Block Notes Matematico

Geometria frattale: tra filosofia e necessità

Rosario Turco, Maria Colonnese

Abstract

Il mondo intero deve agli antichi greci un immenso tesoro teorico come la filosofia, la geometria e la logica.

Euclide ci ha insegnato che con una retta si ha a che fare con una sola dimensione, con una superfice con due dimensioni e con un volume con tre dimensioni.

Ma un albero quante dimensioni ha?

E' giusto parlare di tre dimensioni soltanto? E una nuvola? E le coste italiane oppure il contorno di un Lichene Rizhocarpon Geographicum o di una cellula?

Questa è una problematica che nasce già a "dimensioni normali".

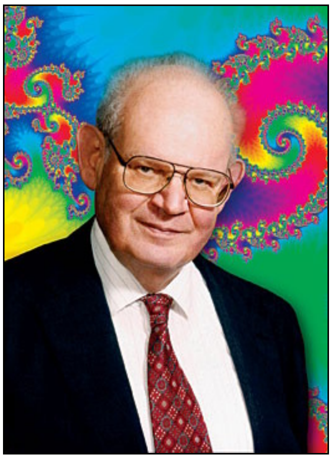
E' noto che per talune problematiche come GPS, navigazione marina ed aerea si è passati alla geometria non euclidea (ad esempio quella sferica), ma ci sono situazioni per cui neanche le geometrie note sono adeguate e bisogna rivolgersi alla *geometria frattale*.

Spesso è la distanza dell'osservatore che porta alla semplificazione a tre dimensioni, ma nell'ambito del problema che si affronta occorre sempre decidere se il livello di astrazione in gioco consente la semplificazione. Osservando una mela a distanza, per calcolare la velocità di caduta di un grave, possiamo immaginare la mela come una superfice o un cerchio, fino a ridurla ad un punto. Se ci avviciniamo cominciamo a considerarla una sfera, ma l'astrazione del problema nell'ambito della fisica classica ci consente ancora di considerarla un punto.

Esiste, quindi, un evidente rapporto tra osservatore e oggetto osservato e tra oggetto osservato e problema da risolvere: dal modo in cui si instaura questo rapporto, tra distanza di osservazione o grado di risoluzione e astrazione, si arriva ad un valore di dimensione diversa.

Gli autori, in questo lavoro, evidenziano l'importanza matematica dei frattali e del loro legame col mondo naturale e della Fisica.

Mandelbrot
Benoit Mandelbrot è da considerarsi il padre della teoria dei frattali. Egli formalizzò le proprietà di queste figure, considerate prima di lui solo delle curiosità.



Diversi frattali classici sono stati descritti da celebri matematici del passato come *Cantor*, *Hilbert*, *Peano*, *von Koch*, *Sierpinski* ma fu solo con *"The Fractal Geometry of Nature"* (1982) che essi trovarono una teoria unificata e geometrica, che ne sottolineava i legami con forme tipiche della natura: coste, alberi, montagne, farfalle,etc.

Intuitivamente, un frattale è una figura in cui un singolo motivo viene ripetuto su scale decrescenti.

Ingrandendo una parte della figura, possiamo individuarvi una copia in scala della figura stessa. I frattali, quindi, sono anche sintomo di simmetria ricorsiva.

In generale un frattale è un insieme che gode di una o più proprietà seguenti:

- ***Autosomiglianza***: è l'unione di copie di se stesso a scale differenti;
- ***struttura fine***: il dettaglio dell'immagine non cambia ad ogni ingrandimento;
- ***Irregolarità***: non si può descrivere come luogo di punti che soddisfano semplici condizioni geometriche o analitiche; la funzione è *ricorsiva* ed irregolare localmente e globalmente;
- ***Dimensione* frattale**: sebbene possa essere rappresentato in uno spazio convenzionale a due o tre dimensioni, la sua dimensione non è necessariamente un intero; può essere una frazione, ma spesso anche un numero irrazionale. E' di solito maggiore della dimensione topologica.

La dimensione frattale è quindi il numero che misura il grado di irregolarità e di interruzione di un oggetto, considerato in qualsiasi scala.

Da quando Mandelbrot ha introdotto la *geometria frattale*, è nato un nuovo linguaggio di descrizione delle forme complesse della natura: essi richiedono algoritmi, semplici funzioni ricorsive, che, iterate un gran numero di volte, forniscono un'immagine.

Ambito di applicazione dei frattali

Negli anni '80 con tale nuova geometria si sono trovati frattali in ogni ambito: dalla natura, alla medicina, alla musica e si è sviluppata una branca della geometria frattale che studia i cosiddetti *frattali biomorfi* (studia le forme della natura come il corallo etc.); inoltre si parla anche di frattali con *condensing*, che utilizzano le trasformazioni geometriche del piano, i *metodi IFS* ed *L-System*. I frattali sono usati da fisici e ingegneri nello studio dei *sistemi dinamici*, per costruire modelli che descrivono il *moto dei fluidi turbolenti* ed i *fenomeni di combustione*; ma secondo gli autori sono importanti anche per *le dimensioni extra e per la descrizione della gravità*. Inoltre i frattali trovano applicazione nella *compressione delle immagini trasmesse* e dei film virtuali, nella *distribuzione degli errori* su certe linee telefoniche, nello *studio dei terremoti*, *degli uragani*, del *DNA*, del cuore, dei vasi sanguigni, del *moto ondoso degli oceani*, la riproduzione di mezzi porosi, lo *studio degli idrocarburi* e della Natura in generale: coste geografiche, corso dei fiumi etc.

Concetto di dimensione di un frattale
Ritorniamo alla dimensione frattale: essa misura il grado di irregolarità e di interruzione dell'oggetto. Ha valori frazionari, irrazionali.

La *dimensione frattale D* di certe curve piane (di Peano, di Koch) hanno un valore compreso tra 1 e 2, quelle di certe superfici tra 2 e 3, estremi inclusi. In verità possono assumere anche valore 0 (*spugna di Sierpinski* a volume zero).

Per cui il significato della dimensione frattale corrisponde "in qualche modo" a quello euclideo ed esprime la dimensione fisica degli oggetti.

Per l'uomo comune, l'universo è tridimensionale; ma già Einstein mostrò, con la relatività, che ci muoviamo in uno spazio 4-dimensionale aggiungendo il tempo. Inoltre i progressi sulle dimensioni extra arrotolate **[1]** e la geometria di Calabi-Yau ci hanno fatto prendere coscienza di un universo a 10-11 dimensioni.

In realtà può darsi che queste sono solo le dimensioni per avere un cosiddetto problema "well formed"; ma in teoria il bulk potrebbe essere costituito da un numero maggiore di dimensioni e tale da giustificare ogni aspetto dell'Universo e delle sue attuali modalità di funzionamento. C'è anche da dire che non necessariamente è così: è l'essere umano a semplificare le dimensioni a quelle spaziali, ma concettualmente già viviamo in un universo a n dimensioni (l'esempio dell'albero etc.) e già affrontiamo problemi multi-dimensionali (dove le dimensioni non sono necessariamente solo quelle spaziali - vedi [1]).

Certi fenomeni e oggetti in natura però sono formati da molte parti distinte ed articolate tra loro; espresse, fondamentalmente, da un esponente di similitudine ed una dimensione frattale.

Nella fisica classica il concetto di dimensione è associato alla direzione del moto: linea unidimensionale e unidirezionale, superfice bidimensionale e bidirezionale, spazio tridimensionale e tridirezionale.

Ci sono però oggetti rappresentabili solo con curve-limite dove la direzione cambia infinite volte (ad es. una curva di Koch); in tal caso, per la dimensione, la sola direzione non è un concetto più sufficiente ed occorre introdurre anche il concetto di *auto-somiglianza*, cioè quella caratteristica che indica che la piccola parte ricostruisce il tutto.

Questo è solo un modo per iniziare ad affrontare il problema; ma in natura nemmeno questo è quello che realmente accade (vedi le coste italiane): nella maggior parte dei casi non è detto che si abbia a proprio vantaggio l'autosomiglianza. Si scopre presto che l'autosomiglianza è utile per determinati fenomeni, ma non per altri.

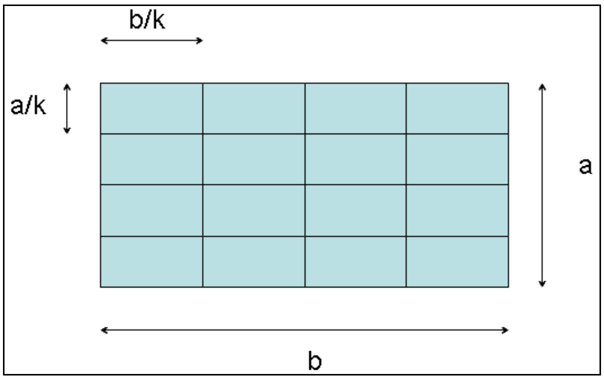
Frattali: gli elementi matematici
L'idea di *Haussdorff* consiste nel calcolare quanti piccoli oggetti o unità di grandezza k sono necessari per coprire un oggetto più grande di grandezza P. Il rapporto P/k è il fattore di scala o la risoluzione.

E' dimostrabile che esiste una *relazione euclidea* tra il rapporto lineare di similitudine r, la dimensione D dell'oggetto (*dimensione di Haussdorff)* e le N parti in cui l'oggetto è suddividibile. Lo vedremo nel seguito fino a generalizzare il risultato ad un D non intero.

Retta (D = 1)
Supponiamo di avere una retta di lunghezza L = a e la dividiamo in N parti ognuna di lunghezza k; il che vuol dire che un singolo nuovo pezzetto di retta ha una lunghezza L' = a/k e che N * a/k = a. Di conseguenza il rapporto lineare di similitudine tra lunghezze è:

$$r = L/L' = a/a/k = N = k.$$

Superfice rettangolare con A=a*b (D = 2)
Se dividiamo per k entrambi i lati del rettangolo otteniamo un'area minore A'= a/k * b/k = a * b/k^2. In questo caso le N parti ottenibili sono N=k*k=k^2. In pratica abbiamo ottenuto N rettangolini più piccoli tutti uguali o autosomiglianti.



L'area totale è A=a*b, per cui il rapporto di superfice che ci fornisce il rapporto lineare di similitudine r è:

r^2 = A/A'= N = k^2.

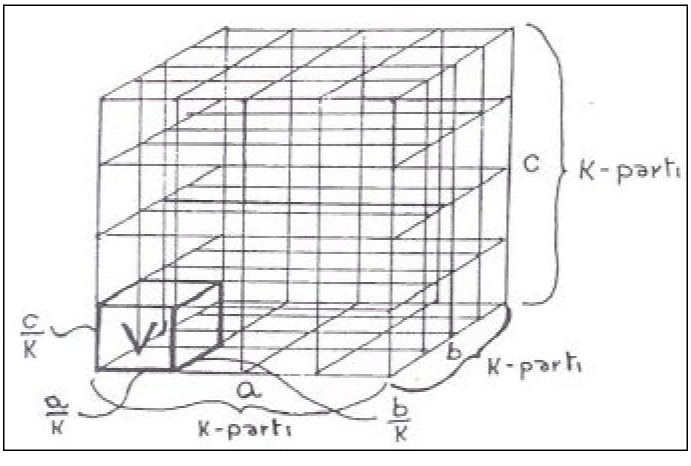
Da cui:

$$r = N^{1/2} = k$$

Il rapporto tra le aree lo possiamo quindi definire anche "rapporto di autosomiglianza".

Parallelepipedo con V=a*b*c (D = 3)
Un analogo discorso lo possiamo fare con un parallelepipedo. Se dividiamo a, b e c per k otteniamo un volume V':

V'= a/k * b/k * c/k = a*b*c * 1/k^3



Per cui il rapporto di volume che ci fornisce il rapporto lineare di similitudine r è:

r^3= V/V'= N = k^3.

Da cui:

$$r = N^{1/3} = k$$

Generalizzazione non euclidea
Da quanto visto il rapporto lineare di similitudine r per qualunque dimensione D è quindi una relazione simile a quella euclidea:

$$r^D = V/V' = N = k^D$$

Da cui:

$$r = N^{1/D} = k \qquad (1)$$

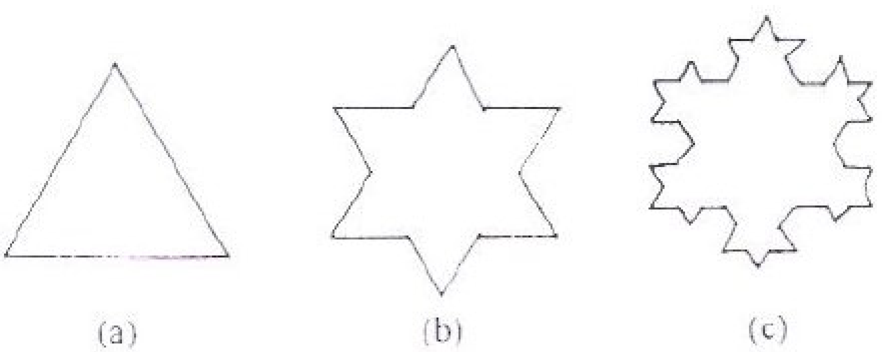
La (1) è detta *equazione di Haussdorff*, da cui si ricava che:

$$D = \log_k N$$

Per i frattali, D non è un intero, per cui c'è una somiglianza con la geometria euclidea ma non si può definire tale.

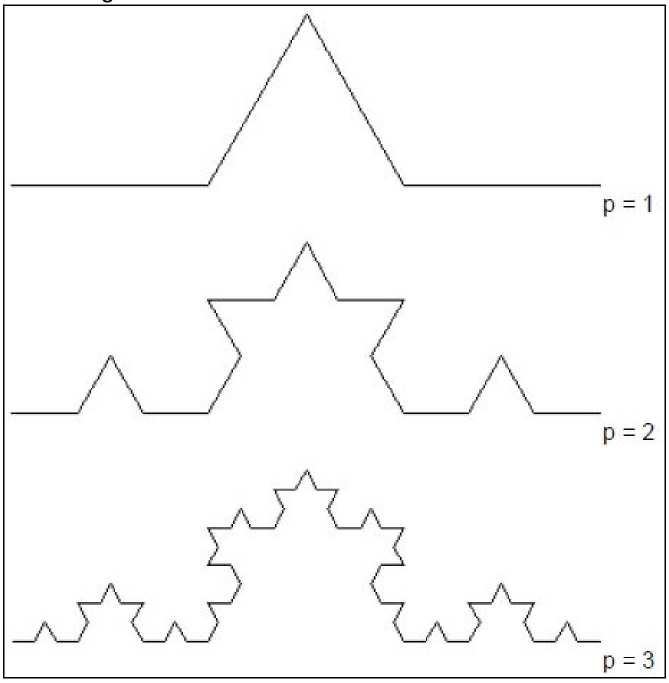
Dimensione di Haussdorff-Besicovitch
Una definizione rigorosa di dimensione frattale ∂ è quella di Haussdorff-Besicovitch, rappresentata da un numero reale nell'intervallo $[0,+\infty]$ associata ad uno spazio metrico generico. Un buon riferimento è il link:
http://it.wikipedia.org/wiki/Dimensione_di_Hausdorff

Curva di Helge von Koch
La curva di von Koch si ottiene partendo da un triangolo equilatero. Si suddivide ogni suo lato L in 3 parti.



La parte centrale di un lato L si sostituisce con un altro triangolo equilatero (figura b e step p=2 della figura successiva), di lato L/3 pari al pezzo sostituito centrale.

Ciò significa che un lato è sostituito con una spezzata fatta da 4 lati.



Costruzione dello snowflake

Quindi usando la (1) possiamo già calcolare che:

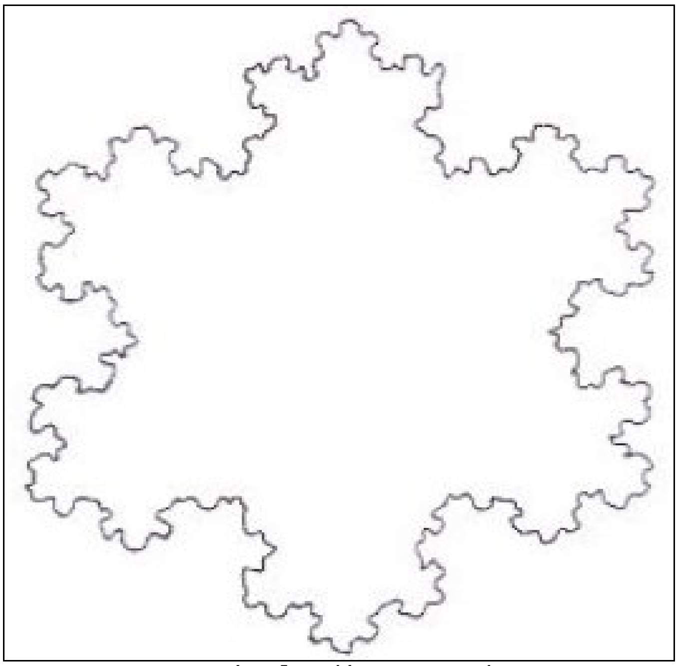
$$4^{1/D} = 3$$

Quindi:

$$D = \log_3 4 \sim 1,26 \quad (2)$$

Per ogni lato del triangolo, poi, si può ripetere il procedimento ottenendo la figura dello step p=3: il "fiocco di neve" (snowflake) o isola di von Koch.

Il procedimento si può fare infinite volte, ottenendo la figura di sotto.



L'isola di von Koch

L'isola di Koch ha un'area finita e se si osserva attentamente essa è costituita da vari fiocchi di neve sul contorno. Sappiamo che l'area del triangolo della figura a è $\frac{L^2}{4}\sqrt{3}$, la dimensione D è data dalla (2), che k^2=L^2, allora se chiamiamo con A l'area dell'isola di von Koch, *un rapporto di autosomiglianza* per essa è:

$$\frac{L^2}{(\log_3 4 * L)^2} = \frac{\frac{L^2}{4}\sqrt{3}}{A}$$

Da cui l'area vale:

$$A = (\log_3 4)^2 * \frac{L^2}{4}\sqrt{3} \sim 1,6 * \frac{L^2}{4}\sqrt{3}$$

Il perimetro, invece, aumenta di 4/3 ogni volta e tende all'infinito; (*la successione è difatti divergente*. Per la figura a, il perimetro è P = 3L; passando alla figura b diventa P = 3 * (L/3+L/3+L/3+L/3) = 3 * 4/3* L = 4L > L. Se passiamo alla figura c diventa P = 3 * (4/3 * L * 4/3) = 3 * $(4/3)^2$ * L.

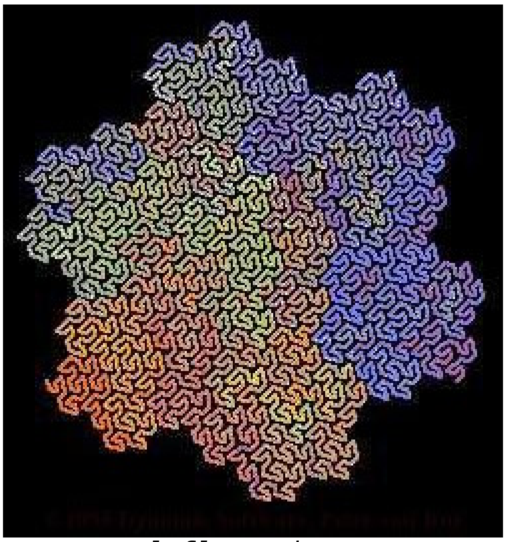
Generalizzando per n, diventa: 3*$(4/3)^n$ * L. Se n $\rightarrow \infty$ il perimetro tende all'infinito, per cui la successione dei valori diverge.

Dalla (2) abbiamo visto che D = 1,2618; quindi la dimensione non è euclidea e siamo di fronte ad un frattale. Ciò non vuol dire che il fiocco di neve si estenda in 1,26 direzioni diverse. La dimensione frattale coglie la relazione tra il numero di elementi costituenti e le loro dimensioni.

A seconda della loro sinuosità, le curve dei frattali possono cadere fra due dimensioni: possono avere dimensioni tra 1 e 2, in base alla quantità di anse che contengono. Se la curva si avvicina a una linea, allora ha una dimensione frattale vicina a 1. Una curva che fa molti "zig-zag" riempie maggiormente il piano ed ha una dimensione frattale vicina a 2. Analogamente, un paesaggio montuoso frattale può trovarsi fra la seconda e la terza dimensione classica. Una maggiore dimensione frattale significa un grado maggiore di complessità ed irregolarità della superficie, ma essa non supera mai la dimensione euclidea dello spazio in cui è racchiusa: un paesaggio alpino, più accidentato di un paesaggio collinare, non ha mai una dimensione superiore a 3.

Le cartine di una linea costiera molto irregolari mostrano quanto abbiamo appreso dai frattali: passando a scale sempre più piccole, si scopre un numero sempre crescente di particolari e si hanno lunghezze sempre più grandi (precedentemente abbiamo visto come il perimetro aumentava).

Una particolarità evidente è che le curve dei frattali avendo flessi a tangenti verticali o cuspidi o punti angolosi, è impossibile considerare per esse le tangenti in ogni punto e quindi *non sono funzioni derivabili*.

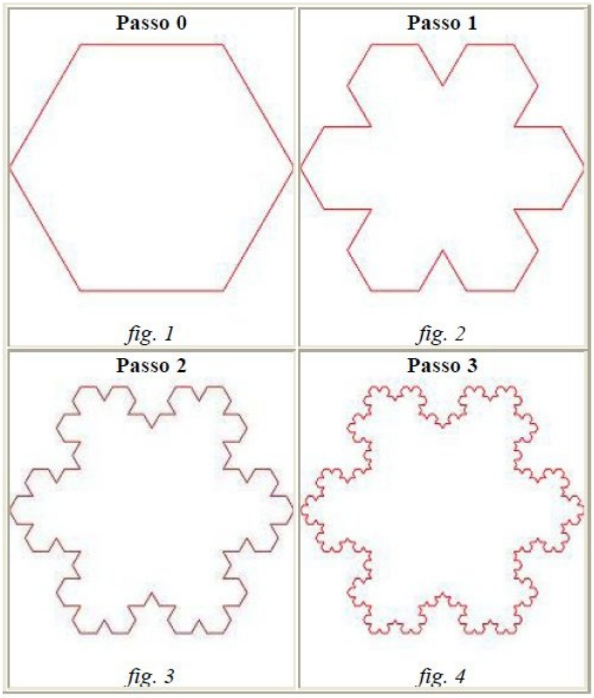


Il flowsnake

Una variante dello snowflake è il *flowsnake* (anti-fiocco) ottenibile con i triangoli orientati verso l’interno, anziché all’esterno (ovvero sottraiamo invece di aggiungere triangoli).

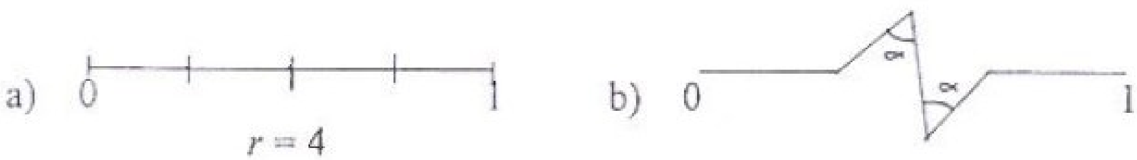
Il nome è stato ricavato dal precedente invertendo le parole: è stato un modo scherzoso dei matematici per indicare quest’altro tipo di frattale.

Anche questa forma ha un perimetro esterno infinitamente lungo, che interseca se stesso infinite volte, ma l’area è solo 2/5 di quella del triangolo equilatero di partenza.

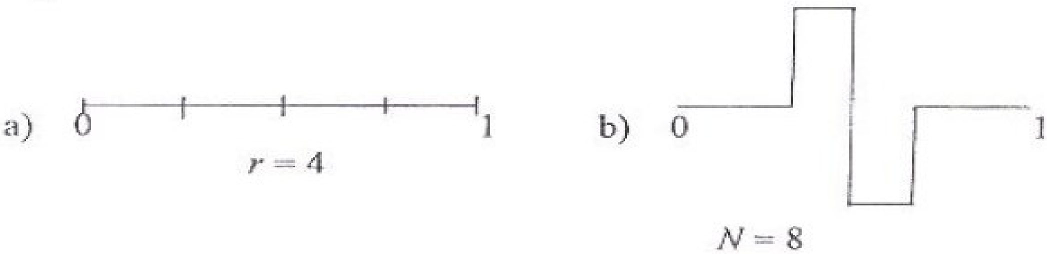


Ulteriore variante è quella ottenibile partendo da un esagono e sottraendo triangoli, vedi figura a sinistra.

In basso invece altre figure, che rappresentano varianti della curva di Von Koch con l’indicazione della dimensione frattale.



D = log 5/ log 4 ~ 1.16



D = log 8/ log 4 ~ 1.5

Altri tipi di frattali

Insieme di Cantor

Questo è il più classico tra i frattali. L'insieme C di Cantor è l'insieme dei punti che rimangono dopo che all'intervallo [0,1], estremi inclusi, asportiamo ad ogni step 1/3 dell'intervallo. Per p → ∞ l'insieme C è costituito dagli estremi dei segmenti che si ottengono ad ogni iterazione p; quindi rimangono infiniti punti.

Da qui ne risulta che la lunghezza Lt(C) dei pezzi tolti da [0,1] è:

$$Lt(C) = \frac{1}{3} + 2 * (\frac{1}{3})^2 + 2^2 * (\frac{1}{3})^3 + \ldots = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{p}(2/3)^k$$

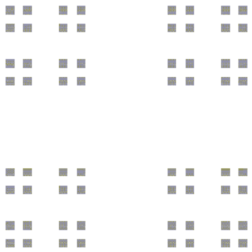
Per p → ∞ Lt(C) = 1, ma l'insieme di Cantor rimane con lunghezza L(C) = 0 ma con infiniti punti.

La dimensione D si calcola considerando che inizialmente il segmento vale 1, dopo lo step p=1 rimangono N(h)=2 segmenti ognuno di h=1/3, mentre dopo p step è $N(h)=2^p$ e $h=1/3^p$, per cui è:

$$D = \log 2^p / \log 3^p = \log 2 / \log 3 \sim 0.6309$$

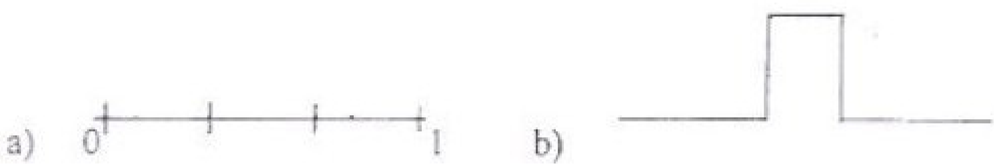
L'insieme di Cantor non contiene segmenti continui, contiene infiniti punti che sono punti di accumulazione di sé stesso.

Polvere di Cantor (2D)



E' una versione multi-dimensionale dell'insieme di Cantor. Essa può essere costruita componendo un prodotto cartesiano finito dell'insieme di Cantor con se stesso, ottenendo così uno spazio di Cantor. Come l'omonimo insieme, la polvere di Cantor ha misura nulla.

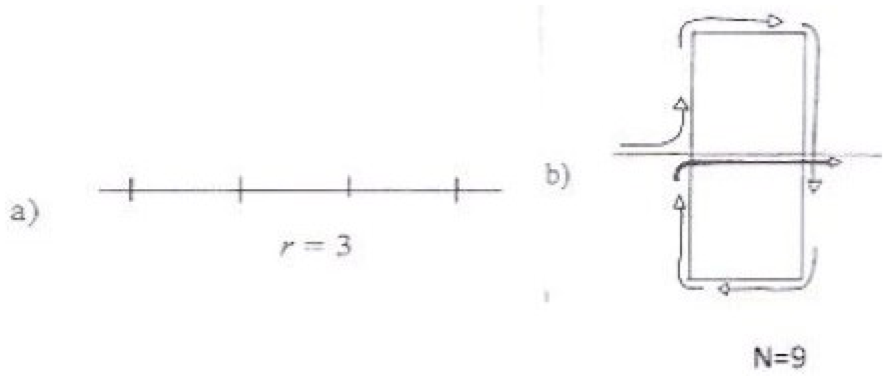
La greca



Dalla (2) è $r = N^{1/D} = k$, per cui la greca vale $r = 5^{1/D} = 3$ da cui

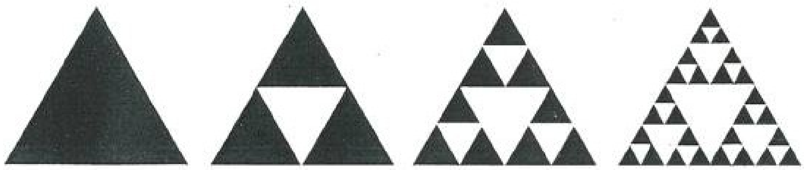
$$D = \log 5 / \log 3 \sim 1.465$$

Curva di Peano

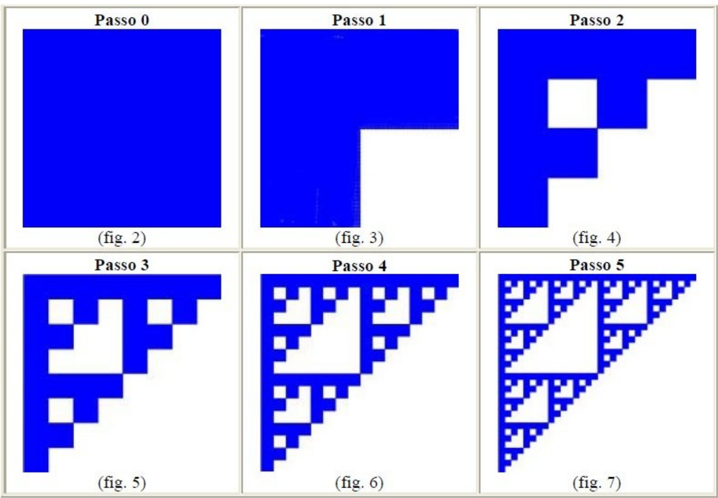


La curva di Peano pur avendo una relazione tra il contorno del quadrato iniziale e quello finale, ricopre tutto il piano per cui ha dimensione D=2.

Il triangolo di Sierpinski o Gerla di Sierpinski o Triangolo di Pascal modulo 2



Dal triangolo di partenza si eliminano un numero 3^n di triangoli rovesciati con n=0 e si ottiene la seconda figura. Dalla seconda figura si eliminano un numero 3^n di triangoli rovesciati con n=1 e si ottiene la terza figura. Dalla terza figura si eliminano 3^n di triangoli rovesciati con n=2 e si ottiene la quarta figura.



Il triangolo di Sierpinski si può anche ricavare in modo più semplice sottraendo dei quadrati, come nelle figure successive.

Si parte dal quadrato iniziale e si elimina un quadrato di dimensione la metà di quello di partenza e si arriva alla figura 3. In questo modo rimangono 3 quadrati. Ad ognuno di essi si elimina un quadrato in basso a destra e si ottiene la figura 4.

Se si itera il procedimento si arriva facilmente alla figura 7.

Per ottenere il triangolo di Sierpinski usando le affinità si possono usare tre trasformazioni, tenendo presente che l'origine del sistema di riferimento è in basso a sinistra del primo quadrato di partenza:

$$T_1 : \begin{cases} X = \frac{1}{2}x \\ Y = \frac{1}{2}y \end{cases} ; T_2 : \begin{cases} X = \frac{1}{2}x \\ Y = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \end{cases} ; T_3 : \begin{cases} X = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ Y = \frac{1}{2}y \end{cases}$$

Si osserva che T1 è un'omotetia[1] di ragione 1/2; T2 è un'omotetia di ragione 1/2 però composta con una traslazione secondo il vettore (0, ½); T2 è un'omotetia di ragione 1/2 però composta con una traslazione secondo il vettore (1/2, 1/2).

Nella figura 7, inoltre, si evidenzia l'autosimilarità: in pratica abbiamo tre triangoli simili.

Insiemi di Julia e di Mandelbrot
L'idea originale di Mandelbrot è stata di usare la semplice formula ricorsiva:

$$z_{n+1} = z_n\verb|^|2 + z_c$$

Con zn+1, zn e zc valori complessi e con zc che rimane costante nella applicazione ricorsiva della formula.

Se zn è un numero complesso qualunque, elevandolo al quadrato e sommando zc si ottiene un nuovo numero complesso. Se al risultato zn+1 ottenuto si riapplica lo stesso procedimento, ovvero si assume il risultato come zn e si riapplica la formula indefinitamente, si ottengono ulteriori valori.

Nel caso in cui zc sia nullo, si possono verificare tre possibilità:
- Punti che distano 1 dall'origine (cioè, che stanno su una circonferenza di raggio r=1) non sono mossi dalla trasformazione (perché tali punti di zn+1 sono uguali a zn, se zn=1);
- Punti che distano meno di 1 dall'origine, che sono cioè interni alla circonferenza di r=1, si muovono verso l'origine (perché zn+1 < zn, se zn<1);
- Punti che distano più di 1 dall'origine, che sono cioè esterni alla circonferenza di r=1, si muovono verso l'infinito (perché zn+1>zn se zn>1).

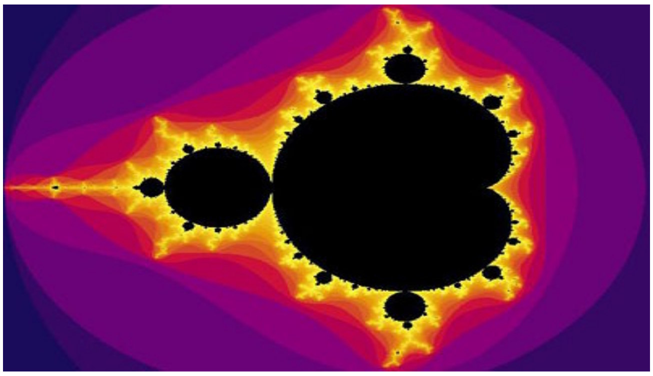
Ci sono, dunque, due "zone di attrazione", verso lo zero e verso infinito, divise da un confine circolare.

Nel caso in cui zc sia diverso da zero, il risultato dipende dal valore:
- Per certi valori di zc, continuando ad applicare la regola, i punti nel piano si allontana sempre di più e si dice che il "percorso è imprevedibile" o illimitato; l'insieme dei punti che scappano è l'insieme di fuga.
- Per altri valori di zc, il punto non "fugge via", ma crea forme intricate di straordinaria bellezza, In tal caso si dice che dà luogo ad un percorso prevedibile o limitato o "insieme prigioniero di punti" e genera i frattali di Mandelbrot.

Tra "fuggire all'infinito" e "rimanere in trappola" vi è una grande differenza; ma quali sono i valori della zc costante che producono un certo comportamento?

Per scoprirlo, immaginiamo, ad esempio, di dividere il piano in piccole celle e scegliamo una costante complessa al centro di una cella. Se la regola "eleva al quadrato ed aggiungi una costante" porta alla fuga, coloriamo di bianco la cella; se il punto rimane intrappolato, la coloriamo di nero. Facciamo la stessa cosa con tutte le celle, una alla volta. Otteniamo così una forma estremamente complicata: un frattale, detto "insieme di Mandelbrot".

[1] Un'omotetia è una particolare trasformazione geometrica del piano o dello spazio, che dilata o contrae gli oggetti, mantenendo invariati gli angoli ossia la forma (nel senso intuitivo del termine).



Insieme di Mandelbrot

L'insieme prigioniero e l'insieme di fuga sono separati da una frontiera molto stretta, frontiera che assume il nome di "insieme di Julia", in onore appunto del matematico *Gaston Julia*. Come si fa a sapere se un punto è di fuga oppure prigioniero?

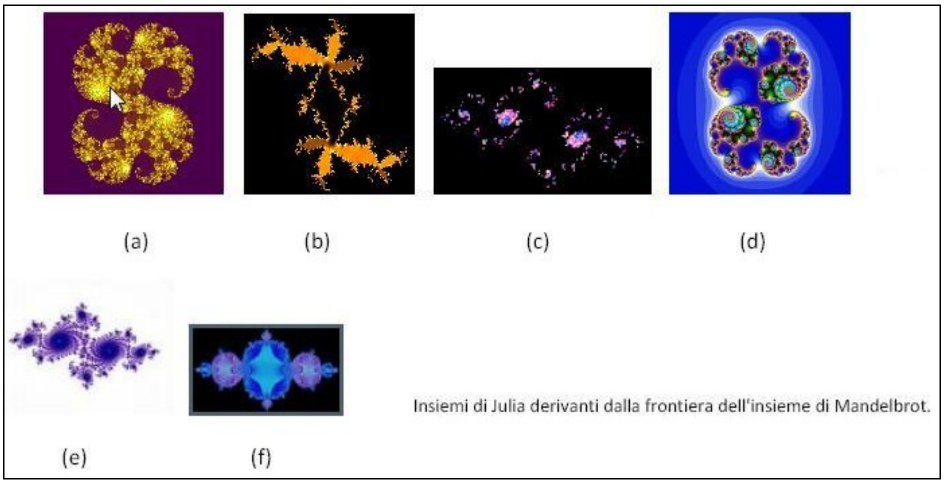
La risposta è data da un teorema dimostrato dallo stesso Mandelbrot: "Se un punto si trova ad una distanza maggiore o uguale a due unità dall'origine, allora è destinato all'infinito; se invece si trova ad una distanza minore a due unità dall'origine, allora è un punto prigioniero".

A questo punto appare chiaro che, per ciascun valore prefissato di z_c usato nella formula di iterazione, appare un diverso insieme di Julia, pieno di prigionieri. I punti prigionieri ovviamente costituiscono l'insieme di Mandelbrot la cui forma non cambia sostanzialmente al variare di z_c.

Nella scelta di z_c può capitare:

- Si ottengono insiemi di Julia che sono connessi (senza soluzione di continuità;
- Si ottengono insieme di Julia che non sono connessi (discontinui, costituiti di pezzi per cosi dire "sparpagliati ": figure (a)(b)(c)(d);
- Insiemi di Julia derivanti dalla frontiera dell'insieme di Mandelbrot: figure: (e)(f).

Esempi di insiemi di Julia connessi sono (a), (e), ed (f); mentre (b), (c), e (d) non lo sono.



Per sapere se un insieme di Julia è connesso oppure non lo è basta conoscere se il punto corrispondente a z_c appartiene oppure no all'insieme di Mandelbrot.

In altre parole se la successione risultante dall'iterazione della formula non diverge verso l'infinito allora l'insieme di Julia è connesso e il punto corrispondente a zc appartiene all'insieme di Mandelbrot; se invece la successione diverge verso l'infinito allora l'insieme di Julia è non connesso e il punto corrispondente a z_2 non appartiene all'insieme di Mandelbrot.

Si è detto che un arbitrario valore di z_c dà luogo a un nuovo e diverso insieme di Julia, mentre l'insieme di Mandelbrot, in un certo senso, riassume, in un colpo, tutti i possibili insiemi di Julia.

Generalmente l'insieme di Julia è simile a sé stesso mentre l'insieme di Mandelbrot non lo è perché solo cosi racchiude l'infinita quantità di vari insiemi di Julia.

A seconda della zona dell'insieme di Mandelbrot che si vuole, per cosi dire, perlustrare, si vedono diversi insiemi di Julia.

Assumendo $z_c = a + i * b$ costante, i domini di coordinate che racchiudono, da tutti e quattro i lati, i due tipi di insiemi sono:

- Insiemi di Julia: $-1,8 < a < +0,75$ e $-1,8 < b < +1,8$
- Insiemi di Mandelbrot: $-2,25< a < +0,75$ e $-1,8 < b < +1,5$.

Formule generatrici

Si possono costruire frattali in molti modi:

- con equazioni del tipo z^n+c;
- con equazioni differenziali;
- con equazioni alle differenze finite;
- con le formule di Newton per la ricerca delle radici di una equazione;
- geometricamente etc.

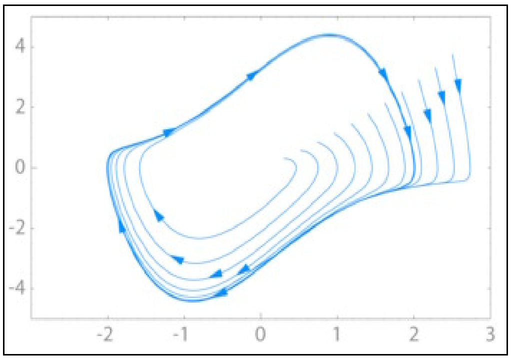
Attrattori strani

Un attrattore è un insieme a cui tende un sistema dinamico in un intervallo di tempo piuttosto lungo. Un insieme è considerato attrattore solo se le traettorie ottenibili del sistema dinamico rimangono sempre vicine ad esso; può essere un punto, una curva o forme frattali più complicate e se la dimensione non è intera viene definito "attrattore strano". Il termine fu coniato da *David Ruelle e Floris Takens* per descrivere le biforcazioni di un sistema che descrive il flusso di un fluido.

E' usato spesso nei sistemi dinamici caotici e dissipativi (non esistono sistemi conservativi: sono ideali). I sistemi dissipativi sono caratterizzati dal fatto che le orbite, pur partendo da condizioni iniziali anche completamente diverse, finiscono per giungere tutte in un determinato insieme di stati, detto attrattore.

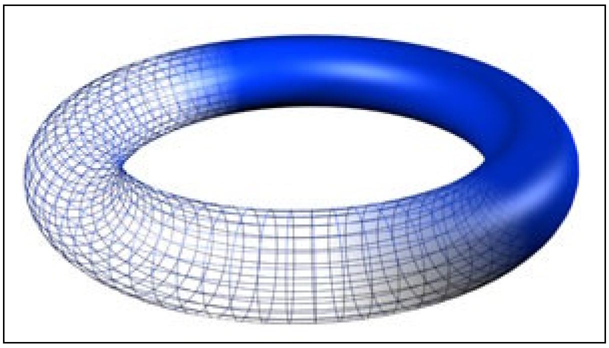
Consideriamo, ad esempio, un pendolo che oscilli: il suo moto si smorza progressivamente, con oscillazioni sempre più piccole, fino a esaurirsi nella quiete. L'orbita di fase è una spirale che termina nel punto velocità nulla, spostamento nullo, che è il punto di equilibrio del pendolo. Tutte le orbite finiscono in questo punto: esso è dunque l'attrattore del sistema.

Non tutti gli attrattori sono costituiti da semplici punti; possiamo avere delle curve regolari, dette "cicli limite", oppure, nel caso dei sistemi caotici, delle strutture ancor più insolite detti **attrattori strani**.



Esempio di ciclo limite

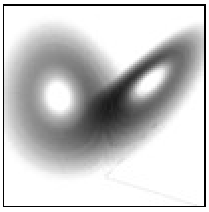
Ma in pratica le traettorie di un sistema dinamico non devono soddisfare nessuna particolare proprietà, tranne che stare sull'attrattore e le traettorie possono essere periodiche, caotiche o altro. Una traiettoria periodica di un sistema può essere governata da più di una frequenza. Se due di queste frequenze sono in rapporto irrazionale (cioè sono incommensurabili), la traiettoria non sarà più chiusa, e il ciclo limite diventa un toro limite.



Un 2-toro

Questo tipo di attrattore viene chiamato Nt-toro se sono presenti Nt frequenze incommensurabili.

Gli attrattori strani sono differenziabili solo in poche direzioni e sono omeomorfi[2] alla "polvere di Cantor" in altre direzioni e quindi non differenziabili.



Attrattore di Lorentz

L'attrattore di Lorentz è il primo esempio che nasce da un sistema di equazioni differenziali in bassa dimensionalità, in grado di generare frattali.

Lorentz, studiando il flusso termico di convezione di un fluido, arrivò alle equazioni:

---

[2] un omomorfismo è un'applicazione o funzione tra due strutture algebriche dello stesso tipo che conserva le operazioni in esse definite.

Abbiamo vari tipi di omomorfismo:

- Si chiama monomorfismo ogni omomorfismo iniettivo;
- Si chiama epimorfismo ogni omomorfismo suriettivo;
- Si chiama isomorfismo ogni omomorfismo biiettivo.

Se in particolare A e B coincidono:

- Si chiama endomorfismo della struttura A ogni omomorfismo di A in se stesso;
- Si chiama automorfismo della struttura A ogni isomorfismo di A in se stesso.

$$x' = \sigma(y - x)$$
$$y' = -xz + rx - y$$
$$z' = xy - bz$$

Le equazioni descrivono bene, col forte troncamento, il fenomeno di convezione solo di $r \approx 1$ e vengono usate come modello a basse dimensioni per un comportamento caotico, portando il parametro r delle equazioni fuori dall'ambito fisico; ed è per questo che oggetti che nascono così per descrivere il moto di un sistema caotico sono detti attrattori strani.

L'attrattore di Lorentz è ricavabile da equazioni differenziali, ma esistono anche attrattori che nascono da equazioni a differenze finite, come ad esempio *l'attrattore di Henon*.

Michel Henon, all'osservatorio di Nizza, osservò che per determinate energie le intersezioni tra le trattorie degli oggetti celesti e un piano immaginario costituiscono forme geometriche regolari; mentre a energie più elevate danno luogo a orbite caotiche.

Egli studiò un modello geometrico semplice basato su trasformazioni topologiche di contrazioni e dilatazioni:

$$x_{t+1} = y_t + 1 - 1{,}4x_t^2$$
$$y_{t+1} = 0{,}3x_t$$

La figura associata alle equazioni è una sorta di "banana" costituita da più linee, apparentemente uniche. Se si aumenta la risoluzione si osserva che le linee inizialmente viste come "uniche" sono costituite da due linee distinte. Se aumentiamo ancora la risoluzione diventano quattro, poi otto etc.

La caratteristica comunque è simile a quanto avviene nell'attrattore di Lorentz, ovvero che le linee distinte sono confinate comunque in uno spazio limitato.

Le equazioni differenziali alle derivate parziali paraboliche possono avere attrattori a dimensione finita. La parte diffusiva dell'equazione smorza le alte frequenze e in alcuni casi porta a un attrattore globale. Le equazioni di *Ginzburg-Landau*, di *Kuramoto-Sivashinsky*, e le equazioni bidimensionali forzate di *Navier-Stokes*[3] sono tutti esempi di sistemi aventi attrattori a dimensione finita.

I frattali e un "Universo frattale"

Il fisico Luciano Pietronero, direttore dell'Istituto dei Sistemi Complessi del CNR, ipotizza un'interpretazione frattale dell'Universo.

Le galassie costituiscono i più grandi agglomerati di materia ad oggi conosciuti.

Le galassie prese singolarmente non manifestano proprietà di auto somiglianza, ma se consideriamo la distribuzione delle galassie nell'universo, allora si arriva a conclusioni non considerate finora.

[3] Altro "problema del Millennio"

Per comprenderlo occorre chiedersi come varia la massa rispetto ad un volume dato. Ad esempio la massa dei solidi pieni cresce con il cubo della dimensione lineare per cui la massa è proporzionale al volume del solido pieno.

I solidi frattali, invece, presentano molti vuoti al loro interno e, quindi, la densità di massa necessariamente decresce al crescere del volume considerato.

La ricerca di Pietronero ha portato alla conclusione che la distribuzione di materia nell'Universo segue la "legge della densità di materia nei solidi frattali"; per cui la densità delle strutture costitutive delle galassie è auto-simile e la densità è tanto minore quanto più grande è il volume preso in considerazione.

Questa ipotesi nega il principio cosmologico secondo cui "le galassie sono distribuite in modo uniforme e isotropo", tipica di una teoria dell'Universo stazionario. Ma d'altra parte il nostro Universo non è in quiete o stazionario.

Su questo argomento ovviamente c'è molto ancora da provare.

La teoria di un "Universo frattale", oltre alla polvere interstellare e ad altre ipotesi, può fornire anche un'ulteriore spiegazione alla domanda: "perché la notte è buia?".

Di notte la Terra volge al Sole solo una faccia mentre l'altra è nascosta; ma si potrebbe ipotizzare che le stelle, anche se molto distanti, dovrebbero costruire una cortina luminosa splendente anche per la faccia terrestre nascosta al Sole.

Perché, allora, non è sempre giorno? La risposta frattale a questa domanda attribuisce la responsabilità del buio alla diminuzione di densità che si ha con l'aumento della distanza e, quindi, il mancato apporto di luce dalle vastissime zone vuote del cosmo.

E' stata provata l'esistenza di zone vuote nel cosmo. Questo significa che è possibile ipotizzare che, poiché l'Universo alterna zone "vuote" a zone "piene", l'espansione di ogni zona risulti più o meno veloce, a seconda della densità di materia o massa. La massa frena l'espansione: questo significa che zone vuote si espandono più velocemente di zone piene, e quindi l'espansione globale dell'Universo non è costante, ma è variabile da regione a regione.

RIFERIMENTI

[1] Le dimensioni extra nascoste, la particella di Higgs ed il vuoto quantomeccanico, supersimmetria e teoria delle stringhe – Rosario Turco, Maria Colonnese