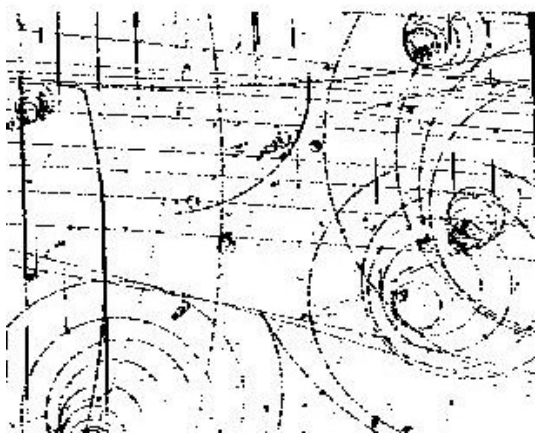


Block Notes Matematico

Congettura di Yang e Mills o del “gap di massa”

ing. Rosario Turco¹, prof. Maria Colonnese,

In questo lavoro viene presentata la *congettura di Yang & Mills o del “gap di massa”*, viene illustrata l'importanza dell'argomento ed esposte le varie parti matematiche necessarie alla comprensione del problema.



Sono oltre cento anni che i fisici di tutto il mondo cercano una grande teoria unificatrice generalizzata (**GUT**), che possa mettere d'accordo i modelli fisici finora noti del “molto grande” (elettromagnetismo e relatività) e del “molto piccolo” (modello quantistico), insieme a quello della vita di tutti i giorni (modello newtoniano e della gravità). Ognuno dei tre modelli risulta molto valido solo nell'ambito del proprio dominio di applicazione, mentre esisterebbero contraddizioni se si applicasse un modello in un altro dominio.

Dimostrare la congettura di Yang e Mills avrebbe grandi risvolti sulla conoscenza attuale della fisica, ma richiede lo sviluppo di una “nuova matematica”. Il problema di per sé unisce le più affascinanti pagine della storia della fisica e della matematica.

La congettura di Yang & Mills è, quindi a ragione, il *secondo problema del Millennio*, così definito dal **Clay Mathematics Institute**, che mette in palio un milione di dollari, come anche per altri sei problemi.

Alla pagina del sito del Clay Mathematics Institute, si può scaricare alla voce “*Official Problem Description*” l'elegante definizione del problema formulata da Artur Jaffer ed Edward Witten²:

http://www.claymath.org/millennium/Yang-Mills_Theory/

mailto:rosario_turco@virgilio.it



¹ Rosario Turco è un ingegnere elettronico presso Telecom Italia (Napoli) ed ideatore di “Block Notes Matematico” insieme alla prof. Maria Colonnese del Liceo Classico “De Bottis” di Torre del Greco, provincia di Napoli

² Edward Witten è il fisico leader sulla ricerca QFT (Quantum Field Theory)

INDICE

.....	
L'importanza del problema	4
Horsted, Ampere, Faraday, Henry e Kelvin()	5
Maxwell.....	5
Einstein e la relatività ristretta.....	7
La relatività generale: massa e gravità	8
Teoria dei quanti e la meccanica quantistica.....	8
Le forze nucleari: un nuovo quesito	11
Teoria Quantistica dei campi (QFT)	11
La QFT e la simmetria	11
Herman Weyl	12
L'elettrodinamica quantistica (QED)	13
Teoria elettrodebole.....	13
Cromo Dinamica Quantistica (QCD).....	14
Teoria delle stringhe.....	14
Il secondo problema del Millennio.....	15
La Teoria dei Gruppi	16
Assiomi dei gruppi	16
Simmetrie e permutazioni	17
Sottogruppo, ordine e fattore di composizione	20
Sottogruppo normale e massimale	21
Albero dei sottogruppi normali massimali	21
Gruppo di Galois	21
Gruppo di Galois risolubile.....	21
Equazioni risolvibili – Teorema di Galois	21
Classificazione delle equazioni	21
Aspetti geometrici	22
Altre applicazioni della teoria dei gruppi	23
Definizioni e tipi di gruppi.....	23
Gruppi di Lie	25
La fisica e i gruppi di Lie	25
L'algebra di Lie associata a un gruppo di Lie.....	26
Definizioni.....	27
Esempi	27
Omomorfismi, sottoalgebre e ideali	28
Classificazione delle algebre di Lie.....	28
APPENDICE.....	30
<i>Riferimenti</i>	31

FIGURE

Figura 1 - Maxwell e le leggi dell'elettromagnetismo	5
Figura 2 – lo spettro elettromagnetico e le frequenze	6
Figura 3 – Albert Einstein	7
Figura 4 – l'effetto della curvatura.....	8
Figura 5 – Niels Bohr, Werner Heisenberg, Louis De Broglie	9
Figura 6 – Max Plank	9
Figura 7 – Paul Dirac.....	11

Figura 8 – Hermann Weyl.....	12
Figura 9 – Yang e Mills.....	13
Figura 10 – Una trasformazione.....	18
Figura 11 – Permutazioni di S_3	19
Figura 12 – Simmetrie di un triangolo equilatero	20
Figura 13 – Sophus Lie	25

TABELLE

Tabella 1 – tabella delle trasformazioni S_2	18
Tabella 2 – tabella delle trasformazioni S_3	19

L'importanza del problema

Al principio del 1900 i fisici, rispetto al mondo di tutti i giorni, scoprirono due mondi estremi: il mondo del molto grande ed il mondo del molto piccolo.

La relatività einsteiniana, che estende la fisica newtoniana e dei fenomeni dell'elettromagnetismo, descrive bene i fenomeni astronomici (galassie, etc), dove la grandezze in gioco sono enormi.

Quando "scendiamo sulla Terra" il modello newtoniano approssima bene ogni fenomeno che conosciamo: la gravità, il calcolo della caduta di un grave, le leggi del moto, etc.

Se, invece, passiamo al mondo atomico e subatomico la Fisica quantistica è in grado di spiegarci molti altri fenomeni, come ad esempio:

- le interazioni nucleari deboli
- le interazioni nucleari forti

Alcune contraddizioni tra i "mondi estremi" nascono quando si è in una regione che è contemporaneamente molto grande e molto piccola: ad esempio un buco nero; qui un collasso gravitazionale genera un regione proprio di questo tipo. Però se si combina la teoria della relatività con quella dei quanti si ottiene un sistema di equazioni ad infinite soluzioni, per cui di fatto inutile. E questo, ad esempio, uno dei motivi per cui gli astrofisici non sono ancora in grado di dire qualcosa su "cosa accadde nell'istante" del Big Bang.

Un'altra contraddizione si ha quando passiamo al dominio atomico. Le particelle di cui è costituita la materia (fotoni, quark, bosoni etc), di cui si occupa la teoria quantistica, sono ritenute "*increspature di energia nello spazio-tempo*" ma per studiarle occorre far riferimento all'equazione della relatività generale $E=mc^2$.

Ora il problema è di verificare se esiste un unico modello o un'unica forza generale capace di ricondursi e giustificare le attuali quattro forze note: gravità, elettromagnetismo, interazioni nucleari deboli e interazioni nucleari forti.

I fisici, in tal caso, avrebbero a disposizione un modello senza contraddizioni capace di affrontare il tutto: intuitivamente l'universo in cui valgono le leggi della relatività e dell'elettromagnetismo è lo stesso di quello che si suddivide in particelle subatomiche in cui vale la Teoria quantistica.

La teoria di Yang e Mills è un primo passo verso una Teoria unificata e della soluzione dell'ipotesi del gap di massa (fisicamente riconosciuto ma matematicamente non ancora dimostrato).

Nel seguito vengono sintetizzati, per motivi di spazio, la storia ed i concetti della Fisica, che occupano in realtà interi corsi di esami universitari per mole e importanza. Sarà dato tuttavia un quadro di insieme per creare il filo conduttore che è dietro alla congettura di Yang e Mills, senza poter approfondire del tutto ogni concetto o equazione, rimandando vivamente il lettore, appassionato di fisica, a studiare tali argomenti su testi dedicati. Inoltre nei riferimenti sono segnalati alcuni testi divulgativi sull'argomento.

Horsted, Ampere, Faraday, Henry e Kelvin³

Nell'ottocento ci furono notevoli passi nell'ambito dello studio dell'elettromagnetismo, spesso senza neanche saperlo a fondo. *Hans Christian Oersted* scoprì che facendo attraversare un filo da una corrente un ago magnetico posto accanto subiva delle deflessioni.

Andrè-Marie Ampere scoprì che quando una corrente passa attraverso due fili paralleli, questi ultimi si attraggono o si respingono: si attraggono se le due correnti vanno nello stesso verso; si respingono in caso contrario.

Nel 1831 *Michael Faraday* e *Joseph Henry* scoprirono che era possibile indurre (=creare) corrente elettrica in un circuito chiuso sottoponendolo ad un campo magnetico variabile (alternato).

Tutte questi esperimenti mostravano una sola cosa: l'esistenza di uno stretto legame tra campo elettrico **E** ed il campo magnetico **H**.

William Thomson (lord Kelvin) in base ai suoi studi sui fluidi, ipotizzò che forza elettrica (o campo elettrico) e forza magnetica (o campo magnetico) fossero le due facce di una stessa medaglia, ovvero come aspetti di uno stesso tipo di forza. Già da qui iniziava il cammino dell'unificazione della teoria.

Thomson, alla pari dei fluidi, suggerì, quindi, che elettricità e magnetismo scaturissero da qualche forma di "campo di forze" nell'etere.

Maxwell



Fu *James Clerk Maxwell* a risolvere il dilemma con le sue famose quattro equazioni che legano **E** con **B** e che tirano in gioco il concetto di divergenza e di rotore.

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mu \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Figura 1 - Maxwell e le leggi dell'elettromagnetismo

Le equazioni di Maxwell implicano che se si fa fluttuare avanti e indietro una corrente in un conduttore, allora il campo elettromagnetico associato, che si alterna nel tempo con la corrente,

³ Da qui in poi riusciremo a citare solo alcuni dei nomi dei "giganti della Fisica", dato il poco spazio, ma in realtà non basterebbe l'intero articolo per elencare i nomi e i cognomi di tutti coloro che hanno dedicato una vita a dare contributi scientifici e far fare un ulteriore passo in avanti all'umanità. Nel giro di soli cento anni a partire da Giuseppe Garibaldi si è arrivati sulla Luna e sfruttando solo le leggi di Newton!

esce dal conduttore e fluisce nello spazio sotto forma di un'onda. La frequenza dell'onda è la stessa di quella della corrente usata per generare il campo.

Si scoprì anche la natura vettoriale dei due campi: ovvero che avessero intensità (o ampiezza o modulo), verso e direzione e che inoltre i due campi fossero tra loro perpendicolari. All'epoca si parlava di onde, perché le equazioni in gioco erano simili a quelle dei fluidi, ma non si era riusciti ancora a verificare questo fatto.

Maxwell riuscì a calcolare la velocità dell'onda pari a circa 300.000 Km/sec. Da questo momento si iniziò a sospettare che la velocità della luce, già nota, e la velocità di una qualsiasi radiazione elettromagnetica fossero uguali.

Oggi è anche noto che una radiazione elettromagnetica è caratterizzata dalla sua frequenza.

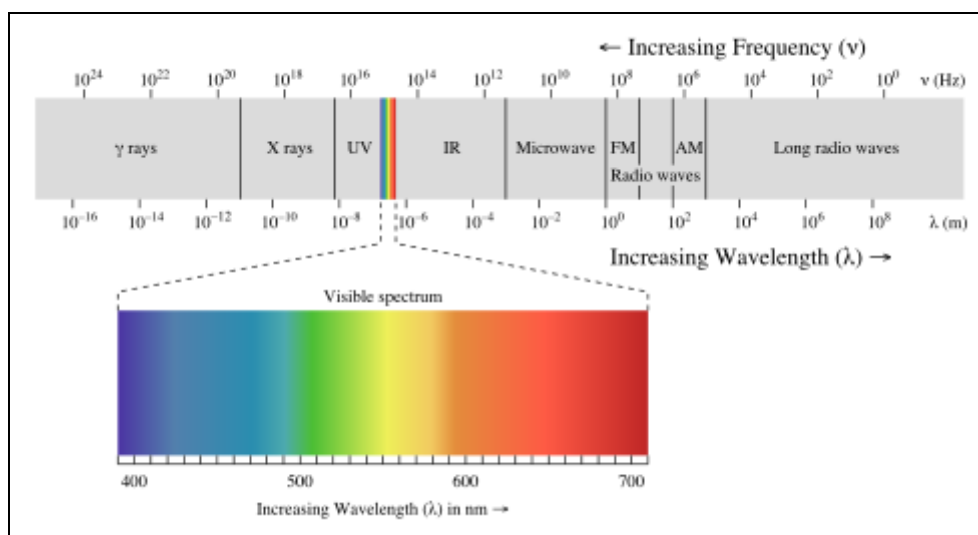


Figura 2 – lo spettro elettromagnetico e le frequenze

In figura la frequenza aumenta da destra verso sinistra. Per cui a frequenza bassa ci sono le onde radio, (segnali radio e TV). A frequenze maggiori troviamo microonde e infrarossi (IR), che sono invisibili ma trasmettono calore. Poi c'è la luce, ovvero lo "spettro del visibile": nella parte bassa c'è il rosso e in quella alta il violetto, mentre tra i due tutti gli altri colori. Al di sopra del violetto ci sono gli ultravioletti (UV) e i raggi X: invisibili, capaci di impressionare una pellicola fotografica e passare attraverso i tessuti umani; i raggi X ad esempio sono usati nelle analisi di laboratorio. Infine i raggi gamma, prodotti dal decadimento di sostanze radioattive, anch'essi in taluni casi hanno trovato applicazione in medicina.

Il problema all'epoca di Maxwell fu anche quello di stabilire la natura del mezzo in cui si propagavano le onde e che veniva chiamato "etere". Molti esperimenti fallirono tra cui quelli di *Albert Michelson* e *Edward Morley*. Oggi diremmo, diversamente, che l'esperimento non trovava l'etere semplicemente perché non esisteva. Ricordiamo anche gli esperimenti di *Guglielmo Marconi*, su come fosse possibile l'impiego delle onde elettromagnetiche (da qui nacque il termine *marconisti*).

Einstein e la relatività ristretta

Ben presto i fisici si disinteressarono dell'etere, perché alla ribalta della scena mondiale era apparsa una nuova stella di notevole luminosità che portava nella sua scia nuove teorie che rivoluzionavano la meccanica classica e la fisica di *Isaac Newton*: *Albert Einstein*.

Con la relatività ristretta Einstein dimostrò che non esistono sistemi di riferimento preferenziali (inerziali o accelerati) e che tutti i fenomeni sono relativi al sistema di riferimento che si assume.

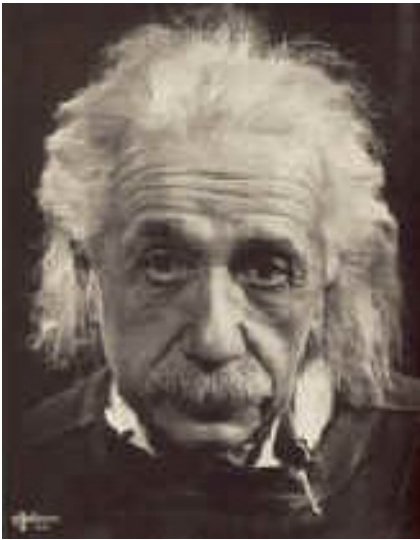


Figura 3 – Albert Einstein

Ad esempio se siamo su un aereo che vola a 300 Km all'ora, rispetto alla terra ferma, perché quando ci alziamo non cadiamo? Semplicemente perché è l'aereo a correre rispetto alla terra ferma, ma noi siamo fermi rispetto all'aereo. In altri termini l'aereo costituisce per noi il sistema di riferimento, un ambiente stazionario. Gli aerei moderni ovattano molto il rumore esterno e le turbolenze, per cui se non guardassimo dal finestrino, potremmo tanto stare fermi tanto volare; in quest'ultimo caso se non abbiamo un riferimento esterno non sappiamo nemmeno misurare la velocità: ad esempio se sapessimo la distanza tra un posto ed un altro e che procediamo in linea retta potremmo misurare il tempo e, quindi, la velocità.

In altri termini il movimento è relativo; mentre i sensi ci fanno vedere un movimento assoluto è un movimento rispetto ad un sistema di riferimento. Alcuni di questi concetti però erano dovuti già a *Galileo Galilei*.

Ma esiste un sistema preferenziale? Esiste un etere?

Per *Aristotele* la Terra era a riposo e il movimento era assoluto rispetto alla terra. *Copernico* sosteneva che tutto il moto fosse relativo. *Newton*, invece, sosteneva che esistesse uno spazio fisso rispetto al quale si poteva considerare uno stato di quiete o di movimento assoluto (però se si approfondisce in taluni casi si arriva a delle contraddizioni).

Einstein cancellò con un classico colpo di spugna il concetto di spazio fisso e stazionario e di etere, sostenendo che *"non esiste un sistema di riferimento preferenziale e che qualunque sia il sistema di riferimento la velocità della luce e delle radiazioni elettromagnetiche è sempre la stessa"*.

La conseguenza inaspettata è che l'unica cosa assoluta è solo la velocità della luce! Tra l'altro questo concetto esaltava ed era d'accordo con quanto trovato da Maxwell.

Affermando ciò Einstein risolse anche il problema di cosa significa che due eventi avvengono contemporaneamente ma a grandi distanze l'uno dall'altro: anche il tempo è relativo al sistema di riferimento rispetto a cui si fa la misurazione.

Nella relatività ristretta Einstein lega energia, massa e velocità della luce con la famosa equazione $E=mc^2$.

Con la relatività ristretta però c'era ancora qualche cosa da giustificare: la massa e la gravità. Inoltre la relatività ristretta si applicava bene solo a due sistemi di riferimento che si muovessero reciprocamente a velocità costante (moto rettilineo uniforme).

La relatività generale: massa e gravità

Einstein propose una ulteriore teoria ad estensione della prima: la *relatività generale*.

La relatività generale sostiene che tutti i fenomeni fisici accadono allo stesso modo in tutti i sistemi di riferimento indipendentemente se questi siano in moto accelerato oppure no; inoltre l'effetto della gravità su un corpo è lo stesso di quello che produrrebbe l'accelerazione sul corpo in assenza di gravità. In altri termini gravità e accelerazione sono interscambiabili. Questo praticamente tira in ballo la massa e la gravità.

Una verifica sperimentale spettacolare della relatività generale era che se la luce fosse stata dotata di massa allora essa avrebbe dovuto risentire della gravità se fosse passata vicino ad un corpo di grande massa, ad esempio una stella. Nel 1919 *sir Arthur Eddington* fece un'accurata osservazione del pianeta Mercurio durante un'eclissi totale di Sole, scoprendo che la sua posizione era sbagliata rispetto al solito. Il Sole (la stella di grande massa) provocava alla luce, proveniente da Mercurio, una curvatura con uno spostamento apparente della posizione di Mercurio. Oggi sono nati telescopi con la "lente della relatività", che grazie alla curvatura della luce possono guardare un pò più dietro ai corpi celesti.

La relatività da quel momento in poi è assorta a teoria che estende e perfeziona la Teoria di Newton.

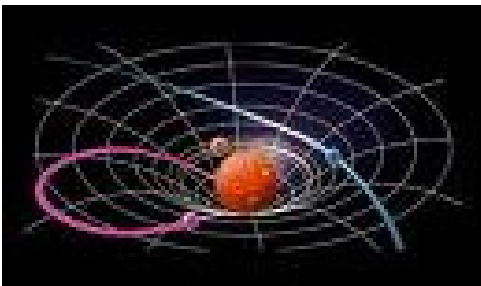


Figura 4 – l'effetto della curvatura

Einstein attraverso essa, inoltre, dava una sorprendente *spiegazione geometrica* alla gravità: *ogni oggetto solido distorce lo spazio-tempo inducendone una curvatura.*

L'entità della curvatura è maggiore nelle vicinanze del corpo e diminuisce all'aumentare della distanza dal corpo.

La curvatura stessa è responsabile della forza di attrazione esercitata reciprocamente dai due corpi. Per cui più grande è il corpo e maggiore è sia la sua massa che la curvatura spazio-temporale e di conseguenza maggiore è anche la forza di attrazione.

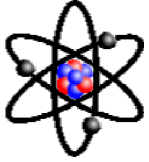
Con la relatività ci si rende sempre più conto che il mondo e l'universo (o i multi-versi [3]) ragionano più con le *geometrie non euclidee* (con contributi anche di *Eugenio Beltrami*) e assumono grossa importanza parti matematiche come le superfici di Riemann etc (vedi [5]).

Nonostante questa teoria, Einstein per essa non prese il *premio Nobel*; ma lo prese successivamente per qualcosa associato, invece, alla teoria dei quanti!

Teoria dei quanti e la meccanica quantistica

La teoria della relatività si interessa del mondo macroscopico, quella dei quanti del mondo atomico e subatomico. Nel momento in cui i fisici iniziarono questo nuovo percorso si scontrarono

con un nuovo modo di “vedere le cose”. Quello che inizialmente si sapeva era che la materia fosse costituita da atomi, che un atomo avesse un nucleo con protoni di carica positiva e neutroni (neutri) di una certa massa, e che attorno al nucleo orbitassero gli elettroni di carica negativa ma di massa minore. Le forze elettromagnetiche in gioco, tra elettroni e protoni, consentivano agli elettroni di rimanere nelle loro orbite e non collassare sul nucleo.



Questo “modello solare” oggi è stato abbandonato dai fisici ma rimane, ad esempio, utile per i chimici per la sua semplicità per definire la *tabella periodica di Mendeleev* degli elementi chimici, basata sul peso atomico e sul numero atomico (numero di protoni).

Nell’esaminare proprio questo primo modello e nel chiedersi che tipo di particelle esistessero nell’atomo, *Niels Bohr*, *Werner Heisenberg* e *Erwin Schrodinger*, *Louis De Broglie* nel 1920, si imbattono in nuovi concetti, alcuni difficili da accettare, molto contro-intuitivi.

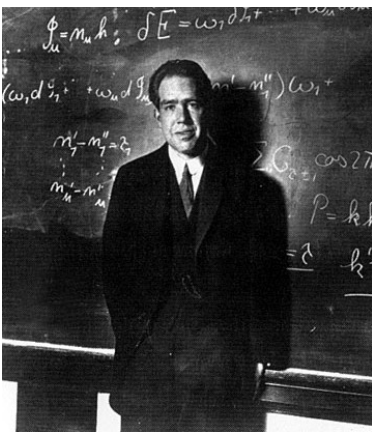
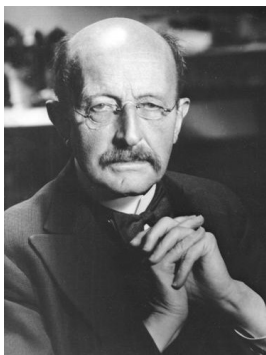


Figura 5 – Niels Bohr, Werner Heisenberg, Louis De Broglie

I risultati sperimentali negli anni mostrarono i seguenti fatti:

- L’esistenza di un *dualismo onda-particella* (Louis De Broglie): la luce si comportava come un’onda continua in determinati momenti e come particelle discrete in altre
- L’esistenza del *principio di indeterminazione* (Heisenberg): non era possibile misurare qualcosa (la velocità ad esempio o la quantità di moto) senza alterare un’altra grandezza (la posizione dell’elettrone). Questo perché viste le dimensioni del mondo subatomico, se, ad esempio, si fotografava l’elettrone gli si forniva in realtà energia e si alterava la sua posizione; di conseguenza non era possibile in ogni istante sapere la posizione di una particella!



Un risultato inatteso dipese da un’apparente contraddizione della teoria di Maxwell con i corpi neri, corpi che assorbono solo energia. Secondo tale teoria il paradosso nasceva dal fatto che l’energia totale generata in un corpo nero dovesse essere infinita, e quindi se riscaldata avrebbe dovuto emettere radiazioni elettromagnetiche con frequenze infinite. Tale cosa non si riscontrava nella pratica. *Max Planck* riuscì a trovare una spiegazione teorica: suppose che l’energia fosse fatta di “pacchetti discreti” che chiamò *quanti di energia* e che il numero di quanti associati ad un’onda dipendesse dalla frequenza dell’onda elettromagnetica stessa. Maggiore è la frequenza maggiore è il numero di quanti. Al di là

Figura 6 – Max Planck

però di una certa frequenza, l'energia dell'onda con tale frequenza è eccessiva per essere presa dal corpo nero e quell'onda, quindi, non riesce a contribuire. Questo spiegava perché non si arrivasse ad una energia infinita e valse a Plank il *premio Nobel* nel 1908. Plank calcolò anche il rapporto tra energia e frequenza di un'onda, oggi ricordata come *costante di Plank* e pari a $6,626 \cdot 10^{-34}$ Joule/sec.

Ma perché l'energia dovrebbe presentarsi in pacchetti discreti? A questo rispose Einstein con la scoperta dell'*effetto fotoelettrico* che gli valse il *premio Nobel* nel 1921.

Nell'ottocento *Heinrich Hertz* aveva sperimentato che se della luce cadeva su dei metalli, essi emettevano elettroni. Se si aumentava l'intensità della luce venivano emessi più elettroni (ma gli elettroni non avevano maggiore energia); ma se si aumentava la frequenza della luce (quindi si modificava il colore verso il violetto) aumentava l'energia degli elettroni emessi.

Einstein ipotizzò che l'onda luminosa avesse pacchetti discreti di energia (quanti) che chiamò fotoni e che l'energia di un fotone fosse proporzionale alla frequenza dell'onda (il rapporto tra le due era la costante di Plank). Quando un fotone di energia sufficiente colpisce il metallo, dà l'energia ad un elettrone che scappa dal metallo. Il numero di elettroni che sfuggono dipende dal numero di fotoni e quindi dall'intensità della luce. Il tutto confermava la teoria di Plank. Il fotone era, come si dice oggi, una *particella di gauge* elementare.

Il fatto che la luce fosse un flusso di particelle risaliva già a Newton, solo che adesso la novità era che la luce era anche un'onda elettromagnetica.

Se il dualismo onda-particella poteva in qualche modo essere accettato per i fisici puristi, il principio di indeterminazione di Heisenberg conduceva a cose inaspettate: non era possibile sapere in ogni istante la posizione e la velocità di una particella, ma solo la *probabilità* che un elettrone stesse in una determinata zona. Nacquero, quindi, in questo periodo le equazioni matematiche a supporto: l'equazione di Schrodinger :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$$

Ψ è la funzione d'onda (quella che esprime la probabilità di trovare in una posizione la particella), H è l'operatore hamiltoniano, \hbar la costante di Plank e $i = \sqrt{-1}$.

Non si poteva "vedere" ma solo "cercare di prevedere" attraverso la matematica! Fu proprio in questo periodo che Einstein esclamò: "*Dio non gioca a dadi nell'universo!*".

In realtà esiste un discorso filosofico dietro a certezza e probabilità. E' un concetto relativo!

Dipende da chi genera l'evento e da chi non sa e deve prevedere l'evento. Se Dio sa tutto, per Lui non è probabilità ma certezza, per noi umani è probabilità. Per un computer che ha un software (quindi le regole o le leggi) che genera numeri pseudo-casuali, quest'ultimi sono casuali per noi ma non per il computer! In realtà in ogni istante tutti gli eventi che potrebbe generare la Natura sono eventi incerti per noi ma certi per la Natura.

Questo è stato il motivo per cui la teoria quantistica alla fine è stata universalmente accettata.

Fin qui si è arrivati alla cosiddetta *meccanica quantistica* che ragiona ancora in termini di particelle e le equazioni a derivate parziali a sua disposizione sono ancora abbastanza semplici a essere usate. Ma le cose ben presto si complicarono perché i fisici si resero conto dell'esistenza di due altre forze presenti in natura.

Le forze nucleari: un nuovo quesito

Se i protoni nel nucleo sono di ugual segno di carica e il numero di essi è grande mentre lo spazio è poco, perché il nucleo non esplose per la repulsione dei protoni?

I fisici ipotizzarono l'esistenza di una *forza nucleare forte attrattiva* che agisce a piccole distanze e che tiene insieme il nucleo: questa forza oggi sappiamo che è trasportata da particelle dette *gluoni*. Come spiegare poi il decadimento degli elementi radioattivi come l'uranio? I fisici anche qui ipotizzarono l'esistenza di una *seconda forza nucleare debole repulsiva* responsabile dell'allontanamento dei protoni dal nucleo: questa forza oggi sappiamo che è trasportata da particelle dette *bosoni deboli*.

I fisici cominciarono a credere, a questo punto, che fosse necessaria una teoria capace di incorporare tutte le quattro forze note: gravità, elettromagnetismo, forze nucleari deboli e forze nucleari forti.

Teoria Quantistica dei campi (QFT)

Nella teoria quantistica dei campi QFT non si considerano più le particelle, ma si considera che la materia sia un campo ovvero concentrazioni di energia o increspature nello spazio-tempo.

Anche la teoria di Maxwell, se vogliamo, era una *teoria dei campi classica* ovvero non quantistica: tratta difatti il campo elettromagnetico non come un flusso di particelle ma come un campo. La difficoltà, come vedremo, nascerà invece nel momento in cui si voleva fondere insieme la teoria quantistica e la teoria dei campi. Nel 1973 si scoprì una proprietà detta "libertà asintotica" (derivante dalla teoria di gauge non abeliana quantistica), che iniziò a illuminare i fisici verso quale tipo di matematica si procedesse: una matematica ben più complicata di quanto si pensasse, sebbene partisse da concetti piuttosto semplici ed ovvi.



Figura 7 – Paul Dirac

Paul Dirac grazie al QFT prevede l'*antimateria*, ma nessuno lo ascoltò inizialmente. Successivamente nei raggi cosmici si osservò la presenza del *positrone*, l'anti-particella dell'elettrone, una carica uguale all'elettrone ma di segno positivo. A questo punto era decretato ormai il successo della QFT, per la previsione di vari fenomeni naturali.

La QFT e la simmetria

Ma qual era il segreto matematico della QFT? Il nocciolo duro della QFT era la simmetria, tanto cara alla natura. In matematica per *simmetria* si intende "un qualsiasi movimento o trasformazione su un qualsiasi oggetto che rimane con lo stesso aspetto dopo i movimenti e le trasformazioni applicate ad esso". Si possono anche sommare più simmetrie successive.

Ad esempio:

- il cerchio, con qualsiasi rotazione o traslazione rimane lo stesso.
- Il triangolo equilatero, con qualsiasi rotazione si spostano i vertici ma l'aspetto è sempre lo stesso e dopo varie rotazioni (somma di simmetrie) torna con i vertici ai posti di partenza
- La faccia umana, se la ribaltiamo rispetto ad una verticale, si sovrappone alla parte rimanente
- Le lancette di un orologio e l'aritmetica modulare

In realtà all'inizio novecento si scoprì presto che *"la simmetria è una proprietà di un oggetto ma non dipende dall'oggetto: più oggetti di natura diversa (figure, equazioni, campi, etc) potrebbero essere caratterizzati dalla stessa simmetria"*.

L'insieme di tutte le simmetrie è definito *gruppo di simmetria*.

Tale matematica è la **Teoria dei gruppi** che risale ad Niels Henrik Abel e Evariste Galois, che esamineremo nella seconda parte dell'articolo.

Ma che c'entra la simmetria con la fisica? Perché molti fenomeni, ad esempio, sono invarianti rispetto a traslazione e rotazione, molte leggi della conservazione dipendono da simmetrie.

Emmy Noether dimostrò che ogni legge di conservazione ha associato un gruppo di simmetria, che descrive le simmetrie valide in ogni punto spazio-temporale. Ad esempio per la legge di conservazione della carica c'è un gruppo di simmetria associato, così pure per lo spin etc.

La bellezza di questa idea ha condotto i fisici a ritenere che la QFT avesse loro portato fino alla teoria unificata GUT.

Herman Weyl



Figura 8 – Hermann Weyl

Nel 1918 ci fu il primo tentativo da parte di Herman Weyl di utilizzare la simmetria per unificare la relatività e le equazioni di Maxwell.

Le equazioni di Maxwell, ad esempio, sono invarianti rispetto ad un cambio di scala (è una forma di simmetria); il che dava la possibilità a Weyl di considerare il campo elettromagnetico come "distorsione" della relatività quando ci si muove su una linea curva chiusa.

Questo comportava che per ognuno dei punti dello spazio-tempo 4-dimensionale si potesse assegnare un particolare gruppo di simmetria. Sebbene l'idea di Weyl fosse buona non ottenne risultati perché aveva sbagliato simmetria, rendendosene conto soprattutto con l'avvento della teoria dei quanti; tuttavia Weyl aprì la strada ai fisici a considerare altre possibili simmetrie. In seguito si comprese che il campo elettromagnetico gode della "simmetria di gauge", cioè mantiene la propria forma anche se i potenziali elettromagnetici sono moltiplicati per *fattori di fase quantomeccanici o di gauge*.

Quando Weyl enfatizzava il fattore di scala, il gruppo di simmetria con cui lavorava era la moltiplicazione con i numeri reali. Se si usava, invece, il fattore di fase (ricordando l'espressione di Eulero) allora il gruppo di simmetria era $U(1)$, ovvero il gruppo unitario monodimensionale, che si può considerare come l'insieme delle rotazioni del piano. Era appena nata la *teoria di gauge*!

L'elettrodinamica quantistica (QED)

Ma come riformulare la teoria di Maxwell come teoria di gauge per estenderla alla teoria quantistica e incorporare anche le forze nucleari?



C. N. Yang (1922 -) and Robert Mills (1927 - 1999)
at Stony Brook in 1999.

Figura 9 – Yang e Mills

La strategia che fu adottata fu quella di sostituire $U(1)$ con un altro gruppo di simmetria. I primi che lo fecero negli anni quaranta furono *Richard Feynman*, *Julian Schwinger*, *Sin-Itiro Tomonaga*, che svilupparono *l'elettrodinamica quantistica (QED)*. E' una versione quantistica della teoria di Maxwell: una teoria molto potente e di estrema accuratezza nei calcoli, ancor oggi. Nel 1954 ci fu la riformulazione di un analogo quantistico della teoria di Maxwell da parte di *Chen-Ning Yang* e *Robert Mills*.

Yang e Mills sostituirono $U(1)$ con un "**gruppo di Lie compatto**", un insieme di movimenti rigidi in uno spazio multidimensionale. Mentre $U(1)$ è abeliano ovvero commutativo (infatti una serie di rotazioni si sommano), il gruppo di Lie compatto non è abeliano, per cui la teoria di gauge che ne emergeva era più complicata a trattarsi.

Al di là di questo, il tentativo dei fisici ora era quello di usare una teoria di gauge non abeliana per arrivare ad una teoria unificata. C'è da dire che la teoria di Yang e Mills poteva offrire la teoria di Maxwell in due versioni: classica e quantistica.

Ecco il nocciolo della questione. Per unificare elettromagnetismo e interazioni nucleari con la versione quantistica della teoria di Yang e Mills si incorreva in un problema: nel caso classico (non quantistico) delle equazioni di Yang e Mills le onde erano descritte di massa nulla che si propagavano alla velocità della luce. Ma nel caso quantistico ogni particella è un'onda che non potevano essere di massa nulla: questo lo dimostravano le interazioni nucleari associate a particelle non di massa nulla.

Teoria elettrodebole

Per *l'interazione nucleare debole*, lo scoglio fu superato nel 1967 da *Sheldon Glashow*, *Abdus Salam* e *Steven Weinberg*, che si servirono di una teoria di gauge che usava il gruppo $SU(2) \times U(1)$. La loro teoria venne denominata "teoria elettrodebole"; ma in particolare per superare il problema dell'assenza di massa essi avevano introdotto una forza extra detta **campo di Higgs** (vettore del campo di Higgs). Oggi si sta cercando ancora il *bosone di Higgs* che confermi la teoria elettrodebole.

In pratica elettromagnetismo e forza elettrodebole inizialmente (ad esempio al Big Bang) erano fuse in una sola.

Cromo Dinamica Quantistica (QCD)

Dieci anni dopo *Howard Georgi* e *Sheldon Glashow* usarono il gruppo **SU(3) x U(2)** che permetteva loro di incorporare anche la forza nucleare forte in una nuova teoria detta *Cromo Dinamica Quantistica* (QCD). In questo caso non introdussero nulla di extra, ma scoprirono la proprietà della stessa teoria quantistica di Yang e Mills ovvero la "**libertà asintotica**".

In sintesi la "libertà asintotica" sostiene che a brevissimo raggio gli effetti sono quelli classici; mentre a lungo raggio gli effetti quantistici si fanno sentire di più.

Con la QCD si è prevista l'esistenza dei quark, particelle con spin $\frac{1}{2}$ (il principio di Pauli), che si combinano a formare protoni, neutroni e altre particelle note.

Fin qui siamo a quello che nella fisica viene chiamato *Modello Standard*.

Teoria delle stringhe

Finora trovare una GUT che comprenda anche la gravità da un punto di vista quantistico ha portato i fisici ad un punto di stallo: ecco perché tuttora stanno lavorando a ulteriori teorie come la *teoria delle stringhe*, abbastanza promettente.

Il massimo esponente sulla teoria delle stringhe è *Edward Witten*.

La teoria delle stringhe non considera gli oggetti come particelle, né onde ma come minuscole corde aperte o chiuse. Per far funzionare tale modello occorre però spostarsi in uno spazio o una varietà ad almeno 10 dimensioni. Se le dimensioni fossero di meno le stringhe non avrebbero sufficienti proprietà affinché il modello possa funzionare.

La teoria delle stringhe, è una delle recenti formulazioni che alcuni fisici teorici hanno elaborato per superare certe difficoltà legate al *modello standard*. Quest'ultimo descrive le forze fondamentali forte, debole ed elettromagnetica usando i metodi della teoria quantistica dei campi: è quindi consistente sia con la meccanica quantistica che con la relatività speciale e si basa solo su pochi principi, quali le simmetrie di gauge, la rottura spontanea di simmetria e la rinormalizzazione.

Quasi tutti i test sperimentali delle tre forze descritte dal modello standard sono risultati in accordo con le previsioni, tuttavia non è una teoria completa delle interazioni fondamentali:

- non include ancora la gravità (o la massa),
- contiene circa venti parametri arbitrari (come le masse delle particelle) non calcolabili indipendentemente,
- non fornisce nessuna spiegazione che giustifichi la preponderanza di materia sull'antimateria nell'universo,
- non prevede nessun meccanismo, proprio perché omette la gravità, che descriva il modello inflazionario dell'universo,
- • non rende ragione dell'oscillazione dei neutrini.

Bisogna ricordare inoltre che il modello standard prevede l'esistenza di un *bosone di Higgs a spin 0* necessario per la rottura spontanea di simmetria, ma tutt'ora non osservato.

Sono state, quindi, proposte numerose soluzioni, tra le quali potrei citare il modello di grande unificazione (GUT) di *Georgi-Glashow* del 1974: esso suppone che il gruppo di gauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ del modello standard non sia altro che la manifestazione di una rottura spontanea di simmetria a basse energie del gruppo $SU(5)$. Purtroppo tra i vari risultati che questo modello contiene c'è il decadimento del protone, fenomeno che si ritiene molto improbabile dal momento che nel 1999 l'esperimento *SuperKamiokande* pone un limite inferiore ($6,7 \cdot 10^{32}$ anni) al tempo di decadimento di tale particella.

Il principale argomento per cui si è arrivati alla formulazione della teoria delle stringhe è il problema delle piccole distanze per la gravità quantistica.

L'accoppiamento gravitazionale è, infatti, irrilevante alle energie ora raggiungibili dagli acceleratori, ma diventa sempre più importante ad alte energie e per $E > M_P = 1,2 \cdot 10^{19} \text{ GeV}$ la teoria delle perturbazioni fallisce, dal momento che questo contributo non è rinormalizzabile.

Per superare questo stallo, l'idea che ha avuto particolare successo è quella della teoria delle stringhe: il gravitone e tutte le altre particelle elementari sono oggetti monodimensionali, le stringhe, anziché punti in una teoria quantistica dei campi. L'introdurre oggetti monodimensionali pone, quindi, un naturale cut-off delle divergenze ultraviolette in modo analogo a come la teoria elettrodebole risolveva le divergenze della teoria di Fermi; inoltre è anche più naturale immaginare degli oggetti siffatti che interagiscono tra loro piuttosto che oggetti puntiformi. Formulata a partire da questa rappresentazione, la teoria delle stringhe si è rivelata una consistente teoria di gravità quantistica e di grande unificazione. Per gli appassionati, dei buoni libri divulgativi sono [1][2][3][4].

Il secondo problema del Millennio

Escludendo un attimo la teoria delle stringhe e ritornando alla teoria di Yang e Mills, finora nessuno è riuscito a risolvere le equazioni di Yang e Mills, cioè a trovare una formula di risoluzione. Né una soluzione si è trovata per le equazioni delle teorie derivate da Yang e Mills.

La teoria più accurata del mondo ha equazioni che nessuno sa risolvere e soprattutto a dimostrare che l'ipotesi del gap di massa è vero (ovvero che la massa non è nulla!).

In poche parole si deve dimostrare che:

- Esiste un gap di massa: c'è un livello di energia minimo (quindi una massa) corrispondente all'eccitazione del vuoto
- Se esiste deve avere un "confinamento dei quark": tutti gli stati delle particelle devono avere una simmetria $SU(3)$ anche se i campi in generale potrebbero non averla rispetto alle particelle

Il gap di massa spiegherebbe che l'interazione nucleare forte ha un raggio d'azione molto corto; il confinamento dei quark spiegherebbe perché non si possono osservare singoli quark.

Ora indipendentemente se la teoria di Yang e Mills possa ulteriormente dare una svolta alla fisica, rimane il fatto che potrebbe dare di sicuro un grande contributo alla matematica.

Edward Witten, alla fine, ha formulato il secondo problema del millennio nel seguente modo: "Dimostrare l'esistenza del gap di massa della teoria quantistica di Yang-Mills su \mathbb{R}^4 , con il gruppo di gauge G di Lie, non abeliano, semplice e compatto".

Nella seconda parte si spiegheranno con esempi molti dei concetti matematici visti prima. Per gli approfondimenti teorici vedi [8]. L'argomento è di una vastità notevole.

La Teoria dei Gruppi

La teoria dei gruppi è dovuta essenzialmente ad Abel e Galois. Come ben presto vi renderete conto è un settore molto vasto e per taluni versi abbastanza complesso e pieno di "labirinti teorici", tale che solo una persona specializzata del settore riesce ben a orientarsi .

Galois, in particolare, comprese che le soluzioni di determinate equazioni possono presentare delle simmetrie e sfruttò tale fatto per dimostrare che l'equazione di quinto grado non ammetteva una formula risoltrice (vedi [6][7]).

Assiomi dei gruppi

Consideriamo un insieme G con $x, y \in G$ ed un'operazione $*$ che combina due elementi x e $y \in G$ in un elemento $x * y \in G$ allora $(G, *)$ è un gruppo se sono soddisfatte le seguenti proprietà:

1. $\forall x, y, z \in G$ è:
 $(x * y) * z = x * (y * z)$ (proprietà associativa)
2. $\forall x \in G, \exists e \in G: x * e = e * x = x$ (elemento neutro o identità)
3. $\forall x \in G, \exists y \in G: x * y = y * x = e$ con $e \in G$ (elemento inverso)

L'insieme G potrebbe essere qualsiasi:

- l'insieme delle trasformazioni su una figura e l' $*$ è l'operazione che combina due trasformazioni in un altro elemento di G .
- l'insieme dei numeri interi Z e l'operazione $*$ l'addizione. Allora $(Z, +)$ è un gruppo. Qui l'elemento neutro è lo zero.
- L'insieme dei numeri razionali $Q - \{0\}$ e $*$ l'operazione di moltiplicazione, allora $(Q - \{0\}, *)$ è un gruppo. Qui l'elemento neutro è 1.

E' da osservare che tutti i gruppi hanno un solo elemento neutro. Ad esempio se ce ne fossero due e ed f allora è: $e = e * f = f$ il che conduce al fatto che $e = f$ (unico elemento).

Esiste anche un solo inverso. Difatti se ne esistessero due y e z sarebbe:

$$x * y = y * x = e \quad (a)$$

$$x * z = z * x = e \quad (b)$$

Dalla proprietà di e posso scrivere

$$y = y * e$$

Dalla (b) è:

$$= y * (z * x)$$

Dalla 1 inoltre è:

$$\begin{aligned} &= (y * x) * z \\ &= e * z \\ &= z \end{aligned}$$

Perché non si include il quarto assioma? Ovvero:

$$4. \quad \forall x, y \in G \quad x * y = y * x \quad (\text{proprietà commutativa})$$

Precedentemente l'assenza della 4 ha comportato che nella 2 e la 3 si è dovuto scrivere le combinazioni in entrambi i versi. Però se la introduciamo il gruppo diventa un *gruppo abeliano* o *commutativo* ed escluderebbe molti esempi di gruppi. La proprietà 4 viene introdotta solo se serve allo studio in questione.

Focalizziamoci sull'operazione $*$, essa deve essere per forza somma o moltiplicazione? No.

L'operazione $*$ potrebbe essere una legge di composizione che associa ad ogni coppia di interi non nulli (x,y) il $\text{MCD}(x,y)=z \in \mathbb{N}$ (ovvero l'operazione $x * y = z$). Oppure in \mathbb{Z} potrebbe essere la legge $*$: $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow a^2 + b^2 \in \mathbb{Z}$ (ovvero $x * y = a^2 + b^2$) etc.

Esempi non validi

$(\mathbb{Z}, *)$ l'insieme dei numeri interi, positivi e negativi, con l'operazione di moltiplicazione non è un gruppo poiché l'inverso è un elemento di \mathbb{Q} .

$(M, *)$ l'insieme dei numeri di Mersenne definiti come $2^p - 1$ non è un gruppo perché l'inverso non esiste; ovvero servirebbe che $(2^p - 1) * (2^p - 1) = 1$ ma $2^p - 1$ non appartiene a M .

Riassumendo affinché $(G, *)$ sia un gruppo devono essere vere quattro cose:

Chiusura: se x e y appartengono a G , allora $x * y$ deve appartenere ancora a G

Associatività: l'operazione $*$ deve essere associativa

Elemento identità: il gruppo deve avere un elemento neutro che applicato ad un suo elemento lo lascia inalterato

Elemento inverso: Per ogni membro del gruppo deve esistere un inverso (esempio: se l'operazione è $+$ allora l'inverso di 4 è -4 cioè l'opposto).

Simmetrie e permutazioni

La teoria dei gruppi ci spiega cosa accade quando una serie di trasformazioni, come rotazione o riflessione, vengono applicate in successione ad un oggetto oppure quando un'operazione mescola insieme oggetti diversi.

Questo tipo di analisi spesso svela il tipo di matematica nascosto dietro il problema; inoltre oggetti diversi potrebbero essere accomunati dagli stessi gruppi di simmetria.

Facciamo qualche esempio. Consideriamo il corpo di un uomo. Esso in linea generale rimane immutato se sottoposto a due tipi di trasformazioni: l'identità (non applichiamo nessuna trasformazione) e la riflessione attorno ad un asse verticale, visto che esiste una simmetria bilaterale.

Indichiamo con I l'identità e con R la riflessione. Potremmo scrivere una tabella delle trasformazioni (G, \circ) come quella in figura.

\circ	I	R
I	I	R
R	R	I

Tabella 1 – tabella delle trasformazioni S2

La tabella delle trasformazioni (o delle simmetrie) afferma che una trasformazione identità seguita da un'altra di tipo identità non altera niente $I \circ I = I$; mentre $I \circ R = R$ e così via. L'operatore \circ lo potremmo definire "seguito da". La tabella della trasformazioni o l'insieme delle trasformazioni (G, \circ) su un corpo umano è, quindi, un gruppo poiché rispetta la Chiusura rispetto al gruppo, l'associatività $(I \circ R = R \circ I)$ e l'esistenza dell'identità come trasformazione, dell'inverso $I \circ I = I$ oppure $R \circ R = I$.

Nella tabella notiamo anche la caratteristica che la matrice è simmetrica rispetto alla diagonale e ciò vuol dire che la trasformazione gode di proprietà commutativa.

Supponiamo che abbiamo a disposizione la parola GALOIS. Scambiando le lettere si possono formare diverse parole: GASOLI, SOGLIA, I GOALS. In quanti modi possiamo modificare tale parola in modo da ottenere anche parole senza senso?

Se avessimo solo due lettere AB e BA è tutto quello che possiamo fare. Se ne avessimo 3 allora possiamo ottenere ABC, ACB, BAC, BCA, CB, CBA ovvero 6 casi diversi. In altri termini se abbiamo n elementi possiamo fare solo $n!$ permutazioni⁽⁴⁾

Ora abbiamo uno strumento in più; allora vediamo una sola trasformazione con cui dalla parola GALOIS si passa alla parola AGLISO:

$$\begin{pmatrix} GALOIS \\ AGLISO \end{pmatrix}$$

Figura 10 – Una trasformazione

Il problema che ci poniamo è "dopo 1327 applicazioni di questa stessa trasformazione che permutazione si ottiene?".

Si osserva che alla seconda riga la G è sostituita con A mentre L è rimasta ferma; infine c'è stata una permutazione circolare (ciclica) che ha fatto slittare avanti I e S mentre O è passata indietro.

La permutazione di ISO è ciclica ed ha periodo 3. Il che vuol dire che OIS si ristabilisce com'era dopo 3 passi. Mentre AG per ritornare a GA bastano 2 passaggi (periodo 2). Questo vuol dire che da AGLISO si ritorna a GALOIS dopo $2 \times 3 = 6$ cambiamenti.

⁴ Il simbolo $n!$ è fu introdotto da Christian Kramp (1760-1826).

Poiché parliamo di permutazioni cicliche, ci può aiutare la aritmetica modulare. Cosa vuol dire ciò in aritmetica modulare? Che la trasformazione lavora in modulo 6; perciò $1327 \bmod 6 = 1 \bmod 6$ ovvero dopo 1326 volte riotteniamo GALOIS e con una trasformazione ancora passiamo ad AGLISO.

Questo risolve il problema postoci e sono venuti fuori due strumenti: l'aritmetica modulare e la teoria dei gruppi o delle permutazioni, con cui abbiamo risolto teoricamente un problema senza nemmeno dover effettivamente eseguire le 1327 trasformazioni!

Bello! Ma che c'entrano le permutazioni e le simmetrie? Un gruppo di permutazioni S_n ha $n!$ permutazioni in gioco. Consideriamo ad esempio il gruppo di simmetrie S_3 di tutte le permutazioni dei numeri 1,2,3 che sappiamo sono in totale $3!=6$:

$$\begin{matrix} \left(\begin{matrix} 123 \\ 123 \end{matrix} \right) & \left(\begin{matrix} 123 \\ 231 \end{matrix} \right) & \left(\begin{matrix} 123 \\ 312 \end{matrix} \right) & \left(\begin{matrix} 123 \\ 132 \end{matrix} \right) & \left(\begin{matrix} 123 \\ 321 \end{matrix} \right) & \left(\begin{matrix} 123 \\ 213 \end{matrix} \right) \\ \text{I} & s_1 & s_2 & t_1 & t_2 & t_3 \end{matrix}$$

Figura 11 – Permutazioni di S_3

Con I indichiamo la permutazione identica, s_1 e s_2 sono le permutazioni cicliche (slittano avanti di una cifra i tre numeri) e t_1, t_2, t_3 traspongono solo 2 numeri tra loro, tenendo fermo il terzo.

Che succede se applichiamo due permutazioni successive $t_1 \circ s_1$ (t_1 seguito da s_1)? Per comprenderlo dobbiamo osservare come si trasforma ogni numero prima in t_1 e poi in s_1 .

In t_1 : 1 -> 1 poi in s_1 : 1 -> 2 quindi otteniamo 2
 In t_1 : 2 -> 3 poi in s_1 : 3 -> 1 quindi otteniamo 1
 In t_1 : 3 -> 2 poi in s_1 : 2 -> 3 quindi otteniamo 3

Per cui è:

$$t_1 \circ s_1 = t_3$$

A questo punto sappiamo crearci la tabella di tutte le permutazioni.

\circ	I	S1	S2	T1	T2	T3
I	I	S1	S2	T1	T2	T3
S1	S1	S2	I	T3	T1	T2
S2	S2	I	S1	T2	T3	T1
T1	T1	T2	T3	I	S1	S2
T2	T2	T3	T1	S2	I	S1
T3	T3	T1	T2	S1	S2	I

Tabella 2 – tabella delle trasformazioni S_3

L'insieme delle permutazioni di tre oggetti costituisce un gruppo. Gli oggetti dell'esempio precedente erano tre numeri, ma se i tre numeri fossero stati i vertici di un triangolo equilatero, come nella figura seguente, sarebbe uscita la stessa tabella 2.

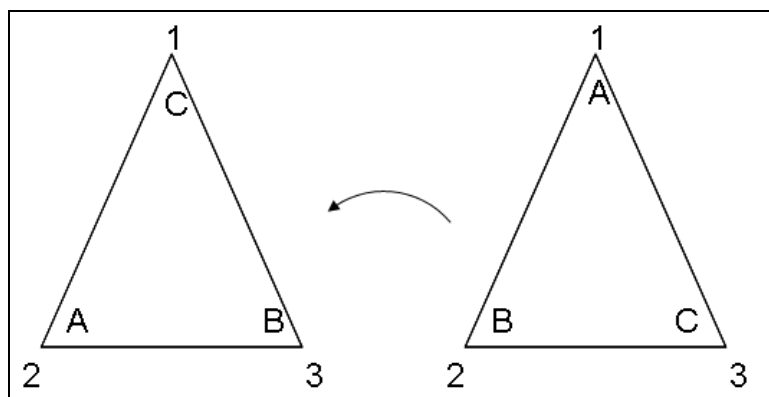


Figura 12 – Simmetrie di un triangolo equilatero

Le simmetrie di un triangolo equilatero sono 6: l'identità, la rotazione di 120° , la rotazione di 240° e le tre riflessioni attorno ad ogni vertice (basta ad esempio tracciare una retta che parte dal vertice 1 e interseca la base e fare il ribaltamento attorno a tale retta ad esempio: quindi è una retta di simmetria!). Anche in questo caso le simmetrie del triangolo avremmo potuto scriverle come in figura 12 o in Tabella 2.

Il risultato?

1. Simmetrie e permutazioni sono strettamente legate!
2. Si dice che "la struttura dei due gruppi è identica".

Due gruppi di oggetti diversi se hanno la stessa tabella di permutazioni o simmetrie sono detti *isomorfi*. Questo risultato è dovuto ad *Arthur Carley* nel 1878.

In ogni caso le *simmetrie sono operazioni attive su un oggetto*: l'insieme di trasformazioni che possiamo applicare all'oggetto lasciandolo in termini di stato sostanzialmente com'era prima senza che lo toccassimo.

Esempi nella geometria

Una sfera che ruota attorno ad un diametro rimane identica, per cui è invariante rispetto a trasformazioni di tipo rotazione.

Sottogruppo, ordine e fattore di composizione

Un sottoinsieme di permutazioni del gruppo che rispetta le proprietà di chiusura, associatività, identità e inverso è detto *sottogruppo*.

Ad esempio le due permutazioni I e t_3 dell'esempio precedente formano un sottogruppo di S_3 .

Si dice *ordine del sottogruppo* il numero degli elementi che lo compongono. Nell'esempio precedente l'ordine è 2.

Il *fattore di composizione* è l'intero ottenuto dividendo l'ordine del sottogruppo per quello del gruppo. Nel caso precedente il fattore di composizione è un intero $6/2=3$.

Esiste un **Teorema di Lagrange** che afferma che "l'ordine di un sottogruppo divide sempre perfettamente quello del gruppo". Per cui, ad esempio, se un gruppo ha ordine 12 allora il fattore di composizione può essere solo: 2, 3, 4 e 6.

Sottogruppo normale e massimale

Un *sottogruppo si dice normale* se prendendo un elemento della tabella di permutazioni moltiplicandolo a sinistra per un elemento e poi a destra con l'inverso si ottiene ancora un elemento della tabella. Un sottogruppo normale che ha l'ordine maggiore è detto *massimale*.

Albero dei sottogruppi normali massimali

In generale è possibile tracciare un albero di sottogruppi normali a partire da quello massimale e e dei suoi sottogruppi normali.

Il sottogruppo massimale cioè potrebbe, a sua volta, avere altri sottogruppi normali uno dei quali di ordine più alto etc.

In tal modo si ottiene un albero di sottogruppi e di fattori di composizione. Ad esempio prendiamo di S_3 il sottogruppo T costituito da I, s_1 e s_2 (gode delle proprietà di chiusura, associatività, identità o elemento neutro e inverso). Se prendiamo un elemento di T : $t_1 \circ s_1 \circ t_1 = s_2$. Per cui T è un sottogruppo normale di ordine 3. Il sottogruppo T è anche massimale.

Il fattore di composizione è $6/3=2$. Se proviamo gerarchicamente a scomporre anche T , il sottogruppo di T è composto solo da I di ordine 1 per cui il fattore di composizione è $3/1=1$.

Gruppo di Galois

Viene definito gruppo di Galois l'insieme più grande delle permutazioni o delle simmetrie.

In particolare per le equazioni è l'insieme più grande delle permutazioni delle soluzioni che lascia però invariato il valore dei risultati.

Gruppo di Galois risolubile

Un insieme o gruppo di Galois è risolubile se ogni fattore di composizione dei suoi sottogruppi è un numero primo.

Un gruppo non ulteriormente scomponibile è un "gruppo semplice".

Equazioni risolubili – Teorema di Galois

"Un'equazione è risolubile se e solo se il Gruppo di Galois è risolubile" (Galois).

Classificazione delle equazioni

Galois aveva ideato tutti gli elementi precedenti per poi sfruttarli nella teoria algebrica delle equazioni (☹ una cosa inattesa!): uso delle permutazioni, concetto di gruppo, sottogruppo e sottogruppo normale e massimale, fattore di composizione, insiemi risolubili.

Galois introdusse prima il "profilo di simmetria" di una equazione o gruppo di permutazioni, detto *gruppo di Galois*. Le equazioni si erano sempre classificate solo col grado del polinomio in gioco; mentre anche la *simmetria è una caratteristica dell'equazione*. E' la differenza che esiste tra la

classificazione attraverso una quantità come il grado del polinomio rispetto alla classificazione in base alla forma dell'equazione.

Alla base di tutto ci sono sempre le permutazioni: difatti il gruppo di Galois di una espressione algebrica rappresenta il gruppo più grande delle permutazioni delle soluzioni che lascia però invariato il valore dei risultati (simmetria quindi).

Facciamo un esempio: l'equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$ ha una formula risolutiva, le sue radici sono caratterizzate dal fatto che:

$$\begin{aligned}x_1 * x_2 &= a \\x_1 + x_2 &= b\end{aligned}$$

Ora se scambiamo di posto x_1 con x_2 nella prima o nella seconda espressione nulla cambia nel risultato! Simmetria!

Per il **Teorema di Gauss** "una equazione di grado n ha n soluzioni". Il numero massimo di permutazioni possibili di n soluzioni è $n!$ per cui il gruppo associato è S_n .

Il secondo passo per dimostrare che un'equazione di 5° grado non ammette una formula risolutiva fu quello di usare i sottogruppi normali massimali, la gerarchia dei sottogruppi, i fattori di composizione ed il Teorema di Galois.

Come si usa il teorema di Galois? Per l'equazione di 3° grado dobbiamo considerare S_3 .

Abbiamo visto precedentemente per S_3 che nella gerarchia dei sottogruppi abbiamo come fattori di composizione 2 e 3 che sono numeri primi. Per cui questo Gruppo di Galois è risolubile e l'equazione ammette una formula risolutiva (Tartaglia, Dal Ferro e Cardano difatti la avevano trovata).

Per l'equazione di 5° grado, abbiamo 5 soluzioni secondo il Teorema di Gauss per cui $5!=120$ e dobbiamo considerare S_5 . Il gruppo di Galois S_5 in questo caso è formato da un sottogruppo di 60 simmetrie ed uno da 2 simmetrie. S_5 non è risolubile perché ha uno dei fattori di composizione (60) che non è un numero primo!

Aspetti geometrici

Supponiamo di avere una figura piana di 15 lati. Quante rotazioni gli possiamo far fare?

Il numero di rotazioni è pari al numero n di lati della figura bidimensionale (o di vertici indicati con un numero).

Possiamo scomporre le rotazioni della figura a 15 lati nelle rotazioni di due figure piane? Sì: un pentagono ed un triangolo. Il pentagono ha 5 lati (numero primo!) e il triangolo ha 3 lati (altro numero primo!). Di più non si può fare, perché?

Per quanto abbiamo visto prima il gruppo di Galois S_5 che ci interessa sono solo le permutazioni cicliche di 15 numeri. Ora tale gruppo di Galois è scomponibile in un sottogruppo normale

massimale e un sottogruppo normale, uno di fattore di composizione 5 e l'altro 3, numeri primi, tali che $5 \times 3 = 15$; per cui il gruppo di Galois è risolubile.

Altre applicazioni della teoria dei gruppi

In realtà se ci si astrae dal problema particolare la Teoria dei gruppi può tornare facilmente utile in molti settori:

- ricerca dell'esistenza di formule risolutive delle equazioni
- classificazione geometrica
- chimica e le possibili combinazioni atomiche e molecolari (la *congettura di Higman*)
- cristallografia
- fisica
- medicina: DNA, RNA, virus
- informatica: codici e decifrazione
- telecomunicazioni: codici di correzione per le trasmissioni
- giochi: il cubo di Rubik, i dadi di Ur, i reticoli e i percorsi possibili
- antropologia sociale: mettendo insieme regole ed elementi si possono trattare parentele e razze (*Claude Levi Strauss*)
- grammatiche e linguaggi formali
- psicologia e subconscio

Definizioni e tipi di gruppi

Le simmetrie dei gruppi possono essere:

- discrete (parità, coniugazione di carica, inversione temporale, etc.)
- continue (traslazioni, rotazioni, trasformazioni da un sistema di riferimento ad un altro) con una o più variabili

Un gruppo è *finito* se l'ordine del gruppo è finito; altrimenti è infinito. Ad esempio S_3 è finito.

Un gruppo infinito è detto *continuo* se il numero degli elementi è infinito e non denumerabile, ovvero non in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri interi.

Se A e B sono matrici ed x è l'operazione di prodotto riga per colonna, se $\forall (A,B) \in G$ è $A \times B = B \times A$ allora il gruppo (G, x) è *commutativo* o *abeliano*.

Gruppo complesso delle fasi $U(1) = \{ e^{i\theta} \}$ e l'operazione moltiplicazione

$(U(1), *)$ è un gruppo; difatti:

Chiusura: $e^{i\theta_1} * e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \in U(1)$

Associativa: $e^{i\theta_1} * (e^{i\theta_2} * e^{i\theta_3}) = (e^{i\theta_1} * e^{i\theta_2}) * e^{i\theta_3}$

Identità: $e^0 * e^{i\theta} = e^{i\theta} * e^0 = e^{i\theta}$

Inverso: $e^{i\theta} * e^{-i\theta} = e^0 = 1$

$U(1)$ è composto da matrici complesse unitarie 1×1 ($U U^\circ = U^\circ U = 1$).

Questo gruppo governa la simmetria delle equazioni di Maxwell.

Gruppo ortogonale di grado n su un campo K è il gruppo delle matrici ortogonali $n \times n$ a valori in K . Si indica con $\mathbf{O}(n, K)$. Quando K è il campo dei numeri reali, il gruppo può essere interpretato come il gruppo delle isometrie dello spazio euclideo di dimensione n . Le matrici aventi determinante positivo formano un sottogruppo, che si indica con $\mathbf{SO}(n)$, detto *gruppo ortogonale speciale*. Il gruppo ortogonale speciale è il gruppo delle rotazioni dello spazio ⁽⁵⁾.

Il gruppo ortogonale è un sottogruppo del *gruppo generale lineare* $\mathbf{GL}(n, K)$ di tutte le matrici invertibili, definito come segue:

$$\{Q \in GL(n, K) \mid Q^T Q = Q Q^T = I\}.$$

In altre parole, è il sottogruppo formato da tutte le matrici ortogonali. Quando il campo K non è menzionato, si sottointende che K è il campo dei numeri reali \mathbb{R} .

Una matrice ortogonale ha determinante $+1$ oppure -1 . Il sottoinsieme di $\mathbf{O}(n)$ formato da tutte le sottomatrici con determinante $+1$ è a sua volta un sottogruppo $\mathbf{SO}(n)$ visto prima.

Il gruppo $\mathbf{O}(n)$ è il *gruppo delle isometrie della sfera* di dimensione $n - 1$. Il sottogruppo $\mathbf{SO}(n)$ è dato da tutte le isometrie che preservano l'orientazione della sfera.

Il gruppo $\mathbf{O}(n)$ è una *varietà differenziabile*, e assieme alla sua struttura di gruppo forma un *gruppo di Lie compatto*. Non è connesso: ha infatti due componenti connesse, una delle quali è $\mathbf{SO}(n)$.

Per $n = 1$, il gruppo $\mathbf{O}(1)$ consta di due elementi, 1 e -1 . Per $n = 2$, il gruppo $\mathbf{SO}(2)$ è isomorfo al gruppo quoziente \mathbb{R}/\mathbb{Z} dove \mathbb{R} sono i numeri reali e \mathbb{Z} il sottogruppo dei numeri interi. Questo gruppo è solitamente indicato con S^1 , e topologicamente è una circonferenza. Per $n = 3$, il gruppo $\mathbf{SO}(3)$ è omeomorfo allo spazio proiettivo reale di dimensione 3, che si indica solitamente come $P^3(\mathbb{R})$.

Il gruppo fondamentale di $\mathbf{SO}(2)$ è \mathbb{Z} , il gruppo dei numeri interi. Per ogni $n > 2$ il gruppo fondamentale di $\mathbf{SO}(n)$ è invece $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il gruppo ciclico con due elementi. Ha quindi un rivestimento universale compatto, che viene indicato con $\text{Spin}(n)$, e che risulta anch'esso essere un gruppo di Lie. Il gruppo $\text{Spin}(n)$ è chiamato gruppo Spin.

⁵ In due dimensioni, una rotazione è una trasformazione $R(\theta)$, che dipende da un angolo θ , e che trasforma il vettore (x, y) in

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta - y \sin \theta, \\ y' &= x \sin \theta + y \cos \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Usando la moltiplicazione tra matrici la rotazione può essere descritta così:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

La matrice quadrata presente in questa espressione è una matrice ortogonale di rango due. Questa trasformazione è chiamata **rotazione antioraria** di angolo θ intorno all'origine.

La matrice 2×2 che descrive la rotazione è spesso chiamata **matrice di rotazione** di angolo θ .

$SO(3)$ è un gruppo delle matrici 3×3 che rappresenta le rotazioni proprie nello spazio \mathbb{R}^3 ed è infinito. Inoltre $SO(3)$ è anche sottogruppo di $O(3)$ che contiene anche le inversioni spaziali.

In APPENDICE riportiamo i maggiori gruppi di interesse. La tabella non comprende i gruppi di Lie solo perché ne parliamo di seguito.

Gruppi di Lie



Figura 13 – Sophus Lie

La Teoria dei gruppi è stata introdotta da Galois, inizialmente, per lo studio delle equazioni algebriche analizzando le permutazioni delle radici. Fin dall'inizio il concetto di gruppo è stato cioè legato a quello di trasformazione o permutazione (soluzioni in soluzioni) oppure di conservazione (della proprietà di essere soluzione).

Sophus Lie usò la teoria dei gruppi per le *equazioni differenziali* (o *varietà differenziali*) e la *geometria*. I gruppi di Lie potrebbero essere detti anche "*gruppi di trasformazioni continue*".

Un gruppo di Lie è un gruppo G munito di una struttura di varietà differenziabili tale che le operazioni

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G &\rightarrow G \\ a &\mapsto a^{-1} \end{aligned}$$

sono entrambe differenziabili.

La fisica e i gruppi di Lie

I modelli di grande unificazione si fondano sullo stesso principio alla base del modello standard delle interazioni e particelle elementari: il principio che alla base delle interazioni (o forze) elementari ci sia un gruppo di simmetria, detto principio di gauge.

Una teoria di gauge dove il gruppo di gauge è un gruppo semplice ha solo una costante di accoppiamento, quindi una unica interazione fondamentale. Pertanto, in una teoria di grande unificazione, le tre interazioni indipendenti di gauge del modello standard vengono messe in relazione tra loro. In certe teorie $SU(5)$ supersimmetriche o in certi modelli $SO(10)$ non supersimmetrici, queste relazioni sono compatibili con i valori misurati delle tre interazioni del modello standard.

Inoltre, i 5 campi fermionici chirali (3 quarks e 2 leptoni) che costituiscono una "famiglia" del modello standard vengono ridotti a solo 2 campi in $SU(5)$, e ad 1 solo campo (detto lo spinore) in

SO(10). Il gruppo SO(10) predice anche l'esistenza di un neutrino destrorso, possibilmente legato alla spiegazione delle masse dei neutrini.

Ogni specifico modello GUT predice delle relazioni tra le masse dei fermioni, per esempio fra l'elettrone e il quark down, il muone e il quark strange e fra il leptone tau e il quark bottom per SU(5) e SO(10). Si deve sottolineare però che le masse dei fermioni non sembrano spiegate in maniera altrettanto convincente delle interazioni.

Numerose teorie sono state proposte, ma nessuna è attualmente universalmente accettata. Una eventuale più ambiziosa teoria che includa tutte le forze fondamentali (fra cui soprattutto la gravità) è chiamata *Teoria del Tutto*.

I principali **modelli di GUT** sono:

- modello minimale left-right (left-right model) —

$$\mathbf{SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}}$$

- Modello di Georgi-Glashow — **SU(5)**
- SO(10)
- Flipped SU(5) — **SU(5) × U(1)**
- Modello di Pati-Salam — **SU(4) × SU(2) × SU(2)**
- flipped SO(10) — **SO(10) × U(1)**
- Trinification — **SU(3) × SU(3) × SU(3)**
- SU(6)
- E6
- modello 331
- Colore chirale

Teorie non propriamente GUT:

- Modelli multicolore
- Little Higgs
- Preoni
- Teoria delle stringhe
- M-teoria
- Loop quantum gravity
- Teoria della triangolazione causale dinamica (Causal dynamical triangulation)

L'algebra di Lie associata a un gruppo di Lie

Ad ogni gruppo di Lie si può associare un'*algebra di Lie* che è in grado di esprimere interamente la struttura locale del gruppo.

La relazione gruppo - algebra non riguarda invece le caratteristiche globali, come connessione o semplice connessione, e diversi gruppi di Lie possono quindi avere la stessa algebra; in

particolare, esiste un teorema che stabilisce che "due gruppi di Lie finiti dimensionali localmente isomorfi hanno algebre di Lie isomorfe, quindi identificabili".

Lo studio delle proprietà e la classificazione delle algebre di Lie è molto più agevole rispetto all'analogo studio dei gruppi, per questo risultano molto utili una serie di teoremi che permettono di mettere in relazione le proprietà delle algebre a quelle dei gruppi corrispondenti.

Un'ottima tavola dei gruppi di Lie è al link: http://it.wikipedia.org/wiki/Tavola_dei_gruppi_di_Lie

Definizioni

Un'algebra di Lie è una struttura costituita da uno spazio vettoriale g su un certo campo F (per esempio i numeri reali, i numeri complessi, o un campo finito) e da un operatore binario $[\cdot, \cdot] : g \times g \rightarrow g$, detto *prodotto di Lie*, che soddisfa le seguenti proprietà:

1. è *bilineare*, cioè $[a x + b y, z] = a [x, z] + b [y, z]$ e $[z, a x + b y] = a [z, x] + b [z, y]$ per tutti gli a, b in F e tutti gli x, y, z in g ;
2. soddisfa l'*identità di Jacobi*, cioè $[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0$ per tutti gli x, y, z in g ;
3. è *nilpotente*, cioè $[x, x] = 0$ per tutti gli x in g .

Notare che la prima e la terza proprietà insieme implicano $[x, y] = -[y, x]$ per tutti gli x, y in g , cioè l'*antisimmetria* del prodotto di Lie: viceversa l'antisimmetria implica la proprietà 3 se F ha caratteristica diversa da 2. Notare anche che in generale il prodotto di Lie non è associativo, cioè $[[x, y], z]$ non è necessariamente uguale a $[x, [y, z]]$.

Esempi

- Un'algebra di Lie si dice *abeliana* se il prodotto di Lie fornisce il vettore nullo per tutti gli x e y . Ogni spazio vettoriale diventa banalmente un'algebra di Lie abeliana se lo si arricchisce con un prodotto di Lie identicamente nullo.
- Lo spazio euclideo \mathbf{R}^3 diventa un'algebra di Lie munendolo del prodotto di Lie fornito dal prodotto esterno (prodotto vettoriale) fra vettori.
- Consideriamo un'algebra associativa A la cui moltiplicazione denotiamo con $*$; questa può venire trasformata in un'algebra di Lie definendo $[x, y] = x * y - y * x$.

Questa espressione è detta il *commutatore* di x e y . Viceversa si può dimostrare che ogni algebra di Lie può essere considerata come sottoalgebra di un'altra ricavata in questo modo da un'algebra associativa.

- Altri esempi importanti di algebre di Lie vengono dalla topologia differenziale. Consideriamo i campi vettoriali di una varietà differenziabile V , cioè le trasformazioni X che a una funzione f su V associano un'altra funzione dello stesso genere, $X f$, e che costituiscono uno spazio vettoriale a infinite dimensioni. Per due tali campi vettoriali X e Y il prodotto di Lie $[X, Y]$ è definito da: $[X, Y] f = (XY - YX) f$ per ogni funzione f su V . In tal modo si ottiene l'algebra di Lie del gruppo di Lie ad infinite dimensioni dei diffeomorfismi della varietà.

- Lo spazio vettoriale dei campi vettoriali sinistra-invarianti su un gruppo di Lie è chiuso sotto questa operazione e perciò è un'algebra di Lie a dimensione finita. In alternativa si può pensare lo spazio vettoriale sottostante all'algebra di Lie associata a un gruppo di Lie come lo spazio tangente all'elemento identità del gruppo. La moltiplicazione è il differenziale del gruppo commutatore $(a,b) \mapsto aba^{-1}b^{-1}$ all'elemento identità.
- Come esempio concreto consideriamo il gruppo di Lie $SL(n, \mathbf{R})$ di tutte le matrici quadrate $n \times n$ con componenti reali e determinante 1. Lo spazio tangente alla matrice identità si può individuare nello spazio di tutte le matrici $n \times n$ con traccia zero, e la struttura dell'algebra di Lie derivante dal gruppo di Lie coincide con quella che sorge dai commutatori per la moltiplicazione matriciale.

Omomorfismi, sottoalgebre e ideali

Un *omomorfismo* $\phi : g \rightarrow h$ fra due algebre di Lie g ed h sullo stesso campo base F si definisce come una mappa F -lineare tale che $[\phi(x), \phi(y)] = \phi([x, y])$ per tutti gli x e y in g . La composizione di tali omomorfismi è ancora un omomorfismo, e le algebre di Lie sul campo F , insieme con questi morfismi formano una categoria. Se un tale omomorfismo è biiettivo viene chiamato *isomorfismo*, e le due algebre di Lie g e h sono dette *isomorfe*.

Una *sottoalgebra* dell'algebra di Lie g è un sottospazio lineare h di g tale che $[x, y] \in h$ per tutti gli $x, y \in h$: una tale sottoalgebra è quindi essa stessa un'algebra di Lie.

L'*ideale* dell'algebra di Lie g è un sottospazio h di g tale che $[a, y] \in h$ per tutti gli $a \in g$ e $y \in h$. Gli ideali sono particolari sottoalgebre. Se h è un ideale di g allora lo spazio quoziente g/h diventa un'algebra di Lie definendo $[x + h, y + h] = [x, y] + h$ per tutti gli $x, y \in g$. Gli ideali sono precisamente i kernel degli omomorfismi, e il teorema fondamentale degli omomorfismi vale anche per le algebre di Lie.

Classificazione delle algebre di Lie

Delle algebre di Lie si conosce una classificazione abbastanza soddisfacente e questa fornisce un notevole aiuto alla classificazione dei gruppi di Lie.

Ad esempio i gruppi di Lie possono essere classificati in relazione a diversi generi di proprietà:

- algebriche: (semplice, semisemplice, solubile, nilpotente, abeliano);
- connessione: gruppi connessi o gruppi semplicemente connessi;
- compattezza.

Ogni algebra di Lie reale o complessa a dimensioni finite può ottenersi come algebra di Lie di un gruppo di Lie reale o complesso semplicemente connesso (*teorema di Ado*).

Possono però trovarsi più gruppi di Lie, anche non semplicemente connessi, che danno origine alla stessa algebra di Lie. Per esempio i gruppi $SO(3)$ (matrici con entrate reali ortogonali 3×3 con determinante 1) e $SU(2)$ (matrici con entrate complesse unitarie 2×2 con determinante 1) danno entrambi origine alla stessa algebra di Lie, precisamente la \mathbf{R}^3 munita del prodotto esterno.

Una caratterizzazione meno stringente di quella di algebra di Lie abeliana è quella di *algebra di Lie nilpotente*; g si dice *nilpotente* se la serie centrale inferiore: $g > [g, g] > [[g, g], g] > [[[g, g], g], g] > \dots$ si riduce al vettore zero da un certo punto in poi. Per il teorema di Engel un'algebra di Lie è nilpotente se e solo se per ogni u in g la mappa

$$\text{ad}(u): g \rightarrow g$$

definita da

$$\text{ad}(u)(v) = [u, v]$$

è nilpotente. Ancora meno stringente, un'algebra di Lie g è detta *solubile* se i termini della serie derivata: $g > [g, g] > [[g, g], [g, g]] > [[[g, g], [g, g]], [g, g]] > \dots$ si riducono al vettore zero da un certo punto in poi. Una sottoalgebra solubile massimale è chiamata *sottoalgebra di Borel*.

Un'algebra di Lie g è detta *semisemplice* se l'unico ideale solubile di g è banale. Equivalentemente, g è semisemplice se e solo se la cosiddetta forma di Killing $K(u, v) = \text{tr}(\text{ad}(u)\text{ad}(v))$ è non degenere: qui, tr denota l'operatore traccia.

Quando il campo F ha caratteristica zero, g è semisemplice se e solo se ogni sua rappresentazione è completamente riducibile, cioè se e solo se per ogni sottospazio invariante della rappresentazione c'è un complemento invariante (*teorema di Weyl*).

Un'algebra di Lie è detta *semplice* se non è abeliana e non possiede ideali non banali. Le algebra di Lie semplici costituiscono una sottoclasse delle semisemplici, mentre le più generali algebra di Lie semisemplici sono esprimibili come somme dirette di algebra di Lie semplici. Le algebra di Lie complesse semisemplici sono classificate attraverso i loro sistemi di radici.

Conclusioni

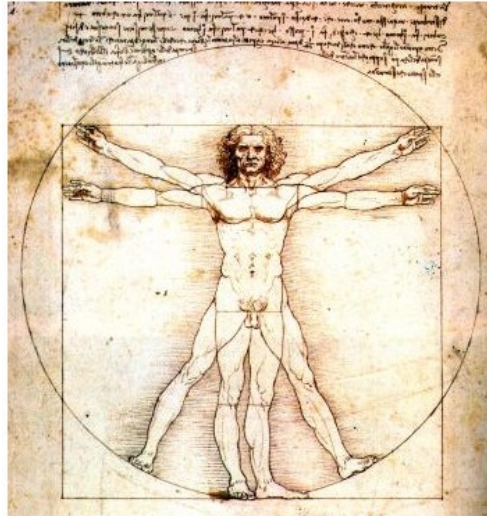
I due settori della fisica con la GUT e la matematica con i gruppi di Lie sono fortemente legati. Riuscire a trovare un modello matematico che possa prevedere determinati fenomeni e comportamenti delle particelle note o di quelle da individuare ancora sarebbe un risultato di notevole importanza. Già solo risolvere il secondo problema del Millennio, quindi, sarebbe un notevole passo avanti dell'umanità.

Il settore matematico della teoria dei gruppi che interessa il secondo Problema del Millennio, in realtà, è tra i più difficili e complessi che esistano e, quindi, si ottengono progressi molto lentamente.

APPENDICE

Notation	Group	Description
$GL(V)$	General Linear group	Group of all linear transformations on vector space V .
$GL(n, \mathbb{R})$	General Linear Group	Group of all invertible $n \times n$ matrices with real entries
$GL(n, \mathbb{C})$	General Linear Group Note that $GL(n, \mathbb{R})$ is a subgroup of $GL(n, \mathbb{C})$	Group of all invertible $n \times n$ matrices with complex entries
$SL(n, \mathbb{R})$	Special Linear Group	Group of all $n \times n$ matrices of real entries with determinant equal to 1. In other words, this is the group All volume-preserving linear transformations in \mathbb{R}^n .
$O(p, q)$	Orthogonal Group	Here, p and q are nonnegative integers with $p + q = n$. Let g be a metric on \mathbb{R}^n with signature (p, q) . More specifically, we define g to be the following: $g(v, w) = v_1w_1 + \dots + v_pw_p - v_{p+1}w_{p+1} - \dots - v_{p+q}w_{p+q}$. Then $O(p, q)$ is the group of $n \times n$ matrices T that preserve g . That is, $g(Tv, Tw) = g(v, w)$ for all $v, w \in \mathbb{R}^n$
$SO(p, q)$	Special Orthogonal Group	Group of matrices in $O(p, q)$ that have determinant equal to 1. $O(n)$ $p=n$ and $q=0$, with g being the standard Euclidean metric. $SO(n)$
$SO(3)$		According to above notation, this is just a group of all rotations in \mathbb{R}^3 .
$SO(3, 1)$	Lorentz Group	Group of 4×4 matrices preserving the standard Minkowski metric. Hence the Lorentz transformation is also contained in this group. In fact, $SO(n, 1)$ for any $n \geq 1$ is a Lorentz group in Minkowski spacetime.
$U(n)$	Unitary Group	Group of all unitary $n \times n$ complex matrices. That is, this is the group of all those linear transformations T such that: $\langle Tv, Tw \rangle = \langle v, w \rangle$, where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is usual inner product on \mathbb{C}^n and $v, w \in \mathbb{C}^n$
$SU(n)$	Special Unitary Group	All those elements in $U(n)$ whose determinant is equal to 1. $SU(n)$ is a subgroup of $U(n)$.

.



Riferimenti

- [1] Lisa Randall - Passaggi curvi – I misteri delle dimensioni nascoste dell'universo
- [2] Albert Einstein, Leopold Infeld – L'evoluzione della Fisica
- [3] Mikio Kaku – Mondi Paralleli
- [4] FritJof Capra – Il Tao della fisica - Adelphi
- [5] RaminusFalcon, FilippoQ - Geometrie non euclidee - wikibook
- [6] Mario Livio - L'Equazione impossibile - BUR
- [7] Marcus Du Sautoy – Il disordine perfetto - Rizzoli
- [8] Maria Grazia Bianchi, Anna Grillo – Introduzione alla Matematica discreta

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.