

# Block Notes Matematico

## Sulla ipotesi di Riemann

Disquisizioni su alcune formule -  $\psi(x)$  come RH equivalente

Regione libera da zeri: gli zeri che contano

Alla ricerca degli zeri multipli inesistenti

ing. Rosario Turco, prof. Maria Colonnese

### Sommario

In questo lavoro gli autori riprendono e approfondiscono i temi della RH già presentati in [25][26], spiegando formule e mostrando diverse "funzioni speciali" che usualmente sono introdotte col Teorema dei Numeri primi e utili per investigare ulteriori strade. Uno dei risultati maggiori dell'articolo è la dimostrazione, grazie a tutti i passaggi esposti, che la congettura sugli zeri semplici della zeta di Riemann è vera e dimostrabile con passaggi analitici e qualche richiamo teorico (vedi [30]).

### Abstract

In this work the authors reproduce and deepen the themes of RH already presented in [25] [26], explaining formulas and showing different "special features" that are usually introduced with the theorem of prime numbers and useful to investigate further ways. One of the major results of this paper, through all the steps outlined, is that the conjecture on zeros of the Riemann's zeta is true and demonstrable with some analytical steps and a theoretical remark (see. [30]).

### *Ringraziamenti*

Gli Autori ringraziano sin da adesso tutti i lettori pazienti che daranno un ritorno su quanto letto.

### Email

[mailto:rosario\\_turco@virgilio.it](mailto:rosario_turco@virgilio.it)



## INDEX

La funzione $\psi(x)$ di Chebyscev .....	3
Perché $\psi(x)$ conduce ad una RH equivalente .....	7
Riemann .....	8
Weiestrass e Hadamard .....	11
Formula del prodotto per $\xi(s)$ .....	11
Regione libera da zeri non banali .....	12
Zeri all'interno di un rettangolo .....	15
Numero di zeri ad una certa altezza e densità .....	15
Modulo della $\zeta$ - RH equivalente .....	16
Modulo della derivata $\zeta'$ - RH equivalente .....	16
Valore assoluto della $\zeta$ e zeri a $\sigma=1/2$ .....	17
Alla ricerca degli zeri multipli inesistenti .....	19
Siti .....	22
Blog .....	22

## FIGURES

Figure 1 – von Mangoldt's function.....	4
Figure 2 - $\theta(x)$ Chebyshev's function.....	5
Figure 3 - $\psi(x)$ Chebyshev's function.....	6
Figura 4 – striscia critica e linea critica $\sigma=1/2$ .....	10

## TABLES

## La funzione $\psi(x)$ di Chebyscev

In [25] vedemmo che Riemann definì  $\zeta(s)$  come una funzione di variabile complessa. Il successivo step di Riemann fu di estendere (o di fare *una continuazione analitica*)  $\zeta(s)$  a tutto  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ .

Questo può essere compreso notando che  $s=\sigma+it$  e  $n^{-s} = s \int_n^{\infty} x^{-s-1} dx$  per cui:

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( s \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{s+1}} \right) = s \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{s+1}} \\ &= s \int_1^{\infty} \left( \sum_{n \leq x} 1 \right) \frac{dx}{x^{s+1}} = s \int_1^{\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}} dx = s \int_1^{\infty} \frac{x - \{x\}}{x^{s+1}} dx \quad (1) \quad (1) \\ &= \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx, \quad \sigma > 1 \end{aligned}$$

Finché  $\{x\} \in [0,1)$ , segue che l'ultimo integrale converge per  $\sigma > 0$  e definisce una continuazione di  $\zeta(s)$  al semi-piano  $\sigma = \text{Re}(s) > 0$ . Possiamo poi estendere  $\zeta(s)$  a una funzione olomorfica su tutto  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ , infatti dall'ultimo integrale  $s=1$  è un polo semplice con residuo 1. Notiamo che per  $s$  reale e  $s > 0$  l'integrale in (1) è sempre reale positivo. Dalla (1)  $\zeta(s) < 0, s \in (0,1)$  e  $\zeta(s) > 0, s \in (1, \infty)$ .

Una espressione popolare di Eulero è:

$$\zeta(s) = \prod_{p=\text{prime}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

E' dimostrabile che l'espressione precedente è anche una *versione analitica del Teorema fondamentale dell'aritmetica* [28].

Tale espressione ci consente di scrivere:

$$\ln \zeta(s) = - \sum_{p=\text{prime}} \ln(1 - p^{-s}) = \sum_{p=\text{primes}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{-ks}}{k} \quad (2)$$

In (2) abbiamo applicato l'integrazione di Newton legata all'espressione:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Se la precedente espressione è integrata per  $x$  e si cambia segno per avere  $(1-x)$  al numeratore, allora otteniamo:

$$-\log(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

Introduciamo ora la **funzione di von Mangoldt** (anche chiamata *funzione lambda*):

---

<sup>1</sup>  $[x]$  è il più grande intero  $\leq x$  (floor of  $x$ );  $\{x\} = x - [x]$  è la parte frazionaria di  $x$ .

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{if } n=p^k, \text{ } p \text{ prime, } k \geq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

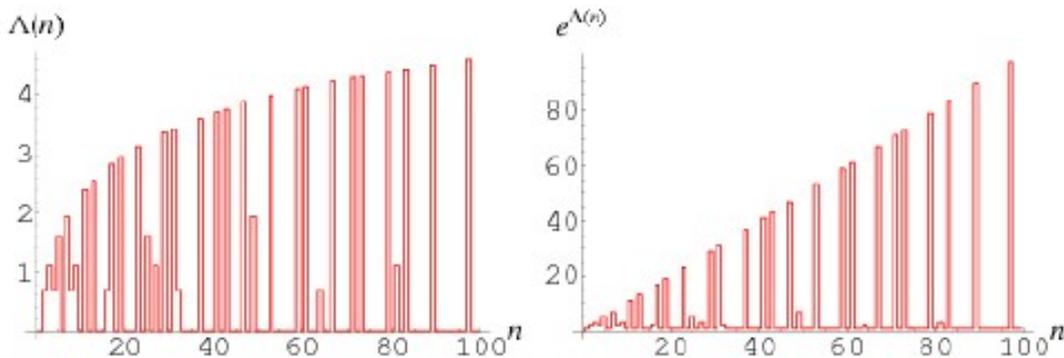


Figure 1 – von Mangoldt's function

Dalla (2) si ha:

$$p^{-ks} = \begin{cases} n^{-s}, & \text{if } n=p^k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Se usiamo la regola del logaritmo:  $n = p^k$ ,  $k = \log_p n = \log n / \log p$  allora è:

$$\frac{1}{k} = \begin{cases} \frac{\log p}{\log n} = \frac{\Lambda(n)}{\log n}, & \text{when } n=p^k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Ulteriormente la (2) diventa:

$$\ln \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} n^{-s} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} n^{-s} \quad (4)$$

La (4) è di interesse ulteriore perché consente di passare da “un problema moltiplicativo” a “un problema additivo”, anche se siamo partiti dalla formula moltiplicativa di Eulero.

Di conseguenza se facciamo la derivata della (4) otteniamo che:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \quad (5)$$

La funzione di von Mangoldt non è una funzione moltiplicativa né una additiva. D'altra parte è:

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d) \quad \text{where } d | n \text{ are divisor of } n$$

Esempio

$n=12$

Ricordiamo che  $12=2^2 \cdot 3$  e che i divisori di 12 sono: 1, 2, 3, 4, 6, 12, allora è:

$$\log 12 = \Lambda(1) + \Lambda(2) + \Lambda(3) + \Lambda(2^2) + \Lambda(2 \cdot 3) + \Lambda(2^2 \cdot 3)$$

Dalla (3) è:

$\log 12 = 0 + \log 2 + \log 3 + \log 2 + 0 + 0 = \log(2 \cdot 3 \cdot 2) = \log 12$

*Pafnuty Lvovich Chebyshev* introdusse due funzioni:

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \quad \text{1st Chebyshev's function}$$

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \quad \text{2nd Chebyshev's function}$$

Esse sono molto importanti nelle dimostrazioni e nel trattamento delle problematiche legate ai numeri primi, soprattutto per la loro semplicità d'uso.

Un'altra formula equivalente per  $\theta(x)$  è:

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p = \sum_{k=1}^{\pi(x)} \log p_k = \ln \left| \prod_{k=1}^{\pi(x)} p_k \right|$$

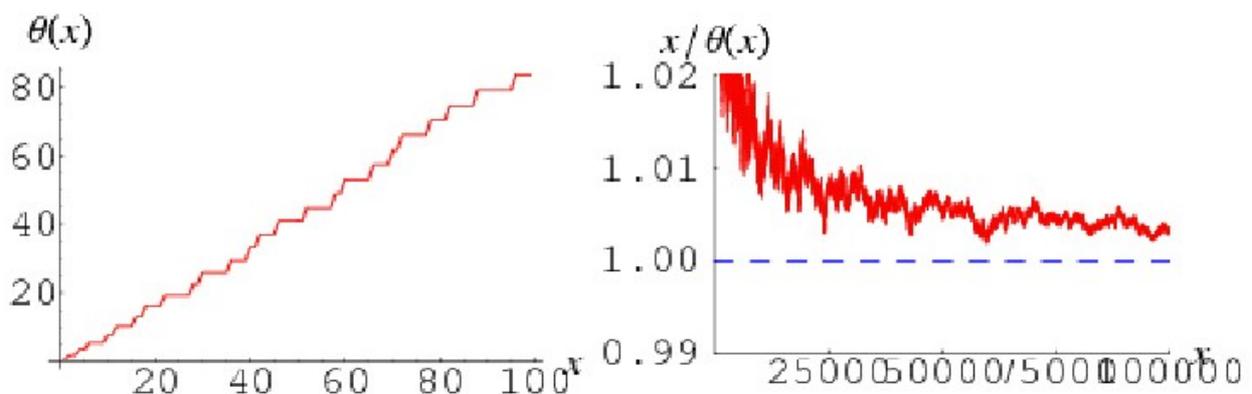
Hardy and Wright (1979) mostrarono che:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\theta(x)} = 1$$

O equivalentemente:

$$\theta(x) \sim x$$

Da qui abbiamo la figura 1.



**Figure 2 -  $\theta(x)$  Chebyshev's function**

A questo punto possiamo anche scrivere  $\psi(x)$  come:

$$\psi(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p^k \leq x}} \log p = \sum_{k=1}^{\pi(x)} \Lambda(k) \quad (6)$$

Nella (6) la somma è su tutti i numeri primi  $p$  e interi  $k$  positivi tali che  $p^k \leq x$  e, quindi, potenzialmente include anche i primi con molteplicità.

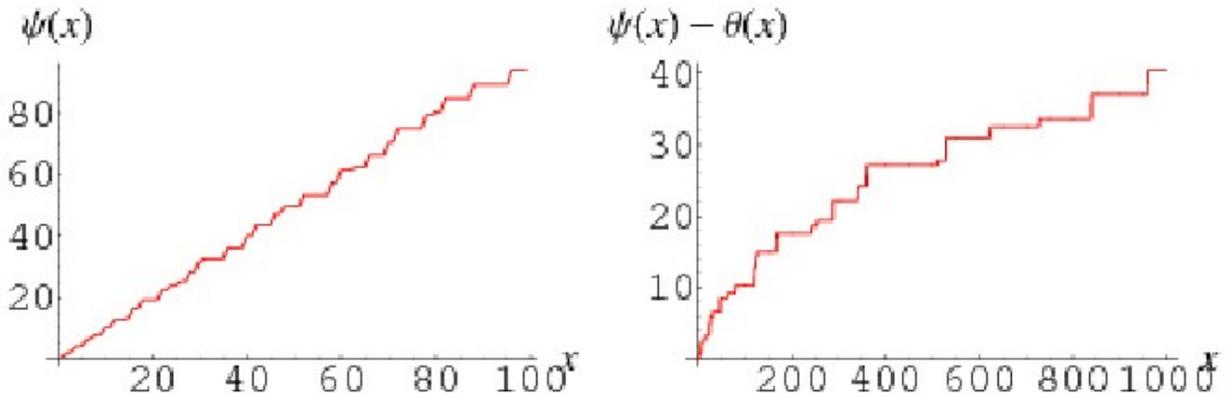


Figure 3 -  $\psi(x)$  Chebyshev's function

Una più semplice e graziosa formula per  $\psi(x)$  è:

$$\psi(x) = \ln |lcm(1, 2, 3, 4, \dots, x)| \quad (2)$$

o

$$lcm(1, 2, 3, 4, \dots, x) = e^{\psi(x)}$$

Esempio

$x=10$

$$lcm(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) = 5 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 = 2520$$

$$\psi(10) = \ln 2520 = \ln 5 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 = \ln 5 + \ln 7 + 3 \ln 2 + 2 \ln 3$$

A questo punto un *equivalente TNP* o una *equivalente RH* è:

$$\psi(x) \sim x \quad (7)$$

Alla fine  $\psi(x)$  e  $\theta(x)$  sono legate da:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta(x^{1/k})$$

La precedente formula possiede un numero finito di termini, poichè  $\theta(x^{1/2})=0$  per  $n > \log_2 x$ .

Le funzioni  $\psi(x)$  e  $\theta(x)$  sono in qualche modo più naturali della funzione di conteggio dei numeri primi  $\pi(x)$ , perchè vanno meglio d'accordo con la moltiplicazione dei numeri primi o in altri termini in un problema moltiplicativo tali funzioni sono da preferirsi per ridurre la complessità.

Si può ottenere un link tra  $\zeta(s)$  e  $\psi(x)$  invertendo la (5); infatti, partendo dalla (5), la *formula di inversione di Fourier* implica che, per ogni  $a > 1$ :

$$\psi(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iT}^{a+iT} \left( -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) x^s \frac{ds}{s}, \quad x > 0 \quad (8)$$

---

<sup>2</sup> Il termine inglese *lcm* (least common multiple) è equivalente al minimo comune multiplo *mcm*

Un link tra  $\psi(x)$  e gli zeri non banali (con molteplicità) della zeta di Riemann è la cosiddetta *formula esplicita (Riemann-von Mangoldt)*:

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - (\ln 2\pi) - \frac{1}{2} \ln(1-x^{-2}) \quad (9)$$

Per  $x > 1$  e  $x$  non numero primo nè potenza di un numero primo e  $\rho$  zero non banale.

La (9) dà una precisa descrizione dell'errore delle approssimazioni in (7), e, più importante, essa relaziona la stima dell'errore alla locazione degli zeri non banali.

de la Vallée-Poussin mostrarono che l'integrazione termine a termine di entrambi i lati della (9) è una valida operazione per  $x > 1$ :

$$\psi_1(x) = \int_0^x \psi(t) dt = \frac{x^2}{2} - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} - \sum_n \frac{x^{-2n+1}}{2n(2n-1)} - x \log(2\pi) + \text{const} \quad (10)$$

E' chiaro anche che, per  $x \rightarrow \infty$ , gli ultimi tre termini sulla destra della (10) sono tutti  $o(x^2)$ .

## Perché $\psi(x)$ conduce ad una RH equivalente

Affermiamo che  $\zeta(1+it) \neq 0$ .

### Dimostrazione

L'affermazione è equivalente a dire che non vi sono zeri non banali sulla linea  $\sigma=1$  e che questo conduce a dire vera la (7) e in più conduce ad una RH equivalente.

Se ricordiamo che  $s=\sigma+it$ , prendendo la parte reale, dalla (4) è:

$$\text{Re}(\ln \zeta(s)) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \frac{1}{n^{\sigma}} \cdot \cos(t \log n)$$

Usando l'identità trigonometrica  $3 + 4 \cos t + \cos 2t = 2(1 + \cos t)^2 \geq 0$  allora è:

$$3 \text{Re}(\ln \zeta(s)) + 4 \text{Re}(\ln \zeta(\sigma + it)) + \text{Re}(\ln \zeta(\sigma + 2it)) \geq 0$$

Da cui:

$$|\zeta(\sigma)|^3 |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1 \quad (11)$$

Da quanto detto in (1),  $\zeta(s)$  possiede un polo semplice in  $s=1$  con residuo 1. Questo è equivalente a dire:

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta(s) = 1$$

Supponiamo per assurdo adesso che  $\zeta(s)$  abbia uno zero di ordine  $m \geq 1$  a  $s_0 = 1 + it_0$  allora ciò è equivalente a:

$$\lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0)^{-m} \zeta(s) = c$$

Per alcuni  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Prendendo  $s = \sigma + it_0$  e  $\sigma > 1$  allora possiamo riscrivere la (11) come:

$$\begin{aligned} |\zeta(\sigma)|^3 |\sigma - 1|^3 \cdot \frac{|\zeta(\sigma + it_0)|^4}{|s - s_0|^{4m}} \cdot |\zeta(\sigma + 2it_0)| &\geq \frac{|\sigma - 1|^3}{|s - s_0|^{4m}} \\ &= \frac{|\sigma - 1|^3}{|\sigma - 1|^{4m}} = \frac{1}{|\sigma - 1|^{4m-1}} \end{aligned}$$

Ponendo  $\sigma \rightarrow 1^+$ , e prendendo in conto i due limiti di sopra, otteniamo che vi è un polo di ordine  $4m-3 \geq 1$  a  $s=1+2it_0$ ; il che è impossibile, allora  $\zeta(1+it) \neq 0$  per  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  è vero. Quindi se  $\rho$  è uno zero non banale di  $\zeta(s)$ , allora  $\text{Re}(\rho) < 1$ ,  $|x^\rho - 1| < 1$  e la somma infinita  $\sum_{\rho} \frac{1}{\rho(\rho + 1)}$  in (10) converge assolutamente. Questo implica che  $\sum_{\rho} \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho + 1)}$  converge uniformemente in  $x$  e:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\rho} \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho + 1)} = \sum_{\rho} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho + 1)} = \sum_{\rho} 0 = 0$$

Per cui anche il secondo termine della (10) è  $o(x^2)$  e, quindi,  $\psi_1(x) \sim x^2/2$ .

In generale se due funzioni sono asintotiche non si può concludere subito che le loro derivate sono asintotiche; ma qui noi sappiamo che la derivate  $\psi = \psi_1'$  è una funzione monotona non decrescente, per cui in tal caso si può concludere che la (7) è vera o che  $\psi(x) \sim x$  è una **RH equivalente**.

de la Vallée-Poussin, mostrarono per il **Teorema dei Numeri Primi (TNP)** che:

$$\psi(x) = x + O(xe^{-a\sqrt{\ln x}}) \quad (12)$$

Riemann mostrò, sempre per il Teorema dei numeri primi, che:

$$\psi(x) = x + O(\sqrt{x} \ln x^2) \quad (13)$$

La (13) in [26] l'abbiamo segnata come **RH10**.

## Riemann

Vi sono, inoltre, formule interessanti che vediamo di seguito.

La *formula di riflessione di Eulero*:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}, s \notin \mathbb{Z} \quad (14)$$

la formula di Legendre:

$$\Gamma(s)\Gamma(s + \frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} 2^{1-2s} \Gamma(2s) \quad (15)$$

Riemann, invece, ottenne la forma più simmetrica:

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \zeta(s) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} = (s-1) \zeta(s) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \quad (16)$$

dove

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt = \int_0^{\infty} \frac{t^s}{e^{-t} t} dt$$

Tutti gli zeri introdotti dalla funzione gamma per  $s=-2, -4, \dots$  sono chiamati “zeri banali”; mentre gli altri sono noti come “zeri non banali” della funzione zeta di Riemann. La formula (16) è importante perchè introduce la nozione di simmetria.

Una seconda forma per l'integrale della gamma è la *trasformata di Mellin di  $1/e^t$*  (o la *trasformata di Laplace*).

Riemann scrisse che la funzione  $\xi$  soddisfa le seguenti proprietà:

- a)  $\xi(s) = \xi(1-s)$
- b)  $\xi$  è una funzione intera e  $\xi(\bar{s}) = \overline{\xi(s)}$
- c)  $\xi\left(\frac{1}{2} + it\right) \in \mathbb{R}$
- d) Se  $\xi(s)=0$ , allora  $0 \leq \sigma \leq 1$
- e)  $\xi(0) = \xi(1) = 1/2$
- f)  $\xi(s) > 0$  per tutti  $s \in \mathbb{R}$

La proprietà a) discende da (14)(15)(16). La b) discende dalla (14) visto che  $\xi$  è olomorfica per  $\sigma \geq 1$ , poichè il polo semplice di  $\zeta$  a 1 è rimosso dal fattore  $s-1$ , e non vi sono altri poli per  $\sigma > 1$ . Inoltre la (a) implica  $\xi$  olomorfica su tutto  $\mathbb{C}$ . La seconda parte di (b) discende da (14) e per ogni funzione meromorfica gli zeri sono reali o si presentano in coppie coniugate.

Combinando (a)(b) otteniamo (c) e similamente (d) ma prima notiamo  $\xi(s) \neq 0$  per  $\sigma > 1$ .

Notiamo, inoltre, sempre grazie alla (1) che  $\zeta(0) = -1/2$ . La (e) per  $\xi(0)$  discende da  $\Gamma(1) = 1$ , e dalla (a) per  $\xi(1)$ .

Per provare (f) notiamo da (13) che  $\Gamma(s) > 0$  per tutti  $s \in \mathbb{R}$  e da (16) e (1) allora otteniamo (f) per  $s > 0$  e  $s \neq 0, 1$ .

**Corollario** *Gli zeri della funzione  $\xi$  sono identici agli zeri non banali della funzione  $\zeta$ .*

Riemann nei suoi appunti si riferiva a  $\xi(1/2+iu)$ , con  $u$  variabile complessa. Il fatto che tutti gli zeri di questa funzione sono reali è equivalente al fatto che tutti gli zero hanno  $\text{Re}(s)=\sigma=1/2$ ; per cui il corollario è equivalente alla Riemann Hypothesis (RH).

**Riemann Hypothesis** *Per ogni zero non banale  $s=\sigma+it$  in  $\zeta$ , allora  $\sigma=1/2$  (o equivalentemente tutti gli zeri non banali di  $\zeta(s)$  vivono sulla linea critica).*

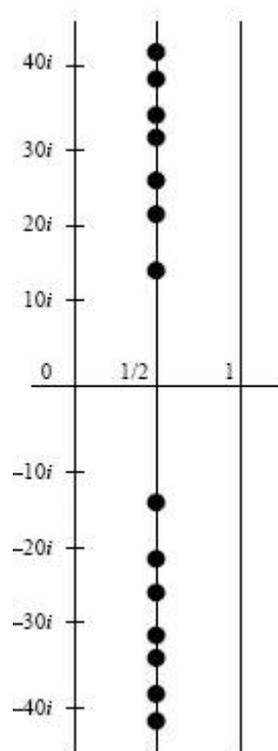


Figura 4 – striscia critica e linea critica  $\sigma=1/2$

**Congettura sulla molteplicità degli zeri non banali** *Tutti gli zeri non banali sono semplici ovvero con molteplicità 1.*

Sono proprio queste due ultime congetture a costituire gli ultimi baluardi che resistono alla logica analitica dimostrativa.

## Weierstrass e Hadamard

Si definisce  $f$  *funzione intera di ordine finito* se:

$$\log |f(s)| = O(|s|^A) \text{ per qualche } A > 0. \quad (17)$$

L'ordine di  $f$  è il confine o limite più basso di tutte le  $A$ , per il quale è vera la (17).

### Teorema 1 (Weierstrass)

Sia  $\{c_n\}$  una sequenza infinita di numeri complessi, tali che  $0 < |c_1| \leq |c_2| \leq \dots$ , e assumiamo che il suo solo punto limite è  $\infty$ . Allora esiste una funzione intera  $f(s)$  con zeri (con molteplicità prescritta) in corrispondenza di questi numeri complessi.

### Teorema 2 (Weierstrass)

Ogni funzione intera  $g(s)$  di ordine  $\leq 1$ , che non ha zeri in  $\mathbb{C}$ , può essere scritta come  $g(s) = e^{a+bs}$ , dove  $a$  e  $b$  sono costanti, mentre ogni funzione intera  $f(s)$  di ordine  $\leq 1$ , la quale ha  $N \leq \infty$  zeri a  $c_1, c_2, c_3, \dots \neq 0$ , può essere scritta nella forma

$$f(s) = e^{a+bs} \prod_{n=1}^{\infty} \left[ \left( 1 - \frac{s}{c_n} \right) e^{\frac{s}{c_n}} \right]$$

Dove  $a$  e  $b$  sono costanti e il prodotto converge assolutamente (se  $N = \infty$ ) per tutti gli  $s \in \mathbb{C}$ .

Weierstrass provò che :

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left[ \left( 1 + \frac{s}{n} \right) e^{-\frac{s}{n}} \right] \quad (18)$$

La (18) è il punto chiave con cui Hadamard e de La Valèe Poussin arrivarono alla dimostrazione del Teorema dei numeri primi (TNP) e dimostrare almeno due delle ipotesi di Riemann (che gli zeri sono infiniti e che non possono stare su  $\sigma=1$ ), sfruttando il fatto che  $\xi(s)$  è una funzione intera di ordine 1.

La (18) mostra anche che  $\Gamma(s)$  non ha zeri in  $\mathbb{C}$ . Inoltre poichè è vera l'equazione funzionale in termini di gamma:  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$  allora  $\Gamma(s)$  ha poli semplici in  $s=0, -1, -2, \dots$  con residuo 1. Difatti è:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Gamma(s)} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{\Gamma(s+1)} = 0$$

Dove  $\Gamma(1)=1$ .

## Formula del prodotto per $\xi(s)$

Dal **Teorema di fattorizzazione di Hadamard** sappiamo che la parte destra della (16) si può riscrivere nella forma:

$$\xi(s) = e^{A+B s} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho} \quad (19)$$

Dove  $\rho$  sono gli zeri non banali nella striscia critica e A e B due costanti. Se usiamo la parte destra della (16) nella (19) si ottiene che:

$$\zeta(s) = \frac{e^{A+B s}}{(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{\frac{s}{2}}} \prod_{\rho} \left(\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho}\right) \quad (20)$$

Se passiamo la (20) ai logaritmi si ottiene che:

$$\log \zeta(s) = A + B s - \log(s-1) - \log \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{s}{2} \log \pi + \sum_{\rho} \left(\log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\right)$$

Derivando si ottiene:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = B - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{1}{2} \log \pi + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) \quad (21)$$

La (21) mostra semplicemente un polo a  $s=1$  e zeri non banali a  $s=\rho$  mentre gli zeri banali sono contenuti nella funzione gamma.

Qui è possibile trovare i valori di A e B per  $s=0$ . Difatti dalle forme chiuse studiate in [26] a riguardo del *problema di Basilea* è

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \log 2\pi$$

Da qui poiché  $\Gamma'(0) = -\gamma$  (costante di Eulero) e  $\Gamma(0) = 1$ , allora dalla (18) è:

$$B = \log 2\pi - 1 - \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \log \pi = \frac{1}{2} \log 4\pi - 1 - \frac{\gamma}{2}$$

Da qui per  $s=0$ ,  $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$  allora è:

$$A = \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

Tutto questo dimostra anche vero che partendo dalla parte destra della (16) si arriva alla (19).

## Regione libera da zeri non banali

### Teorema Regione libera da zeri non banali

Esiste una costante  $c$  positiva tale che  $\zeta(s)$  non ha zeri nella regione

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{\log t}, \quad t \geq 2 \quad (22)$$

### Dimostrazione

In (5) abbiamo visto che  $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ ; ora ne usiamone la parte reale:

$$-\operatorname{Re}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \cos(t \log n), \quad \sigma > 1 \quad (23)$$

Ricordando la (4) e (5) e che  $s = \sigma + it$ , prendendo la parte reale, dalla (4)

$$\operatorname{Re}(\ln \zeta(s)) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \frac{1}{n^{\sigma}} \cdot \cos(t \log n)$$

Se si usava l'identità trigonometrica  $3 + 4 \cos t + \cos 2t = 2(1 + \cos t)^2 \geq 0$  per cui è:

-

$$3 \operatorname{Re}(\ln \zeta(s)) + 4 \operatorname{Re}(\ln \zeta(\sigma + it)) + \operatorname{Re}(\ln \zeta(\sigma + 2it)) \geq 0$$

Dalla (16) si ottiene allora che:

$$3 \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) + 4 \left(-\operatorname{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)}\right)\right) + \left(-\operatorname{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma + i2t)}{\zeta(\sigma + i2t)}\right)\right) \geq 0 \quad (24)$$

Ora esaminiamo ogni termine della (24).

**Primo termine**  $3 \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)$

Per il primo termine un polo semplice in  $s=1$  implica che

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} < \frac{1}{\sigma - 1} + A, \quad A > 0 \quad 1 \leq \sigma \leq 2$$

**Secondo e terzo termine della (24)**

Dalla (24) si nota che gli zeri a sinistra di  $\sigma=1$  ad altezza  $t$  e  $2t$  influiscono sicuramente.

Se  $t \geq 2$  e  $1 \leq \sigma \leq 2$  allora per il secondo termine della (21)  $\Gamma < A2 \log t$ .

Di conseguenza, sotto le condizioni di cui sopra, il tutto si riassume in:

$$-\operatorname{Re}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) < A3 \log t - \sum_{\rho} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho}\right) \quad (25)$$

Di questo ci interessa valutare il secondo a destra. Consideriamo  $\rho = \beta + i\gamma$  con  $\beta$  reale e  $\rho$  zero

non banale, allora  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{s - \rho}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\sigma - \beta + i(t - \gamma)}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\sigma - \beta - i(t - \gamma)}{|s - \rho|^2}\right) = \frac{\sigma - \beta}{|s - \rho|^2}$

Da qui se consideriamo che  $0 < \beta < 1$  e  $1 < \sigma \leq 2$  ciò implica che  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{s - \rho}\right) \geq 0$

Analogamente è:  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\beta}{|\rho|^2} \geq 0$

Tutto questo porta a dire che per  $t \geq 2$  e  $1 \leq \sigma \leq 2$  la (23):

$$-\operatorname{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right) < A3 \log t < A4 \log t$$

Anche fissando  $t \geq 2$  e  $\rho = \beta + i\gamma$  e considero solo il primo termine della sommatoria della (25) esce:

$$-\operatorname{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) < A3 \log t - \frac{1}{\sigma - \beta} \quad (26)$$

A questo punto se sostituiamo nella (24), la (25) e la (26) si ottiene che:

$$\frac{3}{\sigma - 1} + 3A + (4A3 + A1) \log t - \frac{4}{\sigma - \beta} > 0$$

Se  $1 < \sigma \leq 2$  allora è:

$$\frac{4}{\sigma - \beta} < \frac{3}{\sigma - 1} + A5 \log t$$

Fissiamo adesso che  $\sigma = 1 + \frac{\delta}{\log t}$  con  $\delta$  molto piccolo e tale da non violare  $1 < \sigma \leq 2$

$$\frac{4}{1 + \frac{\delta}{\log t} - \beta} < \frac{3}{1 + \frac{\delta}{\log t} - 1} + A5 \log t = \frac{3 + A5\delta}{\delta} \log t$$

$$\frac{4\delta}{(3 + A5\delta) \log t} < 1 + \frac{\delta}{\log t} - \beta$$

$$\beta < 1 + \frac{\delta}{\log t} - \frac{4\delta}{(3 + A5\delta) \log t}$$

Per cui alla fine è:

$$\beta < 1 - \frac{\delta}{\log t} \left( \frac{1 - \delta A5}{3 + A5\delta} \right)$$

O in altri termini è:

$$\beta < 1 - \frac{c}{\log t} \quad \text{con } c > 0 \quad (27)$$

Di conseguenza gli zeri non banali nella striscia critica rispettano la (27) e di conseguenza è vera la (22) che è rappresenta un Teorema.

Il “Teorema Regione libera da zeri non banali” con la (12) ed il termine d’errore che esso rappresenta ci porta alla conclusione che ponendo  $a=c$  :

$$\psi(x) = x + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}})$$

La (22) dà il termine di errore:

$$\frac{c}{\log t} \geq 1 - \sigma, \quad t \geq 2$$

Per dimostrare la (22) si è però potuto fare a meno dell’ipotesi RH. Ma se si fa l’ipotesi RH, cioè  $\sigma=1/2$  ne consegue che  $c=\log t/2$ ; ovvero  $c$  non può essere una costante ma dovrebbe dipendere da  $t$  (altezza immaginaria dello zero). Questo semplicemente ci sta affermando che l’area di ricerca degli

zeri (simmetrici) si allarga a ventaglio all'aumentare di  $T$  ma pur sempre rimanendo all'interno della striscia critica escluso i confini.

## Zeri all'interno di un rettangolo

Nell'analisi complessa un ottimo e potente tool per contare gli zeri ed i poli di una funzione meromorfa è il "Principio dell'argomento" che vedremo nel seguito.

*Sia  $f$  una funzione meromorfa in un dominio e all'interno di un contorno  $C$  semplicemente chiuso e orientate positivamente, tale che  $f$  sia analitica e non nulla su  $C$ . Allora è:*

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg(f(z)) = Z - P$$

Dove  $Z$  è il numero di zeri e  $P$  è il numero di poli, con molteplicità, all'interno di  $C$ .

Se si utilizza tale tecnica è possibile dimostrare [27] all'interno di un contorno  $C$  rettangolare orientato positivamente e di vertici  $-1, 2, 2+iT, -1+iT$  che considerando  $N(T) = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg(\xi(s))$ , allora è:

$$N(\gamma_n) = n \sim \frac{\gamma_n}{2\pi} \log \frac{\gamma_n}{2\pi} \quad (28)$$

Dove qui con  $\gamma_n$  intendiamo l'altezza dell' $n$ -esimo zero.

Dalla 'espressione di sopra è ancora:

$$\log n \sim \log \gamma_n + \log \log \gamma_n - \log 2\pi \sim \log \gamma_n$$

Per cui la (28) si può riscrivere in:

$$n \sim \frac{\gamma_n}{2\pi} \log n \quad (29)$$

Quindi per  $n \rightarrow \infty$  è:

$$\gamma_n \sim \frac{2\pi n}{\log n} \quad (30)$$

La (30) dà una stima dell'altezza dell' $n$ -esimo zero. Ad esempio  $\gamma_{1000} \sim \frac{2\pi 1000}{\log 1000} \sim 909.6\dots$

## Numero di zeri ad una certa altezza e densità

Con la teoria delle funzioni intere e i Teoremi di Weierstrass e Hadamard abbiamo compreso che la funzione  $\zeta$  ha *infiniti zeri non banali nella striscia critica*; inoltre sappiamo che la loro densità è espressa tramite la *formula di Riemann-von Mangoldt*  $N(T)$ :

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T) \quad (31)$$

$T$  è la parte immaginaria dello zero non banale e definite "altezza".

La (31) è ottenibile dalla dimostrazione del Teorema: Se  $T$  è l'altezza degli zeri allora  $N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + O(1/T)$  dove  $S(T) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta(\frac{1}{2} + iT)$  è definito dalla variazione continua sulla linea da  $2$  a  $2+iT$  a  $\frac{1}{2} + iT$ .

La dimostrazione di esso sfrutta sempre il "Principio dell'argomento". Un successivo Teorema dimostrabile afferma che:  $S(T) = O(\log T)$ . Per cui ne consegue la (31).

Dall'interpretazione della (31) si comprende che al tendere di  $T \rightarrow \infty$  gli zeri non banali si addensano.

## Modulo della $\zeta$ - RH equivalente

Abbiamo visto che l'equazione funzionale è data da:

$$\zeta(s) = \left[ 2^s \pi^{s-1} \Gamma(1-s) \sin \frac{\pi s}{2} \right] \zeta(1-s) \quad (32)$$

L'ipotesi di Riemann (RH) che tutti gli zeri non banali di  $\zeta(s)$  sono sulla retta critica della striscia ovvero  $\text{Re}(s)=1/2$  è equivalente a dire che:

$$|\zeta(\frac{1}{2} + \Delta + it)| = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \quad \text{RH equivalente}$$

Un tentativo di dimostrazione potrebbe essere quello di usare l'equazione funzionale (32).

Per  $0 \leq \Delta \leq \frac{1}{2}$  e per tutti  $t \geq 2\pi+1$

$$|\zeta(\frac{1}{2} - \Delta + it)| \geq |\zeta(\frac{1}{2} + \Delta + it)| \quad (33)$$

Oppure se fosse possibile che per  $0 < \Delta \leq \frac{1}{2}$  e per tutti  $t \geq 2\pi+1$

$$|\zeta(\frac{1}{2} - \Delta + it)| > |\zeta(\frac{1}{2} + \Delta + it)| \quad (34)$$

da qui ne dovrebbe conseguire la RH equivalente. Questo perchè nella (29) gli zeri non banali o stanno su  $\text{Re}(s)=1/2$  oppure in coppia  $s = \frac{1}{2} + \Delta + it$  per  $0 < \Delta \leq \frac{1}{2}$ .

Purtroppo ci sono dei limiti nell'uso dell'equazione funzionale che rende alquanto impossibile, senza ulteriori informazioni sulla funzione  $\zeta(s)$ , di "infrangere la barriera dell'uguaglianza" e confermare al 100% la RH equivalente.

## Modulo della derivata $\zeta'$ - RH equivalente

### Teorema della derivata

Se nel range  $0 \leq \Delta \leq \frac{1}{2}$  e per tutti  $t \geq 2\pi+1$  si verifica che

$$|\zeta'(\frac{1}{2} - \Delta + it)| \geq |\zeta'(\frac{1}{2} + \Delta + it)| \quad (35)$$

O equivalentemente

$$\left| \frac{\partial}{\partial \Delta} \zeta\left(\frac{1}{2} - \Delta + it\right) \right| \geq \left| \frac{\partial}{\partial \Delta} \zeta\left(\frac{1}{2} + \Delta + it\right) \right| \quad (36)$$

Allora è vera la RH.

Qua non è necessario, per fare conseguire la RH, di restringersi all'ineguaglianza. Questo dettaglio apparentemente non significativo in realtà è importante. Il teorema è dimostrato in [28]. Tale teorema non dà esattamente la dimostrazione della RH ma consente, per i Lemmi intermedi, di avere molte informazioni che deve rispettare la derivata affinché si giunga alla RH.

## Valore assoluto della $\zeta$ e zeri a $\sigma=1/2$

Prendiamo in esame l'equazione simmetrica funzionale espressa nel seguente modo:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) \quad (37)$$

Dove  $s=\sigma+ib$

Se prendiamo il valore assoluto di entrambi i lati della (37) è:

$$\left| \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right| \|\zeta(s)\| = \left| \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \right| \|\zeta(1-s)\| \quad (38)$$

E' evidente che per tutti i numeri complessi è:

$$\left| \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right| > 0 \quad \left| \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \right| > 0 \quad (39)$$

Se fosse vero che:

$$\|\zeta(s)\| - \|\zeta(1-s)\| \neq 0 \quad (40)$$

è evidente che almeno uno dei due termini della (40) sarebbe diverso da zero; ma dalla (37) ne conseguirebbe che se uno dei termini è positivo lo è anche l'altro. Per cui nessun "zero non banale" si potrà avere in una zona in cui è vera la (40). Ovvero **la (40) è falsa** per il concetto di zero come soluzione di una equazione!

Per cui gli zeri non banali sono per forza situati in una regione per cui è vero che:

$$\|\zeta(s)\| = \|\zeta(1-s)\| \quad (41)$$

o in altri termini gli zeri non banali sono tali da avere un valore  $\sigma$  che rispetta la (41).

Ipotizziamo per assurdo che esistano più rette critiche per diversi valori di  $\sigma$ , sulle quali potrebbero essere presenti zeri non banali.

E' chiaro che ogni retta critica interseca l'asse reale in un solo punto, per cui il numero di linee critiche equivale al numero di intersezioni con l'asse reale; di conseguenza il valore di  $\sigma$  all'intersezione può essere ottenuto risolvendo la (41) con  $s=\sigma$ ; per cui la (41) diventa:

$$|\zeta(\sigma)| = |\zeta(1-\sigma)| \quad (42)$$

Anzicchè sfruttare la continuazione analitica della zeta di Riemann per  $\text{Re}(s)>0$  si può far uso della funzione zeta alternante [29]:

$$\zeta(\sigma) = \frac{1}{1-2^{1-\sigma}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\sigma}} \quad (43)$$

Se esaminiamo la derivata prima della (43) è:

$$\zeta'(\sigma) = \left[ \frac{-2^{1-\sigma} \ln 2}{(1-2^{1-\sigma})^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\sigma}} - \frac{1}{1-2^{1-\sigma}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\sigma}} \ln n \right] < 0$$

valida per tutti i valori  $\sigma$  nella striscia critica.

Poichè la derivata prima è negativa, ciò indica che la funzione è strettamente decrescente e che la zeta è di conseguenza una funzione iniettiva. L'iniettività vuol dire che ad ogni valore del dominio corrisponde un valore del codominio (almeno uno); per cui affinché sia vera la (41) ciò può avvenire solo per  $\sigma=1/2$ .

Ovviamente al contrario se

$$\left| \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right| \neq \left| \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \right| \Rightarrow |\zeta(s)| \neq |\zeta(1-s)|$$

qui non troveremo zeri non banali; mentre per trovare zeri non banali (soluzione di un'equazione) è

$$\zeta(s) = 0 \Rightarrow \left| \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right| = \left| \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \right| \Rightarrow |\zeta(s)| = |\zeta(1-s)|$$

Ora per trovare i valori di  $\sigma$  per tutte le rette critiche ipotizzate, si potrebbe usare allora anche la seguente espressione (44):

$$\pi^{-\frac{\sigma}{2}} \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right) = \pi^{-\frac{1-\sigma}{2}} \Gamma\left(\frac{1-\sigma}{2}\right) \quad (44)$$

Esaminiamo separatamente le derivate prime rispetto a  $\sigma$  della (44):

$$\frac{d\pi^{-\frac{\sigma}{2}}}{d\sigma} = -\frac{1}{2} \pi^{-\frac{\sigma}{2}} \ln \pi < 0$$

Anche qui ne emerge l'iniettività su  $\sigma$  nella striscia critica.

Mentre è:

$$\frac{d\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{d\sigma} = -\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)\left[\frac{1}{\sigma/2} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+\sigma/2} - \frac{1}{n}\right)\right] < 0$$

Anche qui la funzione gamma è iniettiva su  $\sigma$ .

Se scriviamo:

$$g(\sigma) = \pi^{-\frac{\sigma}{2}}\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right) = g(1-\sigma) = \pi^{-\frac{1-\sigma}{2}}\Gamma\left(\frac{1-\sigma}{2}\right)$$

Anche la derivata di  $g(\sigma)$  è negativa e  $g$  è iniettiva e ciò può avvenire solo per  $\sigma=1/2$  per cui esiste una sola retta critica nella striscia critica; ma *tale conclusione è anche quello che la RH asserisce*.

## Alla ricerca degli zeri multipli inesistenti

Una delle congetture irrisolte è la **Congettura sulla molteplicità degli zeri non banali** *Tutti gli zeri non banali sono semplici ovvero con molteplicità 1.*

Gli autori dimostrano in quest'articolo che la congettura è vera, sfruttando i risultati precedenti e i metodi di ricerca degli zeri di una funzione.

### Richiamo teorico a supporto della dimostrazione

Dato un polinomio di grado qualsiasi e con variabile reale o complessa, la ricerca delle radici è possibile effettuarla iterativamente con vari metodi; ad esempio:

- Metodo iterativo
- Metodo di Newton
- Metodo di Sturm e Teorema relativo
- etc.

Nel prosieguo faremo uso solo del metodo di Newton (vedi [30]).

Ricordiamo che se una funzione  $f(z)$  ammette una radice  $\alpha$  tale che  $f(\alpha)=0$  allora è possibile esprimere la mappatura di Newton  $N_f(z)$  nel seguente modo:

$$N_f(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} \quad (45)$$

Ora è noto che:

- 1) Se  $\alpha$  è uno zero semplice di  $f(z)$  allora  $f(\alpha)=0$  e  $N_f(\alpha)=\alpha$  e  $N'_f(\alpha)=0$  e inoltre

$$N_f(z) - \alpha = O((z - \alpha)^2), \quad z \rightarrow \alpha$$

- 2) Se  $\alpha$  è uno zero multiplo di  $f(z)$  allora  $f(\alpha)=0$  e  $N_f(\alpha)=\alpha$  e  $|N'_f(\alpha)| < 1$  e inoltre

$$|N_f(z) - \alpha| \leq C |z - \alpha|, \quad 0 < C < 1, \quad z \rightarrow \alpha$$

In generale se fossimo interessati ai valori delle radici, sarebbe possibile partire da un valore  $z_0$  prossimo ad  $\alpha$  e con varie iterazioni, si arriva ad un n-esimo termine tale che  $N_f^n(\alpha) = \alpha$ . Tuttavia alla dimostrazione non serve trovare i valori delle radici ma poter dire qualcosa sulla molteplicità di tali radici; da qui nasce la successiva dimostrazione.

### Dimostrazione della congettura sulla molteplicità degli zeri

Nel caso della zeta di Riemann la (45) diventa:

$$N_{\zeta}(z) = z - \frac{\zeta(z)}{\zeta'(z)} \quad (46)$$

La (46) attraverso la (5) diventa:

$$N_{\zeta}(z) = z + \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}} \quad (47)$$

Da qui è:

$$N_{\zeta}(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\alpha}}} \quad (48)$$

Nella (48)

$$N_{\zeta}(\alpha) \sim \alpha$$

perchè

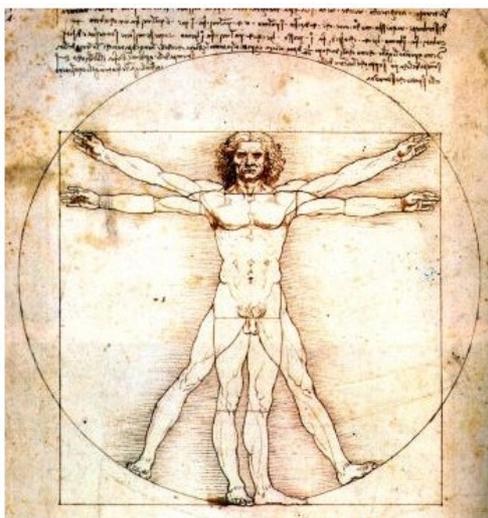
$$\frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\alpha}}} \ll 1$$

dove per la funzione di von Mangoldt nella (48) vale la (3) e inoltre abbiamo una sommatoria di funzioni di von Mangoldt (per cui non è nullo il termine sotto il numeratore 1). Inoltre al secondo membro della (48) ci sono solo costanti per cui è anche:

$$N'_{\zeta}(\alpha) = 0$$

Per cui dai richiami teorici visti prima possiamo affermare, attraverso il metodo di Newton sulla ricerca delle radici che: *Tutti gli zeri non banali della zeta di Riemann sono semplici ovvero con molteplicità 1.*

**CVD**



## References

- [1] John Derbyshire, "L'ossessione dei numeri primi: Bernhard Riemann e il principale problema irrisolto della matematica", Bollati Boringhieri.
- [2] J. B. Conrey, "The Riemann Hypothesis", Notices of the AMS, March 2003.
- [3] E. C. Titchmarsh, "The Theory of the Riemann Zeta-function", Oxford University Press 2003.
- [4] A. Ivic, "The Riemann Zeta-Function: Theory and Applications", Dover Publications Inc 2003.
- [5] Proposta di dimostrazione della variante Riemann di Lagarias – Francesco Di Noto e Michele Nardelli – sito ERATOSTENE
- [6] Test di primalità, fattorizzazione e  $\pi(N)$  con forme  $6k \pm 1$  - Rosario Turco, Michele Nardelli, Giovanni Di Maria, Francesco Di Noto, Annarita Tulumello – CNR SOLAR Marzo 2008
- [7] Fattorizzazione con algoritmo generalizzato con quadrati perfetti in ambito delle forme  $6k \pm 1$  – Rosario Turco, Michele Nardelli, Giovanni Di Maria, Francesco Di Noto, Annarita Tulumello, Maria Colonnese – CNR SOLAR
- [8] Semiprimi e fattorizzazione col modulo – Rosario Turco, Maria Colonnese – CNR SOLAR Maggio 2008
- [9] Algoritmi per la congettura di Goldbach -  $G(N)$  reale- Rosario Turco – CNR SOLAR (2007)
- [10] Il segreto della spirale di Ulam, le forme  $6k \pm 1$  e il problema di Goldbach – Rosario Turco - R CNR Solar 2008 – The secret of Ulam's spiral, the forms  $6k \pm 1$  and the Goldbach's problem  
<http://www.secamlocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin/zeta/ulam.htm>
- [11] Numeri primi in cerca di autore: Goldbach, numeri gemelli, Riemann, Fattorizzazione - Rosario Turco, Michele Nardelli, Giovanni Di Maria, Francesco Di Noto, Annarita Tulumello, Maria Colonnese – CNR SOLAR
- [12] Teoria dei numeri e Teoria di Stringa, ulteriori connessioni Congettura (Teorema) di Polignac, Teorema di Goldston – Yldirim e relazioni con Goldbach e numeri primi gemelli” – Michele Nardelli e Francesco Di Noto – CNR SOLAR Marzo 2007;
- [13] Teoremi sulle coppie di Goldbach e le coppie di numeri primi gemelli: connessioni tra Funzione zeta di Riemann, Numeri Primi e Teorie di Stringa” Nardelli Michele e Francesco Di Noto- CNRSOLAR Luglio 2007;
- [14] Note su una soluzione positiva per le due congetture di Goldbach” - Nardelli Michele, Di Noto Francesco, Giovanni Di Maria e Annarita Tulumello - CNR SOLAR Luglio 2007
- [15] Articoli del prof. Di Noto – sito gruppo ERATOSTENE
- [16] I numeri primi gemelli e l'ipotesi di Riemann generalizzata”, a cura della Prof. Annarita Tulumello
- [17] Super Sintesi “Per chi vuole imparare in fretta e bene” MATEMATICA - Massimo Scorretti e Mario Italo Trioni – Avallardi
- [18] Introduzione alla matematica discreta – Maria Grazia Bianchi e Anna Gillio – McGraw Hill
- [19] Calcolo delle Probabilità – Paolo Baldi – McGraw Hill
- [20] Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Level – Madan Lal Metha
- [21] Number Theoretic Background – Zeev Rudnick
- [22] A computational Introduction to number theory and Algebra – Victor Shoup
- [23] An Introduction to the theory of numbers – G.H. Hardy and E.M. Wright
- [24] A Course in Number Theory and Crittography – Neal Koblitz

- [25] Block Notes of Math – On the shoulders of giants – dedicated to Georg Friedrich Bernhard Riemann – Rosario Turco, Maria Colonnese, Michele Nardelli, Giovanni Di Maria, Francesco Di Noto, Annarita Tulumello
- [26] Block Notes Matematico – Sulle spalle dei giganti – dedicato a Georg Friedrich Bernhard Riemann – Rosario Turco, Maria Colonnese, Michele Nardelli, Giovanni Di Maria, Francesco Di Noto, Annarita Tulumello – sul sito CNR Solar oppure su Database prof. Watkins Oxford  
<http://www.secamlocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin/zeta/tutorial.htm>
- [27] On Montgomery’s Pair Correlation Conjecture to the zeros of the Riemann Zeta Function – Pei Li
- [28] On the Logarithmic Derivative of the Euler Product – Filip Saidak
- [29] Sondow, J. “Riemann Zeta Function.” <http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html>
- [30] Riemann’s zeta function and Newton’s method: Numerical experiments from a complex-dynamical viewpoint -Tomoki Kawahira

## Siti

### CNR SOLAR

<http://150.146.3.132/>

### Prof. Matthew R. Watkins

<http://www.secamlocal.ex.ac.uk>

### Aladdin’s Lamp (ing. Rosario Turco)

[www.geocities.com/SiliconValley/Port/3264](http://www.geocities.com/SiliconValley/Port/3264) menu MISC section MATEMATICA

### ERATOSTENE group

<http://www.gruppoeratostene.com>

### Dr. Michele Nardelli

<http://xoomer.alice.it/stringtheory/>

## Blog

<http://MATHBuildingBlock.blogspot.com>

Colonnese Maria, Rosario Turco

### *Bookshelf*

<http://rudimathematici.com/bookshelf.htm>

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.  
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.