

# Block Notes Matematico

## Aggirandosi tra i plot della zeta di Riemann

### Tecniche per la ricerca degli zeri non banali

ing. Rosario Turco, prof. Maria Colonnese

#### Introduzione

Un tema che occorre sempre affrontare è la rappresentazione grafica delle funzioni che si studiano; se poi la funzione è proprio la zeta di Riemann, allora le cose si complicano un pochino. Lo studio della funzione zeta di Riemann è, difatti, una delle cose più affascinanti esistenti in matematica ma purtroppo è anche una funzione complessa di variabile complessa e, quindi, in teoria servono 4 dimensioni per poterla rappresentare geometricamente.

Lo studio della zeta di Riemann è interessante non solo da un punto di vista analitico, ma anche grafico e di sviluppo del software. Per questa strada, difatti, si scoprono ulteriori elementi sull'argomento.

Nel seguito esamineremo alcune possibilità che abbiamo con strumenti come PARI/GP nella realizzazione di grafici per la zeta di Riemann. E' chiaro che occorre sviluppare a corredo dello studio del software adatto a tale scopo, ma la possibilità di esplorare da soli la zeta di Riemann aumenta le nostre possibilità di comprensione e di studio su essa. La ricerca di esempi e contro-esempi o di scoperta di determinati fenomeni di comportamento non possono che passare per tale strada. L'articolo è uno dei pochi, nel panorama INTERNET italiano, che spiega ai tanti appassionati le tecniche per ricavarsi da soli, con calcolo numerico, gli zeri non banali della zeta di Riemann.

Nel seguito ci saranno utili varie formule della zeta di Riemann che qui ricapitoliamo brevemente. Mentre per gli approfondimenti guardare tutti i riferimenti indicati alla fine. Il software e gli articoli nei riferimenti, invece, sono tutti disponibili sul sito [www.gruppoeratostene.com](http://www.gruppoeratostene.com) (sources: zeta.txt and lambert.txt).

#### Formula di Eulero (s reale) e Zeta di Riemann (s complesso)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

#### Zeta di Riemann-Siegel o Zeta di Hardy

$$Z(t) = e^{j\theta(t)} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$$

Dove:

$$\theta(t) = \arg\left(\pi^{-\frac{1}{2}it} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}it\right)\right) = \Im\left[\log\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}it\right)\right] - \frac{t}{2} \log \pi$$

$$|Z(t)| = |\zeta(\frac{1}{2} + it)|$$

### Formula di Riemann-von Mangoldt

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \cdot \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

### La zeta di Eulero in campo reale

La funzione zeta di Eulero in campo reale la possiamo facilmente studiare (vedi PlotRealZeta in zeta.txt), e possiamo ritrovare il solito grafico presente su ogni buon testo.

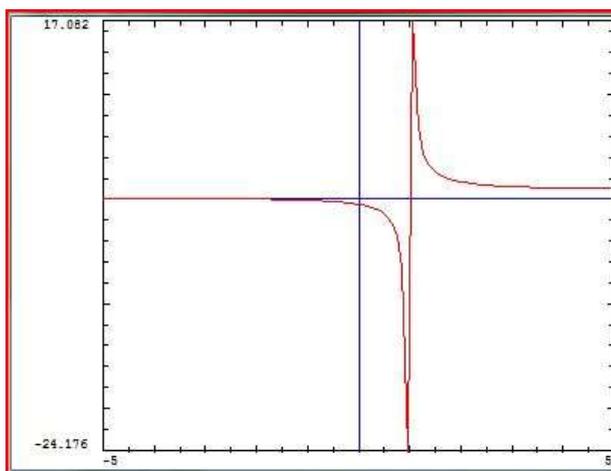


Fig 1 -  $\zeta(1/2+it)$  per  $t \in [-5,5]$

Se ci muoviamo un po' più verso sinistra, scopriamo che la zeta di Riemann non è sempre nulla, come si evidenzia nelle figure successive.

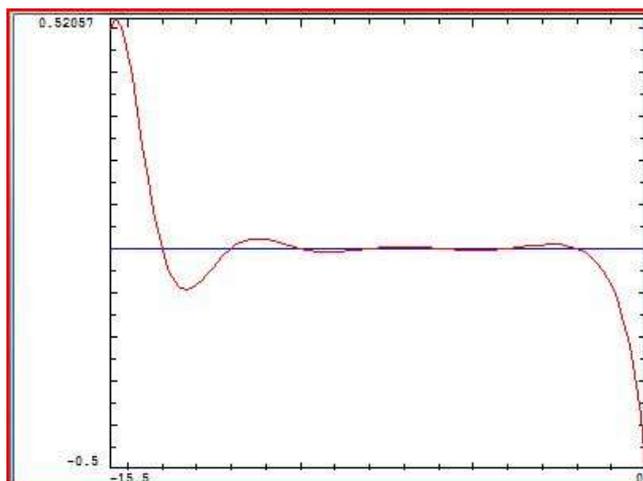
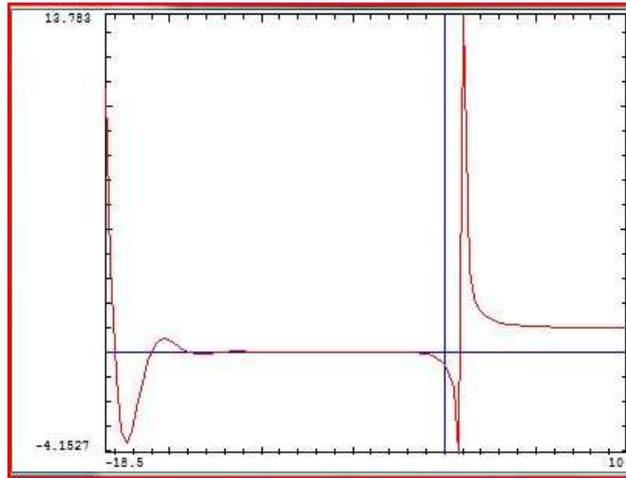
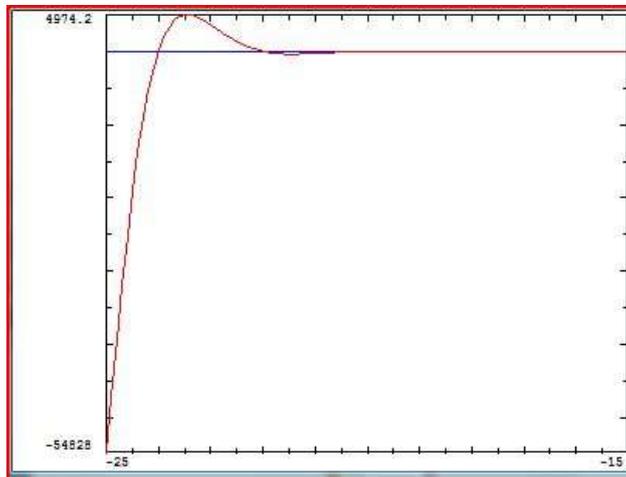


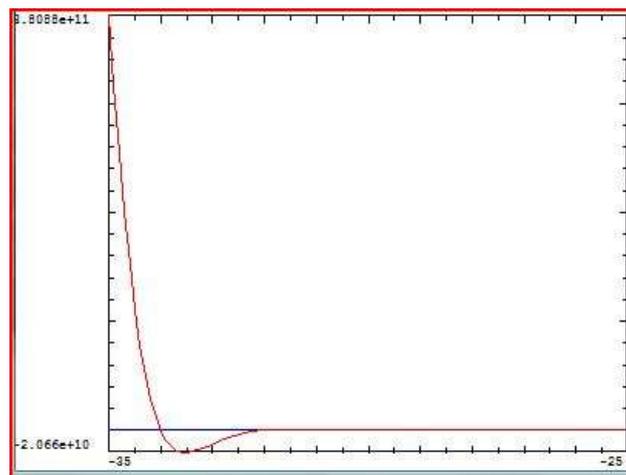
Fig. 2 -  $\zeta(1/2+it)$  per  $t \in [-15.5,0]$



**Fig. 3 -  $\zeta(1/2+it)$  per  $t \in [-18.5, 10]$**



**Fig. 4 -  $\zeta(1/2+it)$  per  $t \in [-25, -15]$**



**Fig. 5 -  $\zeta(1/2+it)$  per  $t \in [-35, -25]$**

## La zeta di Riemann in campo complesso

Se vogliamo studiare, invece, solo la parte Immaginaria della zeta di Riemann (vedi PlotImZeta), ecco cosa otteniamo nella figura successiva.

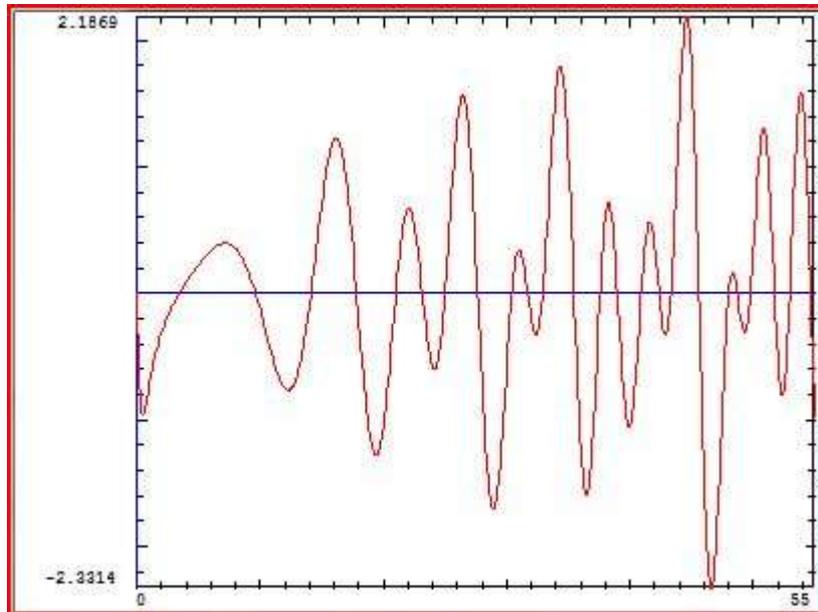


Fig. 6 -  $\Im(\zeta(1/2+it))$  per  $t \in [0, 55]$

Se ci interessa l'andamento del modulo della zeta di Riemann  $|\zeta(1/2+it)|$  useremo un'altra funzionalità del software (vedi PlotModZeta).

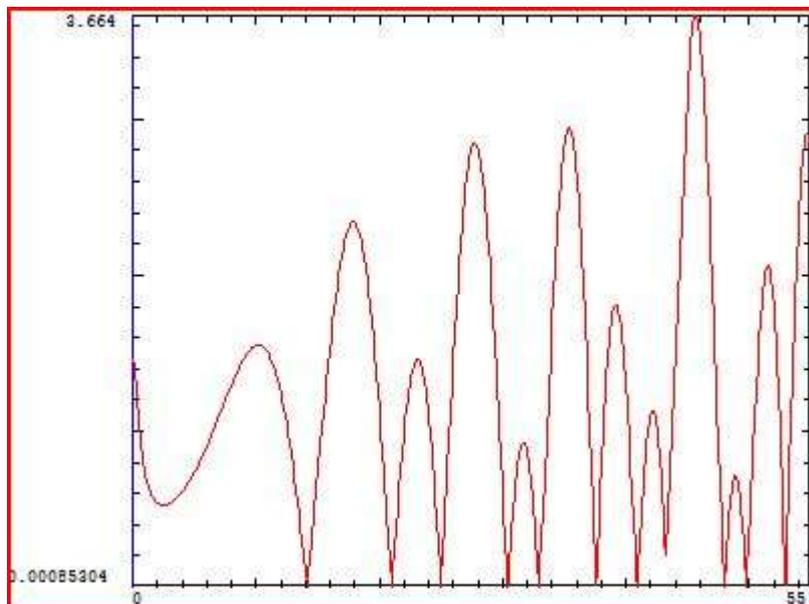
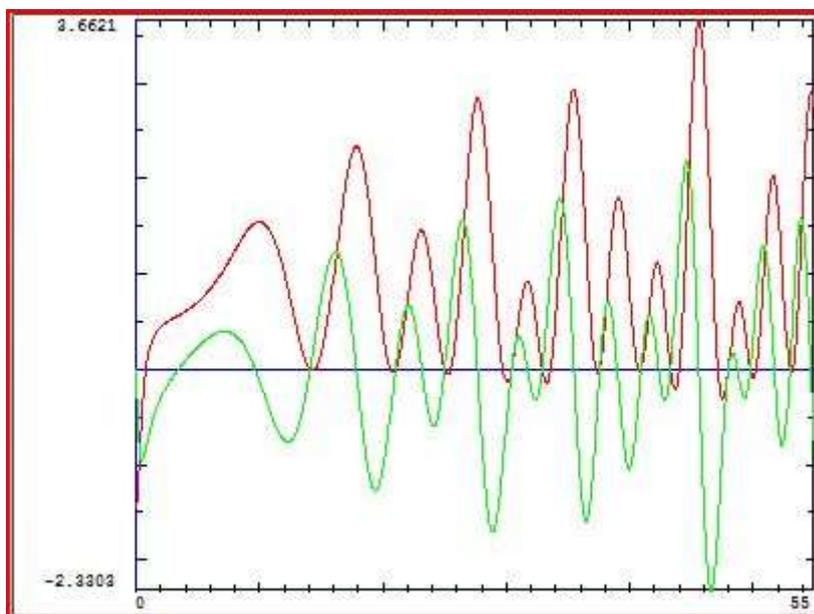


Fig. 7 -  $|\zeta(1/2+it)|$  per  $t \in [0, 55]$

Se ci interessa l'andamento della parte reale e della parte immaginaria sulla retta critica a  $\frac{1}{2}$ , si scopre, graficamente, che sulla retta critica all'intersezione tra gli zeri della parte immaginaria col colore scuro e quelli della parte reale col colore verde (vedi PlotZeta), si individuano proprio gli zeri non banali.



**Fig. 8 -  $\text{Re}(\zeta(1/2+it))$  e  $\text{Im}(\zeta(1/2+it))$**

La figura precedente è giustificabile con un procedimento trigonometrico che si può usare anche per dimostrare la verità della RH (Vedi [2]).

### **La Riemann Hypothesis (RH) e la molteplicità degli zeri**

L'ipotesi di Riemann è uno dei problemi del Millennio non ancora risolti. La RH afferma che "Gli zeri non banali della zeta di Riemann sono tutti sulla retta critica a  $\frac{1}{2}$ " (Vedi [3][7][10]). Un'ulteriore congettura è che "Gli zeri non banali della zeta di Riemann sono zeri semplici a molteplicità 1".

### **Come si trovano gli zeri non banali della zeta di Riemann**

Come si calcolano? E' la domanda che subito fa chi si avvicina all'argomento; mentre la nostra prima risposta è di studiarsi prima un buon testo (vedi [1]) e assimilarlo. Il software da noi sviluppato utilizza GetCriticalZero(n).

Gli zeri non si trovano algebricamente con una equazione, come si potrebbe pensare ed il procedimento è leggermente difficile.

Una prima strada, sconsigliata, è quella di usare la zeta di Riemann, vista come somma di due parti, una reale ed una immaginaria, giungere all'espressione trigonometrica e trovare gli zeri di ognuna delle sue parti; gli zeri della parte reale che risultano anche coincidenti con quelli della parte immaginaria sono gli effettivi zeri non banali, mentre gli altri no. Questo procedimento è lungo ed è possibile incorrere in errori nella gestione del software (ma fattibile anche con PARI/GP).

La strada migliore, rapida e sicura, è, invece, quella di usare la *Riemann-Siegel Zeta* o *Zeta di Hardy*. In pratica si usa lo stesso procedimento riscoperto da Siegel nel *nachlass* (appunti) di Riemann dopo la sua morte.

Gli zeri della zeta di Hardy coincidono con gli zeri non banali della zeta di Riemann ed essi si individuano col procedimento di *Newton - Raphson* o *metodo della secante* (vedi [9]), laddove la  $Z(t)$  passa da valori negativi a positivi o viceversa e, quindi, incontra l'asse delle ascisse.

Una tecnica aggiuntiva, per non andare a caso o sistematicamente per infiniti valori di scanning, è di avere come indicatori i punti di Gram oppure i valori di minimo o massimo locale della  $Z(t)$ , come si vedrà in seguito.

Ad esempio i primi 20 zeri non banali della zeta di Riemann sono:

```
? GetCriticalZero(20)
```

```
%101 = [14.13472514173469379045725198, 21.02203963877155499262847959, 25.01085758014568876321379099,
30.42487612585951321031189753, 32.93506158773918969066236896, 37.58617815882567125721776348, 40.91871901214749518739812692,
43.32707328091499951949612217, 48.00515088116715972794247275, 49.77383247767230218191678468, 52.97032147771446064414729661,
56.44624769706339480436775948, 59.34704400260235307965364867, 60.83177852460980984425990182, 65.11254404808160666087505425,
67.07981052949417371447882890, 69.54640171117397925292685753, 72.06715767448190758252210797, 75.70469069908393316832691675,
77.14484006887480537268266486]
```

Nel software sviluppato per PARI/GP abbiamo sfruttato ciclicamente la funzionalità di base "solve" sulla RiemannSiegelZ, "trappando" le eccezioni ottenute e gestendole. Le eccezioni si verificano quando i due valori dell'intervallo considerato di  $t$  portano a due valori dello stesso segno. Ad esempio tra 15 e 16 si ottiene un'eccezione:

```
? a=solve(t=15,16,real(RiemannSiegelZ(t)))
```

```
*** roots must be bracketed in solve.
```

Difatti i due valori della parte reale della RiemannSiegelZ, ottenibili a  $t=15$  e  $t=16$ , sono dello stesso segno positivo:

```
? real(RiemannSiegelZ(15))
```

```
%103 = 0.7199423913421371335166101659
```

```
? real(RiemannSiegelZ(16))
```

```
%104 = 1.536539422811462155206746619
```

Quindi di preferenza si usa la Riemann-Siegel  $Z(t)$  a  $\sigma=1/2$  e variando leggermente  $t$  da un valore ad un altro.

### La derivata della zeta di Riemann e la RH equivalente

Gli zeri della  $Z(t)$  sono cercati per verificare se esistono contro-esempi fuori della retta critica, ma in realtà per dimostrare o per trovare contro-esempi alla RH si può far riferimento anche ad una RH equivalente. Ad esempio una RH equivalente dice che "la derivata della zeta di Riemann non ha zeri  $0 < \text{Re}(s) < 1/2$  (Vedi [3] e [7])."

Per cui la RH è dimostrabile anche in questo altro modo e la stessa tecnica si può usare anche per cercare gli zeri della derivata della zeta di Riemann, magari facendosi guidare da qualche indicatore della  $Z(t)$ , ad esempio un minimo locale o un massimo locale (in matematica laddove una funzione ha un minimo o un massimo, allora la sua derivata è nulla).<sup>1</sup>

Tecniche di precisione maggiore, per sondare se ci è scappato uno zero, a volte, si affrontano usando lo sviluppo in serie di Eulero – McLaurin (Vedi [1]).

### **Numero di zeri sulla retta critica ad altezza T**

Se usassimo la funzione di Riemann-von Mangoldt  $N(T)$ , per sapere quanti zeri ci sono fino ad altezza  $T=78$ ? Ce ne sono 20 circa, in base alla funzionalità  $N(T)$  a disposizione nel nostro software.

### **L'occhio di Bird**

Esistono due diagrammi detti "*sigma-Bird's eye*" e "*t-Bird's eye*". Sappiamo che la zeta di Riemann non è facilmente rappresentabile geometricamente perché è a 4 dimensioni. Perché? Se scriviamo  $w=a+ib$  e  $z=\sigma+i t$ , allora è chiaro che indicare  $w = \zeta(z)$  significa lavorare su 4 variabili: due di  $z$ , l'argomento, e due di  $w$ , ovvero il risultato della funzione una volta valorizzato l'argomento; difatti abbiamo a che fare con una funzione complessa (ci si riferisce al risultato) di variabile complessa (ci si riferisce all'argomento).

Se però riferendoci all'argomento  $z = \sigma + i t$ , si fissa  $\sigma$  e si fa variare  $t$  si ottiene, sul *piano di Argand o di Gauss*, una rappresentazione del numero complesso  $w$  (o diagramma polare visto che  $w = M * \exp(i * \text{Teta})$ ) al variare di  $t$ .

In particolare il diagramma ha una forma d'occhio ed è detto "*sigma-Bird's eye*". Se, invece, si fissa  $t$  e si fa variare  $\sigma$ , si ottiene il "*t-Bird's eye*".

A che servono? E' intuitivo comprendere che se le curve intersecano l'origine, allora il punto di intersezione è uno zero non banale, perché sia la parte reale che la parte immaginaria coincidono.

Se le curve intersecano, invece, un asse reale o immaginario il punto di intersezione è solo uno zero della parte reale o della parte immaginaria ma non è uno zero non banale.

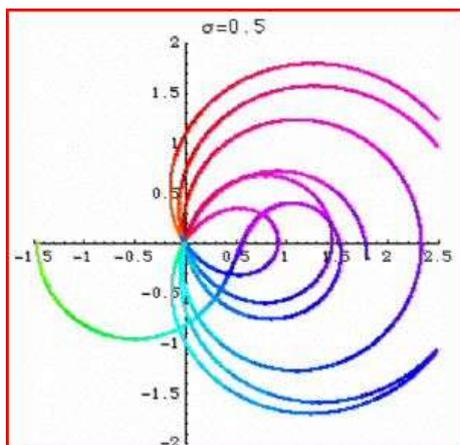
Viene intuitivo che allora il "*sigma-Bird's eye*", se fissiamo  $\sigma \neq \frac{1}{2}$ , può dare buone indicazioni se esistono o meno zeri non banali al di fuori della retta critica (ovvero su  $\sigma = \frac{1}{2}$ ), il che sarebbe un semplice contro-esempio all'ipotesi di Riemann.

Nelle prima figura osserviamo che per  $\sigma = \frac{1}{2}$  le curve passano per l'origine, al variare di  $t$ . Solo che in figura ci siamo limitati a mostrare l'intervallo  $t \in [0,40]$ .

Il numero di passaggi delle curve per l'origine, in base ai valori di  $t$  considerati, rappresentano il numero di zeri non banali (che in teoria sono infiniti).

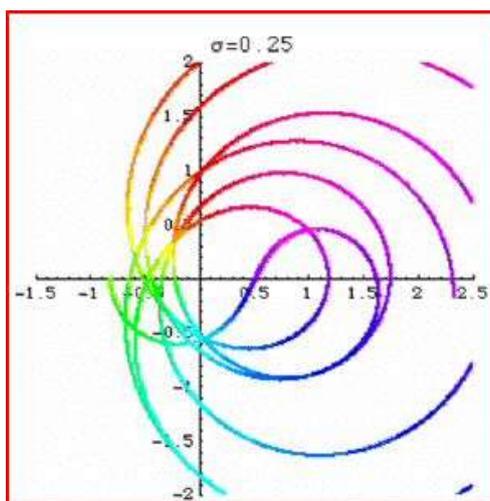
---

<sup>1</sup> Inizialmente per gli esperimenti, ad esempio con PARI/GP, si può approssimare la derivata della zeta di Riemann con un rapporto incrementale; mentre successivamente usare, effettivamente la derivata. In realtà tale approssimazione della derivata consente di scegliere la precisione del delta e può tornare comodo anche nel caso del metodo delle secanti o di Newton - Raphson.



**Fig. 9 - Sigma-Bird's eye  $\sigma = \frac{1}{2}$**

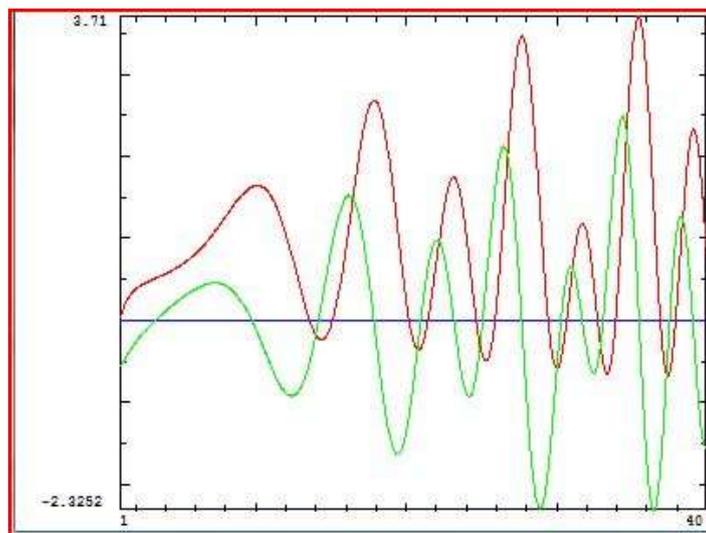
Nella seconda figura, se esaminiamo la striscia critica ad esempio a  $\sigma = 0.25$  non vediamo al variare di  $t$  nessun passaggio delle curve per l'origine. In altri termini un valore di  $\sigma \neq \frac{1}{2}$  sposta il diagramma polare rispetto all'origine.



**Fig. 10 - Sigma-Bird's eye  $\sigma = \frac{1}{2}$**

Naturalmente per questo tipo di analisi non è strettamente necessario un sigma-Bird's eye.

Ad esempio analoghe informazioni si ottengono da un diagramma della parte reale e immaginaria della zeta di Riemann. Se le due parti non si intersecano insieme sull'asse delle ascisse nello stesso punto, allora non ci sono zeri non banali, come mostrato nella figura successiva per  $\sigma = 0.25$ .



**Fig. 11 -  $\text{Re}(\zeta(0.25+it))$  e  $\text{Im}(\zeta(0.25+it))$**

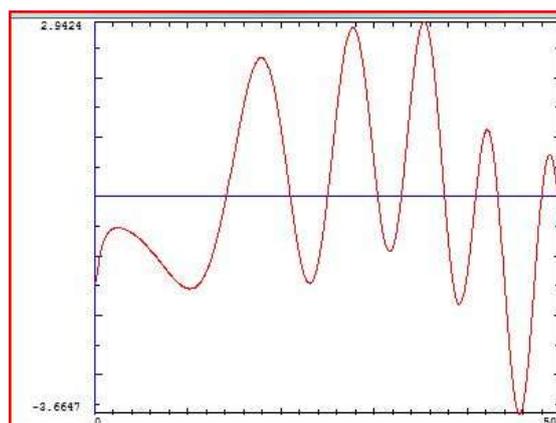
La scomodità di questo grafico rispetto al sigma-Bird's eye è che troppo esteso secondo l'intervallo di  $t$ ; mentre l'occhio di Bird è maggiormente concentrato attorno all'origine.

In ogni caso il difetto dei diagrammi, in generale, è che sono adatti per analizzare porzioni locali e limitate di intervalli di  $t$ ; con essi è impossibile visualizzare infiniti valori. In tal caso ci si affida all'analisi numerica.

### Zeta di Hardy o Riemann-Siegel Zeta

Spesso la zeta a cui facciamo riferimento è detta Riemann-Siegel Zeta oppure Zeta di Hardy (vedi nel software disponibile RiemannSiegelZ e RiemannSiegelTeta).

Nel seguito sono presentati vari grafici che sono ottenuti con PlotHardyZeta(b1,b2) per illustrare alcune problematiche.



**Fig. 12 - PlotHardyZeta con  $t \in [0,50]$**

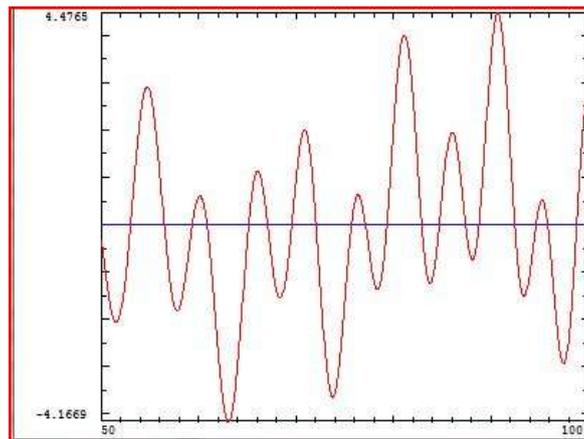
## Legge di Gram e punti di Gram

La figura precedente mette in evidenza la **legge di Gram, che è** la tendenza degli zero della funzione di Riemann-Siegel  $Z$  (oppure la zeta di Hardy) di alternarsi ai *punti di Gram*. Gli zero sono i punti dove la  $Z(t)$  interseca l'asse delle ascisse; mentre in pratica i punti di Gram corrispondono, alle ascisse dei picchi positivi o negativi della  $Z$  della figura di sopra (o detto in altri termini ai minimi e ai massimi della funzione che però devono rispettare determinate condizioni di Gram).

In particolare tale tendenza si osserva per quei punti tali che  $(-1)^n * Z(g_n) > 0$  e dove  $g_n$  è un punto di Gram (è la condizione di Gram).

Più rigorosamente l'affermazione " $(-1)^n * Z(g_n) > 0$ " è stata detta da *Hutchinson (1925)* legge debole di Gram, che ha usato il termine "legge di Gram" per fare riferimento alla dichiarazione più forte che ci sono esattamente  $n + 1$  zeri di  $Z(t)$  tra 0 e  $g_n$  (*Edwards 2001, p.171*). In realtà la legge di Gram all'infinito non è rispettata; ma è rispettata localmente o in media, nel senso che in media uno zero è tra due punti di Gram.

Un Gram point  $g_n$  è definito "buono" se  $(-1)^n * Z(g_n) > 0$  e "cattivo" in caso contrario (*Rosser et al. 1969; Edwards 2001, p. 180*). L'intervallo tra due punti di Gram buoni è detto Gram block. In altri termini un Gram block è un intervallo  $[g_n, g_{n+k})$  con  $k \geq 1$  e tale che  $g_n$  e  $g_{n+k}$  sono punti Gram buoni; mentre i punti di Gram tra questi due sono cattivi.



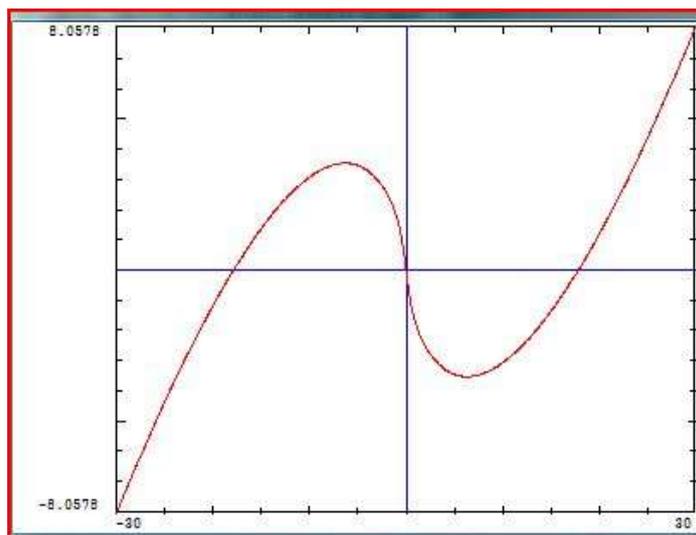
**Fig. 13 - PlotHardyZeta con  $t \in [50,100]$**

La relazione vista all'inizio è possibile riscriverla nel seguente modo:

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = Z(t) \cdot e^{-j\theta(t)} \quad (1)$$

$$\Im\left(\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right) = -\sin(\theta(t))Z(t) \quad (2)$$

Da qui è evidente che un cambio di segno della parte immaginaria della zeta di Riemann si riflette in un cambio di segno o di in  $\sin(\theta(t))$  o di  $Z(t)$ . I punti per cui la (2) è uguale a 0 sono i punti di Gram  $g_n$ ; così  $\theta(g_n) = n\pi$ . Dove  $\theta(t)$  è la RiemannSiegel Theta.



**Fig. 14 – Il plot di  $\theta(t) \in [-30, 30]$**

Dalla (1) per quei punti  $g_n$ :  $\zeta(\frac{1}{2}+i \cdot g_n) = Z(g_n)(-1)^n$ , così che  $\text{Re}(\zeta(\frac{1}{2}+i \cdot g_n))$  è positiva il Gram point  $g_n$  è detto buono se  $Z(g_n)=(-1)^n$  e cattivo in caso contrario. Per ottenere i Gram point si fa riferimento alla equazione

$$g_n \approx 2\pi \exp \left[ 1 + W \left( \frac{8n+1}{8e} \right) \right] \quad (2)$$

Dove  $W(z)$  è la *funzione di Lambert*. In PARI/GP si può sfruttare  $\text{lplog1}(x)$ . Su INTERNET si trova una buona implementazione della funzione di Lambert per PARI/GP che abbiamo riportato nel file a parte lambert.txt.

I Gram point vengono, di solito, sfruttati come indicatori per la ricerca degli zeri della  $Z(t)$ . In linea generale (ma non sempre) uno zero della  $Z(t)$  è tra due Gram point buoni, ovvero la  $Z(t)$  cambia di segno.

I primi dieci Gram point a partire da  $g_0$  sono ottenibili col nostro `GetGramPoint(10)`:

```
? \r g:\work\mat\srcpari\zeta\zetaa.txt
```

```
? \r g:\work\mat\srcpari\zeta\lambert.txt
```

```
%234 = (x)->if(abs(x)<0.5,x-x^2/2,precision(log(precision(1+x,9)),precision(0)))
```

```
? GetGramPoints(10)
```

```
%235 = [17.84783651284962031359002100, 23.17166081924072271816594435, 27.67119803630730406366340779,
31.71879139467487319425565440, 35.46786311027508969667278774, 38.99979519445019644703346934, 42.36406578346109892878254853,
45.59349011272545559063247105, 48.71119429690398327141622969, 51.73422484881488811092470942]
```

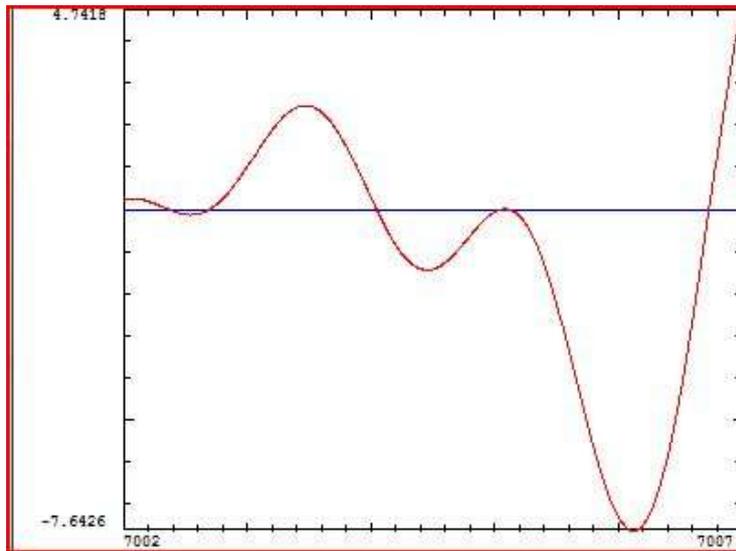
Se confrontiamo i primi 10 Gram point con i primi 10 zeri ci rendiamo conto che si alternano tra loro.

## Il fenomeno di Lehmer

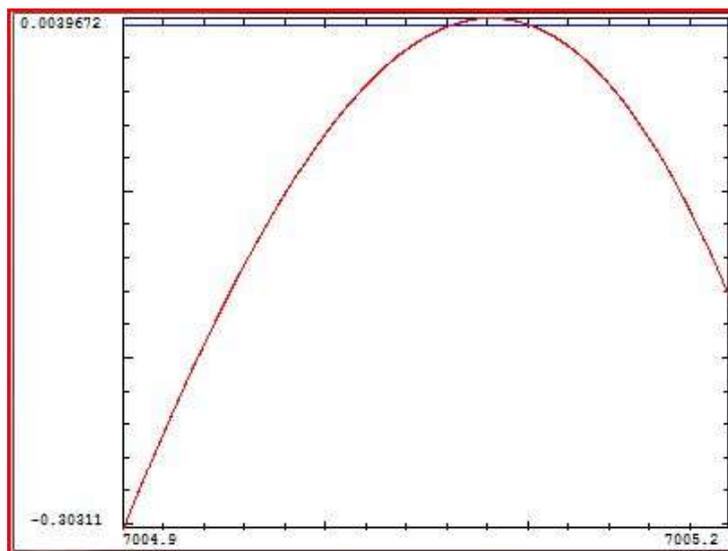
Che succede se esploriamo la Zeta di Hardy a valori più grandi? Un esempio è tra 7002 e 7005.

<sup>2</sup> Si tratta di sviluppare l'espansione asintotica di  $\theta(t)$  e prendere pochi primi termini e invertire l'equazione (con la funzione di Lambert) (vedi [10])

Si scopre il “*fenomeno di Lehmer*”, cioè la comparsa di zeri non banali molto ravvicinati nella fascia critica e tali che  $\text{Re}(\zeta)=1/2$ .



**Fig. 15 - PlotHardyZeta con  $t \in [7002, 7007]$**



**Fig. 16 - PlotHardyZeta con  $t \in [7004.9, 7005.2]$**

Un esempio di fenomeno di Lehmer è la coppia di zeri intorno al valore  $t=7005$ . Questi corrispondono alla regione prossima al Gram point (Lehmer 1956; Edwards 2001, p. 178).

### La regola di Rosser e la sua violazione

La *regola di Rosser* afferma che ogni Gram block di lunghezza  $k$  contiene esattamente  $k$  zeri. Rosser et al. (1969) espressero però la convinzione che questo fenomeno non potesse continuare all'infinito, e il fatto è stato successivamente dimostrato da Lehman (1970).

Richard Brent trovò il primo contro-esempio  $[g_n, g_{n+2})$  con  $k=2$  a  $n=13999525$  che non contiene zeri; mentre il Gram block successivo ha tre zeri.

La violazione della regola di Rosser è però poco frequente; per cui almeno euristicamente tale regola è utile a verificare l'ipotesi di Riemann. Perché? E' lo stesso concetto visto prima per trovare gli zeri non banali.

Supponiamo che nell'intervallo  $[g_{j-1}, g_j)$  ci siano stati  $j+1$  cambiamenti di segno della  $Z$  (RiemannSiegelZ), per cui adesso valutiamo  $Z(g_{j+1}), Z(g_{j+2}), \dots$  finché non troviamo il prossimo punto di Gram buono  $Z(g_{j+k})$ . Ora tra  $Z(g_{j+1})$  e  $Z(g_{j+k})$  c'è almeno un cambio di segno per cui c'è l'esistenza di uno zero non banale. A questo punto si può riprendere il ragionamento da  $g_{j+k+1}$ .

### Il problema dei "Due zeri persi" nel Gram block

Se  $k \geq 2$  allora si hanno  $k-2$  cambi di segni in  $[g_j, g_{j+k})$  per cui si deve tentare di individuare nel Gram block in questione almeno due zeri persi, iterativamente sondando l'intervallo sostituendo  $j$  con  $j+k$ . Se non ci riusciamo due sono le possibilità:

- Il Gram block ha due zeri veramente molto ravvicinati (fenomeno di Lehmer) e serve aumentare la precisione di calcolo (la definizione)
- Gli zeri persi si ritrovano in successivi o precedenti Gram block (questo problema solitamente capita una trentina di volte su un milione consecutivo di Gram block)

### Teorema (Littlewood, Turing, Lehman, Brent)

Se  $K$  consecutivi Gram block  $[g_i, g_p)$  rispettano la regola di Rosser, dove:

$$k \geq 0.0061 \log^2(g_p) + 0.08 \log(g_p)$$

Allora è:

$$N(g_i) \leq l+1 \quad N(g_p) \geq p+1$$

Gourdon verificò la RH con zeri fino a  $10^{13}$  e trovò che  $l = 10^{13} - 1$  con  $g_i = 2445999556030,34\dots$  con  $\log(g_i) = 28,52$  e  $0,0061 \log^2(g_i) + 0,08 \log(g_i) \approx 7,25$

Così  $k=8$  era sufficiente a provare che  $N(g_{10^{13}-1}) = 10^{13}$ .

### Backward error analysis

Facendo una analisi dell'errore che si commette nel valutare gli zeri con la Zeta di Hardy o  $Z$  di Riemann-Siegel, Brent dimostrò che era limitato e piccolo; il che era a vantaggio della velocità che essa offre nella ricerca degli zeri. Se si indica con "Zeta segnata", quella affetta da errore, allora è:

$$|\overline{Z} - Z| \leq (2 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^{-16} \tau \log \tau + 3\tau^{-2}) \tau^{1/4} \quad \tau = t/2\pi$$

Brent verificò che per i primi 75 milioni di zeri il lato destro è  $< 0.001$ .

### Plot "Livello di curve"

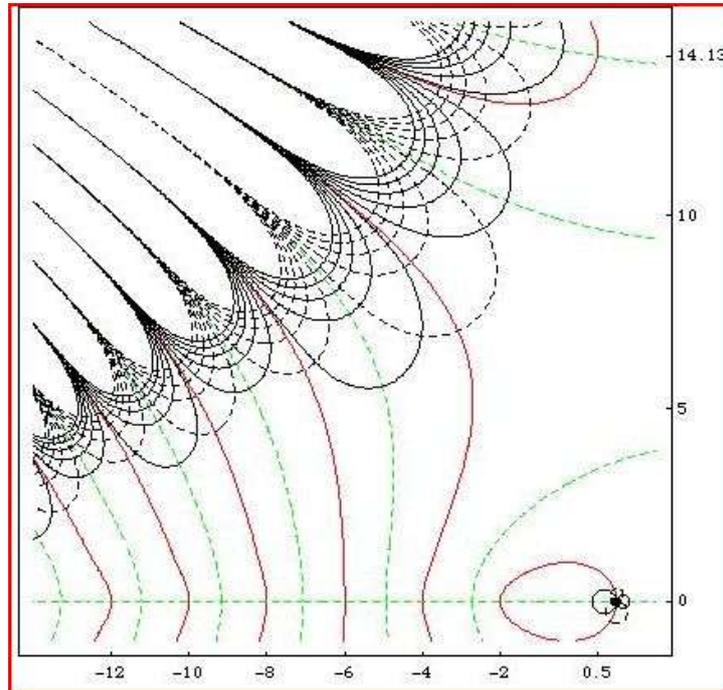


Fig. 17 - Livello di curve

Le linee solide sono per la  $\text{Re}(\zeta(s))$ ; mentre le tratteggiate per la  $\text{Im}(\zeta(s))$ . In particolare le linee solide marrone scuro sono  $\text{Re}(\zeta(s))=0$ ; quelle solide nere sono  $\text{Re}(\zeta(s))\neq 0$ . Inoltre le linee tratteggiate verdi sono per  $\text{Im}(\zeta(s))=0$ ; mentre le linee tratteggiate nere sono per  $\text{Im}(\zeta(s))\neq 0$ .

E' evidente che  $\zeta(s)$  è reale sull'asse delle ascisse reale e per la parte immaginaria nulla. Anche qui gli zeri non banali sono individuati quando contemporaneamente  $\text{Re}(\zeta(s))=0$  e  $\text{Im}(\zeta(s))=0$ , per cui ciò avviene all'incrocio delle linee solide marrone e le linee tratteggiate verdi.

### Plot 3-D della zeta di Riemann

L'attuale versione di PARI/GP al momento non dispone di features 3D, in tal caso si utilizzano altri strumenti come scilab, matlab etc.

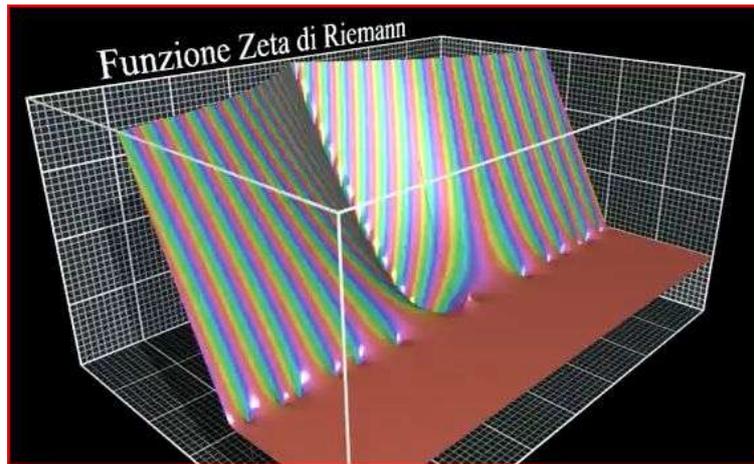


Fig. 18 – il paesaggio di Riemann, visto davanti

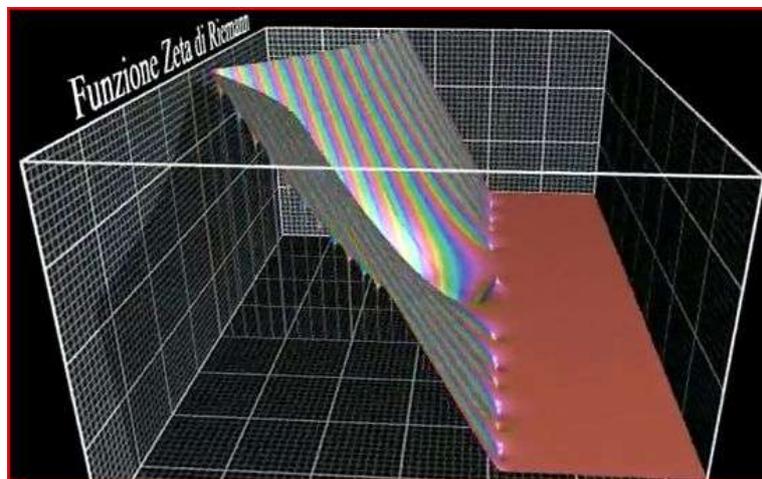


Fig. 19 – La zeta di Riemann di lato: i puntini luminosi alla base sono gli zeri non banali

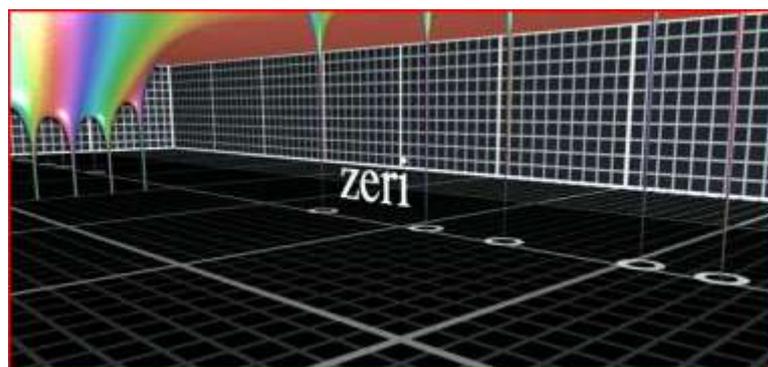


Fig. 20 – La zeta di Riemann vista da sotto da dietro

### Analisi numerica nella striscia critica

Se nell'intervallo  $[0,1]$  si vuole esaminare se esiste almeno uno zero non banale al di fuori della retta critica, quindi per  $\sigma \neq \frac{1}{2}$ , la strada migliore è l'analisi numerica e non quella grafica. Il computer, in base ad una funzionalità scritta, deve cercare per svariate ore in intervalli predefiniti e per valori di  $\sigma$  fissi.

Un algoritmo potrebbe essere quello simile visto prima con la  $Z$  di Riemann-Siegel oppure uno basato sulla della derivata della zeta di Riemann.

Per evitare di dover cercare per ogni valore di  $\sigma$  o di  $t$ , ci si fa guidare da indicatori, come i valori minimi o massimi della  $Z(t)$  (nel caso siamo interessati alla derivata della zeta di Riemann) o i punti di Gram (nel caso di analisi della zeta di Riemann).

### Problemi di approssimazione

Uno dei problemi maggiori specie se abbiamo dei fenomeni di Lehmer da contrastare per individuare bene lo zero è la precisione.

Su PARI/GP si può giocare a migliorare la precisione ad esempio col comando `\p 200` (il numero indica il numero significativo di digit che verranno mostrati) oppure il trucco migliore è passare gli argomenti delle funzioni nel seguente modo: `precision(z,default(realprecision))`.

### Analisi numerica della derivata della zeta

Il nostro software presenta la funzionalità `TheFirstDerivzeta`, basata sulla zeta di PARI/GP, e accetta  $s=\sigma+i*t$  ed il delta di precisione che ci interessa (per default ha  $\delta=1.0E-20$ ).

Come si conduce un'analisi numerica come questa? Innanzitutto con un lavoro propedeutico dobbiamo prima ricavare una lista di valori assoluti della  $Z(t)$ ; da qui ad esempio si vanno analizzare solo i valori di minimo e di massimo della  $Z(t)$  (ricordiamo che  $Z(t)$  è definita per  $\sigma=1/2$ ; quindi se usiamo  $Z(t)$  l'indagine è fatta intorno a  $1/2$ ). Ad esempio un valore di minimo di  $Z(t)$  è per  $t=357.58$ , qui difatti il valore assoluto della parte reale di  $Z(t)$  o `RiemannSiegelZ` è:

```
? abs(real(RiemannSiegelZ(357.58)))
```

```
%40 = 0.3679097310195740694576034424
```

Qui potremmo indagare se la derivata prima di zeta (nel seguito indicata con  $z'$ ) si annulla in prossimità della retta critica. Ad esempio usiamo un delta di precisione  $0.5E-100$  per il punto  $s=1/2+357.58*i$ :

```
? TheFirstDerivzeta(1/2+i*357.58,0.5E-100)
```

```
%60 = 0.E72 + 0.E71*I
```

Come si osserva la  $z' \approx 0$ ; ovvero prossimo alla retta critica. Altri minimi locali della  $Z(t)$  si possono osservare a:

```
Z(376.079) = -0.19 e Z(946.222) = -0.081.
```

Un massimo si ha invece (vedi [1]) a:

$t \approx 17143.8039$  dove  $z'$  è quasi nulla.

In generale è necessario implementare un metodo iterativo per individuarli accuratamente, come quello di Newton - Raphson.

Se non ci interessa la retta critica ma altre zone della striscia critica allora anzichè guardare  $Z(t)$  usiamo la  $\text{abs}(\text{real}(\zeta(s+i*t)))$  direttamente, il che ci permette di indagare su valori diversi da  $\frac{1}{2}$ . Nel software abbiamo a disposizione `RiemannSiegelZSigma(t,si)` che ci permette di assegnare a  $si$  un valore diverso da  $\frac{1}{2}$ .

Inutile dirvi che al momento i primi  $250 \cdot 10^9$  zeri noti sono tutti sulla retta critica.

### Metodo di Newton – Raphson con la zeta di Riemann

Precedentemente per trovare gli zero non banali della zeta di Riemann abbiamo usato la funzionalità base `solve()` di PARI/GP. Adesso mostriamo come implementare il metodo delle secanti senza usare il `solve`.

Nel software da noi sviluppati (`zeta.txt`) usiamo la funzionalità `SecantMzeta(s0,delta=1.0E-20, c=200)`. Per default usa un delta uguale a  $1.0E-20$  e fa al massimo 200 iterazioni ma se serve si può modificare passandogli un valore diverso; mentre  $s_0 = s+i*t$ .

Eventualmente se compie tutte le iterazioni si può aumentare per vedere se si arriva a valori più precisi.

Provate a confrontare i valori con quelli ottenuti da `solve` e vedrete che sono simili.

```
? SecantMzeta(1/2+i*14)
```

```
n. iterations 2
```

```
n. iterations 3
```

```
%22 = 0.5074265363786608616840360214 + 14.13472514173469379045725198*I
```

Ora  $\text{sign}(\text{real}(\zeta(\frac{1}{2}+i*14))) = 1$  ovvero di segno positivo, per cui dobbiamo cercare il prossimo valore per cui diventa negativo; il che avviene a  $\text{real}(\zeta(\frac{1}{2}+i*21))$  a cui corrisponde uno zero di valore:

```
? SecantMzeta(1/2+i*21)
```

```
n. iterations 2
```

```
n. iterations 3
```

```
%50 = 0.5002923444470722916158485640 + 21.02201158452243613918550847*I
```

Adesso se proviamo a  $\frac{1}{2}+i*25$  il segno non cambia; ma  $\text{sign}(\text{real}(\zeta(\frac{1}{2}+i*25.01085758014568876321379099))) = -1$  è un cambio di segno per cui a tale valore si trova certamente uno zero della zeta di Riemann.

Questo dimostra che è importante sia l'approssimazione che fa PARI/GP sia quella desiderata da noi nel metodo della secante.

Inoltre sicuramente la funzionalità di base di PARI/GP “`solve`” lavora più efficientemente.

### Zeta di Riemann: zeri non banali semplici o multipli?

Ad esempio se  $f(x)=x^3$ ,  $f'(x)=3x^2$ ,  $f''(x)=6x$  allora la funzione, derivata prima e seconda si annullano in  $x=0$ ; per cui  $x=0$  è uno zero di molteplicità 3. In [2] abbiamo asserito e dimostrato che gli zeri non banali della zeta di Riemann sono semplici ovvero a molteplicità 1.

Un modo semplice per indagare sulla molteplicità degli zeri è prendere un valore dello zero e vedere se anche la derivata prima a quel valore si annulla; prendiamo ad esempio  $s=1/2+i^{*}14.13597338430323767287220372$

`TheFirstDerivzeta(s=1/2+i^{*} 14.13472514173469379045725198) = 0.7832965118669776531999446187 + 0.1246998297481626075984575599*i`

Ehm no, ci dispiace sono solo zeri semplici! Provate a indagare ulteriormente.

### La derivata di PARI/GP

Noi abbiamo usato `TheFirstDerivzeta` da noi implementata in ogni caso con una precisione abbastanza buona con delta di default di  $1.0E-20$  che si può impostare anche più piccolo.

PARI/GP fornisce, invece, `deriv(x)` che però non funziona sulle funzioni complesse come la zeta. Come alternativa occorre usare, per le aree che si esplorano e quindi  $Re(s)$ , una adeguata formula, da implementare, per la derivata della zeta di Riemann (vedi [10]).

### Conclusioni

L'analisi grafica della funzione fornisce ulteriori elementi alla conoscenza della zeta di Riemann, mentre l'analisi computazionale sicuramente può servire alla ricerca di contro-esempi, ma la soluzione definitiva della RH può avvenire solo per dimostrazione analitica, visto che si è sempre di fronte ad una infinità di dati da analizzare.

Lo studio presente ha fatto emergere le evidenze finora a favore della verità della RH e gli strumenti e le tecniche per sperimentazioni varie, che possono interessare gli appassionati.

## Riferimenti

- [1] Riemann's Zeta Functions – H.M. Edwards – Dover
- [2] Proposta di dimostrazione alle Ipotesi di Riemann e Congettura molteplicità degli zeri – Rosario Turco, Maria Colonnese
- [3] Sulle spalle dei giganti – Rosario Turco, Maria Colonnese et al.
- [4] La Zeta di Fibonacci in campo reale – Rosario Turco
- [5] La Zeta di Keith e i numeri di Keith – Rosario Turco
- [6] Frazioni continue e zeta di Riemann, connessioni con la teoria delle stringhe – Rosario Turco, Maria Colonnese, Michele Nardelli
- [7] On the Riemann Hypothesis. Formulas explained -  $\psi(x)$  as equivalent RH. Mathematical connections with "Aurea" section and some sectors of String Theory – Rosario Turco, Maria Colonnese, Michele Nardelli
- [8] The Riemann Hypothesis in a Nutshell  
<http://web.viu.ca/pughg/RiemannZeta/RiemannZetaLong.html#RH>
- [9] Analisi numeriche e simulazioni – Rosario Turco
- [10] <http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html>

Per segnalazione di propri sorgenti grafici in PARI/GP o suggerimenti, scrivere a:

[rosario\\_turco@virgilio.it](mailto:rosario_turco@virgilio.it)

Note: The sources zeta.txt and lambert.txt are in the section Software of [www.gruppoeratostene.com](http://www.gruppoeratostene.com) site.