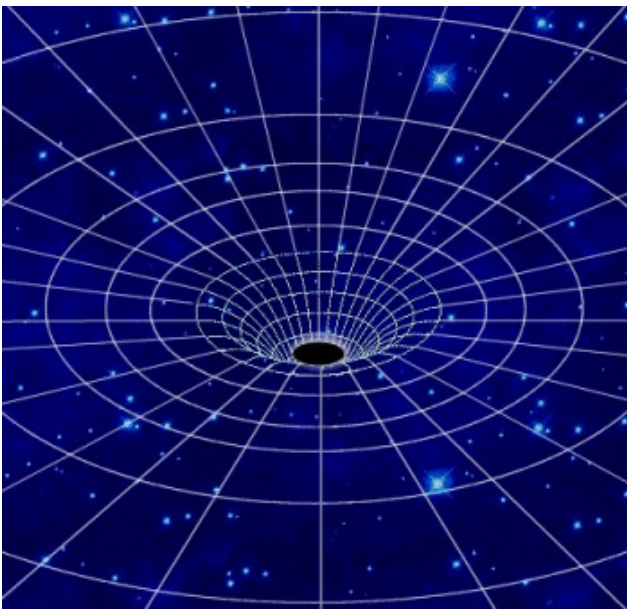


Block Notes Matematico

Legami tra teoria delle stringhe e la funzione zeta di Riemann

ing. Rosario Turco¹, prof. Maria Colonnese, dott. Michele Nardelli

Esiste un legame tra teoria delle stringhe e funzione zeta di Riemann: questo costituisce una strada interessante, perché la funzione zeta è legata a quegli elementi matematici atomici non scomponibili, rappresentati dai numeri primi e abbiamo visto in tante occasioni come la natura ama esprimersi attraverso leggi e modelli matematici perfetti.



Non ultimo la situazione che determinati livelli energetici degli atomi stabili potrebbero essere associabili agli zeri non banali della funzione zeta di Riemann. In [6] ad esempio è stato mostrato il legame della zeta di Riemann e dei suoi zeri non banali con la Fisica quantistica attraverso la *legge Montgomery-Odlyzko*.

La legge di Montgomery-Odlyzko dice che “la distribuzione delle spaziature tra zeri non banali successivi della funzione zeta di Riemann (normalizzata) è identica, dal punto di vista statistico, alla distribuzione delle spaziature degli autovalori in un operatore GUE”, che rappresentano anche i sistemi dinamici delle particelle subatomiche!

In [6] gli autori hanno mostrato tutti gli aspetti matematici e teorici legati alla zeta di Riemann, mentre in [9] i legami di determinate formule della Teoria dei numeri con la sezione aurea e con altri settori come la teoria delle stringhe. Gli autori hanno dato una duplice proposta sia di soluzione dell’ipotesi di Riemann (RH) che della congettura sulla molteplicità degli zeri non banali, mostrando che sono zeri semplici[7][8].

In [10][11] sono proposte delle ipotesi equivalenti RH, in [12][13] gli autori hanno presentato articoli divulgativi di Fisica sulle dimensioni extra, la Teoria delle stringhe e la M-teoria, in [15] la congettura di Yang e Mills e in [16] la congettura di Birch e Swinnerton-Dyer.



¹ Rosario Turco è un ingegnere presso Telecom Italia (Napoli) ed ideatore di “Block Notes Matematico” insieme alla prof. Maria Colonnese del Liceo Classico “De Bottis” di Torre del Greco, provincia di Napoli

Un aspetto matematico della teoria delle stringhe

Durante gli esperimenti condotti negli acceleratori di particelle, i fisici avevano osservato che lo spin di un adrone non è mai maggiore di un certo multiplo della radice della sua energia; ma nessun modello adronico semplice, come quello di vederli come composti da un serie di particelle più piccole legate insieme da un qualche tipo di forza, era in grado di spiegare tali relazioni e il comportamento degli adroni (vedi [12]).

Nel 1968 *Gabriele Veneziano* trovò che una funzione a variabili complesse creata dal matematico svizzero Leonhard Euler, potesse essere la soluzione giusta: la funzione beta, si adattava perfettamente ai dati ottenibili sull'*interazione nucleare forte*.

Veneziano applicò la Funzione Beta di Eulero all'interazione forte:

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (1)$$

con $\operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0$

ma nessuno sapeva spiegarsi perché funzionasse. Nel 1970, *Yoichiro Nambu*, *Holger Bech Nielsen*, e *Leonard Susskind* presentarono una spiegazione fisica sulla straordinaria precisione teorica della formula di Eulero: rappresentando la forza nucleare attraverso stringhe vibranti ad una sola dimensione, mostrarono che la funzione di Eulero descriveva effettivamente le interazioni forti.

Ma anche dopo che i fisici ebbero proposto una possibile spiegazione fisica per l'intuizione di Veneziano, la descrizione che le stringhe davano della forza forte faceva predizioni che contraddicevano direttamente le esperienze.

La *funzione Beta* di Eulero è detta anche *Integrale di Eulero del primo tipo* [6], è data dall'integrale definito:

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (2)$$

dove sia x che y hanno parte reale positiva e non nulla (se lo fossero, l'integrale non convergerebbe a un numero finito).

Questa funzione storicamente fu studiata per primo da Eulero, poi da Legendre, e fu Jacques Binet a battezzarla con tale nome. È una *funzione simmetrica*, ovvero il suo valore non cambia scambiando gli argomenti:

$$\beta(x, y) = \beta(y, x)$$

inoltre valgono anche le due seguenti identità:

- $\beta(1,1)=1$
- $\beta(1/2,1/2)=\pi$

La funzione Beta si può scrivere in molti modi, di cui i più comuni sono i seguenti:

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x + y)} \quad (3)$$

$$\beta(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta, \quad \Re(x) > 0, \Re(y) > 0 \quad (4)$$

$$\beta(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt, \quad \Re(x) > 0, \Re(y) > 0 \quad (5)$$

$$\beta(x, y) = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(y)_{n+1}}{n!(x+n)} \quad (6)$$

dove $\Gamma(x)$ è la *funzione Gamma*, dovuta a Eulero, è una *funzione meromorfa*, continua sui numeri reali positivi, che estende il concetto di fattoriale ai numeri complessi, nel senso che per ogni numero intero non negativo n si ha:

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad (7)$$

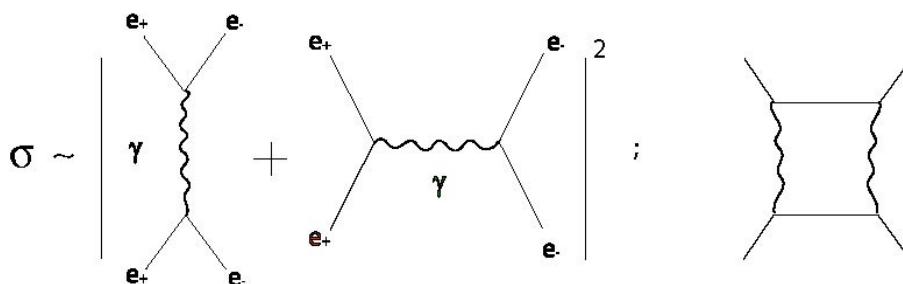
dove $n!$ è il *fattoriale*.

Mentre la funzione Gamma descrive i fattoriali dei numeri interi, la funzione Beta può descrivere i coefficienti binomiali di Newton:

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{(n+1)B(n-k+1, k+1)} \quad (8)$$

Significato fisico del risultato di G. Veneziano

I processi d'urto (vedi figura) hanno un ruolo fondamentale, sia dal punto di vista sperimentale che teorico, nella fisica delle particelle elementari, e sono lo strumento primario per lo studio delle loro interazioni. Fin dall'inizio della teoria atomica la natura dell'atomo fu studiata con "tecniche d'urto": particelle sparate verso l'atomo (vedi esperimento di Rutherford ad esempio).



Nella figura di sopra ci sono due diagrammi di Feynman "ad albero" per il processo d'urto $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ tra *un positrone* (e^+) e *un elettrone* (e^-) e un esempio di diagramma di ordine superiore

con un anello chiuso o “loop”. Le linee possono essere associate a traiettorie delle particelle che partecipano al processo, e i vertici alle loro interazioni elettromagnetiche. I contributi di ordine più basso coinvolgono lo scambio di un fotone γ , nei canali s (verticale) e t (orizzontale) rispettivamente, e il contributo dominante alla sezione d’urto σ è legato al quadrato del modulo della loro somma.

Abbiamo visto in [12] che una delle difficoltà maggiori nella QED è la presenza del vuoto quantomeccanico e delle particelle virtuali, che contribuiscono nelle interazioni dando luogo ad altre particelle e così via.

Questa fatto è alla base della tecnica dei “diagrammi di Feynman”, che consente di collegare le probabilità di reazione, note come “sezioni d’urto”, ai processi elementari nei quali le particelle reagenti generano i prodotti di reazione attraverso la formazione di altre particelle in stati intermedi.

Alla somma dei diagrammi relativi ad un certo processo la teoria associa un’ampiezza di probabilità, un numero complesso il cui modulo quadrato determina essenzialmente le sezioni d’urto. Ma la proliferazione della particelle soggette alle interazioni forti ha limitato a lungo l’applicazione di questi metodi a causa dell’estrema intensità di queste forze nucleari, e quindi negli anni ’60 molti sforzi sono stati dedicati al problema di caratterizzare le sezioni d’urto o la “matrice S”, una collezione delle corrispondenti ampiezze di probabilità.

La Teoria delle Stringhe ha avuto origine precisamente in questo ambito, quando il ricorso alla Teoria Quantistica dei Campi e ai corrispondenti diagrammi di Feynman appariva impossibile per le interazioni forti.

In questo quadro si colloca il risultato di Veneziano. Nella (2), con le variabili x e y, Veneziano individuava gli angoli di impatto e le energie delle particelle coinvolte nell’urto. In generale, i diagrammi di Feynman dipendono da queste grandezze, ma non manifestano individualmente alcuna simmetria sotto il loro scambio, e quindi la peculiarità della funzione B era proprio la sua simmetria manifesta sotto lo scambio delle due variabili x e y, che in questo contesto è definita “*dualità planare*”. B(x; y) possiede inoltre infiniti “poli” per $x = 0, -1, -2, \dots$ e analogamente per y, nell’intorno dei quali si comporta essenzialmente come la funzione $1/z$ in prossimità dell’origine per $z = 0$.

Singularità di questo tipo sono caratteristiche dei contributi di ordine più basso (senza “loops” o “ad albero”, come i due diagrammi a sinistra nella figura precedente), i cui stati intermedi coinvolgono altrettanti tipi di particelle, una alla volta, e segnalano appunto il loro scambio.

Fu quindi chiaro che l’ampiezza di Veneziano aveva origine da una teoria molto più complessa di ogni altra precedentemente nota, con infiniti tipi di particelle, tutte bosoniche, di masse e spin crescenti.

Relazioni fra la funzione Gamma e la funzione Beta

La (3) si dimostra scrivendo il prodotto di due fattoriali come:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-u}u^{x-1}du \int_0^\infty e^{-v}v^{y-1}dv.$$

Ora poniamo $u \equiv a^2, v \equiv b^2$ in modo che:

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= 4 \int_0^\infty e^{-a^2} a^{2x-1} da \int_0^\infty e^{-b^2} b^{2y-1} db \\ &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(a^2+b^2)} |a|^{2x-1} |b|^{2y-1} da db.\end{aligned}$$

Trasformiamo in coordinate polari con $a = r\cos\theta, b = r\sin\theta$:

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} |r \cos \theta|^{2x-1} |r \sin \theta|^{2y-1} r dr d\theta \\ &= \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2x+2y-2} dr \int_0^{2\pi} |\cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta| d\theta \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(x+y-1)} d(r^2) \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta d\theta \\ &= 2\Gamma(x+y) \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta d\theta \\ &= \Gamma(x+y)\beta(x, y).\end{aligned}$$

e quindi riscriviamo gli argomenti nella forma solita della funzione beta:

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

La derivata della funzione beta può essere scritta sfruttando, di nuovo, la funzione Gamma e la *funzione digamma* $\psi(x)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \beta(x, y) = \beta(x, y) \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)} \right) = \beta(x, y) (\psi(x) - \psi(x+y))$$

Relazioni fra la funzione Beta e la funzione Zeta di Riemann

In [6] abbiamo visto che se la parte reale del numero complesso z è positiva, allora l'integrale

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

converge assolutamente e rappresenta la funzione Gamma.

Usando la continuazione analitica, la Γ converge anche per z con parte reale non positiva, purché non intera. Usando l'integrazione per parti, si può dimostrare che: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Siccome $\Gamma(1) = 1$, questa relazione implica, per tutti i numeri naturali n , che

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

Altre definizioni sono:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}$$

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}$$

dove γ è la *costante di Eulero-Mascheroni*.

In [6] abbiamo visto che altre importanti proprietà della funzione Gamma sono la formula di riflessione di Eulero:

$$\Gamma(1 - z) \Gamma(z) = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi z)}$$

e quella di duplicazione:

$$\Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z).$$

che a sua volta è un caso particolare della formula di moltiplicazione

$$\Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{m}\right) \Gamma\left(z + \frac{2}{m}\right) \cdots \Gamma\left(z + \frac{m-1}{m}\right) = (2\pi)^{(m-1)/2} m^{1/2-mz} \Gamma(mz).$$

Le derivate della funzione Gamma possono essere espresse in funzione di sé stessa e di altre funzioni, per esempio:

$$\Gamma'(z) = \Gamma(z) \psi_0(z).$$

dove ψ_0 è la *funzione poligamma* di ordine zero. In particolare,

$$\Gamma'(1) = -\gamma.$$

Il più noto valore che la funzione Gamma assume su numeri non interi è

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

che si può trovare ponendo $z=1/2$ nella formula di riflessione, oppure osservando il valore che la funzione Beta assume in $(1/2, 1/2)$ che è proprio la radice di π .

In statistica si incontra di frequente l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

[16] che si ottiene ponendo $\frac{x^2}{2} = t$, e quindi $x = \sqrt{2t}$, ottenendo quindi $dx = \sqrt{2} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi}$$

Sono interessanti anche le seguenti proprietà, che interessano i multipli dispari di $1/2$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{(n-2)!!}{2^{(n-1)/2}} \sqrt{\pi} = \left(\frac{\frac{n}{2}-1}{\frac{n-1}{2}}\right) \frac{n-1}{2}! \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{n}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{n+1}{2}}\right) \frac{n+1}{2}!}$$

dove $n!!$ denota il *semifattoriale*.

Ma sicuramente *intrigante è la relazione* della funzione Gamma con la zeta di Riemann e sapendo che c'è il legame tra Gamma e Beta, si ottiene per conseguenza il legame tra Beta e zeta di Riemann:

$$\zeta(z) = \zeta(1-z) \Gamma(1-z) 2^z \pi^{z-1} \sin \frac{1}{2} \pi z$$

Di conseguenza nella teoria delle stringhe in sostanza è presente la funzione zeta di Riemann.

La L-function e le forme modulari

La domanda successiva da porsi è: “Se l’ipotesi di Riemann è vera, gli zeri non banali sono semplici ed esiste un legame tra funzione di zeta di Riemann e le interazioni forti o comunque con la teoria delle stringhe, come si possono usare tali risultati matematici con la teoria delle stringhe e delle brane, le dimensioni extra o con la M-teoria? In un mondo di Calabi-Yau a 10 o 11 dimensioni la funzione zeta di Riemann che può offrirci?”

In [15] abbiamo esaminato la congettura di Birch e Swinnerton-Dyer. La teoria matematica che porta a questa congettura ha gli elementi di base che sono utili alla teoria delle stringhe aperte o chiuse, legata difatti alle curve ellittiche, ai numeri p-adici, alla funzione zeta di Riemann e la L-function di Dirichlet, le forme modulari. Non dimentichiamo che gli zeri non banali della zeta di Riemann hanno valori razionali in \mathbf{Q} .

Per semplicità, supponiamo che la curva che consideriamo sia una *curva ellittica E* definita sui numeri razionali. Indicato con \mathbf{Z} l’insieme degli interi, supponiamo che E sia definita da un’equazione della forma

$$y^2 = x^3 + ax + b, \text{ con } a, b \in \mathbf{Z}, \Delta_E = 4a^3 + 27b^2 \neq 0.$$

Definiamo la funzione L di E come:

$$L(E, s) = \prod_{p \neq \Delta E} \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s}}$$

Dove

$$a_p = 1 + p - \#E(\mathbb{F}_p)$$

In questa definizione di a_p vediamo E come curva ellittica sul campo \mathbb{F}_p , dove i coefficienti a e b della E sono appartenenti alle classi di modulo n . Il fattore corrispondente a p è l'inverso del numeratore della zeta di E su \mathbb{F}_p .

L'analogia tra $\zeta(s)$ e $L(E, s)$ si può introdurre geometricamente; se chiamiamo P un punto geometrico è $\zeta(s) = L(P, s)$.

In [15] abbiamo visto che Il *teorema di Hasse* (l'ipotesi di Riemann per E/\mathbb{F}_p) implica che il prodotto infinito che definisce $L(E, s)$ converge ad una funzione differenziabile (in senso complesso) nel semipiano $\text{Re}(s) > 3/2$. Mentre per il Teorema Wiles-Taylor: $L(E, s)$ può essere estesa ad una funzione differenziabile su tutto il piano complesso.

Il *teorema di Weil* (dimostrato in questo caso da Hasse nel 1931) segue dall'uguaglianza $a_p = \alpha_p + \beta_p$, dove α_p e β_p sono numeri complessi aventi valore assoluto $p^{1/2}$. Dal *Teorema di Wiles-Taylor* è discesa la dimostrazione del *L'ultimo Teorema di Fermat*.

La *Congettura di Birch e Swinnerton-Dyer* afferma: L'equazione $y^2 = x^3 + ax + b$ ha infinite soluzioni nei numeri razionali se e solo se $L(E, 1) = 0$. Ne consegue che se $y^2 = x^3 + ax + b$ ha infinite soluzioni nei numeri razionali, allora $L(E, 1) = 0$.

L'ipotesi di Riemann per $L(E, s)$: Gli zeri non banali di $L(E, s)$ sono concentrati sulla retta verticale $\text{Re}(s) = 1/2$.

$L(E, s)$ soddisfa un'equazione funzionale rispetto alla trasformazione $s \rightarrow 2 - s$, mentre $\zeta(s)$ soddisfa un'equazione funzionale rispetto a $s \rightarrow 1 - s$. In altri termini gli zeri devono stare su una linea di simmetria per l'equazione funzionale.

L'ultimo modo di affrontare le funzioni L è quello della "*filosofia Laglands*" ed occorre riprendere il teorema di Wiles. Scriviamo $L(E, s)$ come una serie infinita:

$$L(E, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

Wiles ha considerato la trasformata di Mellin inversa di $L(E, s)$:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$$

Dove z è una variabile appartenente al semipiano complesso superiore: $H = \{z \in \mathbb{C}; \Im(z) > 0\}$

Il teorema di Wiles prosegue con tecniche algebriche affermando che $f(z)$ è una *forma modulare*; cioè:

- $f(z)$ è una funzione differenziabile su H , che soddisfa un'opportuna condizione di crescita per $\Im(z) \rightarrow \infty$;
- $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^2 f(z)$ per ogni matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tale che $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $ad-bc=1$ e $N|c$ per un intero positivo N

Le proprietà di $L(E,s)$ discendono (col *teorema di Hecke*) dalle proprietà analitiche di $f(z)$.

In sintesi le proprietà delle funzioni modulari forniscono una via di accesso alle proprietà analitiche della funzione $L(E, s)$ (definita geometricamente) e quindi, per mezzo della *congettura di Birch e Swinnerton-Dyer*, alle soluzioni razionali dell'equazione di E .

Le *formule modulari* sono importantissime nella *Teoria delle stringhe*.

Muovendoci in direzione opposta rispetto a quanto detto in precedenza, si osserva che a volte è la geometria che permette di accedere alle proprietà delle forme modulari.

Consideriamo la funzione Δ :

$$\Delta(z) = e^{2\pi iz} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi inz})^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi inz}$$

dove i coefficienti di Fourier $\tau(n)$, sono detti *coefficienti di Ramanujan* e Δ è una forma modulare del tipo:

$$\Delta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{12} \Delta(z)$$

per ogni matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tale che $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $ad-bc=1$. In particolare Δ ha peso 12 mentre la f associata a $L(E,s)$ ha peso 2.

In particolare il *Teorema di Deligne* dice che: $|\tau(n)| = O(n^{11/2+\epsilon})$ per ogni $\epsilon > 0$.

La dimostrazione di questa congettura non segue direttamente dalle proprietà analitiche di $\Delta(z)$, da cui $\tau(n) = O(n^6)$; ma è conseguenza della dimostrazione delle *congetture di Weil ottenuta da Deligne*. Innanzitutto si osserva che $\tau(n) = O(n^6)$ segue da $\tau(p)$ per p primo (*congettura di Ramanujan, dimostrata da Mordell*).

Il punto cruciale consiste nel dimostrare che $\tau(p)$ dipende dal numero di punti di una varietà algebrica su \mathbb{F}_p e non si tratta di una curva in questo caso, bensì di una varietà di dimensione 11.

Questo tipo di geometria offre quello che la Teoria delle stringhe vuole trattare.

Le funzioni beta p-adiche nella teoria di superstringa. [16]

Nel caso ordinario si conosce che l'ampiezza di base quadri-punto per la superstringa aperta ha la forma

$$A_{4p}(k_1; k_2; k_3; k_4) = -\frac{g^2}{2} \frac{\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{t}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}-\frac{t}{2}\right)} K(k_1, k_2, k_3, k_4) \quad (1)$$

dove $s = -(k_1 + k_2)^2$ e $t = -(k_2 + k_3)^2$ sono le variabili di *Mandelstam*. Poichè $4P = 4B$, $4F$ oppure $2B2F$, l'ampiezza (1) di conseguenza dipende dai vettori di polarizzazione delle particelle vettoriali prive di massa e dalle funzioni d'onda spinoriali deca-dimensionali di *Majorana-Weyl*.

Il modo più semplice per ottenere un'ampiezza analoga a quella di Veneziano è porre le ordinarie funzioni gamma nell'ampiezza di Veneziano

$$A(a, b, c) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (2)$$

attraverso le loro analoghe p-adiche, cioè

$$A_p(a, b, c) = \frac{\Gamma_p(a)\Gamma_p(b)}{\Gamma_p(a+b)}. \quad (3)$$

Nelle eq. (2) e (3), $a = -\alpha(s) = -1 - \frac{1}{2}s$, $b = -\alpha(t)$ e $c = -\alpha(u)$, ed esse soddisfano la condizione di strato elettronico - massa $s + t + u = -8$ oppure $a + b + c = 1$. Notiamo che $s + t + u = -8$, può essere riscritta come segue

$$s + t + u = -\frac{1}{3} \frac{4 \left[\text{anti log} \frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi x w'}{\cosh \pi x} e^{-\pi x^2 w'} dx}{e^{-\frac{\pi^2}{4} w'} \phi_{w'}(itw')} \right] \cdot \frac{\sqrt{142}}{t^2 w'}}{\log \left[\sqrt{\left(\frac{10 + 11\sqrt{2}}{4}\right)} + \sqrt{\left(\frac{10 + 7\sqrt{2}}{4}\right)} \right]}, \quad (4)$$

dove è possibile notare che il numero 8, che è un numero di Fibonacci, è connesso con i "modi" che corrispondono alle vibrazioni fisiche di una superstringa attraverso la funzione di Ramanujan sopra citata.

A causa della semplice relazione

$$\Gamma_p(y)\Gamma_p(1-y) = 1 \quad (5)$$

Che è una semplice conseguenza dell'espressione

$$\Gamma_p(y) = \frac{1 - p^{y-1}}{1 - p^{-y}} \quad (6)$$

L'ampiezza p-adica (3) esibisce una totale simmetria incrociata. $A_p(a,b,c)$ può essere presentato nella seguente forma

$$A(a,b) = \int_k dx \gamma_a(x) \gamma_b(1-x), \quad (6b)$$

con $\gamma_a(x) = |x|_p^a$, dove $x \in \mathcal{Q}_p$ e $|\cdot|_p$ indica la norma p-adica. Da un punto di vista adelico, le ampiezze $A_p(a,b,c)$ ($p = 2, 3, 5, \dots$) sono state considerate come partners dell'ordinaria ampiezza di simmetria incrociata $A_\infty(a,b,c) = A(a,b,c) + A(b,c,a) + A(c,a,b)$, la quale può anche essere scritta nella forma (6b), dove $\gamma_a(x) = |x|^a$ e $x \in \mathcal{R}$.

In modo analogo il metodo sopra menzionato può essere applicato all'ampiezza di superstringa data dall'eq. (1) e possiamo osservare la sua analoga p-adica nella forma

$$A_{4p,p}(a,b,c) = -\frac{g^2}{2} \phi_p(s,t,u) K(k,\zeta) \quad (7)$$

dove il fattore cinematico $K(k,\zeta)$ rimane invariato. Prendendo $\phi_p(s,t,u)$ in accordo alla procedura di sopra, abbiamo

$$\phi_p(s,t,u) = \frac{\Gamma_p\left(-\frac{s}{2}\right) \Gamma_p\left(-\frac{t}{2}\right)}{\Gamma_p\left(1 - \frac{s}{2} - \frac{t}{2}\right)} \quad (8)$$

dove $a = -s/2$, $b = -t/2$ e $c = -u/2$ con la condizione di strato elettronico - massa

$$s + t + u = 0. \quad (9)$$

Notiamo che è possibile riscrivere l'eq. (7) anche come segue

$$A_{4p,p}(a,b,c) = -\frac{g^2}{2} \frac{\Gamma_p\left(-\frac{s}{2}\right) \Gamma_p\left(-\frac{t}{2}\right)}{\Gamma_p\left(1 - \frac{s}{2} - \frac{t}{2}\right)} K(k,\zeta). \quad (9b)$$

Usando l'equazione funzionale (5), otteniamo l'ampiezza simmetrico - incrociata totale

$$A_{4p,p}(a,b,c) = -\frac{g^2}{2} \Gamma_p\left(-\frac{s}{2}\right) \Gamma_p\left(-\frac{t}{2}\right) \Gamma_p\left(-\frac{u}{2}\right) K(k,\zeta). \quad (10)$$

L'ampiezza (10) ha poli ai punti reali

$$s = 0, \quad t = 0, \quad u = 0. \quad (11)$$

La struttura dell'eq. (8) non ci permette di scrivere l'ampiezza (10) come significato della convoluzione di caratteri moltiplicativi $\pi_a(x)$, cioè,

$$A_{4p,p}(a,b,c) \neq -\frac{g^2}{2} K(k,\zeta) \int_{Q_p} \pi_a(x) \pi_b(1-x) dx. \quad (12)$$

Inoltre, la mancanza di una rappresentazione dell'ampiezza (10) nella forma del membro di destra della (12) non ci permette di estrarre il canale d'ampiezza (st) da quella simmetrica - incrociata. Ricordiamo che il consueto campo conforme in una formulazione Euclidea è definito dal propagatore

$$\langle x^\mu(z) x^\nu(w) \rangle = -g^{\mu\nu} \ln|z-w|^2, \quad (13)$$

dove $g^{\mu\nu}$ indica la metrica piatta nello spazio-tempo D-dimensional e z, w sono variabili complesse. Il vertice tachionico ha la forma

$$V(k, z) =: e^{ik_\mu x^\mu(z)}: \quad (14)$$

e l'ampiezza di stringa chiusa ad N-punto può essere scritta come segue

$$A_N(k_1, \dots, k_N) = \int \prod_{i=1}^N dz_i \left\langle \prod_{i=1}^N V(K_i Z_i) \right\rangle = \int \prod_{i=1}^N dz_i \prod_{m<n} |z_m - z_n|^{k_m k_n / 2} \quad (15)$$

dove dz è la misura standard sul piano complesso. L'espressione (15) è divergente per l'invarianza di $SL(2, \mathbb{C})$ e dopo l'estrazione del volume del gruppo sullo strato elettronico - massa $k_i^2 = 2$ può essere presentata nella forma di *Koba-Nielsen*

$$A_N(k_1, \dots, k_N) = \int dV \prod_{m<n} |z_m - z_n|^{k_m k_n / 2} \quad (16)$$

dove

$$dV = \pi^{3-N} \frac{|z_a - z_b|^2 |z_b - z_c|^2 |z_b - z_c|^2}{dz_a dz_b dz_c} \prod_{i=1}^N dz_i. \quad (17)$$

Quindi, l'eq. (16) può essere riscritta anche come segue

$$A_N(k_1, \dots, k_N) = \int \pi^{3-N} \frac{|z_a - z_b|^2 |z_b - z_c|^2 |z_b - z_c|^2}{dz_a dz_b dz_c} \prod_{i=1}^N dz_i \prod_{m<n} |z_m - z_n|^{k_m k_n / 2}. \quad (17b)$$

La procedura descritta sopra può essere applicata facilmente alla derivazione dell'ampiezza di stringa aperta. In tale caso l'integrazione nell'eq. (15) va sopra il simpleso sull'asse reale,

$$z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_N \quad (18)$$

e la potenza di $|z_m - z_n|$ sarà moltiplicata per 2 in accordo con la forma del propagatore per una stringa aperta

$$\langle x^\mu(z)X^\nu(w) \rangle = -g^{\mu\nu}(\ln|z-w|^2 + \ln|z-\bar{w}|^2). \quad (13')$$

Una divergenza connessa all'invarianza di $SL(2,R)$ dell'integrando può essere rimossa dividendo esso per il volume di questo gruppo. Si ottiene l'ampiezza del canale-st scegliendo

$$z_1 = \infty, \quad z_2 = 1, \quad z_N = 0. \quad (19)$$

Indicando la funzione caratteristica di un simpleso che soddisfa le condizioni (18) e (19) attraverso $\theta_{[0,1,\infty]}(z_1 \dots z_N)$ possiamo scrivere in basso

$$A_N^{open}(k_1, \dots, k_N) = \frac{1}{V} \int (\prod dz_i) \theta_{[0,1,\infty]}(z_3, \dots, z_{N-1}) \left\langle \prod_{i=1}^N V(k_i z_i) \right\rangle = \frac{1}{V} \int (\prod dz_i) \theta_{[0,1,\infty]}(z_3, \dots, z_{N-1}) \prod_{m < n} |z_m - z_n|^{k_m k_n} \quad (15')$$

L'estrazione del volume del gruppo $SL(2,R)$ [oppure $SL(2,C)$] è fatta automaticamente introducendo particelle virtuali a e b (a, \bar{a} e b, \bar{b})

$$\langle b(z)c(w) \rangle = \frac{1}{|z-w|} \quad (20)$$

e sostituendo il vertice (14) attraverso

$$V(z) = c(z): e^{ik_\mu x^\mu(z)}: \quad (21)$$

ai punti $z_1 = \infty$, $z_2 = 1$ and $z_N = 0$. L'eq. (15') può essere riscritta adesso nella seguente forma

$$A_N^{open}(k_1, \dots, k_N) = \int_{1 \geq z_3 \geq \dots \geq z_{N-1} \geq 0} \langle c(z_1) e^{ik_1 x(z_1)} c(z_2) e^{ik_2 x(z_2)} \dots e^{ik_{N-1} x(z_{N-1})} c(z_N) e^{ik_N x(z_N)} \rangle \prod_{i=3}^{N-1} dz_i. \quad (22)$$

Prendendo in considerazione la funzione di correlazione

$$\langle c(z_1)c(z_{N-1})c(z_N) \rangle = |z_1 - z_{N-1}| |z_1 - z_N| |z_{N-1} - z_N| \quad (23)$$

si ottiene il ben noto risultato. Notiamo che abbiamo introdotto dei moduli nella (23) per l'ordine delle variabili z .

La generalizzazione p -adica delle formule di sopra è semplice. Sia K l'estensione quadratica di \mathbb{Q}_p oppure un campo compatto localmente arbitrario con norma $|\cdot|_K$. Il corrispondente campo conforme $x^\mu(z)$, dove $z \in K$, è definito attraverso il propagatore

$$\langle x^\mu(z)x^\nu(w) \rangle = -g^{\mu\nu} \log|z-w|_K^2 \quad (24)$$

ed il vertice come anche le ampiezze di stringa acquisiscono rispettivamente la forma (14) e (15), dove dz è adesso *la misura di Haar* su K . Invece di $SL(2,C)$ qui abbiamo l'invarianza $SL(2,K)$.

Per un'ampiezza di stringa aperta p-adica possiamo considerare le formule (13') e (14) come una definizione di una teoria conforme, dove $z, w \in \mathcal{Q}_p(\sqrt{\tau})$ e $|\dots|$ sarà sostituito dalla norma p-adica $|\dots|_p$. L'ampiezza p-adica di N-punto è data dall'eq. (15') dove $\theta_\tau(z_1 \dots z_n)$ indicherà uno dei possibili analoghi p-adici della funzione caratteristica sul simpleso (18), cioè,

$$A_{N,\tau}^{open}(k_1, \dots, k_N) = \int_{\mathcal{Q}_p^N} \left\langle \prod_{i=1}^N V(k_i z_i) \right\rangle \theta_\tau(z_1, \dots, z_N) \prod_{i=1}^N dz_i. \quad (25)$$

Questa espressione divergente ha un'invarianza $SL(2, \mathcal{Q}_p)$ e dopo l'estrazione del volume del gruppo sullo strato elettronico di massa $k_i^2 = 2$ può essere rappresentata nella forma di Koba-Nielsen

$$A_{N,\tau}^{open}(k_1, \dots, k_N) = \int_{(\mathcal{Q}_p)^{N-3}} \left\langle c(\infty)c(1)c(0) \prod_{i=1}^N V(k_i z_i) \right\rangle \theta_{\tau[0,1,\infty]}(z_3, \dots, z_{N-1}) \prod_{i=3}^{N-1} dz_i \quad (26)$$

dove $\theta_{\tau[0,1,\infty]}(z_1 \dots z_N)$ è adesso l'analogo p-adico del simpleso finito definito dalle (18) e (19).

L'ampiezza di base per lo scattering dei quattro fermioni può essere data da

$$A_{4F}(k_1 u_1; k_2 u_2; k_3 u_3; k_4 u_4) = -\frac{1}{2} g^2 \int dz \theta_{[0,1]}(z) \langle V_{-1/2}(\infty) V_{1/2}(1) V_{-1/2}(z) V_{1/2}(0) \rangle. \quad (27)$$

Perfezionando il corrispondente calcolo, otteniamo

$$\begin{aligned} A_{4F}(k_1 u_1; k_2 u_2; k_3 u_3; k_4 u_4) &= u^\alpha u^\beta u^\gamma u^\delta \left(-\frac{1}{2} g^2 \right) \int_0^1 dz |z|^{-1+k_2+k_3} |1-z|^{-1+k_3+k_4} \left\{ 1 - z |\gamma_{\alpha\beta}^\mu \gamma_{\gamma\delta}^\mu - |z| \gamma_{\alpha\delta}^\mu \gamma_{\beta\gamma}^\mu \right\} = \\ &= \frac{1}{2} g^2 u^\alpha u^\beta u^\gamma u^\delta \left\{ B\left(1 - \frac{t}{2}, -\frac{s}{2}\right) \gamma_{\alpha\beta}^\mu \gamma_{\gamma\delta}^\mu - B\left(-\frac{t}{2}, 1 - \frac{s}{2}\right) \gamma_{\alpha\delta}^\mu \gamma_{\beta\gamma}^\mu \right\}. \quad (28) \end{aligned}$$

L'ampiezza di transizione da due fermioni a due bosoni può essere scritta nella forma

$$A_{2F2B}(k_1 u_1; k_2 u_2; k_3 \zeta_3; k_4 \zeta_4) = -\frac{1}{2} g^2 \int dz \theta_{[0,1]}(z) \langle V_{-1}(\infty) V_0(1) V_{-1/2}(z) V_{-1/2}(0) \rangle. \quad (29)$$

Perfezionando i calcoli con i corrispondenti correlatori ed imponendo le condizioni cinematiche sullo stato elettronico di massa, si ottiene

$$\begin{aligned} A_{2F2B} &= -\frac{1}{2} g^2 \int dz \theta_{[0,1]}(z) |z|^{-1+k_3 k_4} |1-z|^{-1+k_2 k_3} \cdot \left\{ |z| \left[(\zeta_3 k_2)(u_2 \zeta_4 u_1) + \frac{1}{2} \zeta_4^\mu k_3^\nu \zeta_3^\lambda u_2 \gamma^{[\nu} \gamma^{\lambda]} \gamma^\mu u_1 \right] + \right. \\ &\quad \left. - |1-z| \left[(\zeta_3 k_4)(u_2 \zeta_4 u_1) + (\zeta_4 k_3)(u_2 \zeta_3 u_1) - (\zeta_4 \zeta_3)(u_2 k_3 u_1) \right] \right\}. \quad (30) \end{aligned}$$

Analogamente, si può ottenere l'ampiezza di scattering del quadri-bosone. Le formule ottenute sopra, (28) e (30), possono essere facilmente generalizzate al caso p-adico. Come nel caso della

stringa bosonica, dobbiamo sostituire la norma standard con quella p-adica. In particolare, l'ampiezza di stringa per il quadri-fermione p-adico può essere scritta come segue:

$$A_{4F}^{(st)}(k_1 u_1; k_2 u_2; k_3 u_3; k_4 u_4) = -\frac{1}{2} g^2 u_1^\alpha u_2^\beta u_3^\gamma u_4^\delta \cdot \int_{Q_p} dz \theta_{\varepsilon[0,1]}(z) |z|_p^{-1-t/2} |1-z|_p^{-1-s/2} \left[|1-z|_p \gamma_{\alpha\beta}^\mu \gamma_{\gamma\delta}^\mu - |z|_p \gamma_{\alpha\delta}^\mu \gamma_{\beta\gamma}^\mu \right]. \quad (31)$$

L'esplicita forma dell'eq. (31) dipende dalla forma scelta dell'analogo p-adico della funzione caratteristica $\theta_{[0,1],\tau}(z)$, dove τ indica una delle tre estensioni quadratiche. Per esempio, quando $\tau = \varepsilon$ e

$$\theta_{\varepsilon[0,1]}(z) = \frac{1}{2} (\text{Sign}_\varepsilon z - \text{Sign}_\varepsilon(-1) \text{Sign}_\varepsilon(1-z)), \quad (32)$$

possiamo scrivere la seguente ampiezza p-adica

$$A_{4F,p,\varepsilon}^{(st)} = u_1^\alpha u_2^\beta u_3^\gamma u_4^\delta \left(-\frac{1}{4} g^2 \right) \left\{ [B_p(\tilde{\pi}_{-t/2}, \pi_{-s/2+1}) - B_p(\pi_{-t/2}, \tilde{\pi}_{-s/2+1})] \gamma_{\alpha\beta}^\mu \gamma_{\gamma\delta}^\mu + [B_p(\tilde{\pi}_{-t/2+1}, \pi_{-s/2}) - B_p(\pi_{-t/2+1}, \tilde{\pi}_{-s/2})] \gamma_{\alpha\delta}^\mu \gamma_{\beta\gamma}^\mu \right\} \quad (33)$$

dove $u_\alpha(i) = u_\alpha(k_i)$ e $B_p(\pi_a, \pi_b)$ sono le funzioni beta p-adiche.

Così,

$$A_{4F,p,\varepsilon}^{(st)} = u_1^\alpha u_2^\beta u_3^\gamma u_4^\delta \left(-\frac{1}{2} g^2 \right) \left(1 - \frac{1}{p} \right) \frac{1 + p^{-\frac{u}{2}-1}}{1 + p^{\frac{u}{2}}} \left\{ \frac{p^{t/2} - p^{-t/2-1} + p^{s/2-1} - p^{-s/2}}{(1 - p^{s-2})(1 - p^{-t})} \gamma_{\alpha\beta}^\mu \gamma_{\gamma\delta}^\mu + \frac{p^{s/2} - p^{-s/2-1} + p^{t/2-1} - p^{-t/2}}{(1 - p^{t-2})(1 - p^{-s})} \gamma_{\alpha\delta}^\mu \gamma_{\beta\gamma}^\mu \right\}. \quad (34)$$

Questa ampiezza evidentemente contiene poli ai punti reali $s=0$, $t=0$, $s=2$ and $t=2$, come anche poli ai punti complessi.

Perfezionando l'integrazione nell'eq. (31) sull'intero campo Q_p , si ottiene l'espressione

$$A_{4F,p} = -\frac{1}{2} g^2 \left[B_p \left(1 - \frac{t}{2}, -\frac{s}{2} \right) \gamma_{\alpha\beta}^\mu \gamma_{\gamma\delta}^\mu - B_p \left(-\frac{t}{2}, 1 - \frac{s}{2} \right) \gamma_{\alpha\delta}^\mu \gamma_{\beta\gamma}^\mu \right] \quad (35)$$

che contiene anche un u-polo.

Quindi, dall'eq. (31), abbiamo che:

$$\begin{aligned}
A_{4F}^{(st)}(k_1 u_1; k_2 u_2; k_3 u_3; k_4 u_4) &= -\frac{1}{2} g^2 u_1^\alpha u_2^\beta u_3^\gamma u_4^\delta \cdot \int_{Q_p} dz \theta_{\varepsilon[0,1]}(z) |z|_p^{-1-t/2} |1-z|^{-1-s/2} \left[|1-z|_p \gamma_{\alpha\beta}^\mu \gamma_{\gamma\delta}^\mu - |z|_p \gamma_{\alpha\delta}^\mu \gamma_{\beta\gamma}^\mu \right] \Rightarrow \\
&\Rightarrow -\frac{1}{2} g^2 \left[B_p \left(1 - \frac{t}{2}, -\frac{s}{2} \right) \gamma_{\alpha\beta}^\mu \gamma_{\gamma\delta}^\mu - B_p \left(-\frac{t}{2}, 1 - \frac{s}{2} \right) \gamma_{\alpha\delta}^\mu \gamma_{\beta\gamma}^\mu \right]. \quad (35b)
\end{aligned}$$

P-adiche, adeliche e stringhe-zeta. [17] [18] [19] [20] [21]

Come nell'ordinaria teoria di stringa, il punto di partenza delle stringhe p-adiche è la costruzione delle corrispondenti ampiezze di scattering. Ricordiamo che l'ordinaria ampiezza simmetrica incrociata di Veneziano può essere rappresentata nelle seguenti forme:

$$\begin{aligned}
A_\infty(a, b) &= g^2 \int_R |x|_\infty^{a-1} |1-x|_\infty^{b-1} dx = g^2 \left[\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} + \frac{\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(b+c)} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a)}{\Gamma(c+a)} \right] = g^2 \frac{\zeta(1-a)}{\zeta(a)} \frac{\zeta(1-b)}{\zeta(b)} \frac{\zeta(1-c)}{\zeta(c)} = \\
&= g^2 \int DX \exp \left(-\frac{i}{2\pi} \int d^2 \sigma \partial^\alpha X_\mu \partial_\alpha X^\mu \right) \prod_{j=1}^4 \int d^2 \sigma_j \exp(i k_\mu^{(j)} X^\mu), \quad (1-4)
\end{aligned}$$

dove $\hbar = 1$, $T = 1/\pi$, e $a = -\alpha(s) = -1 - \frac{s}{2}$, $b = -\alpha(t)$, $c = -\alpha(u)$ con la condizione $s + t + u = -8$, cioè $a + b + c = 1$.

La generalizzazione p-adica dell'espressione sopra

$$A_\infty(a, b) = g^2 \int_R |x|_\infty^{a-1} |1-x|_\infty^{b-1} dx,$$

è:

$$A_p(a, b) = g_p^2 \int_{Q_p} |x|_p^{a-1} |1-x|_p^{b-1} dx, \quad (5)$$

dove $|\cdot|_p$ indica il valore assoluto p-adico. In questo caso soltanto il parametro del foglio d'universo di stringa x è trattato come una variabile p-adica, e tutte le altre quantità hanno la loro solita (reale) valutazione.

Adesso, ricordiamo che gli integrali di Gauss soddisfano la formula del prodotto adelicco

$$\int_R \chi_\infty(ax^2 + bx) d_\infty x \prod_{p \in P} \int_{Q_p} \chi_p(ax^2 + bx) d_p x = 1, \quad a \in Q^\times, \quad b \in Q, \quad (6)$$

che consegue da

$$\int_{Q_v} \chi_v(ax^2 + bx) d_v x = \lambda_v(a) 2a \left| \frac{1}{v} \right|^{-\frac{1}{2}} \chi_v \left(-\frac{b^2}{4a} \right), \quad v = \infty, 2, \dots, p, \dots \quad (7)$$

Questi integrali di Gauss si applicano nella valutazione degli integrali di cammino di Feynman

$$K_v(x'', t''; x', t') = \int_{x', t'}^{x'', t''} \chi_v \left(-\frac{1}{h} \int_{t'}^{t''} L(\dot{q}, q, t) dt \right) D_v q, \quad (8)$$

per i kernels $K_v(x'', t''; x', t')$ dell'operatore di evoluzione nella meccanica quantistica adelica per Lagrangiane quadratiche. Nel caso della Lagrangiana

$$L(\dot{q}, q) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\dot{q}^2}{4} - \lambda q + 1 \right),$$

per il modello cosmologico di *de Sitter* si ottiene

$$K_\infty(x'', T; x', 0) \prod_{p \in P} K_p(x'', T; x', 0) = 1, \quad x'', x', \lambda \in Q, T \in Q^\times, \quad (9)$$

dove

$$K_v(x'', T; x', 0) = \lambda_v (-8T) 4T \left| \frac{1}{2} \right| \chi_v \left(-\frac{\lambda^2 T^3}{24} + [\lambda(x'' + x') - 2] \frac{T}{4} + \frac{(x'' - x')^2}{8T} \right). \quad (10)$$

Anche qui abbiamo il numero 24 che corrisponde alla *funzione di Ramanujan* che ha 24 “modi”, che corrispondono alle vibrazioni fisiche di una stringa bosonica. Quindi, otteniamo la seguente connessione matematica:

$$\begin{aligned} K_v(x'', T; x', 0) &= \lambda_v (-8T) 4T \left| \frac{1}{2} \right| \chi_v \left(-\frac{\lambda^2 T^3}{24} + [\lambda(x'' + x') - 2] \frac{T}{4} + \frac{(x'' - x')^2}{8T} \right) \Rightarrow \\ &= \frac{4 \left[\text{anti log} \frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi x w'}{\cosh \pi x} e^{-\pi x^2 w'} dx}{e^{-\frac{\pi^2}{4} w'} \phi_{w'}(itw')} \right] \cdot \frac{\sqrt{142}}{t^2 w'}}{\log \left[\sqrt{\left(\frac{10 + 11\sqrt{2}}{4} \right)} + \sqrt{\left(\frac{10 + 7\sqrt{2}}{4} \right)} \right]}. \quad (10b) \end{aligned}$$

La funzione d'onda adelica per il più semplice stato fondamentale ha la forma

$$\psi_A(x) = \psi_\infty(x) \prod_{p \in P} \Omega(|x|_p) = \begin{cases} \psi_\infty(x), & x \in Z \\ 0, & x \in Q \setminus Z \end{cases}, \quad (11)$$

dove $\Omega(|x|_p) = 1$ se $|x|_p \leq 1$ e $\Omega(|x|_p) = 0$ se $|x|_p > 1$. Poichè questa funzione d'onda è diversa da zero soltanto nei punti interi, essa può essere interpretata come distinzione dello spazio dovuto agli effetti p-adici nell'approccio adelico. Le funzioni Gel'fand-Graev-Tate gamma e beta sono:

$$\Gamma_\infty(a) = \int_R |x|_\infty^{a-1} \chi_\infty(x) d_\infty x = \frac{\zeta(1-a)}{\zeta(a)}, \quad \Gamma_p(a) = \int_{Q_p} |x|_p^{a-1} \chi_p(x) d_p x = \frac{1-p^{a-1}}{1-p^{-a}}, \quad (12)$$

$$B_\infty(a,b) = \int_{\mathbb{R}} |x|_\infty^{a-1} |1-x|_\infty^{b-1} d_\infty x = \Gamma_\infty(a)\Gamma_\infty(b)\Gamma_\infty(c), \quad (13)$$

$$B_p(a,b) = \int_{\mathbb{Q}_p} |x|_p^{a-1} |1-x|_p^{b-1} d_p x = \Gamma_p(a)\Gamma_p(b)\Gamma_p(c), \quad (14)$$

dove $a, b, c \in \mathbb{C}$ con la condizione $a+b+c=1$ e $\zeta(a)$ è la funzione zeta di Riemann. Con una regolarizzazione del prodotto delle funzioni gamma p-adiche si hanno i prodotti adelicici:

$$\Gamma_\infty(u) \prod_{p \in P} \Gamma_p(u) = 1, \quad B_\infty(a,b) \prod_{p \in P} B_p(a,b) = 1, \quad u \neq 0,1, \quad u = a,b,c, \quad (15)$$

dove $a+b+c=1$. Notiamo che $B_\infty(a,b)$ e $B_p(a,b)$ sono le ampiezze standard simmetriche incrociate e p-adiche di Veneziano per lo scattering di due stringhe tachioniche aperte. Introducendo reali, p-adiche ed adeliche funzioni zeta come

$$\zeta_\infty(a) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi x^2) |x|_\infty^{a-1} d_\infty x = \pi^{-\frac{a}{2}} \Gamma\left(\frac{a}{2}\right), \quad (16)$$

$$\zeta_p(a) = \frac{1}{1-p^{-1}} \int_{\mathbb{Q}_p} \Omega(|x|_p) |x|_p^{a-1} d_p x = \frac{1}{1-p^{-a}}, \quad \text{Re } a > 1, \quad (17)$$

$$\zeta_A(a) = \zeta_\infty(a) \prod_{p \in P} \zeta_p(a) = \zeta_\infty(a) \zeta(a), \quad (18)$$

si ottiene

$$\zeta_A(1-a) = \zeta_A(a), \quad (19)$$

dove $\zeta_A(a)$ può essere chiamata funzione zeta adelica. Abbiamo anche che

$$\zeta_A(a) = \zeta_\infty(a) \prod_{p \in P} \zeta_p(a) = \zeta_\infty(a) \zeta(a) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi x^2) |x|_\infty^{a-1} d_\infty x \cdot \frac{1}{1-p^{-1}} \int_{\mathbb{Q}_p} \Omega(|x|_p) |x|_p^{a-1} d_p x. \quad (19b)$$

Notiamo che $\exp(-\pi x^2)$ e $\Omega(|x|_p)$ sono funzioni analoghe nei casi reale e p-adico. L'oscillatore armonico adelico è connesso con la *funzione zeta di Riemann*. Il più semplice stato di vuoto dell'oscillatore armonico adelico è la seguente *funzione di Schwartz-Bruhat*:

$$\psi_A(x) = 2^{\frac{1}{4}} e^{-\pi x_\infty^2} \prod_{p \in P} \Omega(|x_p|_p), \quad (20)$$

la cui trasformazione di Fourier

$$\psi_A(k) = \int \chi_A(kx) \psi_A(x) = 2^{\frac{1}{4}} e^{-\pi k_\infty^2} \prod_{p \in P} \Omega(|k_p|_p) \quad (21)$$

ha la stessa forma di $\psi_A(x)$. La trasformazione di Mellin di $\psi_A(x)$ è

$$\Phi_A(a) = \int \psi_A(x) |x|^a d_A^\times x = \int_R \psi_\infty(x) |x|^{a-1} d_\infty x \prod_{p \in P} \frac{1}{1-p^{-1}} \int_{Q_p} \Omega(|x|_p) |x|^{a-1} d_p x = \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \pi^{-\frac{a}{2}} \zeta(a) \quad (22)$$

e la stessa è per $\psi_A(k)$. Allora in accordo alla formula di Tate si ottiene (19).

L'esatta Lagrangiana fondamentale per l'effettivo campo scalare ϕ che descrive la stringa tachionica aperta p-adica è

$$\mathbf{L}_p = \frac{1}{g^2} \frac{p^2}{p-1} \left[-\frac{1}{2} \phi p^{-\frac{\square}{2}} \phi + \frac{1}{p+1} \phi^{p+1} \right], \quad (23)$$

dove p è qualche numero primo, $\square = -\partial_t^2 + \nabla^2$ è il *d'Alambertiano D-dimensionale* ed adottiamo una metrica con segnatura $(-+\dots+)$. Adesso, vogliamo mostrare un modello che incorpora le Lagrangiane di stringhe p-adiche in un ristretto modo adelico. Prendiamo la seguente Lagrangiana

$$L = \sum_{n \geq 1} C_n \mathbf{L}_n = \sum_{n \geq 1} \frac{n-1}{n^2} \mathbf{L}_n = \frac{1}{g^2} \left[-\frac{1}{2} \phi \sum_{n \geq 1} n^{-\frac{\square}{2}} \phi + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1} \phi^{n+1} \right]. \quad (24)$$

Ricordiamo che la funzione zeta di Riemann è definita come

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}, \quad s = \sigma + i\tau, \quad \sigma > 1. \quad (25)$$

Impiegando la solita espansione per la funzione logaritmica e la definizione (25) possiamo riscrivere (24) nella forma

$$L = -\frac{1}{g^2} \left[\frac{1}{2} \phi \zeta\left(\frac{\square}{2}\right) \phi + \phi + \ln(1-\phi) \right], \quad (26)$$

dove $|\phi| < 1$. $\zeta\left(\frac{\square}{2}\right)$ agisce come un operatore pseudo-differenziale nel seguente modo:

$$\zeta\left(\frac{\square}{2}\right) \phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int e^{ikx} \zeta\left(-\frac{k^2}{2}\right) \tilde{\phi}(k) dk, \quad -k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 > 2 + \varepsilon, \quad (27)$$

dove $\tilde{\phi}(k) = \int e^{-ikx} \phi(x) dx$ è la trasformata di Fourier di $\phi(x)$.

Le dinamiche di questo campo ϕ sono incluse nella forma (pseudo)differenziale della funzione zeta di Riemann. **Quando il d'Alambertiano è un argomento della funzione zeta di Riemann noi chiameremo tale stringa una "stringa zeta"**. Conseguentemente, la ϕ sopra è una stringa zeta scalare aperta. L'equazione di moto per la stringa zeta ϕ è

$$\zeta\left(\frac{\square}{2}\right) \phi = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{k_0^2 - \vec{k}^2 > 2 + \varepsilon} e^{ikx} \zeta\left(-\frac{k^2}{2}\right) \tilde{\phi}(k) dk = \frac{\phi}{1-\phi} \quad (28)$$

che ha una evidente soluzione $\phi = 0$.

Per il caso di soluzioni omogenee spazialmente dipendenti dal tempo, abbiamo la seguente equazione di moto

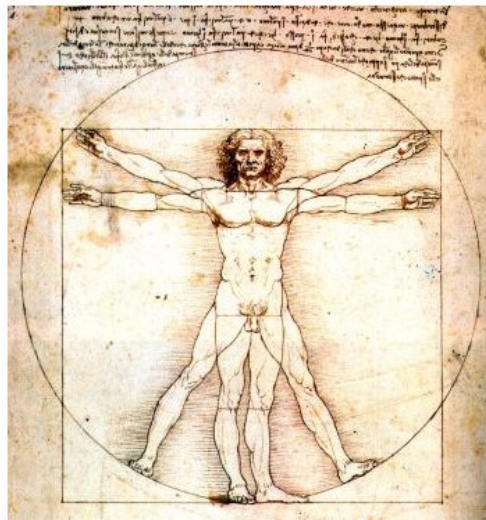
$$\zeta\left(\frac{-\partial_t^2}{2}\right)\phi(t) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{|k_0| > \sqrt{2} + \varepsilon} e^{-ik_0 t} \zeta\left(\frac{k_0^2}{2}\right) \tilde{\phi}(k_0) dk_0 = \frac{\phi(t)}{1 - \phi(t)}. \quad (29)$$

Riguardo le stringhe zeta scalari aperte e chiuse, le equazioni di moto sono

$$\zeta\left(\frac{\square}{2}\right)\phi = \frac{1}{(2\pi)^D} \int e^{ikx} \zeta\left(-\frac{k^2}{2}\right) \tilde{\phi}(k) dk = \sum_{n \geq 1} \theta^{\frac{n(n-1)}{2}} \phi^n, \quad (30)$$

$$\zeta\left(\frac{\square}{4}\right)\theta = \frac{1}{(2\pi)^D} \int e^{ikx} \zeta\left(-\frac{k^2}{4}\right) \tilde{\theta}(k) dk = \sum_{n \geq 1} \left[\theta^{n^2} + \frac{n(n-1)}{2(n+1)} \theta^{\frac{n(n-1)}{2}-1} (\phi^{n+1} - 1) \right], \quad (31)$$

e si può facilmente notare la soluzione banale $\phi = \theta = 0$.



Riferimenti

- [1] John Derbyshire, "L'ossessione dei numeri primi: Bernhard Riemann e il principale problema irrisolto della matematica", Bollati Boringhieri.
- [2] J. B. Conrey, "The Riemann Hypothesis", Notices of the AMS, March 2003.
- [3] E. C. Titchmarsh, "The Theory of the Riemann Zeta-function", Oxford University Press 2003.
- [4] A. Ivic, "The Riemann Zeta-Function: Theory and Applications", Dover Publications Inc 2003.
- [5] Proposta di dimostrazione della variante Riemann di Lagarias – Francesco Di Noto e Michele Nardelli – sito ERATOSTENE
- [6] Rosario Turco et al. - Sulle spalle dei giganti - dedicato a Georg Friedrich Bernhard Riemann
- [7] Rosario Turco, Maria Colonnese - Proposta di dimostrazione alle Ipotesi di Riemann e Congettura molteplicità degli zeri
- [8] Rosario Turco, Maria Colonnese - Sulla ipotesi di Riemann - Disquisizioni su alcune formule - (x) come RH equivalente - Regione libera da zeri: gli zeri che contano- Alla ricerca degli zeri multipli inesistenti

[9] Rosario Turco, Maria Colonnese, Michele Nardelli - On the Riemann Hypothesis. Formulas explained - $\psi(x)$ as equivalent RH. Mathematical connections with “Aurea” section and some sectors of String Theory

[10] Rosario Turco, Maria Colonnese, Michele Nardelli, Giovanni Di Maria, Francesco Di Noto, Annarita Tulumello - The Landau’s prime numbers and the Legendre’s conjecture

[11] Rosario Turco, Maria Colonnese, Michele Nardelli, Giovanni Di Maria, Francesco Di Noto, Annarita Tulumello - Goldbach, Twin Primes and Polignac equivalent RH

[12] Rosario Turco, Maria Colonnese - Le dimensioni extra nascoste, la particella di Higgs ed il vuoto quantomeccanico, supersimmetria e teoria delle stringhe

[13] Rosario Turco, Maria Colonnese - Teoria delle Stringhe e delle Brane

[14] Rosario Turco, Maria Colonnese - Congettura di Yang e Mills o del “gap di massa”

[15] Rosario Turco, Maria Colonnese - Congettura di Birch e Swinnerton-Dyer – Curve ellittiche – Fattorizzazione discreta – Crittografia

[16] I. Ya. Aref’eva, Branko Dragovich, I. V. Volovich: “p-Adic Superstrings” – CERN-TH. 5089/88 June 1988.

[17] Branko Dragovich: “Adelic strings and noncommutativity” – arXiv:hep-th/0105103v1- 11 May 2001.

[18] Branko Dragovich: “Adeles in Mathematical Physics” – arXiv:0707.3876v1 [hep-th]– 26 Jul 2007.

[19] Branko Dragovich: “Zeta Strings” – arXiv:hep-th/0703008v1 – 1 Mar 2007.

[20] Branko Dragovich: “Zeta Nonlocal Scalar Fields” – arXiv:0804.4114v1 – [hep-th] – 25 Apr 2008.

[21] Branko Dragovich: “Some Lagrangians with Zeta Function Nonlocality” – arXiv:0805.0403 v1 – [hep-th] – 4 May 2008.

Siti e Blog vari

<http://mathbuildingblock.blogspot.com/> ing. Rosario Turco

dott. Michele Nardelli (articoli vari sulla teoria delle stringhe)

<http://xoomer.virgilio.it/stringtheory/>

<http://blog.mrwebmaster.it/string>

CNR SOLAR

<http://150.146.3.132/>

gruppo ERATOSTENE

<http://www.gruppoeratostene.com>

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.