, sicuramente non sbagliamo affatto.

In realtà il "transfer operator" della mappa di Gauss è noto in matematica come "operatore di Gauss-Kuzmin-Wirsing" GKW ed ha molte proprietà interessanti.

Non solo, ma la mappa di Gauss si può pensare anche come ad un particolare elemento del gruppo di permutazioni che agisce su un'infinita rappresentazione dimensionale di numeri reali.

Per l'esattezza l'operatore di Ruelle-Frobenius-Perron associato con la mappa di Gauss è l'operatore di Gauss-Kuzmin-Wirsing (GKW) \mathcal{L}_h .

Quest'ultimo è una mappa lineare tra spazi di funzioni nell'intervallo unitario chiuso (*spazi di Banach*); cioè se è assegnato uno spazio vettore di funzioni, dall'intervallo chiuso unitario all'insieme \mathbb{R} dei numeri reali $\mathcal{F} = \{f | f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}\}$, in tal caso \mathcal{L}_h è un operatore lineare da \mathcal{F} a \mathcal{F} (vedi [1]).

\mathcal{L}_h è un operatore del tipo:

$$[\mathcal{L}_h f](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2} f\left(\frac{1}{n+x}\right) \quad (3)$$

Questo operatore non è stato del tutto risolto, nel senso che non sono note forme chiuse che esprimono tutti i suoi autovettori e autofunzioni. È noto solo un autovettore:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (4)$$

corrispondente al suo autovalore unitario, soluzione fornita da Gauss.



Dietro a questo fatto esiste una ampia classe di frattali e funzioni discontinue che hanno autovalore 1.

Il trattamento prototipale delle soluzioni ad esse legate può avvenire attraverso la derivata della funzione di Minkowski "Question Mark" $\mathcal{M}(x)$, ovvero:

$$[\mathcal{L}_h \mathcal{M}](x) = \mathcal{M}(x)$$

Tenendo presente l'operatore \mathcal{L}_h , è possibile riscrivere la (1) nel seguente modo:

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_0^1 dx x [\mathcal{L}_h x^{s-1}] \quad (5)$$

La (5) assieme ad una migliore comprensione del GWK può essere utile ad approfondire sia la zeta di Riemann che la RH².

E' difatti possibile rimettere la zeta di Riemann secondo dei coefficienti binomiali ed arrivare alla RH equivalente, Dirichlet L-function, serie totiente, serie di Liouville etc (Vedi [1],[2],[3],[4]). Poiché sull'operatore di prima non esistono semplici soluzioni, uno studio possibile è quello di usare la (3) e alcuni teoremi associabili (vedi [1]); inoltre si può tentare di trovare modelli con cui sostituire la (2).

I coefficienti binomiali di cui si parlava precedentemente per la zeta di Riemann sono implicati in vari fenomeni frattali e la *congettura di Berry* suggerisce che "gli zeri non banali della zeta di Riemann corrispondono allo spettro caotico di una sconosciuta quantizzazione di un sistema meccanico caotico".

Ad esempio la (5) è riscrivibile con una serie di Newton (vedi [4]):

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b_n(s)_n}{n!} \quad (6)$$

Dove $(s)_n = s(s-1)\dots(s-n+1)$ è il *simbolo discendente di Pochhammer*.

La (6) ha una forte somiglianza con uno sviluppo in serie di Taylor. Queste somiglianze generali sono l'idea di base di una tecnica denominata "umbral calculus"³. Nella (6) b_n ha un ruolo

² RH: l'ipotesi di Riemann, attualmente ancora una congettura non dimostrata e problema del Millennio.

³ Prima degli anni 70 "umbral calculus" individuava le forti somiglianze nelle espressioni polinomiali e le relative tecniche ombra che potessero essere usate passando dall'una all'altra. La tecnica ombra in questo caso era una tecnica

analogo alle *costanti di Stieltjes* nella *espansione di Taylor* ed ha diverse proprietà:

$$b_n = n(1 - \gamma - H_{n-1}) - \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n (-1)^k \zeta(k) \quad (7)$$

Per $n > 0$ e γ è la costante di Eulero-Mascheroni. Inoltre è:

$$H_n = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \quad (8)$$

che è il numero armonico.

I primi valori di b_n , ricavabili dalla (7), sono:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{2} \\ b_1 &= -\gamma + \frac{1}{2} \\ b_2 &= -2\gamma - \frac{1}{2} + \zeta(2) \\ b_3 &= -3\gamma - 2 - \zeta(3) + 3\zeta(2) \end{aligned}$$

Sebbene i termini intermedi diventano molto grandi, il risultato tende, invece, a diventare piccolo:

$$b_n = O(n^{1/4} e^{-2\sqrt{\pi n}})$$

Dalla (7) si può tentare di generalizzare b_n a valori complessi:

$$b(s) = -s\gamma + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \binom{s}{k} \left[\zeta(k) - \frac{1}{k-1} \right] \quad (9)$$

Dallo studio della generalizzazione di Riemann, attraverso le L-function, si può anche arrivare ad una struttura frattale della distribuzione degli zeri, usando la cosiddetta "*Rescaled range analysis*".

La proprietà di autosimilarità frattale (vedremo di seguito) della distribuzione degli zeri delle L-function è di grande rilievo ed è contraddistinta da una dimensione frattale $d=1.9$. Una dimensione frattale così grande è stata trovata per molti zeri della funzione zeta di Riemann e anche per quelli di funzioni-L di altro tipo.

di soluzione che andava bene su un' espressione polinomiale nota e veniva ricondotta alle espressioni simili. Di solito si prendono di riferimento di solito lo sviluppo in serie di Taylor, l'espansione binomiale, etc. Un esempio è l'espansione binomiale, da cui discendono i polinomi di Bernoulli.

Frazioni e serie di Farey

Alcune proprietà delle frazioni furono scoperte dal geologo Farey.

Consideriamo la serie F_n con $n=3$ ottenibile dall'insieme delle frazioni minori o uguali di 1, che hanno a numeratore e denominatore tutti i numeri da $n=0$ fino ad esempio a $n=3$; infine eliminiamo i valori equivalenti e riordiniamoli dal più basso al più grande:

$$F_3 = \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$$

Escludendo i termini che danno 0 oppure 1, si possono osservare delle proprietà interessanti.

Ad esempio per la serie di sopra possiamo considerare solo gli elementi $1/3$, $1/2$ e $2/3$. I due elementi esterni detti *convergenti* se sommati danno l'elemento centrale, detto *mediante*. Questo in generale è vero per ogni N e per ogni terzetto di frazioni escludendo quelle esterne che danno 0 e 1. Inoltre quando N è primo si ottengono $N-1$ frazioni ovvero $\phi(N)$.

La serie di Farey fornisce anche la prova di un importante corollario dell'algoritmo di Euclide: per due interi m e n con $\gcd(m,n) = 1$ e $m \leq n$, esistono interi positivi a e b tali che $ma - nb = 1$.

La prova fu fornita da *Cauchy* e una interpretazione geometrica è stata fornita da *Lester R. Ford*. La serie di Farey è legata all'albero di *Stern-Brocot* almeno in termini di dimostrazione. (vedi [5]).

Infine tra due adiacenti di Farey si può, anche, definire una operazione nota come *somma di Farey*:

$$p/q \oplus r/s = (p+q)/(r+s)$$

il numero risultante è il *mediante* ed è quello di minor denominatore che si trova nell'intervallo $(p/q, r/s)$. Il *mediante* risulta utile per descrivere l'ordine gerarchico delle risposte di sincronizzazione in un oscillatore periodicamente forzato: la risposta caratterizzata dal *mediante*, $(p+q)/(r+s)$, possiede la regione di stabilità più importante tra tutte quelle che si trovano nell'intervallo definito dai numeri p/q e r/s .

Da qui si scopre giocando con gli oscillatori non lineari forzati che "qualsiasi sistema dinamico forzato da due o più frequenze mutualmente incommensurabili, non può produrre delle risposte periodiche".

Sezione Aurea, serie di Fibonacci e serie di Farey

Una particolare frazione continua infinita è:

$$(0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots) \quad (10)$$

La (10), in effetti, corrisponde al numero ϕ , la sezione aurea:

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Difatti è:

$$\phi = \frac{1}{1 + \phi} \rightarrow \phi^2 + \phi - 1 = 0 \rightarrow \phi_{1-2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$$

Si può anche considerare la (10) come vari pezzetti di termini *convergenti*; ad esempio:

$$\begin{aligned} (0) &= 0 \\ (0, 1) &= 1 \\ (0, 1, 1) &= 1/2 \\ (0, 1, 1, 1) &= 2/3 \\ (0, 1, 1, 1, 1) &= 3/5 \\ (0, 1, 1, 1, 1, 1) &= 5/8 \\ (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1) &= 8/13 \end{aligned}$$

I vari pezzetti visti prima ci danno due **legami** inattesi della sezione Aurea: uno forse noto con la *serie di Fibonacci*, l'altro con la *serie di Farey*!

Notiamo tra i pezzetti il ripetersi della sequenza 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... come nei numeri di Fibonacci. Escludendo (0), per ottenere il terzo elemento si devono sommare i primi due, per ottenere poi il successivo termine si devono sommare i precedenti due etc.

Sempre dai pezzetti si osserva che due successivi convergenti della sezione aurea soddisfano la relazione $(ps - qr) = 1$. Ad esempio con 5/8 e 8/13 si ha che $5 \cdot 13 - 8 \cdot 8 = 65 - 64 = 1$.

3. I frattali

È stato Benoit Mandelbrot nel 1975 a parlare per la prima volta di *fractal*. *Fractal* deriva dal latino *fractus* che significa *irregolare* o *frammentato*.



Mandelbrot è da considerarsi il padre della teoria dei frattali.

Egli formalizzò le proprietà di queste figure, considerate, prima di lui, delle curiosità.

Diversi frattali classici sono infatti stati descritti da celebri matematici del passato come *Cantor*, *Hilbert*, *Peano*, *von Koch*, *Sierpinski* ma fu solo con "*The Fractal Geometry of Nature*" (1982) che essi trovarono una teoria unificata e geometrica, che ne sottolineava i legami con forme tipiche della natura (coste, alberi, montagne, farfalle, ...).

Intuitivamente, un frattale è una figura in cui un singolo motivo viene ripetuto su scale decrescenti. Ingrandendo una parte della figura, possiamo individuarvi una copia in scala della figura stessa.

I frattali, quindi, sono anche sintomo di simmetria ricorsiva.

In generale un frattale è un insieme che gode di una o più proprietà seguenti:

- **autosomiglianza**: è l'unione di copie di se stesso a scale differenti;
- **struttura fine**: il dettaglio dell'immagine non cambia ad ogni ingrandimento;
- **irregolarità**: non si può descrivere come luogo di punti che soddisfano semplici condizioni geometriche o analitiche; la funzione è *ricorsiva* ed irregolare localmente e globalmente
- **dimensione frattale**: sebbene possa essere rappresentato in uno spazio convenzionale a due o tre dimensioni, la sua dimensione non è necessariamente un intero; può essere una frazione, ma spesso anche un numero irrazionale. E' di solito maggiore della dimensione topologica.

Le proprietà di sopra sono esprimibili anche matematicamente.

La dimensione frattale è quindi il numero che misura il grado di irregolarità e di interruzione di un oggetto, considerato in qualsiasi scala.

Da quando Mandelbrot ha introdotto la *geometria frattale*, è nato un nuovo linguaggio di descrizione delle forme complesse della natura: essi richiedono algoritmi, semplici funzioni ricorsive, che iterate un gran numero di volte forniscono un'immagine.

Negli anni '80 con tale nuova geometria si sono trovati frattali in ogni ambito: dalla natura fino alla medicina e alla musica e si è sviluppata una branca della geometria frattale che studia i cosiddetti frattali *biomorfi* ed una sui frattali con *condensing*, che utilizzano le trasformazioni geometriche del piano, i metodi IFS ed L-System.

Ovviamente i frattali compaiono anche nello studio dei sistemi dinamici.

I frattali sono usati da fisici e ingegneri per costruire modelli che descrivono il moto dei fluidi turbolenti - *ma secondo gli autori sono importanti anche per le dimensioni extra* - ed i fenomeni di combustione. Inoltre hanno applicazione nella compressione delle immagini e dei film virtuali. Infine sono utili per la riproduzione di mezzi porosi e lo studio degli idrocarburi e della Natura in generale: coste geografiche, corsi dei fiumi etc.

In [7] si è visto che nel caso delle dimensioni extra arrotolate, se si fa l'analogia con un tubo di pompa in cui viene spinta con forte pressione dell'acqua, quest'ultima viene prima proiettata con forza sulle pareti laterali e poi prosegue nella direzione longitudinale. Ora ad una distanza piuttosto piccola, le linee di forza della gravità si comportano allo stesso modo: a breve distanza o dimensione piuttosto piccola si diffondono radialmente in tutte le direzioni, per poi prolungarsi nella dimensione maggiore in modo lineare. Questo fenomeno, usando una tecnica "umbrale" che scopiazza il moto dei fluidi turbolenti, ci può portare a notare una sorta di "*frattale della gravità*".

La legge di Gauss per la gravità in forma differenziale si indica:

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho$$

dove

∇ indica divergenza,
 G è la costante della Gravitazione universale,
 ρ è la densità di massa per ogni punto.

Le due forme della legge di Gauss per la gravità sono matematicamente equivalenti. Il teorema della divergenza è:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{g} dV$$

dove

V è una regione chiusa limitata da una semplice superficie chiusa orientata ∂V ,
 \mathbf{g} è un campo vettoriale continuamente differenziabile definito su un intorno di V ,
 dV è una parte infinitesimale del volume V .

Essendo anche

$$M = \int_V \rho dV$$

possiamo applicare il teorema della divergenza alla forma integrale della legge di Gauss per la gravità, che diviene:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{g} dV = -4\pi G \int_V \rho dV$$

che può essere riscritta:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{g}) dV = \int_V (-4\pi G \rho) dV$$

Questo deve valere simultaneamente per ogni possibile V di volume; e ciò accade soltanto se gli integrandi sono uguali. Quindi, arriviamo a:

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G \rho$$

che è la forma differenziale della legge di Gauss per la gravità.

La forma differenziale della legge di Gauss per la gravità può anche essere derivata dalla legge della gravitazione universale di Newton. Usando l'espressione della legge di Newton, otteniamo il campo totale ad \mathbf{r} usando un integrale per sommare il campo ad \mathbf{r} dovuto alla massa ad ogni altro punto nello spazio rispetto ad un sistema di coordinate \mathbf{s} , per ottenere

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{s})(\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} dV(\mathbf{s})$$

Se prendiamo la divergenza di entrambi i membri di tale equazione rispetto ad \mathbf{r} , ed usiamo il teorema conosciuto

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|^3} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{s})$$

dove $\delta(\mathbf{s})$ è la funzione delta di Dirac, il risultato è

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}) = -4\pi G \int_V \rho(\mathbf{s}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}) dV(\mathbf{s})$$

Usando la "sifting property" della funzione delta di Dirac, arriviamo a

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho$$

che è la forma differenziale della legge di Gauss per la gravità, come desiderato.

Poichè il campo gravitazionale ha torsione zero (equivalentemente, la gravità è una forza conservativa), esso può essere scritto come il gradiente di un potenziale scalare, definito "potenziale gravitazionale":

$$\mathbf{g} = -\nabla\phi ,$$

Allora la forma differenziale della legge di Gauss per la gravità diviene l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho ,$$

Ciò fornisce una maniera alternativa di calcolare il potenziale gravitazionale ed il campo gravitazionale.

Nei sistemi simmetrici radiali, il potenziale gravitazionale è una funzione di soltanto una variabile ($r = |\mathbf{r}|$), e l'equazione di Poisson diviene:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 4\pi G\rho(r)$$

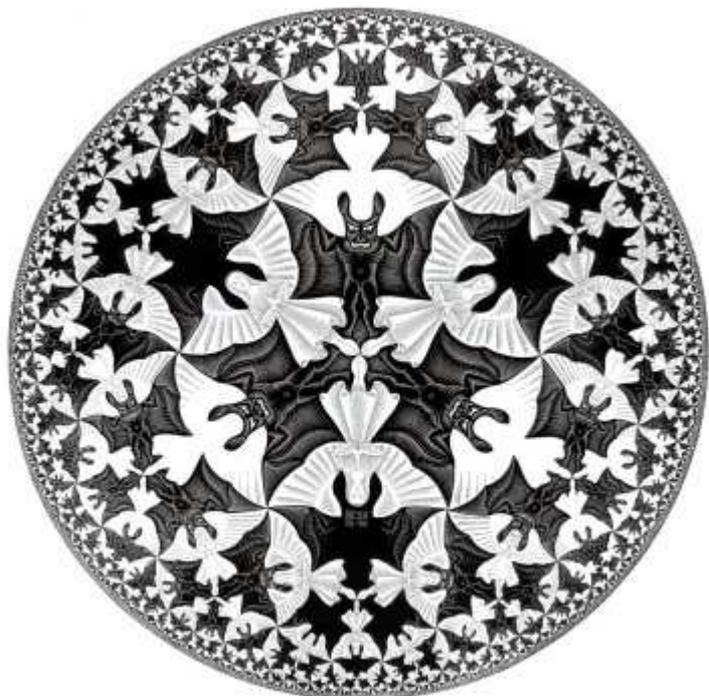
mentre il campo gravitazionale è:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\mathbf{e}_r \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

È possibile che l'equazione di Poisson produce "frattali" nel caso specifico delle dimensioni extra compattificate? Questo dipende dalle condizioni al contorno o dal fatto che è possibile semplificare l'equazione $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$, in

un'equazione di Laplace? Sì, è possibile. Infatti, ricordiamo che ad una distanza molto piccola, le linee di forza della gravità si comportano allo stesso modo: per una breve distanza o una piccola dimensione si ha una propagazione "radiale" in tutte le direzioni, e successivamente si estende, nella dimensione più grande, in maniera lineare.

Lo spazio AdS (Anti de Sitter) è curvo e la curvatura è negativa. La famosa incisione di Escher *Limite del cerchio IV* è una "mappa" di uno spazio a curvatura negativa che mostra esattamente come apparirebbe una fetta bidimensionale di uno spazio AdS. In essa le figure si alternano senza fine, sfumando in un bordo frattale infinito (**anche qui è presente il numero aureo Φ**).



Ora aggiungiamo il tempo e mettiamo tutto insieme in una figura che rappresenta uno spazio anti de Sitter. Mettiamo il tempo lungo l'asse verticale. Ciascuna sezione orizzontale rappresenta lo spazio ordinario ad un particolare istante. L'Ads si può quindi pensare come un'infinita sequenza di sottili fettine di spazio che, impilate una sull'altra, formano un continuo spaziotemporale di forma cilindrica.

Immaginiamo adesso di zoomare su una regione prossima al bordo della figura e di farne un ingrandimento tale da far apparire il

bordo quasi rettilineo. Se semplifichiamo l'immagine sostituendo le figure scure con quadrati, l'immagine diventa una specie di reticolo fatto di quadrati sempre più piccoli man mano che ci si avvicina al bordo frattale infinito. Possiamo immaginare l'AdS come un "muro" infinito di mattoni quadrati: scendendo lungo il muro, ad ogni nuovo strato la larghezza dei mattoni raddoppia. Lo spazio anti de Sitter è come una "lattina di minestrone". Le sezioni orizzontali della lattina rappresentano lo spazio, mentre l'asse verticale rappresenta il tempo. L'etichetta all'esterno della lattina è il bordo, mentre l'interno rappresenta lo spazio-tempo vero e proprio. Lo spazio AdS puro è una lattina vuota, che può essere resa più interessante riempiendola di "minestrone" - ossia materia ed energia. Witten spiegò che, ammassando abbastanza materia ed energia nella lattina, è possibile creare un buco nero. L'esistenza di un buco nero nel "minestrone" deve avere un equivalente sull'ologramma al bordo, ma che cosa? Nella sua "teoria di bordo" Witten sostiene che il buco nero nel "minestrone" è equivalente ad un "fluido caldo" di particelle elementari - essenzialmente gluoni. Ora, la teoria dei campi è un caso particolare di meccanica quantistica, ed in meccanica quantistica l'informazione non viene mai distrutta. I teorici delle stringhe capirono immediatamente che Maldacena e Witten avevano dimostrato senza ombra di dubbio che non è possibile far sparire informazione dietro l'orizzonte di un buco nero.

Prendiamo adesso in considerazione l'AdS, visto da un punto molto vicino al bordo: chiameremo questo bordo UV-brana. La UV-brana è quindi una superficie vicina al bordo. (Ritorniamo nuovamente all'immagine dell'AdS come un "muro" infinito di mattoni quadrati: scendendo lungo il muro, ad ogni nuovo strato la larghezza dei mattoni raddoppia. Ricordiamo, inoltre, che il bordo è un "bordo frattale infinito"). Immaginiamo di allontanarci dalla UV-brana e dirigerci verso l'interno dove i quadrati si allargano e gli orologi rallentano indefinitamente. Gli oggetti che in prossimità della UV-brana sono piccoli e veloci diventano grandi e lenti quando ci addentriamo nello spazio AdS. Ma l'AdS non è la cosa più adatta per descrivere la QCD. Chiamiamo questo spazio anti de Sitter modificato Q-spazio. Come l'AdS, il Q-spazio ha una UV-brana dove le cose rimpiccioliscono ed accelerano ma, diversamente dall'AdS, possiede anche un secondo bordo, chiamato IR-brana. La IR-brana è una specie di barriera impenetrabile dove i quadrati raggiungono la loro estensione massima. Immaginiamo di mettere una stringa quantistica in un Q-spazio, dapprima in prossimità della UV-brana. Essa apparirà minuscola - forse con diametro paragonabile alla lunghezza di Planck - e rapidamente vibrante. Ma se la stessa particella (stringa) viene spostata verso la IR-brana sembrerà ingrandirsi, come se fosse proiettata su uno schermo che si allontana. Ora prendiamo in considerazione le vibrazioni. Queste costituiscono una sorta di "orologio" che, accelererà avvicinandosi all'UV-brana, e rallenterà quando si muove verso la IR-brana. Una stringa in vicinanza della IR-brana non solo

apparirà come un'enorme gigantografia della propria versione miniaturizzata UV, ma oscillerà anche molto più lentamente di quest'ultima. Se le particelle ultrapiccole (alla scala di Planck) della teoria delle stringhe "vivono" in prossimità della UV-brana e le loro versioni ingigantite - gli adroni (particelle strettamente parenti del nucleo atomico: protoni, neutroni, mesoni e glueball. Gli adroni sono costituiti da quark e gluoni) - vivono nei pressi della IR-brana, quanto distano esattamente le une dalle altre? Secondo la figura prima riportata, per andare dagli oggetti planckiani agli adroni bisogna scendere di circa 66 quadrati. Ma ricordando che ogni "gradino" è alto il doppio del precedente, raddoppiare 66 volte corrisponde grosso modo ad un'espansione di un fattore 10^{20} .

Il punto di vista più eccitante, è che le stringhe nucleari e quelle fondamentali sono davvero gli stessi oggetti, visti attraverso una "lente" che ne distorce l'immagine e ne rallenta il moto. Secondo questo modo di vedere, quando una particella (o stringa) si trova in vicinanza della UV-brana appare piccola, energetica e rapidamente oscillante: ha l'aspetto di una stringa fondamentale, si comporta come una stringa fondamentale, dunque deve essere una stringa fondamentale. Una stringa chiusa situata in prossimità della UV-brana, ad esempio, sarebbe un gravitone. **(Notiamo che una stringa chiusa ha grosso modo una forma "circolare", quindi in essa è insito π che per la semplice relazione $\arccos\phi = 0,2879\pi$ è connesso con il numero aureo. Inoltre le vibrazioni emettono "frequenze" in ottimo accordo con gli esponenti del numero aureo).** Ma la stessa stringa, se si avvicina alla IR-brana, rallenta e si espande. Da tutti i punti di vista si comporta come una glueball (adrone costituito solo da gluoni). In questa interpretazione il gravitone e la glueball sono esattamente lo stesso oggetto, situato in punti diversi del fascio di brane. **(Quindi, un bosone - il gravitone - ed un fermione - la glueball - sono in corrispondenza biunivoca, cioè dall'uno si ottiene l'altro e viceversa, secondo la relazione fondamentale del modello Palumbo-Nardelli(P-N):**

$$-\int d^{26}x \sqrt{g} \left[-\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{8} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \text{Tr}(G_{\mu\nu} G_{\rho\sigma}) f(\phi) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right] = \\ = \int_0^\infty \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-G)^{1/2} e^{-2\Phi} \left[R + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} |\tilde{H}_3|^2 - \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} \text{Tr}_v(|F_2|^2) \right].$$

Anche questa interpretazione, quindi, rafforza e convalida il modello P-N che lega le stringhe bosoniche a quelle fermioniche, e la connessione con il numero aureo, insito in tale formula).

Stringhe p-adiche ed adeliche e stringhe-zeta [9] [10] [11] [12] [13]

Come nell'ordinaria teoria di stringa, il punto di partenza delle stringhe p-adiche è la costruzione delle corrispondenti ampiezze

di scattering. Ricordiamo che l'ordinaria ampiezza simmetrica incrociata di Veneziano può essere rappresentata nelle seguenti forme:

$$A_{\infty}(a,b) = g^2 \int_R |x|_{\infty}^{a-1} |1-x|_{\infty}^{b-1} dx = g^2 \left[\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} + \frac{\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(b+c)} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a)}{\Gamma(c+a)} \right] = g^2 \frac{\zeta(1-a)}{\zeta(a)} \frac{\zeta(1-b)}{\zeta(b)} \frac{\zeta(1-c)}{\zeta(c)} =$$

$$= g^2 \int DX \exp\left(-\frac{i}{2\pi} \int d^2\sigma \partial^{\alpha} X_{\mu} \partial_{\alpha} X^{\mu}\right) \prod_{j=1}^4 \int d^2\sigma_j \exp\left(ik_{\mu}^{(j)} X^{\mu}\right), \quad (1 - 4)$$

dove $\hbar=1$, $T=1/\pi$, e $a=-\alpha(s)=-1-\frac{s}{2}$, $b=-\alpha(t)$, $c=-\alpha(u)$ con la condizione $s+t+u=-8$, cioè $a+b+c=1$.
La generalizzazione p-adica dell'espressione sopra

$$A_{\infty}(a,b) = g^2 \int_R |x|_{\infty}^{a-1} |1-x|_{\infty}^{b-1} dx ,$$

è:

$$A_p(a,b) = g_p^2 \int_{Q_p} |x|_p^{a-1} |1-x|_p^{b-1} dx , \quad (5)$$

dove $|\cdot|_p$ indica il valore assoluto p-adico. In questo caso soltanto il parametro del foglio d'universo di stringa x è trattato come una variabile p-adica, e tutte le altre quantità hanno la loro solita (reale) valutazione.

Adesso, ricordiamo che gli integrali di Gauss soddisfano la formula del prodotto adelico

$$\int_R \chi_{\infty}(ax^2 + bx) d_{\infty} x \prod_{p \in P} \int_{Q_p} \chi_p(ax^2 + bx) d_p x = 1, \quad a \in Q^{\times}, \quad b \in Q, \quad (6)$$

che consegue da

$$\int_{Q_v} \chi_v(ax^2 + bx) d_v x = \lambda_v(a) 2a |a|_v^{-\frac{1}{2}} \chi_v\left(-\frac{b^2}{4a}\right), \quad v = \infty, 2, \dots, p \dots . \quad (7)$$

Questi integrali di Gauss si applicano nella valutazione degli integrali di cammino di Feynman

$$K_v(x'', t''; x', t') = \int_{x', t'}^{x'', t''} \chi_v \left(-\frac{1}{h} \int_{t'}^{t''} L(\dot{q}, q, t) dt \right) D_v q , \quad (8)$$

per i kernels $K_v(x'', t''; x', t')$ dell'operatore di evoluzione nella meccanica quantistica adelica per Lagrangiane quadratiche. Nel caso della Lagrangiana

$$L(\dot{q}, q) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\dot{q}^2}{4} - \lambda q + 1 \right),$$

per il modello cosmologico di de Sitter si ottiene

$$K_\infty(x'', T; x', 0) \prod_{p \in P} K_p(x'', T; x', 0) = 1, \quad x'', x', \lambda \in Q, \quad T \in Q^\times, \quad (9)$$

dove

$$K_v(x'', T; x', 0) = \lambda_v(-8T) 4T \left| v \right|^{-\frac{1}{2}} \chi_v \left(-\frac{\lambda^2 T^3}{24} + [\lambda(x''+x')-2] \frac{T}{4} + \frac{(x''-x')^2}{8T} \right). \quad (10)$$

Anche qui abbiamo il numero 24 che corrisponde alla funzione di Ramanujan che ha 24 "modi", che corrispondono alle vibrazioni fisiche di una stringa bosonica. Quindi, otteniamo la seguente connessione matematica:

$$\begin{aligned} K_v(x'', T; x', 0) &= \lambda_v(-8T) 4T \left| v \right|^{-\frac{1}{2}} \chi_v \left(-\frac{\lambda^2 T^3}{24} + [\lambda(x''+x')-2] \frac{T}{4} + \frac{(x''-x')^2}{8T} \right) \Rightarrow \\ &= \frac{4 \left[\text{anti log} \frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi x w'}{\cosh \pi x} e^{-\pi^2 w'} dx}{e^{-\frac{\pi^2}{4} w'} \phi_{w'}(itw')} \right] \cdot \frac{\sqrt{142}}{t^2 w'}}{\log \left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4} \right)} + \sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4} \right)} \right]}. \quad (10b) \end{aligned}$$

La funzione d'onda adelica per il più semplice stato fondamentale ha la forma

$$\psi_A(x) = \psi_\infty(x) \prod_{p \in P} \Omega(|x|_p) = \begin{cases} \psi_\infty(x), & x \in Z \\ 0, & x \in Q \setminus Z \end{cases}, \quad (11)$$

dove $\Omega(|x|_p) = 1$ se $|x|_p \leq 1$ e $\Omega(|x|_p) = 0$ se $|x|_p > 1$. Poichè questa funzione d'onda è diversa da zero soltanto nei punti interi, essa può essere interpretata come distinzione dello spazio dovuto agli effetti p-adici nell'approccio adelico. Le funzioni Gel'fand-Graev-Tate gamma e beta sono:

$$\Gamma_\infty(a) = \int_R |x|_\infty^{a-1} \chi_\infty(x) d_\infty x = \frac{\zeta(1-a)}{\zeta(a)}, \quad \Gamma_p(a) = \int_{Q_p} |x|_p^{a-1} \chi_p(x) d_p x = \frac{1-p^{a-1}}{1-p^{-a}}, \quad (12)$$

$$B_\infty(a, b) = \int_R |x|_\infty^{a-1} |1-x|_\infty^{b-1} d_\infty x = \Gamma_\infty(a) \Gamma_\infty(b) \Gamma_\infty(c), \quad (13)$$

$$B_p(a, b) = \int_{Q_p} |x|_p^{a-1} |1-x|_p^{b-1} d_p x = \Gamma_p(a) \Gamma_p(b) \Gamma_p(c), \quad (14)$$

dove $a, b, c \in \mathbb{C}$ con la condizione $a+b+c=1$ e $\zeta(a)$ è la funzione zeta di Riemann. Con una regolarizzazione del prodotto delle funzioni gamma p-adiche si hanno i prodotti adelici:

$$\Gamma_\infty(u) \prod_{p \in P} \Gamma_p(u) = 1, \quad B_\infty(a, b) \prod_{p \in P} B_p(a, b) = 1, \quad u \neq 0, 1, \quad u = a, b, c, \quad (15)$$

dove $a+b+c=1$. Notiamo che $B_\infty(a, b)$ e $B_p(a, b)$ sono le ampiezze standard simmetriche incrociate e p-adiche di Veneziano per lo scattering di due stringhe tachioniche aperte. Introducendo reali, p-adiche ed adeliche funzioni zeta come

$$\zeta_\infty(a) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi x^2) |x|_\infty^{a-1} d_\infty x = \pi^{-\frac{a}{2}} \Gamma\left(\frac{a}{2}\right), \quad (16)$$

$$\zeta_p(a) = \frac{1}{1-p^{-1}} \int_{Q_p} \Omega(|x|_p) |x|_p^{a-1} d_p x = \frac{1}{1-p^{-a}}, \quad \text{Re } a > 1, \quad (17)$$

$$\zeta_A(a) = \zeta_\infty(a) \prod_{p \in P} \zeta_p(a) = \zeta_\infty(a) \zeta(a), \quad (18)$$

si ottiene

$$\zeta_A(1-a) = \zeta_A(a), \quad (19)$$

dove $\zeta_A(a)$ può essere chiamata funzione zeta adelica. Abbiamo anche che

$$\zeta_A(a) = \zeta_\infty(a) \prod_{p \in P} \zeta_p(a) = \zeta_\infty(a) \zeta(a) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi x^2) |x|_\infty^{a-1} d_\infty x \cdot \frac{1}{1-p^{-1}} \int_{Q_p} \Omega(|x|_p) |x|_p^{a-1} d_p x. \quad (19b)$$

Notiamo che $\exp(-\pi x^2)$ e $\Omega(|x|_p)$ sono funzioni analoghe nei casi reale e p-adico. L'oscillatore armonico adelico è connesso con la funzione zeta di Riemann. Il più semplice stato di vuoto dell'oscillatore armonico adelico è la seguente funzione di Schwartz-Bruhat:

$$\psi_A(x) = 2^{\frac{1}{4}} e^{-\pi x_\infty^2} \prod_{p \in P} \Omega(|x_p|_p), \quad (20)$$

la cui trasformazione di Fourier

$$\psi_A(k) = \int \chi_A(kx) \psi_A(x) = 2^{\frac{1}{4}} e^{-\pi k_\infty^2} \prod_{p \in P} \Omega(|k_p|_p) \quad (21)$$

ha la stessa forma di $\psi_A(x)$. La trasformazione di Mellin di $\psi_A(x)$ è

$$\Phi_A(a) = \int \psi_A(x) |x|^a d_A^\times x = \int_R \psi_\infty(x) |x|^{a-1} d_\infty x \prod_{p \in P} \frac{1}{1-p^{-1}} \int_{Q_p} \Omega(|x|_p) |x|^{a-1} d_p x = \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \pi^{-\frac{a}{2}} \zeta(a) \quad (22)$$

e la stessa è per $\psi_A(k)$. Allora in accordo alla formula di Tate si ottiene (19).

L'esatta Lagrangiana fondamentale per l'effettivo campo scalare ϕ che descrive la stringa tachionica aperta p-adica è

$$\mathcal{L}_p = \frac{1}{g^2} \frac{p^2}{p-1} \left[-\frac{1}{2} \phi p^{-\frac{\square}{2}} \phi + \frac{1}{p+1} \phi^{p+1} \right], \quad (23)$$

dove p è qualche numero primo, $\square = -\partial_i^2 + \nabla^2$ è il d'Alambertiano D-dimensionale ed adottiamo una metrica con segnatura $(-+\dots+)$. Adesso, vogliamo mostrare un modello che incorpora le Lagrangiane di stringhe p-adiche in un ristretto modo adelicco. Prendiamo la seguente Lagrangiana

$$L = \sum_{n \geq 1} C_n \mathcal{L}_n = \sum_{n \geq 1} \frac{n-1}{n^2} \mathcal{L}_n = \frac{1}{g^2} \left[-\frac{1}{2} \phi \sum_{n \geq 1} n^{-\frac{\square}{2}} \phi + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1} \phi^{n+1} \right]. \quad (24)$$

Ricordiamo che la funzione zeta di Riemann è definita come

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}, \quad s = \sigma + i\tau, \quad \sigma > 1. \quad (25)$$

Impiegando la solita espansione per la funzione logaritmica e la definizione (25) possiamo riscrivere (24) nella forma

$$L = -\frac{1}{g^2} \left[\frac{1}{2} \phi \zeta\left(\frac{\square}{2}\right) \phi + \phi + \ln(1-\phi) \right], \quad (26)$$

dove $|\phi| < 1$. $\zeta\left(\frac{\square}{2}\right)$ agisce come un operatore pseudodifferenziale nel seguente modo:

$$\zeta\left(\frac{\square}{2}\right) \phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int e^{ikx} \zeta\left(-\frac{k^2}{2}\right) \tilde{\phi}(k) dk, \quad -k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 > 2 + \varepsilon, \quad (27)$$

dove $\tilde{\phi}(k) = \int e^{-ikx} \phi(x) dx$ è la trasformata di Fourier di $\phi(x)$.

Le dinamiche di questo campo ϕ sono incluse nella forma (pseudo)differenziale della funzione zeta di Riemann. **Quando il d'Alambertiano è un argomento della funzione zeta di Riemann noi chiameremo tale stringa una "stringa zeta"**. Conseguentemente, la ϕ sopra è una stringa zeta scalare aperta. L'equazione di moto per la stringa zeta ϕ è

$$\zeta\left(\frac{\square}{2}\right)\phi = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{k_0^2 - \bar{k}^2 > 2+\varepsilon} e^{ixk} \zeta\left(-\frac{k^2}{2}\right) \tilde{\phi}(k) dk = \frac{\phi}{1-\phi} \quad (28)$$

che ha una evidente soluzione $\phi=0$.

Per il caso di soluzioni omogenee spazialmente dipendenti dal tempo, abbiamo la seguente equazione di moto

$$\zeta\left(\frac{-\partial_t^2}{2}\right)\phi(t) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{|k_0| > \sqrt{2}+\varepsilon} e^{-ik_0 t} \zeta\left(\frac{k_0^2}{2}\right) \tilde{\phi}(k_0) dk_0 = \frac{\phi(t)}{1-\phi(t)}. \quad (29)$$

Riguardo le stringhe zeta scalari aperte e chiuse, le equazioni di moto sono

$$\zeta\left(\frac{\square}{2}\right)\phi = \frac{1}{(2\pi)^D} \int e^{ixk} \zeta\left(-\frac{k^2}{2}\right) \tilde{\phi}(k) dk = \sum_{n \geq 1} \theta^{\frac{n(n-1)}{2}} \phi^n, \quad (30)$$

$$\zeta\left(\frac{\square}{4}\right)\theta = \frac{1}{(2\pi)^D} \int e^{ixk} \zeta\left(-\frac{k^2}{4}\right) \tilde{\theta}(k) dk = \sum_{n \geq 1} \left[\theta^{n^2} + \frac{n(n-1)}{2(n+1)} \theta^{\frac{n(n-1)}{2}-1} (\phi^{n+1} - 1) \right], \quad (31)$$

e si può facilmente notare la soluzione banale $\phi=\theta=0$.

L'esatta Lagrangiana di livello fondamentale del campo scalare effettivo ϕ , che descrive la stringa aperta p-adica tachionica è:

$$\mathcal{L}_p = \frac{m_p^D}{g_p^2} \frac{p^2}{p-1} \left[-\frac{1}{2} \phi p^{-\frac{\square}{2m_p^2}} \phi + \frac{1}{p+1} \phi^{p+1} \right], \quad (32)$$

dove p è qualche numero primo, $\square = -\partial_i^2 + \nabla^2$ è il d'Alambertiano D-dimensionale e adottiamo una metrica con segno $(-+...+)$, come prima. Adesso vogliamo introdurre un modello che incorpora tutte le Lagrangiane di stringa precedenti (32) con p sostituito da $n \in \mathbb{N}$. Quindi, prendiamo la somma di tutte le Lagrangiane \mathcal{L}_n nella forma

$$L = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \mathcal{L}_n = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \frac{m_n^D}{g_n^2} \frac{n^2}{n-1} \left[-\frac{1}{2} \phi n^{-\frac{\square}{2m_n^2}} \phi + \frac{1}{n+1} \phi^{n+1} \right], \quad (33)$$

La cui esplicita realizzazione dipende dalla particolare scelta di coefficienti C_n , masse m_n e costanti di accoppiamento g_n .

Adesso, consideriamo il seguente caso

$$C_n = \frac{n-1}{n^{2+h}}, \quad (34)$$

dove h è un numero reale. La corrispondente Lagrangiana si legge

$$L_h = \frac{m^D}{g^2} \left[-\frac{1}{2} \phi \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\frac{\square}{2m^2}-h} \phi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-h}}{n+1} \phi^{n+1} \right] \quad (35)$$

ed essa dipende dal parametro h . In accordo alla formula del prodotto di Eulero si può scrivere

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\frac{\square}{2m^2}-h} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-\frac{\square}{2m^2}-h}}. \quad (36)$$

Ricordiamo che la definizione standard della funzione zeta di Riemann è

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad s = \sigma + i\tau, \quad \sigma > 1, \quad (37)$$

che ha il prolungamento analitico all'intero piano complesso s , escluso il punto $s=1$, dove esso ha un polo semplice con residuo 1. Impiegando la definizione (37) possiamo riscrivere la (35) nella forma

$$L_h = \frac{m^D}{g^2} \left[-\frac{1}{2} \phi \zeta\left(\frac{\square}{2m^2} + h\right) \phi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-h}}{n+1} \phi^{n+1} \right]. \quad (38)$$

Qui $\zeta\left(\frac{\square}{2m^2} + h\right)$ agisce come un operatore pseudo-differenziale

$$\zeta\left(\frac{\square}{2m^2} + h\right) \phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int e^{ikx} \zeta\left(-\frac{k^2}{2m^2} + h\right) \tilde{\phi}(k) dk, \quad (39)$$

dove $\tilde{\phi}(k) = \int e^{-ikx} \phi(x) dx$ è la trasformata di Fourier di $\phi(x)$.

Consideriamo la Lagrangiana (38) con prolungamenti analitici della funzione zeta e le serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-h}}{n+1} \phi^{n+1}$, cioè

$$L_h = \frac{m^D}{g^2} \left[-\frac{1}{2} \phi \zeta\left(\frac{\square}{2m^2} + h\right) \phi + AC \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-h}}{n+1} \phi^{n+1} \right], \quad (40)$$

dove AC indica prolungamento analitico.

Il potenziale dei campi scalari zeta di sopra (40) è uguale a $-L_h$ a $\square=0$, cioè,

$$V_h(\phi) = \frac{m^D}{g^2} \left(\frac{\phi^2}{2} \zeta(h) - AC \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-h}}{n+1} \phi^{n+1} \right), \quad (41)$$

dove $h \neq 1$ poichè $\zeta(1) = \infty$. Il termine con la funzione- ζ si annulla per $h = -2, -4, -6, \dots$. L'equazione di moto in forma differenziale ed integrale è

$$\zeta\left(\frac{\square}{2m^2} + h\right)\phi = AC \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-h} \phi^n, \quad (42)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^D} \int_{R^D} e^{ixk} \zeta\left(-\frac{k^2}{2m^2} + h\right) \tilde{\phi}(k) dk = AC \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-h} \phi^n, \quad (43)$$

rispettivamente.

Adesso, consideriamo cinque valori di h , che sembrano essere i più interessanti, riguardo alla Lagrangiana (40): $h=0$, $h=\pm 1$, ed $h=\pm 2$. Per $h=-2$, la corrispondente equazione di moto adesso si legge:

$$\zeta\left(\frac{\square}{2m^2} - 2\right)\phi = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{R^D} e^{ixk} \zeta\left(-\frac{k^2}{2m^2} - 2\right) \tilde{\phi}(k) dk = \frac{\phi(\phi+1)}{(1-\phi)^3}. \quad (44)$$

Questa equazione ha due soluzioni banali: $\phi(x)=0$ e $\phi(x)=-1$. La soluzione $\phi(x)=-1$ può essere mostrata anche prendendo $\tilde{\phi}(k) = -\delta(k)(2\pi)^D$ e $\zeta(-2)=0$ nella (44).

Per $h=-1$, la corrispondente equazione di moto è:

$$\zeta\left(\frac{\square}{2m^2} - 1\right)\phi = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{R^D} e^{ixk} \zeta\left(-\frac{k^2}{2m^2} - 1\right) \tilde{\phi}(k) dk = \frac{\phi}{(1-\phi)^2}. \quad (45)$$

dove $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$.

L'equazione del moto (45) ha una soluzione banale costante soltanto per $\phi(x)=0$.

Per $h=0$, l'equazione del moto è

$$\zeta\left(\frac{\square}{2m^2}\right)\phi = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{R^D} e^{ixk} \zeta\left(-\frac{k^2}{2m^2}\right) \tilde{\phi}(k) dk = \frac{\phi}{1-\phi}. \quad (46)$$

Essa ha due soluzioni: $\phi=0$ e $\phi=3$. La soluzione $\phi=3$ segue dall'espansione di Taylor dell'operatore della funzione zeta di Riemann

$$\zeta\left(\frac{\square}{2m^2}\right) = \zeta(0) + \sum_{n \geq 1} \frac{\zeta^{(n)}(0)}{n!} \left(\frac{\square}{2m^2}\right)^n, \quad (47)$$

come anche da $\tilde{\phi}(k) = (2\pi)^D 3\delta(k)$.

Per $h=1$, l'equazione del moto è:

$$\frac{1}{(2\pi)^D} \int_{R^D} e^{ik} \zeta\left(-\frac{k^2}{2m^2} + 1\right) \tilde{\phi}(k) dk = -\frac{1}{2} \ln(1-\phi)^2, \quad (48)$$

dove $\zeta(1)=\infty$ fornisce $V_1(\phi)=\infty$.

In conclusione, per $h=2$, abbiamo la seguente equazione del moto:

$$\frac{1}{(2\pi)^D} \int_{R^D} e^{ik} \zeta\left(-\frac{k^2}{2m^2} + 2\right) \tilde{\phi}(k) dk = -\int_0^\phi \frac{\ln(1-w)^2}{2w} dw. \quad (49)$$

Poichè l'uguaglianza

$$-\int_0^1 \frac{\ln(1-w)}{w} dw = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2)$$

è mantenuta, si ha la soluzione banale $\phi=1$ nella (49).

Adesso, vogliamo analizzare il seguente caso: $C_n = \frac{n^2-1}{n^2}$. In tale caso, dalla Lagrangiana (33), otteniamo:

$$L = \frac{m^D}{g^2} \left[-\frac{1}{2} \phi \left\{ \zeta\left(\frac{\square}{2m^2} - 1\right) + \zeta\left(\frac{\square}{2m^2}\right) \right\} \phi + \frac{\phi^2}{1-\phi} \right]. \quad (50)$$

Il corrispondente potenziale è:

$$V(\phi) = -\frac{m^D}{g} \frac{31-7\phi}{24(1-\phi)} \phi^2. \quad (51)$$

Notiamo che 7 e 31 sono numeri primi naturali, cioè della forma $6n \pm 1$ con $n=1$ e 5, primi e numeri di Fibonacci. Inoltre, il numero 24 è connesso alla funzione di Ramanujan che ha 24 "modi" che corrispondono alle vibrazioni fisiche di una stringa bosonica. Quindi, otteniamo:

$$V(\phi) = -\frac{m^D}{g} \frac{31-7\phi}{24(1-\phi)} \phi^2 \Rightarrow \frac{4 \left[\text{anti log} \frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi x w'}{\cosh \pi x} e^{-\pi^2 w'} dx}{e^{-\frac{\pi^2}{4} w'} \phi_{w'}(itw')} \right] \cdot \frac{\sqrt{142}}{t^2 w'}}{\log \left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4} \right)} + \sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4} \right)} \right]}. \quad (51b)$$

L'equazione del moto è:

$$\left[\zeta\left(\frac{\square}{2m^2} - 1\right) + \zeta\left(\frac{\square}{2m^2}\right) \right] \phi = \frac{\phi[(\phi-1)^2 + 1]}{(\phi-1)^2}. \quad (52)$$

La sua approssimazione di campo debole è:

$$\left[\zeta\left(\frac{\square}{2m^2} - 1\right) + \zeta\left(\frac{\square}{2m^2}\right) - 2 \right] \phi = 0, \quad (53)$$

che implica la condizione sullo spettro della massa

$$\zeta\left(\frac{M^2}{2m^2} - 1\right) + \zeta\left(\frac{M^2}{2m^2}\right) = 2. \quad (54)$$

Dalla (54) segue una soluzione per $M^2 > 0$ a $M^2 \approx 2.79m^2$ e molte soluzioni tachioniche quando $M^2 < -38m^2$.

Notiamo che il numero 2.79 è connesso con $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, cioè la sezione "aurea" ed il rapporto "aureo". Infatti abbiamo che:

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2^2} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) = 2,772542 \cong 2,78.$$

Inoltre, abbiamo anche che:

$$(\Phi)^{14/7} + (\Phi)^{-25/7} = 2,618033989 + 0,179314566 = 2,79734$$

Riguardo all'estensione dell'ordinaria Lagrangiana, abbiamo la Lagrangiana, il potenziale, l'equazione del moto e la condizione sullo spettro della massa che, quando $C_n = \frac{n^2-1}{n^2}$, sono:

$$L = \frac{m^D}{g^2} \left[\frac{\phi}{2} \left\{ \frac{\square}{m^2} - \zeta\left(\frac{\square}{2m^2} - 1\right) - \zeta\left(\frac{\square}{2m^2}\right) - 1 \right\} \phi + \frac{\phi^2}{2} \ln \phi^2 + \frac{\phi^2}{1-\phi} \right], \quad (55)$$

$$V(\phi) = \frac{m^D}{g^2} \frac{\phi^2}{2} \left[\zeta(-1) + \zeta(0) + 1 - \ln \phi^2 - \frac{1}{1-\phi} \right], \quad (56)$$

$$\left[\zeta\left(\frac{\square}{2m^2} - 1\right) + \zeta\left(\frac{\square}{2m^2}\right) - \frac{\square}{m^2} + 1 \right] \phi = \phi \ln \phi^2 + \phi + \frac{2\phi - \phi^2}{(1-\phi)^2}, \quad (57)$$

$$\zeta\left(\frac{M^2}{2m^2} - 1\right) + \zeta\left(\frac{M^2}{2m^2}\right) = \frac{M^2}{m^2}. \quad (58)$$

In aggiunta a molte soluzioni tachioniche, l'equazione (58) ha due soluzioni con massa positiva: $M^2 \approx 2.67m^2$ e $M^2 \approx 4.66m^2$. Notiamo anche qui, che i numeri 2.67 e 4.66 sono connessi al numero "aureo". Infatti, abbiamo che:

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2 \cdot 5} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cong 2.6798,$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \frac{1}{2^2} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \cong 4.64057.$$

Inoltre, abbiamo anche che:

$$(\Phi)^{14/7} + (\Phi)^{-41/7} = 2,618033989 + 0,059693843 = 2,6777278;$$

$$(\Phi)^{22/7} + (\Phi)^{-30/7} = 4,537517342 + 0,1271565635 = 4,6646738.$$

Inoltre, riguardo al valore $M^2 < -38m^2$, abbiamo la seguente connessione con il numero aureo:

$$\left[(\Phi)^{35/7} + (\Phi)^{-7/7} + (\Phi)^{-21/7} + (\Phi)^{-42/7} \right] \cdot 3 = (11,09016994 + 0,61803399 + 0,23606798 + 0,05572809) \cdot 3 = 36$$

e 36 è un valore minore di 38.

Adesso, descriviamo il caso di $C_n = \mu(n) \frac{n-1}{n^2}$. Qui $\mu(n)$ è la funzione di Mobius, la quale è definita per tutti gli interi positivi ed ha valori 1, 0, -1 dipendenti dalla fattorizzazione di n in numeri primi p . Essa è definita come segue:

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, & \left\{ \begin{array}{l} n = p^2 m \\ n = p_1 p_2 \dots p_k, p_i \neq p_j \\ n = 1, (k = 0). \end{array} \right. \\ (-1)^k, & \\ 1, & \end{cases} \quad (59)$$

La corrispondente Lagrangiana è

$$L_\mu = C_0 \mathcal{L}_0 + \frac{m^D}{g^2} \left[-\frac{1}{2} \phi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^{2m^2}} \phi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n+1} \phi^{n+1} \right] \quad (60)$$

Ricordiamo che la funzione zeta di Riemann inversa può essere definita da

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad \sigma > 1. \quad (61)$$

Adesso la (60) può essere riscritta come

$$L_\mu = C_0 \mathcal{L}_0 + \frac{m^D}{g^2} \left[-\frac{1}{2} \phi - \frac{1}{\zeta\left(\frac{\square}{2m^2}\right)} \phi + \int_0^\infty \mathcal{M}(\phi) d\phi \right], \quad (62)$$

dove $\mathcal{M}(\phi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(n) \phi^n = \phi - \phi^2 - \phi^3 - \phi^5 + \phi^6 - \phi^7 + \phi^{10} - \phi^{11} - \dots$. Il corrispondente potenziale, equazione del moto e formula dello spettro della massa sono, rispettivamente:

$$V_\mu(\phi) = -L_\mu(\square = 0) = \frac{m^D}{g^2} \left[\frac{C_0}{2} \phi^2 (1 - \ln \phi^2) - \phi^2 - \int_0^\phi \mathcal{M}(\phi) d\phi \right], \quad (63)$$

$$\frac{1}{\zeta\left(\frac{\square}{2m^2}\right)} \phi - \mathcal{M}(\phi) - C_0 \frac{\square}{m^2} \phi - 2C_0 \phi \ln \phi = 0, \quad (64)$$

$$\frac{1}{\zeta\left(\frac{M^2}{2m^2}\right)} - C_0 \frac{M^2}{m^2} + 2C_0 - 1 = 0, \quad |\phi| \ll 1, \quad (65)$$

dove è usata la solita relazione cinematica relativistica $k^2 = -k_0^2 + \vec{k}^2 = -M^2$.

Adesso, prendiamo i numeri "puri" inerenti le equazioni (54) e (58). Essi sono: 2.79, 2.67 e 4.66. Notiamo che tutti i numeri sono connessi con $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, quindi con il rapporto aureo, attraverso le seguenti espressioni:

$$2,79 \cong (\Phi)^{15/7}; \quad 2,67 \cong (\Phi)^{13/7} + (\Phi)^{-21/7}; \quad 4,66 \cong (\Phi)^{22/7} + (\Phi)^{-30/7}. \quad (66)$$

5. Connessioni matematiche.

Adesso descriviamo alcune possibili connessioni matematiche tra alcune equazioni inerenti la **Sezione 2** ed alcune equazioni inerenti la **Sezione 4**.

Notiamo che dalle equazioni (1) e (2) della Sezione 2, abbiamo che:

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_0^1 \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] x^{s-1} dx ; \quad (1)$$

Tale equazione, è connessa con le equazioni (28), (43) e (49), della Sezione 4, come segue:

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_0^1 \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] x^{s-1} dx \Rightarrow \zeta\left(\frac{\square}{2}\right)\phi = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{k_0^2 - \bar{k}^2 > 2+\varepsilon} e^{ixk} \zeta\left(-\frac{k^2}{2}\right) \tilde{\phi}(k) dk = \frac{\phi}{1-\phi}, \quad (2)$$

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_0^1 \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] x^{s-1} dx \Rightarrow \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{R^D} e^{ixk} \zeta\left(-\frac{k^2}{2m^2} + h\right) \tilde{\phi}(k) dk = AC \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-h} \phi^n, \quad (3)$$

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_0^1 \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] x^{s-1} dx \Rightarrow \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{R^D} e^{ixk} \zeta\left(-\frac{k^2}{2m^2} + 2\right) \tilde{\phi}(k) dk = - \int_0^\phi \frac{\ln(1-w)^2}{2w} dw. \quad (4)$$

Adesso, notiamo che l'equazione (5) della Sezione 2, può risciversi, utilizzando le equazioni (6) e (7), sempre nella Sezione 2, nella seguente forma

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_0^1 dx x [\mathcal{L}_h x^{s-1}] = \frac{s}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(s)_n}{n!} \cdot n(1-\gamma - H_{n-1}) - \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n (-1)^k \zeta(k). \quad (5)$$

Quindi, abbiamo le seguenti connessioni matematiche con le equazioni (28), (43), (49) e (62):

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{s}{s-1} - s \int_0^1 dx x [\mathcal{L}_h x^{s-1}] = \frac{s}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(s)_n}{n!} \cdot n(1-\gamma - H_{n-1}) - \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n (-1)^k \zeta(k) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \zeta\left(\frac{\square}{2}\right)\phi = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{k_0^2 - \bar{k}^2 > 2+\varepsilon} e^{ixk} \zeta\left(-\frac{k^2}{2}\right) \tilde{\phi}(k) dk = \frac{\phi}{1-\phi}, \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{s}{s-1} - s \int_0^1 dx x [\mathcal{L}_h x^{s-1}] = \frac{s}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(s)_n}{n!} \cdot n(1-\gamma - H_{n-1}) - \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n (-1)^k \zeta(k) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{R^D} e^{ixk} \zeta\left(-\frac{k^2}{2m^2} + h\right) \tilde{\phi}(k) dk = AC \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-h} \phi^n, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_0^1 dx x [\mathcal{L}_h x^{s-1}] = \frac{s}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(s)_n}{n!} \cdot n(1-\gamma - H_{n-1}) - \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n (-1)^k \zeta(k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{R^D} e^{ixk} \zeta \left(-\frac{k^2}{2m^2} + 2 \right) \tilde{\phi}(k) dk = -\int_0^{\phi} \frac{\ln(1-w)^2}{2w} dw, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{s}{s-1} - s \int_0^1 dx x [\mathcal{L}_h x^{s-1}] = \frac{s}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(s)_n}{n!} \cdot n(1-\gamma-H_{n-1}) - \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n (-1)^k \zeta(k) \Rightarrow \\ &\Rightarrow L_\mu = C_0 \mathcal{L}_0 + \frac{m^D}{g^2} \left[-\frac{1}{2} \phi \frac{1}{\zeta\left(\frac{\square}{2m^2}\right)} \phi + \int_0^\infty \mathcal{M}(\phi) d\phi \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

Anche qui possiamo notare che esiste la connessione matematica con la sezione Aurea. Infatti, ricordiamo che π , che è presente nelle equazioni (2) - (4) e (6) - (8), è legato alla sezione Aurea $\phi = \sqrt{5} - 1/2$ dalla seguente semplice relazione:

$$\arccos \phi = 0,2879\pi$$

Per ulteriori dettagli, cliccare sul seguente link:

<http://150.146.3.132/1163/01/TCN6.pdf>

RIFERIMENTI

- [1] The Gauss-Kuzmin-Wirsing operator - LINAS VEPŠTAS
- [2] A series representation for the Riemann Zeta derived from the Gauss-Kuzmin-Wirsing Operator - LINAS VEPŠTAS
- [3] On a Gauss-Kuzmin-type problem for a new continued fraction expansion with explicit invariant measure - Gabriela Ileana Sebe
- [4] Notes Relating to Newton Series for the Riemann Zeta Function - LINAS VEPŠTAS
- [5] <http://www.cut-the-knot.org/blue/Farey.shtml>
- [6] http://it.wikipedia.org/wiki/Equazione_di_Pell
- [7] Le dimensioni extra nascoste, la particella di Higgs ed il vuoto quantomeccanico, supersimmetria e teoria delle stringhe - Rosario Turco, Maria Colonnese
- [8] Sulle spalle dei giganti - Rosario Turco, prof. Maria Colonnese, dott. Michele Nardelli, prof. Giovanni Di Maria, Francesco Di Noto, prof. Annarita Tulumello
- [9] Branko Dragovich: "Adelic strings and noncommutativity" - arXiv:hep-

th/0105103v1- 11 May 2001.

- [10] Branko Dragovich: "Adeles in Mathematical Physics" - arXiv:0707.3876v1 [hep-th]- 26 Jul 2007.
- [11] Branko Dragovich: "Zeta Strings" - arXiv:hep-th/0703008v1 - 1 Mar 2007.
- [12] Branko Dragovich: "Zeta Nonlocal Scalar Fields" - arXiv:0804.4114v1 - [hep-th] - 25 Apr 2008.
- [13] Branko Dragovich: "Some Lagrangians with Zeta Function Nonlocality" - arXiv:0805.0403 v1 - [hep-th] - 4 May 2008.