La congettura di Legendre

ing. Rosario Turco, prof. Maria Colonnese, Dr. Michele Nardelli, prof. Giovanni Di Maria, Francesco Di Noto, prof. Annarita Tulumello

Introduzione

In questo lavoro discutiamo sui risultati ottenuti finora con la congettura di Legendre e le proposte da noi avanzate.

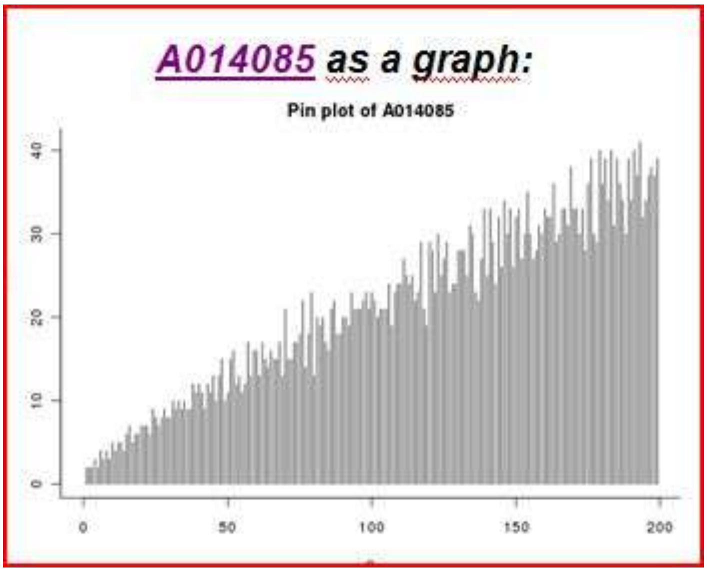
E' vera la congettura di Legendre?

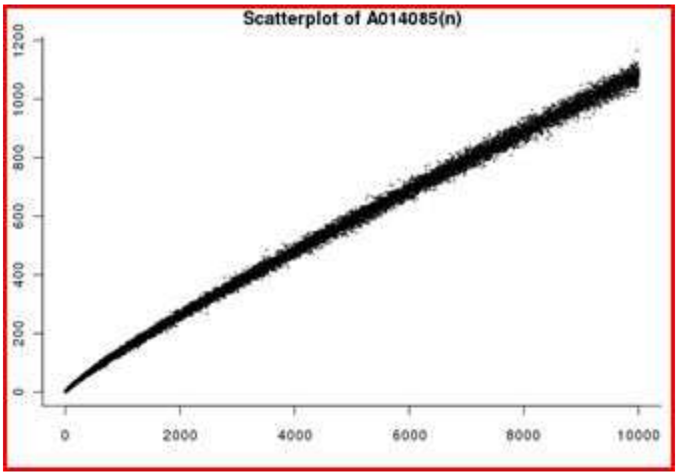
La congettura di Legendre, da Adrien-Marie Legendre, afferma che esiste sempre un numero primo compreso fra n^2 ed $(n+1)^2$. Questa congettura fa parte dei *problemi di Landau* e, fino ad oggi, non è stata dimostrata.

Nel 1965 *Chen Jingrun* dimostrò che esiste sempre un numero compreso fra n^2 ed $(n+1)^2$ che sia un primo o un semiprimo, ossia il prodotto di due primi. Inoltre, è noto che esiste sempre un numero primo fra n − nθ ed n, con θ = 23 / 42 = 0,547... (dimostrato da *J. Iwaniec e H. Pintz* nel 1984).

La sequenza dei più piccoli primi compresi fra n^2 ed $(n+1)^2$ è 2, 5, 11, 17, 29, 37, 53, 67, 83, 101, 127, 149, 173, 197, 227, 257, 293, 331, 367, 401, ... (Sequenza A007491 dell'OEIS).

La sequenza del numero di primi compresi fra n^2 ed $(n+1)^2$ è 2, 2, 2, 3, 2, 4, 3, 4, 3, 5, 4, 5, 5, 4, 6, 7, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 6, 9, ... (Sequenza A014085 dell'OEIS)" di cui riportiamo i due grafici successivi.





Nel seguito riformuliamo la congettura di Legendre nel seguente modo: *Sia p un numero primo, allora la congettura di Legendre si può esprimere con*

$$\exists p : (2+n)^2 < p < (2+n+1)^2, \forall n \in N \quad (1)$$

[1]

La (1) è valida per ogni n intero naturale, cioè n=0,1,2,... In (1) il segno < e non il segno $\leq$ deriva dal Lemma 1.

Lemma 1
Il quadrato di un numero intero non è un numero primo.

Esso è banale, perché deriva dal Teorema Fondamentale dell'Aritmetica: se il numero è primo il suo quadrato è composto. Se il numero è composto il quadrato è ancora composto.

Lemma 2
Siano x, a, d $\in N$*, con* $x = (2+n+1)^2$*,* $a = (2+n)^2$ *e* $d=x-a$*, allora* $d=2n+5$ *ed esso ha sempre gcd (a, d)=1*[2]

<u>*Dimostrazione Lemma 2*</u>

Per sostituzione da $d=x-a$ otteniamo $d=2n+5$. Se per assurdo supponiamo a and d con divisori comuni tali che gcd(a, d)$\neq$1; allora *a* è, per esempio, un multiplo di *d*:

$$a = k\, d\,,\ \ k\in N \ \ (\text{o } k \text{ è intero}).$$

Questo è lo stesso di scrivere:

$$a/d = k = [(2+n)^2]/(2n+5) = (n^2+4n+4)/2n+5$$

Essa è, quindi, una divisione tra due polinomi di secondo e primo grado.

Possiamo adesso usare la *regola di Ruffini* sui polinomi e dimostrare che k non è un intero, *contraddicendo l'ipotesi che* gcd(a, d)$\neq$1

[1] Usiamo la forma $(2+n)^2$ e non n^2 perché, come vedremo di seguito, l'integrale del Teorema dei Numeri Primi ha senso a partire dall'estremo 2.
[2] gcd è il MCD massimo comun divisore

$$n^2+4n+4 \quad | \quad 2n+5$$

$$-n^2-\frac{5}{2}n \qquad |\text{-------------}$$

$$\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}$$

$$------$$

$$// \quad \frac{3}{2}n+4$$

$$-\frac{3}{2}n-\frac{15}{4}$$

$$------$$

$$// \quad +\frac{1}{4}$$

Figure 1 – regola di Ruffini

La *regola di Ruffini* applicata nella figura ci suggerisce che otterremmo un resto, per cui k non è un intero; di conseguenza deve essere gcd(a, d)=1.

Lemma 3

Un intervallo rarefatto di numeri primi tra n!+2 e n! + n ha una distanza d3=n-2

L'affermazione è banale perché d3=n!+n-(n!+2)=n-2. Ad esempio l'intervallo tra 7!+2=5042 e 7!+7=5047 ha d3=5.

Proposta di dimostrazione della congettura di Legendre

Se sono veri Lemma 1, 2 e 3, è vera la congettura di Legendre.

Il Lemma 1 ci fa comprendere che nell'intervallo n^2 e (n+1)^2, gli estremi dell'intervallo non sono numeri primi.

Col Lemma 2 siamo arrivati al fatto che gcd(a, d)=1, per cui è anche soddisfatta l'assunzione di base della GRH. Ricordando che la GRH comporta che:

$$\pi(x,a,d)=\frac{1}{\varphi(d)}\int_2^x \frac{1}{\ln t}dt+O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad x\to\infty$$

Nel nostro caso a=$(2+n)^2$, x=$(2+n+1)^2$. Qui usiamo la forma $(2+n)^2$ e non n^2 perchè l'integrale abbia senso a partire da n=0.

Per semplicità quindi diciamo:

$$\pi(x,a,d) \approx \frac{1}{\varphi(d)}\cdot\left(\left[\frac{t}{\ln t}\right]_a^x\right)$$

Per esempio otteniamo la seguente tabella di valori:

$\pi(x, a, d)$	**value**
$\pi(9,4,5)$	0,302672
$\pi(16,9,7)$	0,279117
$\pi(25,16,9)$	0,332651
$\pi(36,25,11)$	0,22793
$\pi(49,36,13)$	0,212043
$\pi(64,49,15)$	0,310915
…	

Table 1 - $\pi(x, a, d)$

Come si vede non ci sono mai valori nulli, inoltre quando x cresce, p cresce come anche **d**, il che incrementa la probabilità dell'esistenza dei numeri primi nell'intervallo $(2+n)^2$ e $(2+n+1)^2$.

Ora ricordando il **postulato di Bertrand: "** Se *n* è un intero positivo più grande di 1, allora vi è sempre un numero primo *p* con $n < p < 2n$".

Per il postulato di Bertrand ora la distanza è: $d1 = 2n - n = n$ e per la congettura di Legendre è $d2 = 2n+5$, *così d2>d1 e tenendo conto della Lemma 1, anche se leviamo i due estremi abbiamo sempre che l'intervallo di Legendre è più grande di quello di Bertrand.*

Inoltre col Lemma 3, è anche d2>d3 rispetto agli intervalli rarefatti.

Allora una semplice conclusione è che nell'intervallo $(2+n)^2$ and $(2+n+1)^2$ vi è almeno un numero primo!

Una prima stima semplificata ed utile

Una versione semplificata del *Teorema dei Numeri Primi* dovuta a *Gauss* ci porta a dire che il numero di primi fino ad n è dato da:

$$\pi(n) \cong n/\log(n) \qquad (2)$$

La (2) ha una utilità di calcolo semplice e si rivela efficace anche nel calcolo approssimato del numero di primi con la congettura di Legendre, difatti se indichiamo con $\mathcal{L}e(n)$ il numero di primi tra n^2 e (n+1)^2 otterremo che:

$$\mathrm{Le}(n) = \frac{(n+1)^2}{\log((n+1)^2)} - \frac{n^2}{\log(n^2)} \qquad (3)$$

La (3) è una buona formula di calcolo approssimata per difetto.

Se si considera n=24 e n+1=25 è facile vedere che la (3) è in grado di dare un risultato approssimato per difetto rispetto al valore reale.

24^2 = 576
ln(576) = 6,35
n/log(n)= 90,70

25^2 = 625
ln(576) = 6,43
n/log(n)= 97,20

da qui la (3) ci da: 97,20 – 90,70 = 6,5≅7 numeri primi; mentre realmente sono 9, come si può vedere dalla sequenza OESIS. I numeri primi difatti sono: 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619.

Come già visto precedentemente dai grafici abbiamo il solito grafico di tipo comet, tipico di altre funzioni sui numeri primi (σ(n), φ(n), G(N). La nostra dimostrazione si basa cioè sulla distribuzione dei numeri primi (ln (N)) nell'intervallo quadratico considerato: poiché tale intervallo cresce più velocemente del logaritmo dei numeri in tale intervallo, ne consegue che i numeri primi in tale intervallo sono sempre di più, come mostra bene la sequenza A014085 dell'OESIS riportata nella definizione.

La (3) si comporta bene se si considera il primo milioni di numeri primi; vedi ad esempio i link del sito di Caldwell:
http://primes.utm.edu/lists/small/millions/primes1.zip
http://primes.utm.edu/ **:**

Segue un **algoritmo in PARI/GP** per l'analisi di intervalli numerici qualsiasi è il seguente:

```
Legendre(init, end)=local(); {
 a=init^2;
 b=end^2;
 s="";
 s=concat(s,"a = ");
 s=concat(s,a);
 s=concat(s," b = ");
 s=concat(s,b);
 print(s);
 j=0;
 for(i=a,b,

     if(isprime(i)==1,
        j++;
        s="";
        s=concat(s,j);
        s=concat(s," p = ");
        s=concat(s,i);
        print(s);
     );

 );

 s="";
 z1 = primepi(b) - primepi(a);
 s=concat(s,"z1 = ");
 s=concat(s,z1);
 print(s);
 s="";
 z2=b/log(b)-a/log(a);
 s=concat(s,"z2 = ");
 s=concat(s,z2);
 print(s);

}
```

Utilizzando questo script su milioni di intervalli non si trova violazione alla (3). Una sua variante potrebbe ciclare su miliardi e miliardi di coppie di numeri e scrivere su un file se trovasse una coppia per cui Le(n)=0 o Le(n)<1. E' praticamente impossibile.

Secondo metodo di analisi

Un altro modo per affrontare la congettura di Legendre, modalità che hanno dato luogo ai metodi che portano a *diagrammi comet* (vedi Lagarias per la congettura di Riemann, o per Goldbach etc) è considerare le condizioni per cui Le(n)=0 oppure Le(n)<1. Se fosse Le(n)<1 non ci sarebbe nemmeno un primo tra n^2 e (n+1)^2.

Ora se usiamo la semplice (3), che comunque approssima il Teorema dei Numeri primi, dire che Le(n) < 1 significa che:

$$\frac{(\mathrm{n}+1)^2}{\log((\mathrm{n}+1)^2)} < 1 + \frac{n^2}{\log(n^2)} \quad (4)$$

che è una condizione impossibile!!

E questo indipendentemente dal fatto che ci siano intervalli rarefatti di numeri primi.

```
Ad esempio n=3000

Il primo termine a sinistra darebbe come risultato
? a=3001^2; r1=a/log(a)
%1 = 562403.9897237269363449015725

Il secondo termine a destra darebbe come risultato
? b=3000^2;r2=b/log(b)
%2 = 562052.6364767793209017337375
```

cioè non è vera la (4). Ovvero abbiamo un contro-esempio che la (4) non è vera.

Inoltre Le(n)=0 comporterebbe banalmente che:

$$\frac{(\mathrm{n}+1)^2}{\log((\mathrm{n}+1)^2)} = \frac{n^2}{\log(n^2)}$$

Ma si arriverebbe alla contraddizione che n+1=n o che 1 = 0 (assurdo).

Terzo metodo di analisi
Un modo per contraddire la congettura di Legendre è trovare un intervallo quadratico minore della frequenza o probabilità con cui si presentano i numeri primi (1/log n), il che è impossibile ed è equivalente alla (4).

Quarto metodo di analisi con una stima migliore
Se usiamo il crivello di Eratostene per analizzare i numeri primi (vedi [2]) è evidente che setacceremo i numeri primi fino a x e siamo sicuri di trovarne fino alla radice di x:

$$\prod_{p \le \sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) x \quad (5)$$

In generale con un errore $\pm 2^{k-1}$, dove k è il numero di primi che troviamo.

Mertens nel 1874 mostrò che:

$$\prod_{p \le y} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \approx \frac{e^{-\gamma}}{\log y} \quad (6)$$

dove γ è la costante di Eulero-Mascheroni e vale:

$$\gamma = \lim_{x\to\infty}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\log n\right\}$$

Per cui la (5) attraverso la (6) ci dice che il numero di primi che possiamo trovare è circa:

$$\approx \frac{x}{\log x}2e^{-\gamma} \qquad (7)$$

Se quindi consideriamo il numero di primi tra x e y, potremmo scrivere:

$$\pi(x)-\pi(y)\leq 2e^{-\gamma}\left(\frac{x}{\log x}-\frac{y}{\log y}\right) \quad (8)$$

Dove $2e^{-\gamma}$ approssimativamente vale 1.12292…

Per la congettura di Legendre la (8) diventa:

$$\pi((n+1)^2)-\pi(n^2)\leq 2e^{-\gamma}\left(\frac{(n+1)^2}{\log((n+1)^2)}-\frac{n^2}{\log(n^2)}\right) \ (9)$$

La (9) dà una stima migliore della (3) per la congettura di Legendre.

Ad esempio per n=24 e n+1=25 e tenendo conto che $2e^{-\gamma}$ è una costante, esce che il numero di primi tra 24^2 e 25^2 sono 7,25≅8 che è una stima migliore della (3), visto che il numero reale è 9.

Segue un <u>secondo algoritmo in PARI/GP</u>

```
Leg(init, end)=local(); {
 k=1.12292;
 a=init^2;
 b=end^2;
 v=vector(2);
 z1 = primepi(b) - primepi(a);
 Le=k*(b/log(b)-a/log(a));
 v[1]=z1*1.0;
 v[2]=Le;
 return(v);

}

StartLeg(init,end)=local();{
 for(i=init,end,
    if(Leg(i,i+1)[2] < 1.0, print(i); break; );
 );
}
```

[1] http://it.wikipedia.org/wiki/Dimostrazione_del_postulato_di_Bertrand
[2] *Harald Cramer e la distribuzione dei numeri primi – Andrew Granville*

CNR SOLAR
http://150.146.3.132/

Prof. Matthew R. Watkins
http://www.secamlocal.ex.ac.uk

ing. Rosario Turco
www.scribd.com/rosario_turco
Collections

ERATOSTENE group
http://www.gruppoeratostene.com

Dr. Michele Nardelli
http://xoomer.alice.it/stringtheory/