Block Notes Matematico

Congettura di Collatz in N

Riducibilità, Pseudo riducibilità e Isopath riducibilità dei numeri
Tecnica dell'isopath massimo e dei numeri perfetti
Vettore parità e Parità
Teorema di Terras

ing. Rosario Turco, prof. Maria Colonnese

Sommario

Nella prima parte del lavoro gli autori presentano la congettura classica di Collatz o "problema del 3n+1" e nella seconda parte la versione moderna riformulata da Terras, riorganizzando il materiale sull'argomento ed esaminando ulteriori aspetti.

In questo lavoro, per la versione classica di Collatz, gli autori presentano propri Lemmi e studiano diverse proprietà dei numeri, mettendo insieme molti tasselli del mosaico e aggiungendone anche di nuovi:

- i numeri glide complessi, isoglide, isopath massimi, glide biunivoci, glide+n, glide-n.
- una formula generale dei numeri ed i casi ad essa associati: i numeri di Collatz, i "numeri bizzarri di Collatz", i numeri primi di Mersenne ed i numeri perfetti
- i numeri potenze di 2 e potenze di 3, 4n+1, 4n+3 e tutte le loro forme di riducibilità: riducibilità, pseudo riducibilità, isopath riducibilità; di cui l'isopath riducibilità è la versione generalizzata
- la congettura del massimo della successione di Collatz classica

In generale la dimostrazione della congettura di Collatz può passare per due strade complementari e alternative:

- dimostrazione diretta della convergenza della successione numerica a 1;
- dimostrazione indiretta di non divergenza e di non ciclicità della successione numerica

Per la convergenza della successione di Collatz occorre dimostrare che tutte le forme numeriche 4n+1 e 4n+3 dispari sono riducibili in uno o più passi a numeri inferiori di quello di partenza.

Attraverso l'analisi di diverse proprietà e forme di riducibilità gli autori giungono alla fine alla costruzione della "tecnica dell'isopath massimo e dei numeri perfetti". In particolare, poi, mostrano l'impossibilità della ciclicità, e presentano una congettura sulla convergenza e sul massimo.

La seconda parte del lavoro gli autori esaminano la versione di Collatz riformulata, le tecniche a partire dal vettore di parità e il numero di parità fino al Teorema di Terras. Questa nuova versione del problema è fervente e ancora in corso; ma non ha ancora dato risultati definitivi.

Gli autori, infine, segnalano e forniscono anche un software da loro implementato a supporto dell'analisi fatta in questo lavoro.

Email

mailto:rosario_turco@virgilio.it

INDEX

Introduzione alla congettura di Collatz

Il problema di Collatz è ricordato in tanti modi: problema di *Collatz*, problema di *Syracusa*, problema di *Ulam*, problema di *Kakutani,* algoritmo di *Hasse*, congettura di *Thwaites*, *Hotpo* (Half or triple plus one), *3x+1*.

La sua più semplice formulazione del problema di Collatz è la seguente: supponiamo di scegliere un numero n che chiamiamo "seme" di partenza. Se n è pari lo dividiamo per 2 finché il risultato è sempre pari.

Se, invece, il risultato n è dispari lo moltiplichiamo per 3 e aggiungiamo 1 (ovvero applichiamo la formula 3n+1).

In particolare la funzione o applicazione o trasformazione **S: N -> N** di Collatz è:

$$\textbf{(a)}\quad S_0 = n, \quad S_i(n) = \begin{cases} S_{i-1}*3 + 1, & se\ S_{i-1}(n)\ \text{è dispari} \\ S_{i-1}/2, & se\ S_{i-1}(n)\ \text{è pari} \end{cases}$$

E' una successione oscillante dei numeri, ottenuta a partire dal seme di partenza dalla (a): per alcuni semi converge rapidamente a 1, per altri semi non rapidamente. I numeri ottenuti nella successione sono ricordati come **"numeri di Hailstone"**.

Nella formulazione del problema sono esclusi dai semi l'1 e i numeri negativi che darebbero luogo a successioni oscillanti infinite.

Spesso la stessa formulazione del problema la si incontra come in (b):

$$\textbf{(b)}\quad S_0 = n, \quad S_i(n) = \begin{cases} (S_{i-1}*3 + 1)/2, & se\ S_{i-1}(n)\ \text{è dispari} \\ S_{i-1}/2, & se\ S_{i-1}(n)\ \text{è pari} \end{cases}$$

La (b) è una conseguenza del fatto che se n è dispari il valore 3n+1 è un pari da dividere per 2. In tal caso il numero di passi della successione per convergere a 1 è minore da quello (a). Nella prima parte del lavoro faremo riferimento alla formulazione (a). La riformulazione (b), preferita da *Terras*, verrà esaminata nella seconda parte del lavoro.

La **congettura debole di Collatz** afferma:"Nessun intero è divergente".

La **congettura forte di Collatz** afferma:"Tutti gli interi positivi sono convergenti".

In generale se si appurasse che c'è un valore n≠1 per cui la successione è ciclica, allora sarebbe vera solo la congettura debole. Se non esiste nessun contro-esempio allora valgono sia congettura debole che quella forte.

La rapidità di convergenza (il numero di passi o step o glide G) della successione al valore 1 non dipende dalla grandezza del seme di partenza. Ad esempio il seme 10000 converge a 1 con meno passi del seme 27. Una buona domanda è: perché?

Difatti ci si rende conto che la rapidità di convergenza dipende dalla quantità dei suoi divisori per 2 o, equivalentemente, se il seme è una potenza di 2; quindi è anche un problema di scomposizione e di somma di potenze del 2.

In altri termini dipende dal fatto se il seme di partenza, inserito in 3n+1 darà un risultato pari, molte volte consecutive (per questo le potenze di 2 sono avvantaggiate).

Alcuni numeri attraverso 3n+1 hanno la fortuna di agganciarsi a potenze di 2: ad esempio 85 facilmente si aggancia a 256.

Un numero minore di 100 milioni e col maggior valore di stopping time è 63728127: la sua glide è 949.

Software

In tutto il lavoro ci si riferisce a software implementato dagli autori presentato nella libreria libThN.txt, che utilizza PARI/GP; la libreria è disponibile su http://www.geocities.com/SiliconValley/Port/3264 Sezione MISC Matematica. Tale libreria è continuamente aggiornata sul sito menzionato. Il software è fornito in formato interpretabile (non compilato) per dare modo ai lettori di aggiungere altre proprie funzionalità e indicare agli autori dei miglioramenti.

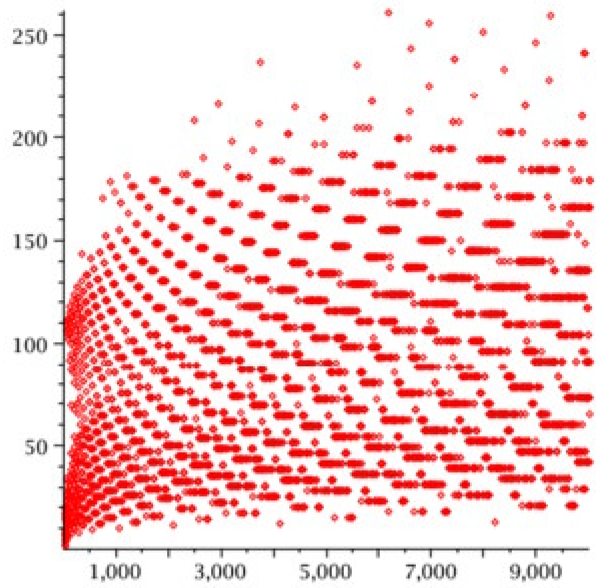
Definizioni

Per ogni intero positivo N>1, sia k il più piccolo indice per cui $S_k(N)=1$, allora k è detta glide; in altri termini indichiamo **glide G(N)=k** il numero di passi o step della successione di Collatz affinché la successione arrivi a 1.

Con G(N) ci riferimento alla (a) con **Gr(N)** ci riferiremo alla (b).

Indichiamo con il simbolo |→ che, durante l'applicazione delle regole della S(n) della (a) a seconda se n è pari o dispari, la successione passa per un certo valore. Ad esempio dire $G(n_1)$ | → n_2 significa che la glide di n1 passa per n2.

Il più piccolo valore di i per cui Si<S0 è detto *stopping time*. Ad esempio Gr(17) mostra che S2=13 per cui lo stopping time è 2.



Numeri da 2 a 9999 ed i loro stopping time

Indicheremo col simbolo d|m il fatto che d è un divisore di m.

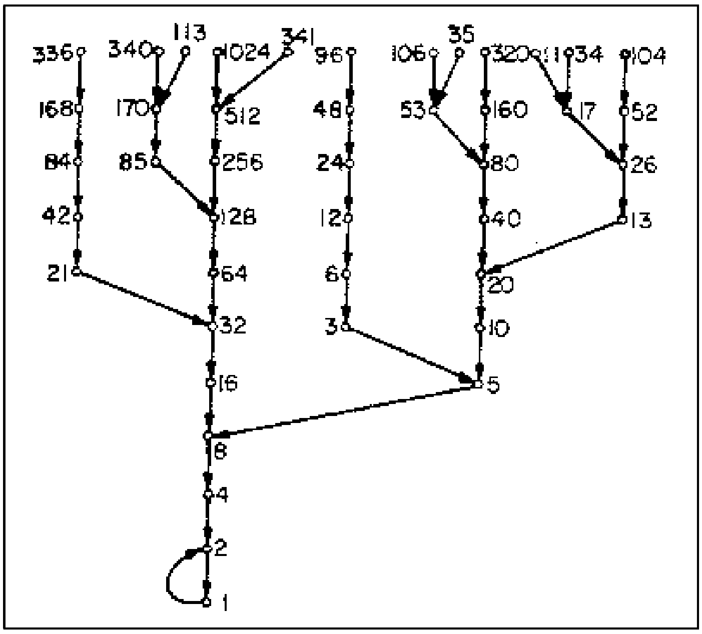
Definiamo un numero intero come *riducibile* se, in termini di glide G, esso è riconducibile alla glide di un altro numero però della stessa forma (esempio di forme: 4n+1, 4n+3) oppure se la sua glide è semplicemente legata all'esponente di una potenza del 2.

Definiamo un numero intero come *pseudo-riducibile* se non è riducibile; ovvero è pseudo riducibile se è solo riconducibile ad una forma diversa dalla propria o se la sua glide non è legata al valore dell'esponente di una potenza del 2.

Definiamo un numero dispari *glide-complesso* se la sua glide non si può calcolare come quella dei numeri riducibili o pseudo-riducibili.

Definiamo due o più numeri interi, anche di forma diversa, *isoglide* se essi hanno lo stesso valore di glide.

Definiamo due numeri interi *isopath* se dato un numero intero m>n, la successione di Collatz di m confluisce su qualche valore della stessa successione di Collatz di n.



Due numeri isoglide sono anche isopath, ma non è vero il contrario.

Due numeri interi sono **"isopath massimi"** quando hanno il massimo numero di valori uguali nella successione di Collatz; cioè uguali tutti i valori successivi a sé stessi ma esclusi sé stessi. In generale due numeri isopath massimi sono uno pari e l'altro dispari.

Nel seguito indicheremo due numeri interi n, m "isopath equivalenti con isopath massimo" con il simbolismo $n \therefore m$.

Due numeri sono *glide-biunivoci* se G(a)=b e G(b)=a.

Un numero è *glide+m* se G(n) = n + m; mentre un numero è *glide-m* se G(n) = n - m.

Nel seguito il simbolo $\wedge$ ha i significato di "and".

Forma generale dei numeri di Hailstone

Sia n_1 un numero intero. Esso è sempre riconducibile alla forma generale:

$$\mathbf{n_1=2^k n_2+c}$$

allora sono possibili i seguenti casi:

a) $c=0 \wedge n_2=1$

Lemma delle "Potenze di 2"
Se $\boldsymbol{n_1 = 2^k}$ *, allora* $\mathbf{G(2^k)=k}$*.*

Esempi:
$8=2^3$ G(8)=3
$256=2^8$ G(256)=8

Tali numeri secondo la definizione di sopra fanno parte della **categoria dei numeri riducibili**.

b) $c=0 \wedge n_2 \neq 1$

Lemma del "Prodotto per una potenza di 2"

Se $n_1 = 2^k n_2$, *allora* $G(n_1) = G(2^k) + G(n_2) = G(n_2) + k$ *o che*

$$G(n_1) \mid \rightarrow n_2$$

Esempi:
$40=2^3 *5$ $G(40)=G(2^3)+G(5)=3+5=8$
$112=2^4*7$ $G(112)=G(2^4)+G(7)=4+16=20$

Anche questi numeri sono della **categoria dei numeri riducibili.**

Sempre $c\neq 0 \wedge n_2\neq 1$, ci sono anche i seguenti casi:

Lemma dei "Numeri di Collatz"

Se il numero intero n1 è dispari ed esprimibile come un numero di Collatz cioè $n_1 = (2^k -1)/3 = 2^k/3 - 1/3$ *con k pari e k >2, allora la successione converge ad 1 con k+1 passi, ovvero la glide è*

$$G(n)=k+1$$

Esempi:
$85=2^8 -1/3$ $G(85)=G(2^8)+1=8+1=9$
$5 = 2^4-1/3$ $G(5)=4+1=5$

Inoltre sia 5=4*1+1 che 85=4*21+1 sono forme 4m+1. Perché, nei numeri di Collatz, k deve essere pari? Facciamo un esempio con k dispari: $512=2^9$, è evidente che non esiste nessun numero intero dispari ottenibile da $n = (2^9-1)/3$. Ecco perché k deve essere pari.

I numeri di Collatz comunque mantengono la forma della potenza del 2, per cui appartengono alla **categoria dei numeri riducibili**.

Lemma dei "Numeri bizzarri di Collatz"

Se il numero è un numero dispari "bizzarro di Collatz" $b = (2^k-4)/4 = 2^k/4 -1$ *per* $\forall$ *k>4 (pari e dispari), quindi di forma 4m+3, la successione passa per un numero di forma 4n+1 in 2*(k-3) passi, prima di arrivare a 1; ovvero la glide è:*

$$G(b)=2*(k-3)+G(4n+1)$$

Dimostrazione

Vediamo la tabella successiva che ci indica il numero bizzarro generato con $(2^k-4)/4$ ed il numero associato di dispari 4m+3 (compreso il bizzarro) prodotti consecutivamente dal problema di Collatz.

k	Bizzarro	Ordine 4m+3	G(n)
5	7	**2**	16
6	15	**3**	17
7	31	**4**	106
8	63	**5**	107
9	127	**6**	46
10	255	**7**	47
11	511	**8**	61
12	1023	**9**	62

Table 1 – Bizzarre numbers of Collatz

La tabella mostra che per ogni k, pari o dispari appartenente a N:

- per passare da un numero bizzarro b al successivo è: b=2b'+1. Esempio se b' = 7 b=2*7+1=15.
- Le fasce colorate in tabella 1 accoppiano i numeri bizzarri e si vede che la glide di una coppia differisce solo di 1: **G(b') = G(b)+1**.

- Nel passare da un bizzarro al successivo si aumenta di 1 il numero di forme 4m+3 consecutive ottenute nel problema di Collatz
- Il numero di passi in più, rispetto ad un numero di forma 4m+1, è dato da 2*(k-3); ad esempio k=10 è k-3=7 numeri bizzarri, ovvero G(b)=2*(k-4)+G(4n+1).

Per verificare rapidamente che esistono numeri successivi di forma 4m+3 generati in una sequenza di Collatz con PARI/GP si sfrutta Mod(n-3,4): se è uguale a Mod(0,4) allora è una forma 4m+3. Se è una forma 4m+1 si ottiene Mod(2,4) e si interrompe la consecutività ed il primo numero è di forma 4m+1.

Esempi di successione di Collatz con numeri bizzarri segnati in rosso (forme 4m+3 non consecutive) con la prima forma 4m+1 sottolineata:

7 22 11 34 <u>17</u> 52 26 13 40 20 10 5 16 8 4 2 1 #passi: 16
15 46 23 70 35 106 <u>53</u> 160 80 40 20 10 5 16 8 4 2 1 #passi: 17

31 94 47 142 71 214 107 322 <u>161</u> 484 242 121 364 182 91 274 137 412 206 103 310 155 466 233 700 350 175 526 263 790 395 1186 593 1780 890 445 1336 668 334 167 502 251 754 377 1132 566 283 850 425 1276 638 319 958 479 1438 719 2158 1079 3238 1619 4858 2429 7288 3644 1822 911 2734 1367 4102 2051 6154 3077 9232 4616 2308 1154 577 1732 866 433 1300 650 325 976 488 244 122 61 184 92 46 23 70 35 106 53 160 80 40 20 10 5 16 8 4 2 1 #passi: 106

63 190 95 286 143 430 215 646 323 970 <u>485</u> 1456 728 364 182 91 274 137 412 206 103 310 155 466 233 700 350 175 526 263 790 395 1186 593 1780 890 445 1336 668 334 167 502 251 754 377 1132 566 283 850 425 1276 638 319 958 479 1438 719 2158 1079 3238 1619 4858 2429 7288 3644 1822 911 2734 1367 4102 2051 6154 3077 9232 4616 2308 1154 577 1732 866 433 1300 650 325 976 488 244 122 61 184 92 46 23 70 35 106 53 160 80 40 20 10 5 16 8 4 2 1 #passi: 107

I numeri bizzarri di Collatz si riconducono da una forma 4m+3 ad una forma 4m+1 per cui sono compresi nella **categoria dei numeri pseudo-riducibili**.

Lemma sui Bizzarri ed i numeri primi di Mersenne

I numeri bizzarri di Collatz $(2^k-4)/4$, *con k-2 numero primo, sono anche numeri primi di Mersenne.*

Dimostrazione

Un numero primo di Mersenne è $M_n = 2^n - 1$ con n numero primo.
Un numero bizzarro di Collatz è $(2^k-4)/4 = 2^k/2^2 - 1 = 2^{k-2} - 1$. Per cui è sufficiente che k-2 sia numero primo per avere che il bizzarro sia anche un numero primo di Mersenne. In particolare se k-2 non è primo il numero bizzarro è semplicemente un numero di Mersenne non primo.

Esempi
3=2^2-1, 7=2^3-1, 31=2^5-1, 127=2^7-1

Caso **c pari**

Lemma della "Somma di potenze di 2 con c pari"

Se $n_1 = 2^k n_2 + c$*, con c=2c1 pari, allora è* $\mathbf{G(n_1) = G(n_3) + 1}$

Dimostrazione

$n_1 = 2^k n_2 + 2c_1 = 2(2^{k-1} n_2 + c_1) = 2 n_3 \Rightarrow$ $\mathbf{G(n_1) = G(n_3) + 1,}$ perché n_1 è divisibile per 2.

Questo è un caso di *riducibilità banale*.

Caso **c dispari**

c = 2 c1 + 1, per cui:

$$n_1 = 2^k n_2 + 2c_1 + 1= 2(2^{k-1} n_2 + c_1) + 1 = 2m+1$$

quindi $\mathbf{n_1}$ **allora è dispari e** dove $m=2^{k-1} n_2 + c_1$

Supponiamo che inizialmente c=1 e indichiamo con il simbolo $|\rightarrow$ l'applicazione di f(n) a seconda se n è pari o dispari; nel nostro caso n_1 è dispari per cui:

$$G(n_1=2^k n_2 + 1) \mapsto 3(n1)+1 = 3 (2^k n_2 + 1)+1= 2^k 3n_2 + 4 = 2(2^{k-1}3n_2 + 2)$$

Per cui $G(n_1)$ $|\rightarrow 2^{k-1}3n_2 + 2$

Se k=1, quindi:
$G(n_1)$ $|\rightarrow 3n_2 + 2$

Ora $3n_2+2$ è pari o dispari.

Se **n_2 è pari** o multiplo di 2^k allora **il risultato è pari** ed è:

$2^k*3 +2 = 2(2^{k-1}*3 + 1)$
$G(3n_2+2)$ $|\rightarrow 2^{k-1}*3 + 1$

Se n_2 è dispari in qualche modo è riducibile o pseudo riducibile a $2^k n_3+c$, a seconda di c.

Scomposizione di un numero in somma di potenze di 2

Un algoritmo di scomposizione è presentato nella libreria libThN.txt . La funzionalità è f2k(n).

Esempi

f2k(32)=2^5	potenza di 2
f2k(85)=2^6+2^4+2^2+1	numero di Collatz
f2k(341)=2^8+2^6+2^4+2^2+1	numero di Collatz
f2k(1365)=2^10+2^8+2^6+2^4+2^2+1	numero di Collatz

I numeri di Collatz, quindi, sono caratterizzati da somme di potenze pari del 2 con l'aggiunta finale di un 1 o di 2^0.

f2k(3)=2^1+1	numero bizzarro di Collatz
f2k(7)=2^2+2^1+1	numero bizzarro di Collatz
f2k(15)=2^3+2^2+2^1+1	numero bizzarro di Collatz
f2k(31)=2^4+2^3+2^2+2^1+1	numero bizzarro di Collatz
f2k(63)=2^5+2^4+2^3+2^2+2^1+1	numero bizzarro di Collatz

I numeri bizzarri sono caratterizzati dalla somma di tutte le potenze a partire da 1 fino al **numero d'ordine** del bizzarro (es. 63 è di numero d'ordine 5; al 3 diamo numero d'ordine 0 perché non è accoppiato a nessun bizzarro) e con la somma finale di 1.

f2k(41)=2^5+2^3+2^0	forma 4n+1
f2k(73)=2^6+2^3+2^0	forma 4n+1
f2k(137)=2^7+2^3+2^0	forma 4n+1
f2k(265)=2^8+2^3+2^0	forma 4n+1
f2k(521)=2^9+2^3+2^0	forma 4n+1
f2k(1033)=2^10+2^3+2^0	forma 4n+1

Un modo rapido per verificare se un numero è di forma 4n+1 è basato sul modulo Mod(n-1,4).

Riducibilità e pseudo riducibilità

Un ulteriore metodo di indagine sui numeri, oltre alla scomposizione, è quello di analizzare i numeri attraverso le forme 4n+1 e 4n+3. Nel seguito vedremo varie forme di riducibilità e la generalizzazione.

Riducibilità forme 4n+1

Lemma "Numeri 4n+1 con n dispari"

$\forall p=4n+1$ intero dispari con n dispari è:

$$G(4n+1) = G(n)+2$$

Dimostrazione

Sia p=4n+1 con n=4m+1<p, allora p è detto *riducibile* ad n=4m+1 poiché p=4n+1=4(4m+1)+1. Allora il numero dei passi della successione tra i due numeri 4n+1 e 4m+1 differisce solo di 2; ovvero è **G(p=4n+1) = G(n=4m+1)+2**;

Esempi

G(53)=G(13)+2=9+2=11
53=4*13+1

f2k(53)=2^5+2^4+2^2+1=2^2(2^3+2^2+1)+1 (MCD 2^2)
f2k(13)=2^3+2^2+1

Lemma "Numeri 4n+1 (con n pari) isoglide ad un pari"

∀w=4n+1 intero dispari ma con n pari, isoglide ad un numero pari m é G(w) = G(m/2)+1.

Dimostrazione

In una forma 4n+1 con n pari non è usabile la riduzione per n dispari; tuttavia se w è dispari e isoglide ad un m pari (stessa glide) allora G(m/2)+1 consente di calcolare la glide attraverso il numero dispari m/2. Inoltre il numero m/2 o m*2^-1 ha una scomposizione di potenze di 2 ottenibile da w scalando di un'unità tutti gli esponenti delle potenze, ad eccezione di 2^0.

Esempi
G(49)=G(50)=G(25)+1
49=4*12+1= 2^5+2^4+2^0
25=50/2=4*6+1= 2^4+2^3+2^0

G(65)=G(66)=G(33)+1
65=4*14+1= 2^6+2^0
33=66/2=4*8+1= 2^5+2^0

G(145)=G(146)=G(73)+1
145=4*36+1= 2^7+2^4+2^0
73=146/2=4*18+1 2^6+2^3+2^0

Pseudo - riducibilità

Se il numero è di forma 4n+1 ma *"non riducibile"* ad una forma 4m+1 di valore minore, allora 4n+1 è *pseudo-riducibile* almeno ad una delle possibili forme 4m+2, 4m+3, 4m+4, 4m+5, ... 4m+9.

Lemma "Pseudo – riducibilità"

I numeri interi dispari di forma 4n+1, pseudo - riducibili ad uno dei seguenti tipi numerici:

- *q dispari*
- *q pari e di forma 4m+c, ma con c diverso da una potenza di 2*

hanno come glide:

G(4n+1)=G(q)+2.

Esempi in **tabella 2** di pseudo riducibili con il valore 2 nella colonna step+x:
61= 4*(4*3+3)+1
365= 4*(4*22+3)+1

Number A	form 4*(4m+c)+1	next q B	A pseudo-reducible?	x? (step+x)	#step A	#step B
41	4*(4*2+2)+1	4*2+2=10	NO	(*)	109	6
61	4*(4*3+3)+1	4*3+3=15	YES	2	17	15
365	4*(4*22+3)+1	4*22+3=91	YES	2	94	92
547	4(4*33+4)+1	4*33+4=821	YES	2	30	28
3281	4*(4*204+4)+1	4*204+4=824	NO	(*)	74	28
29525	4*(4*1844+5)+1	4*1844+5=7381	YES	2	41	39
265721	4*(4*16606+6)+1	4*16606+6=66430	YES	2	132	130
2391485	4*(4*149466+7)+1	4*149466+7=597871	YES	2	130	128
21523361	4*(4*1345208+8)+1	4*1345208+8=5380840	NO	(*)	203	95
193710245	4*(4*12106888+9)+1	4*1210688+9=48427561	YES	2	188	186

Table 2 – Pseudo-reducibility of numbers of form 4n+1

(*) **in tabella 2**, i numeri q pari con c corrispondente a potenze di 2 non sono pseudo-riducibili.

Esempi di q pari con c potenza di 2: 3281 non è pseudo-riducibile a causa di q=824 pari, 41 non è pseudo-riducibile a causa di q=10 che è pari etc.

power of 3	number	next	step+	next 4m+1?
3	27	41	2	YES
4	81	61	3	YES
5	243	365	2	YES
6	729	547	3	NO
7	2187	3281	2	YES
8	6561	4921	3	YES
9	19683	29525	2	YES
10	59049	44287	3	NO
11	177147	265721	2	YES
12	531441	398581	3	YES
13	1594323	2391485	2	YES
14	4782969	3587227	3	NO
15	14348907	21523361	2	YES
16	43046721	32285041	3	YES
17	129140163	193710245	2	YES

Table 3 – Pseudo-reducibility of numbers power of 3

Forme 4n+3 riducibili a 4n+1

Lemma "Forme 4m+3 - potenze dispari del 3"

I numeri interi dispari di forma 4n+3, pseudo riducibili a $n1=4m+3=3^j$ $\forall j=2a+1$(dispari) ma non numeri bizzarri, hanno glide:

$$G(4m+3)=G(4n+1)+2$$

In questo caso il numero 4n+1 è ricavabile dal numero n1=4m+3 nel seguente modo:

$$4n+1=(3*n1+1)/2$$

Se $n1=27=3^3$, allora 4n+1=41. Altri esempi nella **tabella 3**: 243, 2187 etc.

Lemma "Forme 4m+3 - potenze pari del 3"

I numeri interi dispari $n1=4m+3=3^j$ $\forall j=2a$ (pari) ma non numeri bizzarri è:

$$G(4m+3)=G(4n+1)+3$$

In questo caso il numero 4n+1 è ricavabile dal numero n1=4m+3 nel seguente modo:

$$4n+1=(3*n1+1)/4$$

Se $n1=81=3^4$, allora 4n+1=61. Altri esempi nella **tabella 3**: 729, 6561, etc.

Lemma "Forme 4m+3 non potenze del 3"

I numeri interi dispari di forma 4n+3, pseudo riducibili a $n1=4m+3\neq3^j$ hanno glide:

$$G(4m+3)=G(4n+1)+2$$

In questo caso il numero 4n+1 è ricavabile dal numero n1=4m+3 nel seguente modo:

4n+1=(3*n1+1)/2

Inoltre la **tabella 2** mostra il numero 547 che non è bizzarro, né potenza di 3, ma il successivo 821 è una forma 4n+1 che rispetta la regola menzionata prima.

La **tabella 2** mostra che i numeri 4n+1 pseudo-riducibili ad un dispari hanno una glide come definito nelle proprietà; difatti G(365)=G(91)+2. Questo non è vero, invece, per i numeri pseudo-riducibili ad un pari di forma 4m+c dove c=2 o è una potenza di 2 (Vedi asterischi in parentesi).

Nella **tabella 3** si comprende che 41, apparentemente è pseudo-riducibile ad una forma 4m+2 ovvero a 10 ma in realtà è glide-complesso a causa del fatto che c=2; il 365 è pseudo-riducibile ad una forma 4m+3 ovvero a 91; etc.

Inoltre si osserva che *le potenze dispari di 3 sono "ordinatamente pseudo-riducibili" a forme 4m+2, 4m+3, 4m+4, 4m+5* etc. come si vede per i numeri 41, 365, 3281, 29525, 265721 etc. Se esistesse anche 4m+1 il numero sarebbe invece riducibile.

Isopath riducibilità come riducibilità generalizzata

Finora due tipologie di numeri non sono rientrate nelle relazioni T viste precedentemente:

- i numeri 4n+1 glide complex (esempio 41)
- i numeri 4n+1 con n pari (esempio 41=4*10+1, 49=4*12+1 etc)

In realtà vedremo che la "isopath riducibilità" è valida in generale sia per forme 4n+1 che 4n+3; solo che alcuni dei lemmi precedenti permettevano particolari riconoscimenti e abbreviare la ricerca della riducibilità. La isopath-riducibilità è, quindi, la forma generalizzata sia della riducibilità che della pseudo riducibilità e convalida, quindi, i lemmi precedenti.

I numeri "glide-complessi" sono numeri di forma 4n+1 o anche di altra forma 4m+c con c potenza di 2 e nella loro scomposizione hanno la presenza fissa di 2^3+2^0 che corrisponde alla somma di una costante 9 a cui si somma una potenza crescente come 2^5 o 2^6 etc. e mancano sostanzialmente dei termini 2^2 e 2^4.

Ad esempio con la funzionalità isgc(n) del software di cui sopra (ritorna 1 se glide complesso) si possono ottenere i numeri glide-complessi:

41, 73, 137, 161, 233, 265 etc.

La successione che riguarda 41 è:

```
(23:11) gp > G(41)
41 124 62 31 94 47 142 71 214 107 322 161 484 242 121 364 182 91 274 137 412 206
103 310 155 466 233 700 350 175 526 263 790 395 1186 593 1780 890 445 1336 668
334 167 502 251 754 377 1132 566 283 850 425 1276 638 319 958 479 1438 719 2158
1079 3238 1619 4858 2429 7288 3644 1822 911 2734 1367 4102 (2051) 6154 3077 9232
4616 2308 1154 577 1732 866 433 1300 650 325 976 488 244 122 61 184 92 46 23 70
35 106 53 160 80 40 20 10 5 16 8 4 2 1  #passi: 109
```

Con un funzionalità che riconosce il tipo di numero (vedi detectCnum) si ottiene:

detectCnum(41)= "41 = 2^5+2^3+2^0 - odd - 4n+1 - glide-complex G(41)=109"

Se si utilizza un'altra funzionalità isog(n,n1,n2) si scopre che 41 è isoglide ad altri numeri maggiori, tra cui dei numeri pari:

" G(41) = 109 = G(248) = G(250) = G(252) = G(253) "

Vedremo nel seguito che si può ridurre il 41 glide complex ma anche il 49 (4n+1 con n pari) grazie alla *isopath riducibilità*. E questo lavoro dimostra che tutte forme di numeri sono riducibili.

Alcuni numeri hanno la stessa glide (isoglide). Vedi isog(n,n1,n2).

isog(340,2,2000) ci dà:

G(340)=G(48)=G(52)=G(53)=G(320)=G(321)=G(341)
Altri sono isopath ed hanno un isopath massimo.

Esempi:

340 e 341	si incontrano su 256.	Sono isoglide e isopath
41 e 248	si incontrano su 124.	Sono isopath massimi e isoglide
41 e 53	si incontrano su 160.	Sono isopath ma non isoglide
41, 411, 4111, 8091	si incontrano su 244.	Sono isopath ma non isoglide

A questo punto per un numero dispari diventa interessante disporre del numero pari isopath massimo per riuscire a ridurre il numero dispari. Tutto ciò non ha interesse per un numero pari, perché un pari è facile ridurlo.

Lemma del dispari con isopath massimo

Un numero dispari q di forma qualsiasi (4n+1 o 4n+3) ha sempre associato un numero intero pari p isoglide e isopath massimo a q e ottenibile da:

p = 2(3q+1)

Dimostrazione

Se p e q sono interi che hanno un isopath massimo significa che le due successioni numeriche di Collatz, quella che parte per seme p e quella che parte per seme q, hanno come primo numero successivo a p ed a q lo stesso valore x; x è tale che q è dispari mentre p è pari. Difatti essendo x al secondo posto dopo p che è pari è stato diviso per 2; mentre essendo al secondo posto dopo q che è dispari x è stato ottenuto da 3q+1.

Per cui è:

$$x = p/2$$
$$x = 3q+1$$

Da cui p=2(3q+1), ed è evidente anche che p è pari.

Lemma della isopath-riducibilità

Dato un numero dispari q di forma 4n+1 o di forma 4n+3 associato ad un numero pari isoglide e isopath massimo, esso ***è isopath riducibile,*** *tramite il numero pari isopath massimo, ad altro numero dispari con l'uso del Massimo Comun Divisore sulla scomposizione delle somme di potenze di 2.*

Esempio

41
G(41)=G(248)=G(2^3)+G(31)=3+G(31)
248=2^7+2^6+2^5+2^4+2^3=2^3(2^4+2^3+2^2+2^1+1)=2^3*31

31 4n+3 bizzarro, ma è anche applicabile il lemma dell'isopath riducibilità.
G(31)=G(188)=2+G(47)
188=2^7+2^5+2^4+2^3+2^2=2^2(2^5+2^3+2^2+2^1+1)=2^2*47

47 4n+3
G(47)=G(284)=2+G(71)
284=2^8+2^4+2^3+2^2=2^2(2^6+2^2+2^1+1)=2^2*71

71 4n+3
G(71)=G(428)=2+G(107)
428=2^8+2^7+2^5+2^3+2^2=2^2(2^6+2^5+2^3+2^1+1)=2^2*107

107 4n+3
G(107)=G(644)=2+G(161)
644=2^9+2^7+2^2=2^2(2^7+2^5+1)=2^2*161

Il che conferma la teoria dei numeri bizzarri G(31)=2(7-3)+G(161). Inoltre si osserva che a partire dal bizzarro 31 (4m+3) si sale nei valori della riduzione 47, 71, 107, 161

161 4n+1 glide complex
G(161)=G(968)=3+G(121)
968=2^9+2^8+2^7+2^6+2^3=2^3(2^6+2^5+2^4+1)=2^3*121.

E così via proseguendo con 121.

Tecnica isopath massimo e dei numeri perfetti

Lemma isopath massimo e dei numeri primi di Mersenne

Dato un m dispari, se il doppio dell'isopath massimo è un numero perfetto pari a 2^{n-1} $(2^n -1)$ allora m si riduce al numero primo di Mersenne $M_n=2^n -1$ in n-2 passi, ovvero $G(m)=n-2+G(2^n -1)$

Dimostrazione
In generale un numero perfetto è ottenibile da $M_n*M_{n+1}/2 = 2^{n-1} * (2^n -1)$ dove Mn è un numero primo di Mersenne se n è numero primo.

Se ipm è il numero isopath massimo e il numero perfetto è il suo doppio allora è:

$$2ipm = 2^{n-1} (2^n -1)$$
$$ipm = 2^{n-2} * (2^n -1)$$

per cui per le regole viste precedentemente $G(ipm)= n-2+G(2^n -1)$

Abbiamo visto che 41 e 248 sono isopath massimi. Il doppio di 248 è $496=2^4 * (2^5-1)$, n=5 è primo per cui n-2=3 e $31=2^5-1$.

Infatti G(41)=3+G(31).

Corollario dei "numeri perfetti"

Se non esiste un numero perfetto associabile all'isopath massimo non esiste un numero dispari numero primo di Mersenne a cui ridurre il dispari di partenza, ma esiste solo il pari isopath massimo.

Dimostrazione
Ipotizziamo per assurdo che per n pari esista un numero dispari associato a $2^{n-1}*(2^n-1)=N$ (Es. N=2016 con n=6 non primo). Se ipm fosse l'isopath massimo di un dispari e doppio di un numero non perfetto, perché n è pari, allora ipm = N/2. Ma per definizione ipm=2(3q+1). Da qui il numero q dispari non potrebbe essere un numero intero; difatti q =(N/4 -1)/3. Per cui l'unico numero possibile con cui ridurre il numero di partenza è solo il pari stesso N/2 che passa per (2^n-1) in n-2 passi. Detto in altri termini i dispari isoglide non passano per (2^n-1).

Lemma dei numeri di Mersenne non primi

Dato un numero di Mersenne $M_n=2^n-1$ con n>1 ma non numero primo è $S_2=3*2^{n-1}-1$, $S4=3^2*2^{n-2}-1$, eventualmente $S_{2n}=3^n-1$, allora $G(M_n)>2n$.

Dimostrazione
Un numero di Mersenne è dispari, per cui $S1=3(M_n)+1=3*(2^n-1)+1=2^n*3-2=2(3*2^{n-1}-1)$ e dovendo dividere per 2 $S2=3*2^{n-1}-1$ e analogamente $S4=3*3*2^{n-2}-1=3^2*2^{n-2}-1$. Da qui si vede che n diminuisce della stessa quantità in cui aumentano i 3; per cui eventualmente a seconda del valore di n può capitare che $S_{2n}=3^n*2^0-1=3^n-1$. Da quest'ultimo sicuramente $G(M_n)>2n$ perché si è arrivati a 2n step e $S_{2n}(M_n)\neq1$ e la successione non si è ancora arrestata.

Esempi

n=4 $M_n=15$
$S_2=23=3*2^3-1$
$S4=35=3*3*2^2-1$
$S_8=80=3^4-1$

G(15)>8

Convergenza, divergenza e ciclicità

Diamo delle definizioni di minimo e massimo:

$$M_x(n) = \lim_{x\to\infty} Max(S_0, S_1, ..., S_k)$$

$$M_n(n) = \lim_{x\to\infty} Min(S_0, S_1, ..., S_k)$$

Ora la serie di Collatz è:

- **Convergente** se $M_n(n) = 1$
- **Divergente** se $M_x(n)$ not exist
- **Ciclica** altrimenti

Finora non è stato trovato nessun contro-esempio di numero naturale divergente, per cui al momento è vera la congettura debole di Collatz.

Collatz ciclicità

Nel seguito diamo una dimostrazione di impossibilità di ciclicità della successione di Collatz con la seguente definizione di ciclicità: *"Un numero n intero positivo, con n>1, è Collatz ciclico se con l'applicazione della S(n), di cui in (a), la successione di Collatz giunge ad un qualsiasi numero intero m>= n isopath con n, il quale ripassa per il valore n."*

Dimostriamo *per assurdo* che ciò è impossibile.

Supponiamo vera l'ipotesi e sia n un intero dispari (esempio n=9). Da qui è:

n' = 3n+1 è pari con n'>n.

n'' = n'/ 2 = (3n+1)/ 2

se n'' è dispari allora n''>n
se n'' è pari
allora n''' = n''/ 2 = n'/ 4 = (3n+1)/ 4 con n'''< n con n''' dispari

Nel caso n'' pari, n''' < n e dovendo raggiungere un valore maggiore di n e isopath con n, significa che n''' deve essere un intero riducibile o pseudo-riducibile a n ma essendo n''' dispari ed anche n dispari, serve quindi passare da dispari a pari e poi di nuovo a dispari per arrivare a n; per cui deve essere:

(3n'''+1)/2 = n ⇒ (3(3n+1)/4 + 1)/2 = n ⇒ 9n+3+4 = 8n ⇒ n = -7
ovvero <u>n deve essere negativo ed è un assurdo</u>.

Nel caso n''> n con n'' dispari e n dispari, allora per essere n Collatz ciclico deve essere:
(3n''+1)/ 2 = n ⇒ 3(3n+1)/2 +1 = n ⇒ 9n+3+3=2n ⇒ 7n= -6

Anche qui <u>è un assurdo n dovrebbe essere negativo e non intero</u>.

Supponiamo ora che sia n un intero pari (esempio n=20). Da qui è:

n' = n/ 2
se n' è dispari con n'<n.
n''=3n'+1=3n/ 2+1 con n''>n

se n' è pari con n'<n
n''= n'/ 2 = n/ 4 con n''<n

Il caso n''>n per essere n Collatz ciclico deve essere n'' anche isopath con n, ovvero n'' deve essere un intero riducibile o pseudo-riducibile a n. Per cui essendo n'' dispari con n''>n e n dispari deve essere: (3n''+1)/2 = n ⇒ 3n/4 + 1 = 2n ⇒ 3n+4 = 8n ⇒ 5n = 4 ovvero <u>n deve essere non intero ed è un assurdo</u>.

Il caso n''<n con n'' dispari di verificherebbe invece:
(3n''+1)/2 = n ⇒ (3(n/4) +1)/2 = n ⇒ 3(n/4) + 1 = 2n ⇒ 3n + 4 = 8n ⇒ 5n = 4 con <u>n non intero raggiungendo un assurdo</u>.

Congettura del Massimo nella glide

Gli autori propongono la seguente congettura: "*Sia N l'intero positivo con N>4, M≠N il valore massimo Mx(N) assunto nella successione di Collatz e P la posizione assunta dal valore massimo nella glide G(N), allora la successione converge in modo tale che il rapporto P/G(N) < 0,80*".

Nella valutazione del massimo si esclude N.

Se il massimo M si avesse sulla posizione finale, cioè P/G=1, significherebbe che la glide non è arrivata sul valore 1 e quindi la successione di Collatz continuerebbe; quindi per N>4, se la successione converge in G, è necessariamente P/G(N) < 1.

La congettura sostiene che per N>4 la "quantità *di path rimanente*" (G - P) è utilizzata dalla successione per la discesa dal valore massimo verso il valore 1 e che la minima quantità di path rimanente deve essere tale che P/G(N)<0.80 altrimenti la successione non ce la farebbe a convergere all'interno di G. Per cui G-P deve essere minore di 0,8 G mentre la parte G-P deve essere maggiore di 0,2 G.

Col software disponibile si può fare un'analisi del massimo rapporto col la funzionalità findMr(n1,n2), per numeri nell'intervallo (n1,n2).

Nei primi 3 milioni di numeri naturali l'rmax è di N=10852 con Max=9232 G(10852)=161 e rmax=0.7950310559; quindi apparentemente finora la congettura è vera.

N=10852 da Max=9232 impiega 34 step per arrivare a 1 e tali step pesano sulla glide 34/161=0,211180. In altri termini il numero 10852 impiega circa il 79% degli step per arrivare al massimo e il 21% per convergere a 1.

Il 27 ha un rmax=0,702702702702...

Lemma sul Massimo

Se N è dispari e maggiore di 2 ed il valore Mx(N) > 3N+1 allora Mx(N) è congruo 16 mod 36.

Esempio N=41, Max(41)=9232>3*41+1 Mod(9232,36) = Mod(16,36).

Posizione del massimo

E' da notare che se P=2 (la posizione del massimo), considerando anche il seme di partenza, ciò è indicativo di una potenza del 2. Esempio 2^12 Pos=2 ed r è abbastanza basso.

In realtà se ad una potenza di 2 si va ad aggiungere sempre 1 e per ogni aggiunta si osserva il comportamento del massimo si nota che esso prima è in posizione 2; poi passa ad un valore alto, poi ritorna indietro aumentando di nuovo verso il valore maggiore per poi ritornare indietro e poi assumere un nuovo valore alto e così via. Una sorta di passeggiata del gambero: un passo molto avanti ed un ritorno indietro con vari saltelli per riandare avanti.

Massimo della glide e numeri glide complessi

Oltre a N=10852 anche altri numeri hanno Max=9232, in pratica ci sono alcuni numeri glide complessi 41, 73, 137, 161, 233, 265 etc. ma differiscono come r da N=10852. D'altra parte era intuitivo che i numeri meno trattabili nella riduzione (glide complessi) arrivassero anch'essi a valori massimi.

Numeri glide-biunivoci

Al momento è noto solo G(5)=5.

Numeri glide+n

1<n<100mila				
Glide+1	**Glide+2**	**Glide+3**	**Glide+4**	**Glide+5**
G(19)=20 G(91)=92	G(6)=8 G(15)=17 G(18)=20	G(11)=14 G(14)=17 G(110)=113	G(3)=7 G(109)=113	G(108)=113

Vedi funzionalità gplus(n, n1,n2), dove n è l'incremento che si vuole verificare nell'intervallo [n1, n2].

Quesito: Per quale n non esistono numeri glide+n e perché? Da un'analisi numerica dei primi 500mila numeri naturali non esistono ad esempio glide+n con n>5 e n<9.

Numeri glide-n

1<n<100mila				
Glide-1	**Glide-2**	**Glide-3**	**Glide-4**	**Glide-5**
G(2)=1	G(4)=2 G(25)=23	G(12)=9	G(10)=6 G(13)=9	G(8)=3 G(17)=12 G(39)=34

Vedi funzionalità gminus(n, n1,n2). Da un'analisi numerica dei primi 500mila numeri naturali non esistono glide-6 e glide-7.

Seconda parte - Vettore di parità e Parità

Terras ha riformulato il problema di Collatz come espresso in (b). La (b) è osservabile con la funzionalità software Gr(n). Ogni elemento della successione di Collatz è indicato S_i.

Definiamo *vettore di parità*, includendo il seme di partenza S_0, il vettore i cui elementi sono tali che:

$$v_i(n) = Si \bmod 2$$

Se k è la lunghezza del vettore di parità, definiamo *Numero di Parità di ordine k* la quantità:

$$P_k = \sum_{i<k+1} v_i * 2 \wedge i$$

In sostanza con la Parità si traduce il vettore di parità come se fosse un numero binario dando ad ogni cifra 1 però il peso 2^i, relativo alla posizione i occupata, altrimenti vettori diversi ma con lo stesso numero di cifre 1 verrebbero considerati uguali.

[Vedi Vp(n) e P(n,k) nel software disponibile].

Per comprendere meglio vettore di parità e il Numero di Parità di ordine k introduciamo alcuni Lemma di altri autori.

Lemma 1 del vettore di Parità

Se N è un intero positivo della forma a2^k+b (b<2^k), allora i primi k elementi del vettore di parità dipendono solo da b.*

Dimostrazione

Si dimostra per induzione. Se k=1 N=2a+b con b=0 o 1. Il Lemma è vero perché N è dispari o pari a seconda di b e comporta l'applicazione del 3N+1/2 o del N/2 ottenendo il vettore con le regole viste prima.

Ora assumiamo che il Lemma sia vero per un qualche k.
Sia $N=a*2^{k+1}+b$ ($b<2^{k+1}$)
Se S_0=N è pari allora $S_1 = (a*2^k+b)/2$
Se S_0=N è dispari allora $S_1 = (3a*2^k+(3b+1))/2$
In entrambi i casi i primi elementi del vettore di parità v(S1) dipendono solo da b. Di conseguenza i primi k+1 elementi del vettore sono indipendenti da a e quindi il Lemma è vero.

Esempio
$N=17=0*2^6+17$
I primi 6 elementi del vettore di parità sono Vi = (1,0,1,0,0,1). Per il Lemma precedente questo è vero per ogni numero della forma $a*2^6+17$, ovvero 81,145,209,273,etc.

Lemma 2 del vettore di Parità

Sia wi un vettore di parità di lunghezza k, allora esiste qualche numero N per il quale vi(N)=wi.

Dimostrazione
E' ancora una dimostrazione per induzione. Supponiamo k=1, allora w_0 è 0 o 1.

Supponiamo ch il Lemma sia vero per qualche k. Sia w_i un qualche vettore di lunghezza k+1, allora se è vero il Lemma esiste un qualche N per cui $v_i(N)=w_i$. Dal Lemma 1 del vettore di Parità $N=a*2^k+b$ ($b<2^k$).

Siano M1 e M2 due numeri tali che $M1=a*2^{k+1}+b$ e $M2=a*2^{k+1}+2^k+b$, per entrambi si ha che vi(M1)=vi(M2)=wi.

Preso S_0=M1 e $S_k(M1)=X$, ora $S_k(M2)=Y=X+3^n$ con n il numero dispari di elementi di wi da 0 a k. Poiché 3^n è sempre dispari allora X e Y avranno parità diverse. Per cui $w_{k+1}(M1)\neq w_{k+1}(M2)$ e significa che per entrambi w_{k+1} = 0 o = 1 un numero M deve esistere per il quale vi(M)=wi. Per cui il Lemma è vero.

Esempio
Consideriamo il vettore Vi = (1,0,1,0,0,1,x) con x=0 o 1. I primi 6 elementi sono quelli per N=17, come visto prima col Lemma 1. Qui S6=8 (cioè a partire da N=17=S0 facendo 7 passi nella glide da S0 a S6, si arriva al valore 8); per cui i primi 7 elementi del vettore sono Vi = (1,0,1,0,0,1,0).

Adesso se prendiamo il numero $S0=N=17+2^6=81$ il suo vettore di parità è Vi = (1,0,1,0,0,1,1) ed essendo l'ultimo valore 1 significa che S6 è dispari e deve essere S6=35. Difatti il vettore di parità nelle prime 6 posizioni ha sei 1 (2^3=8) per cui 8+3^3=8+27=35.

Parità
In base alla definizione precedente la parità non è altro che i primi k elementi del vettore di parità al rovescio e visto come numero binario.

Ad esempio col software disponibile per N=17 P6=37 e 37 corrisponde ai primi k=6 elementi del vettore di parità Vi =(1,0,1,0,0,1) e 37 è l'equivalente decimale del binario 1000101. In generale per ogni parità di ordine k è sempre $0\leq P_k<2^k$

Lemma 1 del Numero di Parità di ordine k

Siano M e N due interi positivi. Allora $P_k(M)=P_k(N)$ se e solo se $M\cong N \bmod 2^k$ (il simbolo ≅ significa congruo).

Dimostrazione
Se $M\cong N \bmod 2^k$ allora $M=x*2^k+b$ e $N=y*2^k+b$ supponiamo cioè con b uguali, allora dal Lemma 1 del vettore di parità sappiamo che i primi k elementi di pendono solo da b; inoltre vi(M)=vi(N) e Pk(M)=Pk(N). Supponiamo adesso che $M=x*2^k+b1$ e $N=y*2^k+b2$, ma essi devono per forza far riferimento allo stesso vettore di parità di lunghezza k. Dal Lemma 2 del vettore di parità, comunque, per ogni vettore di parità esiste un numero Q tale che vi(Q)=wi e poiché esistono 2^k differenti vettori e vi sono anche 2^k classi mod 2^k di congruenza differenti segue che b1=b2.

Considerazioni
Il Lemma 3 quindi ci porta alla conclusione che ogni congruenza mod 2^k mappa ad un numero di parità, con tutti i numeri tra 0 e 2^k-1. In pratica tale funzione si comporta come una *permutazione*.

Ad esempio per k=3 abbiamo a che fare con le classi mod 2^3, quindi abbiamo una situazione come in tabella:

N	Numero di parità classe 3 mappato
8x+0	0
8x+1	5
8x+2	2
8x+3	3
8x+4	4
8x+5	1
8x+6	6
8x+7	7

La permutazione è evidente ad esempio per 8x+1 a cui mappa 5, mentre a 8x+5 mappa 1. Mentre gli altri mappano a sé stessi.

Con vettore di parità e parità si ha una buona descrizione del comportamento della successione 3x+1. Si può prevedere S_k da vi, come vedremo nel Lemma 2 successivo.

Lemma 2 del Numero di Parità di ordine k
Sia S_0=N un intero positivo e vi il suo vettore di parità. Sia

$$D_k(n) = \sum_{i<k+1} v_i(n)$$

Allora è $S_k = T_k = S_0 \cdot 3^{D_k} \cdot 2^{-k}$ *(equivalente a:* $\ln S_k = \ln T_k = \ln S_0 \cdot + Dk \cdot \ln 3 - k \ln 2$*) e* $\lim_{S_k \to \infty} \frac{(S_k - T_k)}{S_k} = 0$

Dimostrazione
Ogni elemento del vettore vi è 1 se corrisponde ad una operazione (3x+1)/2 oppure 0 se corrisponde ad una operazione x/2, cioè in generale è:

$S_{i+1} = \frac{3 \cdot S_i + 1}{2}$ se Si è dispari

$S_{i+1} = \frac{S_i}{2}$ se Si è pari

Per cui $S_k = T_k + R_k$ dove

$$R_k = \sum vi \cdot \frac{3^{D_k(i+1)}}{2^{k-i}}$$

E quindi:

$$\lim_{S_k \to \infty} \frac{R_k}{S_k} = 0$$

Esempio
Sappiamo che N=17=S_0 allora, nel software, Gr(17) ci mostra che S_5=5. Se facciamo la previsione con il Lemma 2 del Numero di parità di ordine k si ottiene T(17,5)=4,78125 un po' più basso del 5% ma per eccesso arrotondabile a 5.

D'altra parte R_k non è negativo per cui $T_k \le S_k$.

Vettori Convergenti e Divergenti

Sia vi un vettore di parità di lunghezza k, $d(j) = \sum v_i(n), \quad (0 < i < j)$, definiamo

c(j) = d(j) ln3 - j ln 2 per ogni j < k. Ora *v è convergente* se c(j) < 0 per ogni j < k e il più piccolo j per il quale c(j) < 0 è detto *convergence time* di v; mentre *v è divergente* se un qualche valore di j non esiste.

Lemma dello stopping time

Sia vi è un vettore di parità, di lunghezza k e con convergence time k, sia M l'insieme degli interi aventi vettore di parità v, allora tutti gli elementi N sufficientemente larghi da M hanno stopping time k.

Dimostrazione

Il Lemma 2 del vettore di parità dice che qualche N esiste, così M non è vuoto. Dal Lemma 1 del numero di parità di ordine k sappiamo che tutti gli elementi di M confluiscono in una singola classe mod 2^k. Dal Lemma 2 del numero di parità di ordine k, vediamo che S0 < Ti ≤ Si. Quindi N deve avere uno stopping time almeno k.

Ora $\lim\limits_{S0 \to \infty} \frac{S_k}{S_0} = \frac{(S0 \cdot e^{c(k)} + R_k)}{S0} = e^{c(k)}$, poiché c(k)<0 allora $e^{c(k)}<1$, il che dimostra il Lemma.

Esempio

Tutti i numeri N ≅ 3 mod 16 hanno vettore di parità (1,1,0,0). Il convergence time di v è 4. Il più piccolo numero è già 3.

Osservazione

Il Lemma precedente fa notare che in generale un numero *non è detto che abbia convergence time e stopping time uguali;* comunque solo un numero finito di numeri non gode di tale proprietà e il caso N=1 è un caso banale ed attualmente l'unico noto. Per cui nasce la congettura successiva.

Congettura "convergence time e stopping time"

Tutti i numeri N>1 hanno stopping time uguale al convergence time.

A questo punto introduciamo un ultimo Lemma prima del Teorema di Terras.

Lemma dei vettori divergenti

*Sia V_k l'insieme di tutti i vettori v di parità di lunghezza k. Sia W_k il sotto-insieme di V consistente di tutti gli elementi divergenti di V; allora, considerando la rappresentazione **|C|** come il numero di elementi di C, è* $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{|W_k|}{|V_k|} = 0$.

Dimostrazione

Dalla definizione di vettori convergenti è evidente che c(k)<0 è una condizione sufficiente e non necessaria di convergenza. Per cui la distribuzione di 0 e 1 in tutti i vettori di parità può essere descritta da un coefficiente binomiale. Il limite di sopra è "limitato" da $\lim\limits_{k \to \infty} \sum \frac{2^{-k} \cdot k!}{i!(k-i)!}$ per 0 ≤ i < kα dove

$$\alpha = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$$

Ora per α<1/2 il Lemma è provato.

Esempio

k	$\lvert W_k\rvert$	$\lvert W_k\rvert / \lvert V_k\rvert$	k	$\lvert W_k\rvert$	$\lvert W_k\rvert / \lvert V_k\rvert$	k	$\lvert W_k\rvert$	$\lvert W_k\rvert / \lvert V_k\rvert$	k	$\lvert W_k\rvert$	$\lvert W_k\rvert / \lvert V_k\rvert$
1	1	0.5000	11	128	0.0625	30	1.28e+007	0.01189418	130	8.11e+034	0.00005957
2	1	0.2500	12	226	0.0552	40	6.40e+009	0.00582334	140	5.52e+037	0.00003963
3	2	0.2500	13	367	0.0448	50	3.73e+012	0.00331669	150	3.67e+040	0.00002569
4	3	0.1875	14	734	0.0448	60	2.22e+015	0.00192219	160	2.52e+043	0.00001726
5	4	0.1250	15	1295	0.0395	70	1.24e+018	0.00105159	170	1.64e+046	0.00001093
6	8	0.1250	16	2114	0.0323	80	8.03e+020	0.00066440	180	1.13e+049	0.00000736
7	13	0.1016	17	4228	0.0323	90	5.09e+023	0.00041078	190	7.69e+051	0.00000490
8	19	0.0742	18	7495	0.0286	100	3.03e+026	0.00023868	200	4.92e+054	0.00000306
9	38	0.0742	19	14990	0.0286	110	2.03e+029	0.00015662	250	7.41e+068	0.00000041
10	64	0.0625	20	27328	0.0261	120	1.31e+032	0.00009879	300	1.11e+083	0.00000005

Teorema di Terras

Sia M un numero intero positivo. Sia D(M) la frazione di numeri < M che non hanno uno stopping time finito. Allora è:

$$\lim_{M\to\infty} D(M) = 0$$

Dimostrazione

Dal "Lemma dello stopping time" sappiamo che solo un numero finito ha uno stopping time diverso dal convergence time. Se partizioniamo i numeri in classi mod 2k sappiamo dal "Lemma 1 del Numero di Parità di ordine k" che ogni numero è congruo m mod 2^k mappa ad un unico numero di parità n ($0 \le n < 2^k$) e quindi ad un unico vettore di parità di lunghezza k.

L'ultimo "Lemma dei vettori divergenti" ci ha fatto vedere che la frazione di vettori divergenti di lunghezza k per $k\to\infty$ è nulla. Per cui se consideriamo un N < 2^k che non ha stopping time ≤ k segue che

$$\lim_{k\to\infty} D(2^k) = 0$$

Il che dimostra il teorema.

Volendolo tradurre in altro modo il Teorema di Terras dice che la maggior parte dei numeri interi positivi hanno una glide finita.

Altri concetti nuovi sono i successivi che seguono.

Residuo

Per ogni intero positivo N si possono definire due funzioni O(N) e E(N) tali che:

$$O(N)+E(N)=G(N)$$

Dove O(N) è il numero di Si dispari ed E(N) è il numero di Si pari. G(N) è il numero di passi, Delay time, che equivale al numero totale di Si.

Per costruzione è:

$$2^{E(N)} = 3^{O(N)} * N * Res(N)$$

Dove Res(N) = (1 + 1/(3*Si)) è ottenuto sui termini dispari Si per 0 ≤ i < G(N). Res(N) è definito residuo.

Res(N) tipicamente è compreso tra 1,10 e 1,25. Per cui sembra ragionevole per taluni autori che possano formularsi due nuove congetture:

Congettura debole del residuo

Per ogni intero positivo esiste un valore Res_{max} tale che:

$$Res(N) < Res_{max}$$

Congettura forte del residuo

Per tutti gli N è:

$$Res(N) < Res(993)$$

Completezza

Per tutti gli N>1 si definisce completezza C(N)=O(N)/E(N).

Teorema della completezza

Per tutti gli N>1 C(N)< log2/log3=0,63092975…

Dimostrazione

Dalla definizione del residuo $2^{E(N)} = 3^{O(N)} * N * Res(N)$, per cui è:

C(N)=O(N)/E(N)= ln2/ln3 - (ln N + ln Res(N))/(E(N)ln3)

Questo porta a considerazioni su come C(N) possa essere in forma chiusa verso il suo limite teorico. Sicuramente l'ultimo termine è proporzionale a ln N/ E(N). Per cui si tende a considerare l'inverso di tale quantità come segue.

Gamma

Per tutti gli N>1 Gamma(N)=E(N)/lnN.

Congettura su Gamma

Per tutti gli N>1 esiste un Cmax: C(N) < Cmax con Cmax<ln2/ln3.

Utilizzo Software

Per l'utilizzo è sufficiente:

- Scaricarsi PARI/GP per Windows
- mettere libThN.txt in una cartella Windows ad esempio: c:\pari
- lanciare PARI/GP
- caricare la libreria con:
  - o \r c:\pari\libThN.txt

Esempi d'uso:

```
f2k(41)
isgc(41)
isog(340,2,2000)
isopm(41)
G1(41)
G(41)
detectCnum(340)
detectCnum(85)
gplus(1,2,500000)
gminus(3,2,500000)
```

Per leggere le funzionalità disponibili leggere il sorgente con Notepad. Il software di volta in volta viene aggiornato sul sito per tutte le problematiche nuove affrontate. La libreria contiene anche altre problematiche di Teoria dei numeri e di crittografia.

Riferimenti

- **J. C. Lagarias**: *"The 3x+1 Problem: An annotated Bibliography"*
- **C. A. Feinstein**: *"The Collatz 3n+1 Conjecture is Unprovable"*
- **Sergio Faccia** blog Eureka! di kataweb http://serghej.blog.kataweb.it/
- **Gruppo ERATOSTENE** - Articoli sul sito gruppo ERATOSTENE e su CNR Solar.

Siti

CNR SOLAR
http://150.146.3.132/

Prof. Matthew R. Watkins
http://www.secamlocal.ex.ac.uk

Aladdin's Lamp (eng. Rosario Turco)
www.geocities.com/SiliconValley/Port/3264 menu MISC section MATEMATICA

ERATOSTENE group
http://www.gruppoeratostene.com

Dr. Michele Nardelli
http://xoomer.alice.it/stringtheory/

Blog

http://MATHBuildingBlock.blogspot.com
Colonnese Maria, Rosario Turco