Il postulato di Bertrand
e la congettura di Legendre

ing. Rosario Turco, prof. Maria Colonnese

Introduzione

In questo lavoro discutiamo dei legami tra la *congettura di Legendre* ed il *postulato di Bertrand*, quest'ultimo noto anche come *Teorema di Chebiscev*.

Il *postulato di Bertrand* (PB) dice che:

$$\forall n > 1, \exists p \in \mathrm{P} : n < p < 2n$$

In altri termini per ogni intero n maggiore di 1, esiste almeno un numero primo tra n e 2n, ovvero che:

$$\pi(2n) > \pi(n)$$

La *congettura di Legendre*, afferma che esiste sempre un numero primo compreso fra n^2 ed $(n + 1)^2$, cioè:

$$\forall n > 1, \exists p \in \mathrm{P} : n^2 < p < (n+1)^2$$

Questa congettura fa parte dei *problemi di Landau* e, fino ad oggi, non è stata ancora dimostrata.

In [3] abbiamo visto delle evidenze sulla congettura, una proposta di soluzione affermativa, delle formule per le stime del numero di primi in un intervallo quadratico.

In questo lavoro sottolineiamo, invece, che la congettura di Legendre è una generalizzazione del postulato di Bertrand e cercheremo di far leva su questo fatto per verificare se è possibile ottenere dei risultati ulteriori.

Il *postulato di Bertrand* generalizzato (PBG) può essere formulato come segue:

$$\forall n > 1, k \leq n \ \exists \mathrm{p} \in \mathrm{P}: kn < p < (k+1)n \qquad (1)$$

Il PBG se k=1 è il postulato di Bertrand già dimostrato; inoltre *Bachraoui* (vedi [2]) lo ha dimostrato vero per k=2.

Se in (1) si pone k = n si ottiene una congettura simile a quella di Legendre, un po' più restrittiva come confine superiore.

Un'idea, quindi, può essere quello di lavorare sul PBG e utilizzare il calcolo combinatorio come in [1] e [4].

Il lavoro è diviso, quindi, in PRIMA PARTE Postulato di Bertrand, SECONDA PARTE Postulato di Bertrand generalizzato e congettura di Legendre.

Definizioni

Definiamo con $\varpi(a,b)=\prod_{a<p\le b} p$ il prodotto di primi nell'intervallo a,b con i primi maggiori di a, ma non maggiori di b; con $\rho(a)=\prod_{p\le a} p$ il prodotto di primi non maggiori di a.

Definiamo il coefficiente binomiale col simbolo:

$$\binom{n}{h}=\frac{n!}{h!(n-h)!}$$

che rappresenta il raggruppamento di un sotto-insieme di h elementi rispetto ad un insieme di n elementi; quindi con $0 \le h \le n$. Faremo anche uso della formula

$$\binom{n}{h}=\binom{n}{n-h}.$$

Si ricorda che la *formula del binomio di Newton comporta che*:

$$(a+b)^n=\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}a^h b^{n-h}.$$

Definiamo, poi, con la notazione p|c che p è un divisore di c; mentre col simbolo $\lfloor x \rfloor$ intendiamo il floor di x, cioè il più grande intero minore o uguale a x. Infine con p_k indicheremo il k-esimo numero primo.

PRIMA PARTE

Postulato di Bertrand

Per una maggiore comprensibilità, introdurremo una serie di Lemmi, che hanno validità di Teoremi, sulla scia del lavoro [4].

Sebbene la dimostrazione sia abbastanza lunga, non è difficile da comprendere. Essa sfrutta semplicemente il calcolo binomiale e delle considerazioni sugli esponenti in una fattorizzazione nell'applicazione del Teorema Fondamentale dell'Aritmetica e questo dimostra ancor di più la grande genialità di Erdos. Sorprende soprattutto la sua profondità di visione globale.

Lemma 1 – Per ogni n positivo è sempre $\binom{2n}{n}<4^n$.

Dim.

$$4^n=2^{2n}=(1+1)^{2n}=\sum_{h=0}^{2n}\binom{2n}{h}>\binom{2n}{n}$$

Lemma 2 – Se n è dispari per ogni 0 $\leq$k$\leq$n è sempre $\binom{n}{k} < 2^{n-1}$.

Dim.

N è dispari allora:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} = 2\sum_{h=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{h} \geq 2\binom{n}{k} \Rightarrow 2^{n-1} \geq \binom{n}{k}$$

Lemma 3 – Se p è primo con p>n allora p non è un divisore di n!.

Dim.
La dimostrazione è banale perché un primo p non può essere scritto come prodotto di primi più piccoli di p. Quindi se p>n allora anche se abbiamo che:
n! = n *(n-1)*(n-2)…3*2*1,
p non può essere un suo divisore.

Lemma 4 – Se a è un numero reale con a$\geq$2, allora il prodotto dei numeri primi minori o uguali ad a è minore di 4^a, ovvero $\rho(a) = \prod_{p \leq a} p < 4^a$

Dim.

Per 2 $\leq$ a $\leq$ 3 è banalmente vero. Se è vero per ogni intero dispari n $\geq$ 3 sarà vero anche per ogni numero reale b $\geq$ 3, perché dato un qualsiasi b $\geq$ 3 esiste sempre un dispari n $\leq$ b $\leq$ n+2 e, quindi, poiché b precede n+2 allora il numero di primi minori di b sono uguali a quelli di n per cui:

$$\prod_{p \leq b} p = \prod_{p \leq n} p < 4^n \leq 4^b$$

Quindi dobbiamo provare che il Lemma è vero per ogni intero n $\geq$3 e lo facciamo per induzione.

Per n=3 è vero perché 6 < 64, che rappresenta il punto di partenza dell'induzione. Per un dispari n $\geq$ 5, facciamo l'ipotesi che il Teorema sia vero per ogni dispari k < n e scegliamo un segno $\pm$ tale che k = (n $\pm$ 1)/2 sia dispari. In tal modo è anche k $\geq$ 3.

E' anche evidente che n = 2k $\pm$ 1 e n - k = 2k $\pm$ 1 - k $\leq$ k + 1, cioè n - k $\leq$ k + 1. Quest'ultimo fatto ci interessa per vedere un'eventuale divisibilità di p per (n-k)!.

Per cui se supponiamo k < p $\leq$ n allora per il Lemma 3 è p|n! ma p non è divisore di k!. Se p > n-k allora p non è nemmeno divisore di (n-k)!.

Se p è un divisore di n! ne consegue che $p \mid \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Questo è vero per k < p $\leq$ n. Allora possiamo affermare che:

$$\prod_{k<p\le n} p \mid \binom{n}{k} \Rightarrow \prod_{k<p\le n} p \le \binom{n}{k}$$

Per cui se usiamo nelle ultime relazioni il Lemma 2 è:

$$\prod_{k<p\le n} p \le 2^{n-1}$$

A questo punto la relazione precedente possiamo spezzarla nel prodotto di due parti, una per p<k ed un'altra con k < p $\le$ n:

$$\prod_{p\le n} p = \prod_{p<k} p \cdot \prod_{k<p\le n} p$$

Poiché abbiamo ipotizzato precedentemente k dispari e minore di n, la prima parte è minore di 4^k, mentre il secondo prodotto sappiamo che è minore o uguale a 2^{n-1}, per cui è:

$$\prod_{p\le n} p < 4^k \cdot 2^{n-1} = 2^{2k} \cdot 2^{n-1} = 2^{2k+n-1}$$

Adesso si osserva che:

$$2k \le n+1 \Rightarrow 2k+n \le 2n+1 \Rightarrow 2k+n-1 \le 2n$$

Quindi:

$$\prod_{p\le n} p \le 2^{2n} = 4^n$$

che dimostra finalmente il Lemma 4.

Lemma 5 – Se n > 1 allora è $\binom{2n}{n} > \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$

Dim.

Si ottiene per induzione e tenendo conto del Lemma 1.

Adesso ci interessa quali primi p dividono $\binom{2n}{n}$ **e con quale esponente.**

Lemma 6 – Se p è primo il più grande esponente v che divide n! è:

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor \quad \textbf{(a)}$$

La somma nella (a) è sempre finita, perché al crescere di j è p^j > n e il rapporto tende a zero.

Ad esempio con p=2, la più grande potenza che divide 55! è 2^{50}, se si applica la definizione precedente difatti:

floor(55/2)+ floor(55/4) + floor(55/8) + floor(55/16) + floor(55/32) =
= 27 + 13 + 6 + 3 + 1 = 50.

Con quanto visto prima potremmo indicare, ad esempio, con v_p il più grande intero esponente tale che $p^{v_p} \mid \binom{2n}{n}$.

Sappiamo anche che i fattori primi di (2n)! sono tutti minori o uguali a 2n; per cui potremmo dire che:

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p \le 2n} p^{v_p}$$

Ad esempio con PARI/GP risulta che per $\binom{34}{17}$ è:

```
? r = binomial(34,17)

%17 = 2333606220

? factor( r )
%18 =

[2 2]

[3 3]

[5 1]

[11 1]

[19 1]

[23 1]

[29 1]

[31 1]
```

La fattorizzazione a destra delle parentesi quadre mostra gli esponenti v_p che stiamo cercando; il coefficiente binomiale scomposto in fattori è, quindi, pari a: 2^2*3^3*5*11*19*23*29*31 e quindi v_2=2, v_3=3, v_5=1, v_{11}=1, v_{19}=23, v_{23}=1, v_{29}=1, v_{31}=1.

Adesso sapendo anche che:

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!n!} \quad \textbf{(b)}$$

allora, tenendo conto del Lemma 6, ne consegue che:

Lemma 7 – Dato n, $v_p = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^j} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor \right)$ **(c)**

La (c) esce tenendo conto della (a), dove al posto di n c'è $\binom{2n}{n}$, e tenendo conto della (b). Nella (c) le differenze valgono 0 se il rapporto è pari, 1 in caso contrario.

Lemma 8 – $p^{v_p} \le 2n$
Dim.

Se t è il massimo esponente per cui

$$p^t \leq 2n$$

vuol dire che per j$\geq$t+1 $p^j > 2n$, cioè da t+1 in poi tutti gli esponenti sono nulli nella (c). Tra l'altro nella (c) i termini valgono 0 o 1 per cui $v_p \leq t$ e di conseguenza $p^{v_p} \leq p^t \leq 2n$, che dimostra il Lemma 8.

Il Lemma 8 ci suggerisce una tecnica di valutazione degli esponenti: non solo occorre che $p \leq 2n$ ma anche che $p^{v_p} \leq 2n$.

Ad esempio se n=17 come nell'esempio precedente allora possiamo stabilire subito che v_3 non può essere maggiore di 3 perché 2n=34 $\rightarrow$ 3^3$\leq$ 34; per conseguenza per ogni 5 < p < 34 ne consegue anche che v_p non può essere maggiore di 1.

Con questa tecnica possiamo lavorare sugli esponenti ed introdurre l'ultimo Lemma.

Lemma 9 – Supponiamo $n \geq 3$

1. Se $p \geq \sqrt{2n}$ allora $v_p \leq 1$
2. Se $2n/3 < p \leq n$ allora $v_p = 0$
3. Se $n < p \leq 2n$ allora $v_p = 1$

Ora abbiamo quasi tutti gli elementi per dimostrare il Teorema finale.

Teorema (Postulato di Bertrand)
Per ogni n>1 è $\pi(2n) - \pi(n) > 0$

Corollario del Teorema
Per ogni n$\geq$1 $p_{n+1} < 2p_n$

Il corollario si intuisce se consideriamo ad esempio la sequenza di numeri primi 3,5,7,11,13… Preso difatti il doppio di un numero primo qualsiasi, si vede che il successivo è inferiore di tale doppio. Ad esempio il 7 è minore di 2*5.

Per dimostrare il Teorema dobbiamo ricorrere al Teorema dei Numeri Primi (TNP) e osservare i confini superiori e inferiori. Su questi tipi di ragionamenti un vero maestro era proprio Chebiscev, che non per niente ha dimostrato per prima il postulato, ora anche noto col nome di Teorema di Chebiscev. Proseguiamo con introdurre Lemmi col valore di Teoremi.

Lemma 10 – Per ogni n>1 è:

$$\frac{n}{3\log(2n)} < \pi(2n) - \pi(n) < \frac{7n}{5\log(n)}$$

Occorre ritornare un attimo al coefficiente binomiale spezzandolo in due prodotti:

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p \leq 2n} p^{v_p} = \prod_{p \leq n} p^{v_p} \cdot \prod_{n < p \leq 2n} p^{v_p} \quad \textbf{(d)}$$

Applichiamo il Lemma 9 punto 3, l'esponente vale 1, per cui la (d) diventa:

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p \le n} p^{v_p} \cdot \prod_{n < p \le 2n} p \qquad \textbf{(e)}$$

Per il punto 2 del Lemma 9, se 2n/3 < p $\leq$ n allora v_p = 0 allora la (e) diventa:

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p \le 2n/3} p^{v_p} \cdot \prod_{n < p \le 2n} p \ = Q_n \cdot P_n \quad (\dagger)$$

A questo punto vogliamo trovare un confine superiore per Q_n. Possiamo scomporre Q_n in due prodotti per sfruttare ancora il Lemma 9, cioè il prodotto dei primi per p $\leq$ 2n/3 per cui v_p = 1 e il prodotto dei primi p $\leq$ 2n/3 dove v_p > 1. Per il punto 1 del Lemma 9 se v_p > 1 allora $p < \sqrt{2n}$ per cui:

$$p < \sqrt{2n} \Rightarrow \prod_{n < p \le 2n} p \ \le \prod_{p < \sqrt{2n}} p^{v_p}$$

E quindi:

$$Q_n = \prod_{p \le 2n/3} p^{v_p} = \prod_{p \le 2n/3} p \cdot \prod_{p \le 2n/3} p^{v_p} \le \prod_{p \le 2n/3} p \cdot \prod_{p < \sqrt{2n}} p^{v_p} \ (\dagger\dagger)$$

Da qui dobbiamo fare una serie di considerazioni:

1. **se usiamo il Lemma 4 precedente è $\prod_{p \le 2n/3} p < 4^{2n/3}$.**
2. **Per il secondo prodotto, invece, $p^{v_p} \le 2n$. Per cui $\prod_{p < \sqrt{2n}} p^{v_p} \le (2n)^{\chi}$ dove χ è il numero di primi $p < \sqrt{2n}$. C'è da considerare ancora che i primi sono dispari e che il numero primi minore di un Y è sicuramente minore di Y/2 per cui si può scrivere che: $\chi \le \sqrt{2n}/2$ e che $\prod_{p < \sqrt{2n}} p^{v_p} \le (2n)^{\sqrt{2n}/2}$.**

A questo punto se mettiamo insieme tutte le considerazioni di sopra, dalla ($\dagger\dagger$) otteniamo che:

$$Q_n < 4^{2n/3} \cdot (2n)^{\sqrt{2n}/2} \ \textbf{da cui}$$
$$Q_n^{-1} > 4^{-2n/3} \cdot (2n)^{-\sqrt{2n}/2}$$

Ora ritornando alla ($\dagger$) e teniamo presente il Lemma 5, otteniamo che:

$$\binom{2n}{n} = Q_n \cdot P_n \Rightarrow P_n = \binom{2n}{n} \cdot Q_n^{-1} > \binom{2n}{n} 4^{-2n/3} \cdot (2n)^{-\sqrt{2n}/2}$$

da cui:

$$P_n > \frac{4^n}{2\sqrt{n}} 4^{-2n/3} \cdot (2n)^{-\sqrt{2n}/2} = 4^{n/3} \left(2\sqrt{n} (2n)^{\sqrt{2n}/2} \right)^{-1}$$

Poniamo adesso:

$$\left(2n\right)^{\omega(n)}=4^{n/3}\left(2\sqrt{n}(2n)^{\sqrt{2n}/2}\right)^{-1}$$

Per cui:

$$\omega(n)=\frac{\log\left(4^{n/3}\left(2\sqrt{n}(2n)^{\sqrt{2n}/2}\right)^{-1}\right)}{\log\left(2n\right)}\quad \textbf{(*)}$$

Ricordando la **(†)**

$$P_n=\prod_{n<p\leq 2n}p\quad \textbf{(+)}$$

Stiamo parlando, quindi, dei primi tra n e 2n, a cui fa riferimento il postulato di Bertrand e noi sappiamo dal TNP che sono esattamente $\pi(2n)-\pi(n)$ **per cui:**

$$P_n\leq\left(2n\right)^{\chi}=\left(2n\right)^{\pi(2n)-\pi(n)}$$

$$P_n\leq\left(2n\right)^{\chi}=\left(2n\right)^{\pi(2n)-\pi(n)}\Rightarrow\left(2n\right)^{\omega(n)}<P_n\leq\left(2n\right)^{\pi(2n)-\pi(n)}$$

Da cui:

$$\omega(n)<\pi(2n)-\pi(n)\quad \textbf{(++)}$$

Ora ritorniamo a (*) e troviamo che:

$$\omega(n)\log\left(2n\right)=n/3\log(4)-\log(2\sqrt{n})-\left(\sqrt{2n}/2\right)\log\left(2n\right)$$

Se mettiamo in evidenza n/3:

$$\omega(n)\log\left(2n\right)=n/3\left[\log(4)-3/n\cdot\log(2\sqrt{n})-\frac{3\log\left(2n\right)}{\sqrt{2n}}\right]\quad \textbf{(**)}$$

dove $g(x)=\left[\log(4)-3/x\cdot\log(2\sqrt{x})-\frac{3\log\left(2x\right)}{\sqrt{2x}}\right]$

Se si considera $\lim_{x\to\infty}g(x)=\log(4)\approx 1.38629...$ perché il log(x) tende a infinito più lentamente di x^t e inoltre

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(2\sqrt{x})}{x}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(2x\right)}{\sqrt{2x}}=0$$

Questo vuol dire che esiste un x0 per cui g(x)>1 e contemporaneamente esiste un n0 per cui la parte in parentesi della (**) è > 1. Se si fa qualche calcolo si vede che g(2190)≅0.999995 mentre g(2191)≅ 1.00006. Per cui dalla (**):

per n > 2190 $\quad \omega(n)>\dfrac{n}{3\log\left(2n\right)}$

Dalla (++) ne consegue che $\pi(2n)-\pi(n)>\dfrac{n}{3\log\left(2n\right)}$.

Ritornando alla (+) e passando ai logaritmi è: $\log(P_n) = \sum_{n<p\le 2n} \log p$. Però ogni p della sommatoria è p>n per cui log p > log n, quindi è:

$$\log(P_n) = \sum_{n<p\le 2n} \log p \ge \left[\pi(2n) - \pi(n)\right]\log n$$

Inoltre è anche

$P_n \le \binom{2n}{n}$ e che è vero il Lemma 1, quindi:

$$\log P_n \le \log\binom{2n}{n} < \log(4^n) = n\log(4) \Rightarrow \left[\pi(2n) - \pi(n)\right]\log n < n\log(4)$$

Da qui è:

$$\pi(2n) - \pi(n) < \frac{n\log(4)}{\log n}$$

Ora poiché 7/5=1.4 e log(4)≅1.38629… allora $\pi(2n) - \pi(n) < \frac{7n}{5\log n}$

Questo dimostra il Lemma 10. A questo punto è automaticamente dimostrato il postulato di Bertrand perché effettivamente $\pi(2n) - \pi(n) > 0$ **poiché** $\frac{n}{3\log(2n)} < \pi(2n) - \pi(n) < \frac{7n}{5\log n}$.

Ad esempio, se n=5 2n=10, $\pi(10) - \pi(5) = 2$ allora 5/3*(1/log(10))=0.7238… e 7*5/5*(1/log(5))=4.3493…

SECONDA PARTE

Postulato di Bertrand generalizzato

A questo punto vediamo se è possibile capire qualcosa di più se k = n nel postulato generalizzato e vediamo se, trovando dei confini superiori e inferiori tali che possiamo affermare:

$$\forall n > 1,\ \pi(n^2 + n) - \pi(n^2) > 0$$

Se sarà vero il postulato di Bertrand generalizzato, allora abbiamo il:

Corollario
$\forall n > 1, \pi(n^2 + n) - \pi(n^2) \le \pi((n+1)^2) - \pi(n^2) \Rightarrow \pi((n+1)^2) - \pi(n^2) > 0$
Quindi sarà vera la congettura di Legendre.

Proveremo a introdurre dei Lemmi e a far uso anche dei Lemmi precedenti, secondo le stesse definizioni.

Lemma 11 – $\prod_{p\le n^2} p \ < 4^{n^2} = 2^{2n^2}$

Dim.

Dimostrazione analoga al Lemma 4.

Lemma 12 - $p^{vp} \le n(n+1)$

Dim.

E' una conseguenza del Lemma 8, generalizzato a n(n+1).

Lemma 13 - per n>1, $\binom{\mathrm{n(n+1)}}{\mathrm{n}^2} \le 2^{n(n+1)}$

Dim.

Con m =(n+1)n è:

$$2^m = (1+1)^m = \sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} = \sum_{h=0}^{(n+1)n} \binom{(n+1)n}{h} \ge \binom{(n+1)n}{n^2} \Rightarrow 2^{(n+1)n} \ge \binom{(n+1)n}{n^2}$$

Poiché sono veri anche il Lemma 3, il Lemma 4 ed il Lemma 6, significa che per $n^2 < p \le n(n+1)$, p è un divisore di n(n+1)! E di conseguenza $p^{v_p} \mid \binom{(n+1)n}{n^2}$ per cui possiamo anche qui spezzare il coefficiente binomiale nel prodotto di primi nel seguente modo:

$$\binom{(n+1)n}{n^2} = \prod_{p \le (n+1)n} p^{v_p} = \prod_{p \le n^2} p^{v_p} \cdot \prod_{n^2 < p \le (n+1)n} p^{v_p} \quad \textbf{(***)}$$

Lemma 14 - Se n > 1 allora è $\binom{n(n+1)}{n^2} > 2^n$

Dim.

Si ottiene tenendo conto del Lemma 13 e dividendo il secondo termine per 2^{n^2}, per cui:

$$\binom{\mathrm{n(n+1)}}{\mathrm{n}^2} > 2^{n(n+1)} 2^{n^2} = 2^n \ .$$

Esempio:
n=3
(n+1)n=12
n^2=9
binomial(12,9)=220
$2^n=2^3=8$

Lemma 15 - Dato n, $v_p = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (n^2 - n - i)}{p^j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n!}{p^j} \right\rfloor \right)$

Dim.

Discende dalla definizione $v_p = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{\binom{n(n+1)}{n^2}}{p^j} \right\rfloor$; infatti è:

$$\binom{(n+1)n}{n^2} = \frac{(n^2+n)!}{n^2!n!} = \frac{n^2! \cdot (n^2+n)(n^2+n-1)...(n^2+n-(n-1))}{n^2!n!} = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(n^2-n-i)}{n!}$$

Il Lemma 8 ci suggerisce anche qui una tecnica di valutazione degli esponenti: non solo occorre che p $\leq$ n(n+1) ma anche che $p^{v_p} \leq$ n(n+1).

Ad esempio se n=3 allora possiamo stabilire subito che v_3 non può essere maggiore di 2 perché n(n+1)=12 $\rightarrow$ 3^2$\leq$ 12; per conseguenza per ogni 9 < p $\leq$ 12 ne consegue anche che v_p non può essere maggiore di 2.

Con questa tecnica degli esponenti introduciamo anche l'ultimo Lemma.

Lemma 16 – Supponiamo n $\geq$ 3

1. **Se** $p \geq \sqrt{n(n+1)}$ **allora $v_p \leq 1$**
2. **Se n^2 < p $\leq$ n(n+1) allora v_p = 1**

Esempio
n=5
n^2=25
n(n+1)=30
radice = sqrt(n(n+1))= 5.477225575051661134569697828
p=7
n(n+1)/3=10

per la 1) v7=1 altrimenti 7^2>30
per la 2) 25 < 29 < 30 v29=1 altrimenti 29^2>30

Ora ripartiamo dall'ultima espressione (***):

$$\binom{(n+1)n}{n^2} = \prod_{p\leq(n+1)n} p^{v_p} = \prod_{p\leq n^2} p^{v_p} \cdot \prod_{n^2<p\leq(n+1)n} p^{v_p}$$

Dal Lemma 15 punto 3, possiamo riscriverla come:

$$= \prod_{p\leq n^2} p^{v_p} \cdot \prod_{n^2<p\leq(n+1)n} p \ = Q_n \cdot P_n$$

Dove:

$$Q_n = \prod_{p\leq n^2} p^{v_p}$$

$$P_n = \prod_{n^2<p\leq(n+1)n} p \quad \text{(^)}$$

Vediamo adesso se esiste un limite superiore per Q_n.

Ora se:

$$p < \sqrt{n(n+1)} \Rightarrow \prod_{p \le n^2} p \ \le \prod_{p < \sqrt{n(n+1)}} p^{v_p}$$

C'è anche da considerare che:

1. **Dal Lemma 11** $\prod_{p \le n(n+1)} p < 2^{2n(n+1)}$

2. **dal Lemma 12** $p^{vp} \le n(n+1)$ **per cui è anche** $\prod_{p < \sqrt{n(n+1)}} p^{v_p} \le (n(n+1))^{\chi}$ **dove** χ **è il numero di primi** $p < \sqrt{n(n+1)}$**. C'è da considerare ancora che i primi sono dispari e che il numero primi minore di un Y è sicuramente minore di Y/2 per cui si può scrivere che:** $\chi \le \sqrt{n(n+1)}/2$ **e che** $\prod_{p < \sqrt{n(n+1)}} p^{v_p} \le (n(n+1))^{\sqrt{n(n+1)}/2}$**.**

Per cui è:

$$Q_n = \prod_{p \le n^2} p^{v_p} = \prod_{p \le n^2} p \ \cdot \prod_{p \le n^2} p^{v_p} \le \prod_{p \le n^2} p \ \cdot \prod_{p < \sqrt{n(n+1)}} p^{v_p}$$

Da qui:

$$Q_n < 2^{2n^2} \left(n(n+1)\right)^{\sqrt{n(n+1)}/2}$$

da cui

$$Qn^{-1} > 2^{-2n^2} \left(n(n+1)\right)^{-\sqrt{n(n+1)}/2}$$

A questo punto ripartendo dalla (***) si ottiene che:

$$\binom{(n+1)n}{n^2} = \prod_{p \le n^2} p^{v_p} \cdot \prod_{n^2 < p \le (n+1)n} p \ = Q_n \cdot P_n$$

$$P_n = \binom{(n+1)n}{n^2} Q_n^{-1} > \binom{(n+1)n}{n^2} 2^{-2n^2} \left(n(n+1)\right)^{-\sqrt{n(n+1)}/2}$$

$$P_n > 2^n \cdot 2^{n^2} \left(n(n+1)\right)^{-\sqrt{n(n+1)}/2} = \frac{2^{n(1-n)}}{\sqrt{\left(n(n+1)\right)^{\left(\sqrt{n(n+1)}\right)}}} = \frac{2^{n(1-n)} \sqrt{\left(n(n+1)\right)^{\left(\sqrt{n(n+1)}\right)}}}{\left(n(n+1)\right)^{\sqrt{n(n+1)}}}$$

Poniamo adesso:

$$(n(n+1))^{\phi(n)} = \frac{2^{n(1-n)} \sqrt{\left(n(n+1)\right)^{\left(\sqrt{n(n+1)}\right)}}}{\left(n(n+1)\right)^{\sqrt{n(n+1)}}} \quad \textbf{(=)}$$

Ora siamo pronti a dimostrare il

Lemma 17 - Per ogni n>1 è:

$$0<\pi(n(n+1))-\pi(n^2)<\frac{7n(n+1)}{5\log(n(n+1))}$$

Dim.

Se dimostriamo il Lemma 17 è dimostrato il postulato di Bertrand generalizzato.

Dalla (=) passando ai log otteniamo che:

$$\phi(n)\log\left(n(n+1)\right)=\log\left[\frac{2^{n(1-n)}\sqrt{\left(n(n+1)\right)^{\left(\sqrt{n(n+1)}\right)}}}{\left(n(n+1)\right)^{\sqrt{n(n+1)}}}\right]$$

Da qui è evidente che per n→∞ la parentesi quadra tende a zero perché il numeratore va all'infinito più lentamente.

Ora deve essere:

$$\phi(n)>0$$

perché altrimenti la (=) varrebbe 1 per le regole delle potenze: un numero finito elevato a zero dà 1, il che porterebbe ad un assurdo.

Ritornando alla (^) e passando ai logaritmi è:

$$\log(P_n)=\prod_{n^2<p\leq(n+1)n}\log p\ .$$

Però ogni p della sommatoria è p>n(n+1) per cui log p > log n(n+1), quindi è:

$$\log(P_n)=\prod_{n^2<p\leq(n+1)n}\log p\ \geq\left[\pi(n(n+1))-\pi(n^2)\right]\log n(n+1)$$

Inoltre abbiamo visto che è anche

$P_n\leq\binom{n(n+1)}{n^2}$ **e quindi:**

$$\log(P_n)\leq\log\binom{n(n+1)}{n^2}<\log(4^{n(n+1)})=n(n+1)\log 4\Rightarrow\left[\pi(n(n+1))-\pi(n^2)\right]\log n(n+1)<n(n+1)\log 4$$

Ora poiché 7/5=1.4 e log(4)≅1.38629… allora:

$$0<\left[\pi(n(n+1))-\pi(n^2)\right]<\frac{n(n+1)\log 4}{\log n(n+1)}\approx\frac{7n(n+1)}{5\log n(n+1)}$$

Questo dimostra il Lemma 17. A questo punto è automaticamente dimostrato il postulato di Bertrand generalizzato ed il suo Corollario (congettura di Legendre):

Corollario della congettura di Legendre

Poiché $\forall n>1,\pi(n^2+n)-\pi(n^2)\leq\pi((n+1)^2)-\pi(n^2)\Rightarrow\pi((n+1)^2)-\pi(n^2)>0$

Quindi è vera la congettura di Legendre.

Riferimenti
[1] http://it.wikipedia.org/wiki/Dimostrazione_del_postulato_di_Bertrand
[2] M. El Bachraoui. Primes in the Interval [2n,3n]. International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 1(3):617-621, 2006.
[3] La congettura di Legendre – R. Turco, M. Colonnese et al.
[4] Il postulato di Bertrand e i primi di Ramanujan - Umberto Cerruti
[5] Towards Proving Legendre's Conjecture – Shiva Kintali

CNR SOLAR
http://150.146.3.132/

Prof. Matthew R. Watkins
http://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin/zeta/tutorial.htm

ing. Rosario Turco
www.scribd.com/rosario_turco
Collections