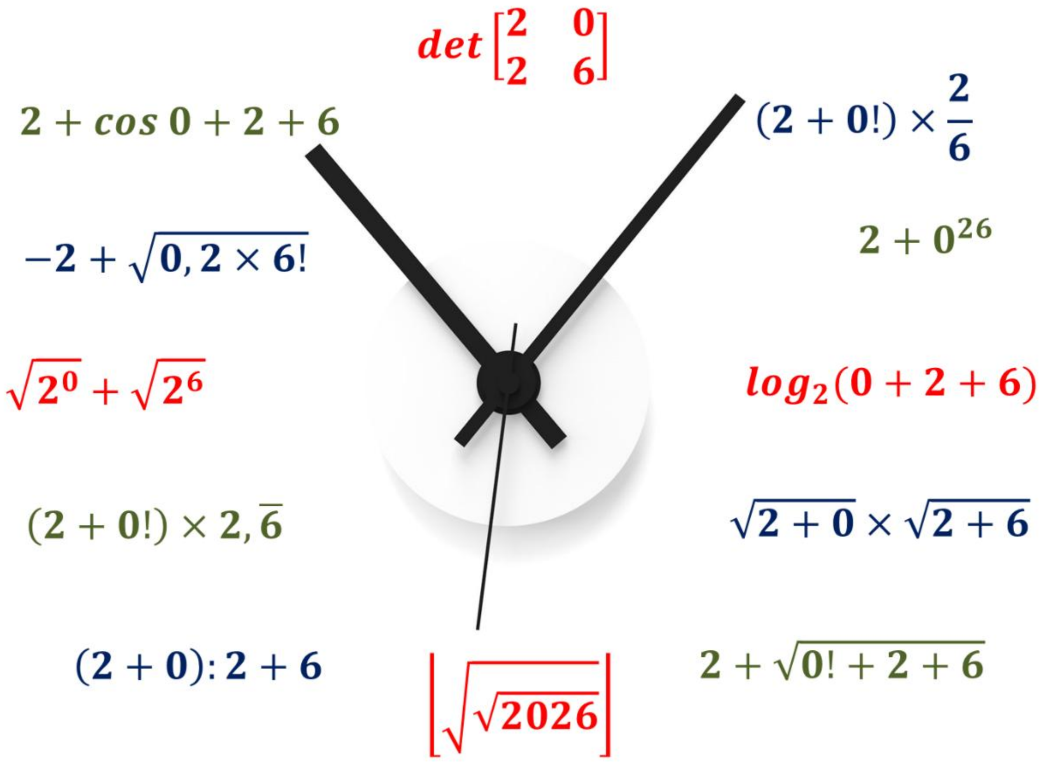
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 324 – Gennaio 2026 – Anno Ventottesimo



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

Ormai è tradizione, a gennaio l'orologio dell'anno di ***Giorgio Dendi***. E non ci sono mai abbastanza aggettivi per il nostro eroe.

1. Astronavi sui banchi

«Io fu' 'n su l'alto e 'n sul beato monte,
ch'i' adorai baciando 'l santo sasso»
(Cino da Pistoia)

Siamo stati a Pistoia, e prima o poi ve lo racconteremo per bene. Però siamo stati a Pistoia, e questo ha congiurato con la naturale predisposizione dell'estensore di queste righe a finire in ritardo su qualsivoglia attività; insomma, ne ha subito bassamente approfittato per frignare che no, non è possibile, non ce l'avrebbe mai fatta a scrivere il solito articolo d'apertura, perché c'erano troppe cose da fare, da rivedere, da preparare, e via lagnandosi. In buona sintesi, in questo numero non c'è né un "compleanno" né un "taccuino di viaggio".

A voler essere comprensivi con tale rammollito (cosa che ci riesce facile, soprattutto perché chi scrive e il rammollito sono la stessa persona) possiamo riconoscere che questo 2026 è iniziato con un bel quantitativo di attività straordinarie, non ultima la revisione delle conferenze del ciclo pistoiese (ben cinque) e soprattutto la richiesta che, parallelamente alle conferenze, ci era stata fatta da un infaticabile professore della città toscana. «Non sarebbe bello» ha detto quel professore «se, mentre i ragazzi del biennio seguono una conferenza, quelli del triennio si cimentassero in una gara di problemi matematici? E viceversa, naturalmente…»

Bello sarebbe bello di sicuro, abbiamo pensato noi, a patto di saperle inventare le gare di matematica. Perché uno pensa che beh, se si fa una rivista di problemi matematici, che mai ci vorrà a metterli insieme per fare una gara? E invece no; no, perché i Rudi Mathematici non sanno niente di didattica; no, perché non si ricordano più neanche alla lontana la differenza tra biennio e triennio dei licei scientifici; no, perché una gara diventa giocabile solo è almeno un po' calibrata e variegata nella difficoltà dei quesiti. E soprattutto no, perché c'era anche la richiesta opzionale che le gare fossero, almeno un po', sceneggiate, insomma con una storia intorno. Anzi, due, ovviamente.

In qualche modo, ne siamo usciti vivi. Le gare sono state scritte, gli studenti le hanno fatte, e il fatto che la classifica finale fosse con punteggi ben distribuiti ci ha consolato: il nostro sacro terrore era che nessuno risolvesse niente o (pure peggio) che tutti risolvessero tutto. Bene o male, invece, ci sono stati impegno e vincitori, premiati con un fenomenale Calendario di RM formato A3 (prodotto fisicamente dall'indomabile professore, naturalmente… noi abbiamo solo resistito alla tentazione di rubarcene uno).

E così, ecco la ragione dell'assenza del compleanno o del taccuino di viaggio. Tanto per riempire lo spazio lasciato vuoto dall'articolo di apertura, nelle pagine che seguono trovate entrambe le gare; una fa finta di essere ambientata nell'universo di *Star Wars*, l'altra in quello di *Star Trek*. Probabilmente, quei poveri studenti manco sapevano di cosa stessimo parlando, con quelle ambientazioni, data l'età. Beati loro…

<u>ISTRUZIONI</u>

Il gioco prevede dieci tappe di una molto ipotetica avventura dei personaggi di *Star Wars* o *Star Treck*. Ogni tappa si conclude con una domanda che, come tutte le domande, si aspetta una risposta. Le risposte (che immaginiamo date via cellulare) dovranno essere sempre numeriche e sempre composte da quattro cifre, anche quando ne basterebbero di meno; basta far precedere le cifre significative dal numero opportuno di zeri. Quindi, ricordate: se volete rispondere "77", quello che dovrete digitare sarà in realtà "0077". In caso di risposte numeriche con decimali, arrotondate all'intero più vicino. In caso di risposte numeriche con decimali, arrotondate all'intero più vicino. In qualche tappa la domanda potrebbe richiedere una risposta non numerica. In quei casi, nella domanda ci saranno le codifiche da seguire. (Esempio: Qual è la capitale della Francia? [*Scrivi 1111 se pensi che sia Pistoia, 2222 se credi che sia Sanremo, 9876 se credi che sia Parigi*]).

1.1 Che la forza sia con voi

PRIMA TAPPA – Preparativi per la partenza

La principessa *Leia Organa* lo aveva annunciato a tutti i capi dell'*Alleanza Ribelle*: bisognava prepararsi alla guerra, le forze dell'Impero erano state tutte mobilitate e stavano per attaccare. *Han Solo* sapeva che non poteva portare la sua astronave, il leggendario *Millennium Falcon*, senza prima sostituire la Tetravalvola Iperspaziale, danneggiata nell'ultima azione. Si era informato, e un rigattiere di Tatooine gli aveva promesso una Tetravalvola in splendide condizioni: in più, essendo un fedele ribelle e un ammiratore di Solo, gli aveva promesso una successione di tre sconti. Il prezzo iniziale era di 10.000 Crediti di Tatooine (CT), ma lui l'avrebbe ceduta all'eroe con un primo sconto del 50%, poi ne avrebbe fatto uno ulteriore del 20% e infine ancora un altro del 10%. Han Solo aveva a disposizione solo mille Crediti di Naboo (CN), ma sapeva anche che al cambio attuale per un CN si avevano 3 CT, e quindi confidava di poterselo permettere. Stava già per pagare via Internet Interspaziale, quando *Chewbacca* ruggì, gli strappò via il computer e gli allungò uno scapaccione. Era chiaro che il peloso compagno gli voleva impedire di fare un grosso errore …

Domanda ed eventuali istruzioni

Quanti Crediti di Naboo stava per spendere Han Solo, se non fosse stato fermato in tempo dal suo copilota *wookie*?

SECONDA TAPPA – Altri preparativi

A differenza dei Ribelli, l'Impero non ha problemi di soldi. Non per nulla *Darth Vader* e l'Ammiraglio Imperiale stanno assistendo a un costosissimo esperimento militare. Due Incrociatori Stellari stanno lanciandosi uno contro l'altro: il primo viaggia a 200 nanoparsec al secondo (np/s), l'altro a 300 np/s. Quando la distanza che li separa è di 10 microparsec (1μp=1000 np), dal primo parte una microsonda che vola avanti e indietro tra i due incrociatori, senza mai fermarsi, alla velocità costante di 500 np/s. L'esperimento serve solo a migliorare le comunicazioni criptate tra le navi della flotta imperiale, ma i due incrociatori sono comunque destinati a scontrarsi, cosa che fanno diligentemente e in modo molto spettacolare dopo venti secondi dalla partenza della piccola sonda veloce.

Domanda ed eventuali istruzioni

Quanti microparsec (μp) ha percorso in tutto la sonda, nel suo percorso con ripetuti avanti e indietro tra i due incrociatori?

TERZA TAPPA – Scivoli scivolosi

Del resto, si sa: i soldi non sono tutto nella vita, anzi; certe volte averne troppi provoca sbagli. Ad esempio, durante la costruzione della *Morte Nera*, l'Imperatore *Palpatine* non badò a spese: ogni pannello di quell'arma era grande quanto un quartiere delle nostre città, e i mezzi che li trasportavano a bordo delle navi cargo erano immensi. Per imbarcarli dovevano alzarli solo di pochi metri, ma per riuscirci dovevano percorrere un mastodontico piano inclinato lungo trenta chilometri. Riuscivano a percorrerlo solo per tre chilometri al giorno, e ogni dodici ore di lavoro dovevano poi fermarsi per altre dodici ore, per raffreddare i motori. Palpatine era anche un maniaco della pulizia, e pretendeva che ogni scivolo fosse sempre tirato a lucido: così a lucido che durante le ore di riposo il mezzo scivolava all'indietro di due chilometri. Sembrava una follia, vedere i più grandi mezzi di trasporto della galassia avanzare come pachidermi per tre chilometri ogni giorno e poi scivolare all'indietro di due chilometri ogni notte, ma si sa che con i Sith è pericoloso discutere.

<u>Domanda ed eventuali istruzioni</u>

Quanti giorni ci sono voluti per percorrere l'intero scivolo?

<u>QUARTA TAPPA – Poco seri, questi Cavalieri</u>

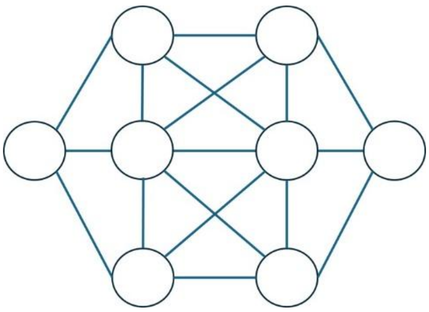
Se i *Sith* sono pericolosi, i Cavalieri *Jedi* sembrano spesso dei buontemponi. Mentre fervono le attività per la battaglia, *Obi-Wan Kenobi* e *Luke Skywalker* stanno in palestra ad allenare mente e corpo: il corpo lanciandosi spade laser, la mente con indovinelli facili e veloci. Così, mentre si lanciano al volo le spade laser (spente), Luke chiede a Obi-Wan: «Ma è vero che le spade dei Jedi devono avere tutte lo stesso peso?» e Obi-Wan risponde: «Diamine, è un postulato fondamentale! Ogni spada Jedi deve pesare una libbra arturiana più mezza spada laser, come fai a non saperlo?». Al che, piccato, Luke replica: «E tu conosci il modo in cui contano con le dita su Zygerria? Partono dal pollice e arrivano contando fino al mignolo, poi proseguono all'indietro, ma senza ricontare il mignolino, continuano così, senza mai contare doppi, pollice mignoli, gli estremi. Hai capito? Sai dirmi su quale numero arrivano, cintando fino a 12?». Al che, il vecchio Obi risponde sdegnato: «Sull'anulare! Mi hai preso forse per un'oca di *Beta Orionis*?»

<u>Domanda ed eventuali istruzioni</u>

Detto 1 per il pollice, 2 per l'indice, 3 il medio, 4 l'anulare e 5 il mignolo, calcolate su quale dito cade il conteggio fino a 2026 (buon anno!), moltiplicatelo per il peso di una spada laser in libbre arturiane, e moltiplicate tutto per 1000.

<u>QUINTA TAPPA – Formazione di volo delle squadriglie X-Wing</u>

Il caccia *XT-65 X-Wing* è forse l'arma di attacco più efficace dell'Alleanza Ribelle. Le squadriglie di otto elementi decollano e volano in formazione rigorosa, come si vede nello schema qua sotto preso dal manuale di volo dello *Stormo Rosso*:



I cerchi rappresentano i caccia (da Rosso-1 a Rosso-8), le linee i sistemi di comunicazione interni allo stormo. Per impedire alle forze imperiali le intercettazioni, il sistema di comunicazione prevede che nessuna linea possa unire due caccia che abbiano numeri contigui: in altre parole, Rosso-5 non può essere unito direttamente né a Rosso-4 né a Rosso-6, e così via per tutti. Riuscite a trovare la disposizione di volo degli otto caccia della squadriglia?

<u>Domanda ed eventuali istruzioni</u>

Dopo aver sistemato le cifre da 1 a 8 in modo da rispettare le regole descritte, moltiplicate fra loro i quattro numeri della riga orizzontale centrale (la seconda dall'alto, l'unica che ha quattro elementi), e digitate come soluzione il numero risultante.

SESTA TAPPA – Munizionamento imperiale

Lo abbiamo già detto: se l'Alleanza basa la sua strategia sullo spirito di squadra, l'Impero preferisce la forza bruta. Per caricare le munizioni degli incrociatori stellari hanno messo al lavoro schiavi dei sistemi solari di *Arturo*, di *Rigel* e di *Deneb*. Per ottimizzare i tempi, li hanno fatti lavorare a squadre miste, scoprendo così che, lavorando insieme, Arturiani e Denebiani munizionano un incrociatore in 60 ore, mentre ai Rigeliani che lavorano con quelli di Deneb bastano 30 ore. Arturiani e Rigeliani insieme finiscono di caricare un incrociatore in 12 ore. *Darth Vader* aveva minacciato di testare la *Morte Nera* sul pianeta d'origine della razza più lenta, e infatti ha polverizzato il pianeta dei Denebiani appena terminati i primi test: «*Se la sono cercata*,» ha sibilato attraverso la maschera, «*addirittura rallentavano sensibilmente gli altri!*»

Domanda ed eventuali istruzioni

Una volta trovato il numero di ore che impiegano Arturiani e Rigeliani a munizionare un incrociatore stellare quando lavorano da soli, moltiplicateli tra loro: il risultato della moltiplicazione è la cifra da digitare.

SETTIMA TAPPA – Ricordo della Battaglia di Aldebaran

Il Maestro Yoda parlava a tutti gli ufficiali dell'Alleanza Ribelle, ma sembrava parlare solo a sé stesso. Raccontava della grande Battaglia di Aldebaran, quando i caccia *imperiali Star Destroyer Classe II* sembravano infiniti, e pareva che si duplicassero come cellule di un tumore maligno. Non era vero, ma così appariva: dapprima erano in fila indiana, poi la metà di essi si spostò quel tanto che bastava a formare un'altra fila parallela: erano sempre lo stesso numero, ma sembravano duplicate. Poco dopo, le file diventarono tre, sempre lunghissime, sempre esattissime con file esattamente uguali tra loro. «A fare questo buffo balletto continuarono», ricordava Yoda, «e dopo le file 4, e poi 5, e poi 6 e poi 7, diventavano! E poi 8, e poi 9 e infine 10, e sempre file perfette e ugualissime esse erano. Sempre lo stesso numero dell'inizio erano, ma ogni volta a rettangolo perfetto si disponevano, e magia sembrava. E tantissimi, tantissimi essi erano, non solo sembravano». Come potevano non cambiare di numero e formare sempre rettangoli perfetti? Pur nella sua grande saggezza, perfino Yoda sembrava incredulo: «Ma il loro grande numero non tememmo, quel giorno! Arrivati a 10 file all'attacco essi partirono, ma noi resistemmo, e resistemmo, e infine nostra la vittoria fu. Numeri non temete, la Forza dentro noi forte scorre!»

Domanda ed eventuali istruzioni

I Cantori Jedi ancora non concordano su quale fosse il numero esatto degli Star Destroyer, ma a noi basta che digitiate il numero più piccolo possibile acciocché le manovre raccontate da Yoda potessero essere fatte così come raccontava il Maestro.

OTTAVA TAPPA – L'assedio di Brentaal IV

Dopo l'esortazione di Yoda, un cinguettio elettronico ruppe il silenzio: era *R2-D2*, il piccolo droide di *Luke Skywalker*. *C-3PO*, il droide protocollare suo inseparabile compagno, tradusse subito il messaggio a tutta l'assemblea. Il piccolo robot voleva ricordare anche quanto era successo durante il terribile assedio di *Brentaal IV*, quando il pianeta era bloccato da tre gusci successivi di campi di forza. Forzarli era quasi impossibile, ma tanti piloti si offrirono lo stesso volontari; formarono diverse squadriglie di otto *X-Wing* ognuna, e partirono tutti insieme, per tentare una sortita e chiamare rinforzi. Le cronache raccontano che già al primo guscio di campo di forza perirono metà delle squadriglie, più mezza squadriglia. Al secondo guscio, stesso risultato: scomparvero la metà delle squadriglie residue, più mezza squadriglia. Anche il terzo campo di forza ottenne il medesimo pedaggio di morte: metà delle squadriglie ancora superstiti, più mezza squadriglia, non superò il terzo guscio. Ma una, e solo una, squadriglia si salvò, con l'aiuto della Forza, e presto tutti gli eroi furono vendicati.

Domanda ed eventuali istruzioni

Quanti caccia X-*Wing* decollarono dal pianeta per forzare l'assedio?

NONA TAPPA – Il Rilevatore Di Diserzione

Mentre nel Quartier Generale dell'Alleanza si cerca di trasmettere motivazione positiva e spirito di abnegazione a tutti, in quello delle Forze Imperiali si preferisce far fuori le reclute la cui fedeltà al *Lato Oscuro* è messa in dubbio. *Darth Vader* potrebbe individuare un potenziale traditore semplicemente passandogli accanto, ma i soldati dell'Impero sono troppi, e ci vorrebbe troppo tempo. Così, ha chiesto ai suoi ingegneri di produrre un RDD, un Rilevatore di Diserzione. Basta applicarlo alle tempie del soldato, e se è un possibile disertore lo intercetta senza possibilità di errori. Ha solo un piccolo difetto: talvolta, con una percentuale pari al 1%, segnala come disertori soldati che in realtà non lo sono affatto. Darth Vader sa per certo che in ogni incrociatore, tra i mille soldati che trasporta, c'è un disertore. Nel monitor di servizio vede che proprio in questo momento un RDD ha marchiato come disertore una recluta dell'Incrociatore "*Uncino dei Sith*". Lo eliminerà di sicuro, anche se non è certo che sia un disertore, a causa dell'imprecisione dei RDD.

Domanda ed eventuali istruzioni

Qual è la probabilità che il povero soldato imperiale sia davvero un disertore? Digitate il numero intero più vicino alla percentuale di probabilità: ad esempio, se vi risultasse una probabilità pari al 12, 34%, scrivete "0012"; per una del 67,98%, digitate "0068".

DECIMA (E ULTIMA) TAPPA – Una nuova speranza

Chiuso nella sua stanza, in solitudine, Yoda guardava le stelle fuori dalla finestra. Domani era il giorno decisivo, e sarebbe stato comunque un giorno difficile, fatale, e quasi certamente segnato dalla sconfitta. Aveva cercato di rincuorare tutti, dalla principessa all'ultimo soldatino, ma sapeva che battere l'Impero era quasi impossibile. Soprattutto per il tempo: non c'era tempo, non c'era tempo per accendere il desiderio di libertà in tutta la Galassia. Avrebbe saputo come fare, se avesse avuto tempo sufficiente; era come quando, ancora bambino, il precettore gli aveva chiesto di sommare tutti i primi cento numeri naturali in un solo minuto. Sapeva sommare, ma non aveva tempo! Che angoscia, provò, quel giorno!

Ma poi completò il ricordo, e sorrise. Sembrava impossibile riuscirci, ma quel Yoda bambino all'improvviso capì, e mostrò al precettore il risultato richiesto dopo pochi secondi. Era stata fortuna? Era stata la Forza a illuminarlo? Qualunque cosa fosse stata, forse anche domani sarebbe arrivato qualcosa a rovesciare i pronostici. Forse, dopo la giornata di domani, si sarebbe accesa una nuova speranza.

Domanda ed eventuali istruzioni

Qual è il risultato della somma dei primi cento numeri interi, che Yoda trovò quand'era ancora alle elementari?

SOLUZIONI[1]

PRIMA TAPPA – Preparativi per la partenza

1200 CREDITI DI NABOO – Il gioco si basa sull'ingannevole concetto degli "sconti ulteriori". Si può tentare di pensare che si possano sommare e poi applicare al prezzo iniziale, e in questo caso 50%+20%+10% fornirebbe un 80%, e quindi un prezzo finale di 2000 crediti di Tatooine, ampiamente coperti dal cambio (1000 CN=3000 CT), ma applicandoli "ulteriormente" (prima il 50%, poi il 20% sul prezzo residuo, poi ancora 10% sull'ulteriore residuo, lo sconto non è più dell'80%, ma del 64%, quindi il prezzo finale è 3600 CT, pari a 1200 CN.

SECONDA TAPPA – Altri preparativi

0010 MICROPARSEC – Le velocità dei due incrociatori e il volo avanti e indietro della sonda servono solo a far rumore e a distrarre dal fatto che basta considerare semplicemente che la sonda fa mezzo µp al secondo, e che vola per 20 secondi.

TERZA TAPPA – Scivoli scivolosi

[1] Non consegnare questa sezione ai partecipanti è di solito una buona idea.

0028 GIORNI – È evidente che ogni 24 ore il trasporto avanza per solo un chilometro, ma una volta arrivati al chilometro 27 mancano solo tre chilometri alla destinazione, si percorrono in un solo giorno.

<u>QUARTA TAPPA – Poco seri, questi Cavalieri</u>

4000 – Non dovrebbe essere necessario impostare l'equazione per capire che una spada laser pesa 2 libbre arturiane. È un po' più complesso capire che quello strano conteggio sulle dita si ripete con un ciclo in ragione 8 (1.pollice-2.indice-3.medio-4.anulare-5.mignolo-6.anulare-7.medio-8.indice) e che quindi è sufficiente trovare il resto della divisione per 8 (2026/8=253, resto 2). Quindi il conteggio finisce sull'indice, che corrisponde a 2, e 2x2x1000=4000.

<u>QUINTA TAPPA – Formazione di volo delle squadriglie X-Wing</u>

0112 – L'idea risolutiva sta nel notare che nell'insieme dei primi otto numeri naturali i soli ad avere un unico numero contiguo sono 1 e 8, e che i due cerchi centrali soli sono i soli che hanno un solo cerchio non direttamente collegato. Ne segue che le cifre 1 e 8 devono essere messe nei cerchi centrale, e che 2 e 7 devono finire agli estremi della stessa riga. Gli altri numeri sono facili da sistemare, anche se in modo non univoco: la richiesta però coinvolge solo quattro cifre della riga centrale, e il loro prodotto (1x2x7x8)=112 è unico.

<u>SESTA TAPPA – Munizionamento imperiale</u>

0600 – Impostando correttamente il sistema di equazioni e tenendo conto del fatto che quello dei Denebiani è un "contributo negativo" si riesce a valutare la "frazione di incrociatore" che ogni popolo riesce a caricare nell'unità di tempo, ovvero la "velocità" dell'azione del munizionamento. Queste sono 1/30 per gli Arturiani e 1/20 per i Rigeliani, mentre i Denebiani "rallentano" il carico di 1/60. Servono quindi 20 ore ai Rigeliani per munizionare in incrociatore, mentre agli Arturiani ne occorrono 30, e 20x30=600.

<u>SETTIMA TAPPA – Ricordo della Battaglia di Aldebaran</u>

2520 STAR DESTROYER – Detto N il numero degli Star Destroyer, questi possono disporsi in rettangoli perfetti con un lato pari a 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 solo se N è multiplo di tutti i primi dieci numeri interi. Il numero più piccolo possibile è quindi il minimo comune multiplo dei primi dieci interi, ovvero proprio 2520.

<u>OTTAVA TAPPA – L'assedio di Brentaal IV</u>

0120 X-WING – Conviene procedere all'indietro: una squadriglia supera il terzo campo di forza, quindi sono tre quelle che hanno superato il secondo, sette quelle sopravvissute al primo e quindici quelle decollate da Brentaal IV. Quindici squadriglie composte ognuna da otto caccia, uguale 120.

<u>NONA TAPPA – Il Rilevatore Di Diserzione (RDD)</u>

0009 – Il metodo più diretto e veloce è considerare che, come da statistiche, il RDD troverà un vero disertore tra i 1000 soldati, e che ne indicherà altri 10 (circa) nei 999 restanti. A esame concluso ci saranno quindi undici soldati marchiati come disertori, tra i quali solo uno è un vero disertore. La probabilità è quindi pari, con ottima approssimazione, a 1/11, ovvero al 9,0909%, quindi "0009" è il valore da digitare.

<u>DECIMA TAPPA – Una nuova speranza</u>

5050 – Il quesito è ovviamente una versione in salsa Star Wars del celeberrimo aneddoto con protagonista Gauss bambino. La formula guida che dà il risultato delle somme dei primi N interi è ovviamente (N+1)(N/2), ma spesso il metodo viene in mente anche senza conoscere l'aneddoto né la formula.

1.2 Spazio, Ultima frontiera

PRIMA TAPPA – «Questi Terrestri…»

Data Astrale 41153.7 – A bordo della USS Enterprise NCC-1701, l'ingegnere capo *Montgomery Scott* è in imbarazzo: deve cambiare un componente motore a curvatura, senza il quale non potrà superare velocità *Warp 2*, del tutto insufficiente per le missioni previste. Lancia uno sguardo supplice al *Signor Spock*, il vulcaniano Primo Ufficiale: «Sono indeciso,» gli dice: «il componente di cui ho bisogno costa 9600 crediti, ma l'*Enterprise* beneficia di tre sconti successivi; un'azienda di *Rigel II* ci applicherebbe sconti in caduta del 50%, poi del 15% e infine del 10%. Una di *Betelgeuse VI* applica invece tre sconti successivi uguali, tutti e tre del 25%. Alla fine, a me sembra che avremo in entrambi i casi un 75% di sconto totale, e non so scegliere a chi rivolgermi». Spock sospira, con un filo di disprezzo mormora sottovoce «Questi Terrestri…» e completa l'ordine al posto di Scott.

Domanda ed eventuali istruzioni

Quanti crediti ha speso Spock per acquistare il componente di Scott?

SECONDA TAPPA – «Questi Vulcaniani…»

Il rischio di guerra con *Klingon* incombe: il capitano *James T. Kirk*, comandante dell'*Enterprise*, e il signor *Spock* stanno visionando un rapporto sulle attività di Klingon appena giunto dai Servizi Segreti Terrestri. È un video in cui due astronavi klingoniane da carico si dirigono una verso l'altra, in rotta di collisione. Una viaggia alla velocità di 222 nanoparsec al secondo (np/s), l'altra a 333 np/s. A un certo punto, da uno dei due cargo si sgancia una minisonda che vola avanti e indietro tra i due cargo, senza mai fermarsi, alla velocità costante di 666 np/s. L'esperimento serve a testare il nuovo sistema di comunicazioni criptate e i Klingon non badano a spese, visto che lasciano che i due cargo esplodano nello scontro frontale trentatré secondi dopo che la sonda era partita da una di esse. Vedendo Spock assorto in calcoli mentali, Kirk gli chiede cosa stia calcolando. «*Ovvio, sto sommando la successione dei percorsi della sonda tra i due cargo: voglio sapere quanto spazio ha percorso, nel suo ripetuto avanti e indietro tra le due navi*». Al che, il capitano Kirk trattiene un sorriso, scuote leggermente la testa, e infine mormora sottovoce e quasi a sé stesso: «Questi Vulcaniani…»

Domanda ed eventuali istruzioni

Aiutate Spock nei calcoli: quanti microparsec (μp) ha percorso in tutto la sonda, nel suo percorso con ripetuti avanti e indietro tra i due cargo? Si supponga che le inversioni di senso di marcia non comportino né soste né rallentamenti.

TERZA TAPPA – La crisi interplanetaria del teletrasporto

Scott riuscì a teletrasportare anche *Leonard McCoy*, Ufficiale Medico, che era sempre restio ad usare quel metodo per salire a bordo. Scott lanciò uno sguardo d'intesa al Capitano *Kirk*, e ridacchiando disse: «*Secondo me, si ricorda ancora del pasticcio con i tre ambasciatori…*». Visto che *Spock* sembrava non riconoscere la citazione, gli raccontarono di quanto accadde durante una cruciale missione diplomatica: l'*Enterprise* stava conducendo gli ambasciatori Romulani, Klingon e Borg al summit che sulla Terra avrebbe stabilito le condizioni dell'armistizio. Ogni ambasciatore era accompagnato da un robot che gli fungeva sia da archivio che da segretario. Mentre orbitavano nei pressi della Luna, il pannello di controllo del Teletrasporto si guastò irrimediabilmente. Scott riuscì ad improvvisare una soluzione di emergenza, una sorta di telecomando manuale che garantiva la possibilità di teletrasportare solo due persone (contando come "persone" sia gli alieni che i loro robot) alla volta. Perdipiù, il telecomando doveva per forza essere operato da una persona che sarebbe stata teletrasportata. Sembrava solo una complicazione noiosa che avrebbe costretto i diplomatici a sbarcare in più passaggi, ma la complicazione maggiore era ben diversa. Nessun ambasciatore intendeva lasciare il proprio segretario-robot da solo, se erano presente gli altri ambasciatori: sapevano tutti bene che ogni diplomatico avrebbe provato a estrarne informazioni classificate, o forse si sarebbe limitato a distruggerlo. Ci volle un bel po' di tempo prima di riuscire a trovare un sistema che, con più passaggi al teletrasporto, avrebbe alla fine consentito lo sbarco a tutte le tre coppie, senza che nessun robot venisse violato.

<u>Domanda ed eventuali istruzioni</u>

Dovreste ricostruire la serie di passaggi al Teletrasporto che riesce a far sbarcare tutti i sei personaggi dall'Enterprise alla Terra senza che nessun robot-segretario venga danneggiato o violato. Una volta trovata la sequenza, attribuite un valore pari a 100 a ogni ambasciatore, e un valore pari a 1 a ogni robot. Il valore di un singolo viaggio è dato dalla somma dei valori delle entità trasportate. Ad esempio, un viaggio che trasporta un ambasciatore con il suo robot varrà 101, uno che trasporta due ambasciatori conta 200, uno che muove due robot vale 2. Una volta trovata la sequenza, sommate i valori del primo e dell'ultimo viaggio, e infine moltiplicate per il numero dei teletrasporti effettuati. Ad esempio: immaginiamo che la sequenza preveda che al primo teletrasporto viaggino un robot e un ambasciatore, all'ultimo viaggino due robot, e che in tutto si siano fatti 8 viaggi con il teletrasporto: allora il numero da digitare sarà (100+1)+(1+1)x8=824, quindi "0824".

<u>QUARTA TAPPA – Tappi sbagliati in Accademia</u>

Lasciato *Scott* in sala motori e *McCoy* nel suo laboratorio medico, *Kirk* e *Spock* stanno ancora parlando della crisi dei tre ambasciatori quando arrivano nella Plancia di Comando della nave. Dopo aver risposto al saluto dei presenti, vengono interrotti dal sorriso della tenente *Nyota Uhura*, Ufficiale delle Comunicazioni, che aveva seguito la conversazione dall'interfono. «*Sa, capitano, forse potreste l'episodio degli ambasciatori come test nelle prove per i cadetti dell'Accademia. A me capitò "il problema dei tappi" e gli istruttori giuravano che era nato da un episodio davvero accaduto*». Visto che nessuno sembrava conoscerlo, continuò: «*Dicevano che era accaduto davvero durante uno dei primi voli di prova delle navi della Classe Centaur: alcuni tappi ermetici di serbatoi erano di forma rotonda e altri quadrati, ma per errore le forniture alla partenza avevano invertito tutto, mandando tappi rotondi ai reparti dove servivano quadrati, e quadrati dove attendevano i rotondi*». Uhura sospirò, forse ricordando gli anni da cadetto: «*Lo trasformarono in un test: ci chiesero di capire se chiudesse meglio un tappo quadrato su un buco rotondo di area unitaria, o se fosse maggiore la percentuale di sovrapposizione, e quindi di chiusura, di un tappo rotondo su un foro quadrato, sempre di area unitaria*». Spock si limitò ad alzare un sopracciglio vulcaniano; il capitano Kirk invece ridacchiò: «*Sono sicuro che lei sei riuscita a risolverlo, io non ce l'avrei mai fatta. Per fortuna, a me è toccato solo il test Kobayashi Maru…*»

<u>Domanda ed eventuali istruzioni</u>

Dopo aver calcolato la percentuale di copertura dei tappi su fori quadrato e rotondo di area unitaria, fatene la differenza e arrotondatela all'intero più vicino. (Esempio: il tappo rotondo copre il 67,89%, quello quadrato il 78,90%: la differenza tra i due valori è 11,01%, arrotondando si ottiene 11, si digita “0011”.)

<u>QUINTA TAPPA – C’è Accademia e Accademia</u>

Hikaru Sulu, Ufficiale Timoniere, guarda di sottecchi *Pavel Chekov*, Ufficiale Navigatore: «*Ma anche a te facevano domande così strane, nella tua Accademia? In quella di Kyoto non scherzavano mica tanto con tappi e buchi…*». Chekov, giovane e di fresca nomina, è un po’ imbarazzato e intimidito, ma risponde: «*Non so molto di Accademie Cadetti, in verità… Mi hanno preso alla primaria di Kursk che non avevo ancora otto anni, e poi non mi hanno insegnato altro che matematica e logica. L’unico test che ricordo è quello che mi fecero subito, come test d’ingresso: mi chiesero quanti zeri ci fossero al fondo di 100!, insomma quanti zeri ci fossero in coda al fattoriale di cento. Una cosa facile facile, ma del resto avevo solo otto anni…*». Sulu lo guardò fisso per qualche secondo, poi emise un lungo sospiro.

<u>Domanda ed eventuali istruzioni</u>

La domanda sembra chiara, no? A titolo di esempio, 10! è pari a 3628800, quindi ha una “coda di zeri” pari a 2. Quanti zeri ci sono nella coda di zeri di 100! ?

<u>SESTA TAPPA – Scuola Cadetti</u>

D’accordo, Chekov è sempre stato un po’ speciale, ma molti ignorano che i Cadetti della Flotta Interstellare vengono arruolati spesso quado sono assai giovani. Adesso, per esempio, mentre *Uhura* e *Sulu* si dirigono verso la Plancia di Comando, passano vicino alle aule della loro scuola. Lì dentro, ragazzi dai 12 ai 15 anni d’età stanno imparando i primi rudimenti del Calcolo Quadridimensionale che useranno per tutta la loro carriera. È solo il primo giorno di scuola, per loro, e stanno risolvendo il primo dei molti quiz che li aspettano. Infatti, si intravede uno studente in piedi vicino alla cattedra che sta di fronte a un display a quattro cifre; sotto ogni cifra c’è una spia che può essere accesa o spenta tramite apposito interruttore. A ogni pressione, l’interruttore cambia stato, passando da OFF a ON o da ON a OFF. Ancora più in basso c’è una larga barra con su scritto ENTER: ogni volta che viene premuta, le cifre del display che hanno la corrispondente spia accesa in posizione ON incrementa di una unità, quelle con spia a OFF rimangono immutate. Per esempio: all’inizio il display segna 0000 e tutte e quattro le spie sono OFF; detti ABCD i quattro interruttori, se un cadetto preme A e C e poi preme ENTER , sul display si vedrà il numero 1010; se poi cambia lo stato degli interruttori B e C, la spia A rimarrà accesa, la B che era spenta si accende, la C che era accesa si spegne, e la D non cambia restando spenta: quindi, dopo il secondo ENTER , il display mostrerà 1100.

<u>Domanda ed eventuali istruzioni</u>

Ai Cadetti viene richiesto di arrivare ad avere sul display il numero 1234 e tutti i quattro interruttori nello stato iniziale di OFF nel minor numero possibile di passi, intendendo come “passo” la pressione della barra ENTER. La soluzione del gioco è proprio quel numero, che andrà come al solito scritto in quattro cifre: se le pressioni della barra fossero state 99, scrivete “0099”.

<u>SETTIMA TAPPA – Anche le astronavi fanno il pieno</u>

L’*Enterprise* è finalmente pronta a partire. Insomma, quasi pronta… la sua efficienza energetica è garantita dall’annichilazione tra Deuterio e Antideuterio, che sopperisce anche ai fabbisogni energetici, oltre che al campo di curvatura, anche ai reattori a impulso e quelli a fusione. L’annichilazione è molto efficiente, ma occorre riempire le scorte del Deuterio e dell’Antideuterio, stoccandole nei depositi della nave. L’azione di stoccaggio è lunga e laboriosa; per questo *Scott* e *Spock* ne approfittano per cercare di ottimizzare i tempi. Hanno a disposizione operatori di tre diversi pianeti: Umani, Vulcaniani e Androidi di Song. I due ufficiali hanno formato squadre miste di due razze, e hanno misurato i loro tempi: scoprono così che quando lavorano insieme Vulcaniani e Androidi, un deposito viene riempito in 9 ore; Umani e Androidi, invece, ce ne mettono 15. La peggiore accoppiata è però quella di Umani e Vulcaniani, che necessitano di ben 30 ore per completare un deposito.

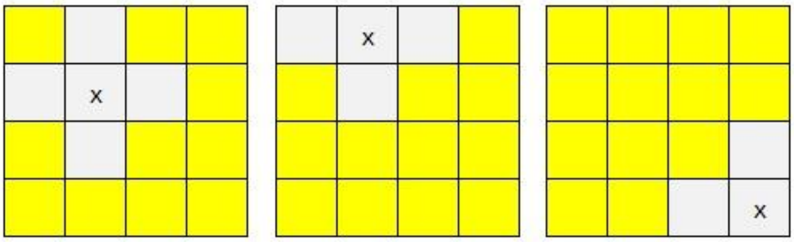
Né Scott né Spock sembrano soddisfatti; mentre Scott ritorna scuotendo la testa in Sala Motori, Spock si sofferma ancora un po' a tirare le somme.

<u>Domanda ed eventuali istruzioni</u>

Determinate quante ore occorrerebbero per riempire un deposito a un gruppo di soli Vulcaniani e a uno composto da soli Androidi. Moltiplicate i tempi trovati fra loro, e digitateli come soluzione del quesito (sempre con l'accortezza di usare quattro cifre).

<u>OTTAVA TAPPA – Sedici pannelli di controllo</u>

Lo sapete, no? Lo slogan della Flotta Interstellare è "Spazio: ultima frontiera!" ma resta il fatto che per arrivare allo spazio bisogna prima decollare, e l'*Enterprise*, che da un pezzo sembrava sul punto di partire, è ancora ferma all'astroporto. Il cuore energetico della nave, i 16 pannelli di controllo che governano la reazione Deuterio-Antideuterio, sono andati in allarme e richiedono un'immediata riconfigurazione. Così buona parte degli ufficiali si ritrova davanti alla griglia quadrata 4×4 dei pannelli: sono *Kirk*, *Spock*, *Uhura* e *Scott*. Cambiare di stato un pannello è semplice: basta premere un apposito "pulsante di cambio stato ON/OFF" presente in ogni pannello. Se lo si preme quando è acceso (ON), il pannello si spegne (OFF), se invece è spento si accende. Al momento tutti i pannelli sono accesi, e per la riconfigurazione devono essere spenti tutti e 16: esiste però un sistema di sicurezza che consente un cambio di stato dei pannelli solo parziale e molto controllato. In breve, se si preme il pulsante di cambio di stato di un pannello, a cambiare stato sarà non solo il pannello su cui si è intervenuti, ma anche i pannelli ad esso adiacenti in verticale e orizzontale. La figura mostra come cambia lo stato dei pannelli in funzione dell'azione su un pannello (segnato con "x") posizionato all'interno della griglia, o sul bordo, o in un angolo:



Occorre agire in fretta, dice Uhura: dal Comando Centrale l'hanno informata che un ulteriore ritardo metterebbe in forse la partecipazione dell'Enterprise alla missione. Kirk lancia un'occhiata al tempo stesso supplice e autoritaria a Spock, per esortarlo a trovare la sequenza più breve possibile, anche perché ogni cambio di stato richiede diversi minuti. Senza quasi farsi notare, Scott nel frattempo si è avvicinato ai pannelli, e in breve riesce a spegnerli tutti. La missione è salva.

<u>Domanda ed eventuali istruzioni</u>

Scott, forse per la sua familiarità con i problemi d'ordine pratico che affronta quotidianamente in Sala Motori, non solo è riuscito a spegnere tutti i pannelli, ma è anche riuscito a farlo con il numero minimo di pressioni di pulsanti. Questo numero minimo è la soluzione da trovare e da digitare.

<u>NONA TAPPA – Falsa Partenza</u>

«*E adesso si parte davvero*», pensano tutti. Lo pensa Scott, orgoglioso di aver rimosso l'ultimo ostacolo, quello dei pannelli. Lo pensa Spock, perché ormai mancano davvero pochi minuti, e in pochi minuti è difficile che accadano altri disastri. Lo pensa Uhura perché ci spera, lo pensa Kirk, perché lo vuole, lo pensano proprio tutti, dal capitano all'aiuto cambusiere. E poi Kirk è già seduto nella poltrona di comando, e sta guardando verso Sulu per dare il segnale di partenza. Solo che suona una sirena. Era la SSSS, *Sirena del Sistema Sicurezza Sabotaggi*. Il Sistema, sempre in funzione, segnala situazioni potenzialmente riconducibili a sabotaggi interni, associandole anche ai membri dell'equipaggio sospetti. Per carità, è un sistema utile e affidabile: dai test di collaudo risulta che tutte le situazioni di sabotaggio sono intercettate e segnalate, e le statistiche garantiscono che c'è mediamente un sabotatore ogni mille membri dell'equipaggio. La sola pecca è che è un po' troppo zelante: anche in assenza di sabotaggi, finisce per segnalare come sospette l'1% delle situazioni (e delle persone), ritenendole pericolose. Il capitano Kirk si alza dalla sedia di comando. Non si può ancora decollare.

Domanda ed eventuali istruzioni

Sulla base delle informazioni disponibili, con quale probabilità percentuale la situazione segnalata è davvero riconducibile a un sabotaggio reale? Arrotondate all'intero più vicino e digitate il risultato come numero a quattro cifre.

DECIMA (E ULTIMA) TAPPA – Domani è un altro giorno

Data Astrale 41153.7 – Si partirà domani, questo giorno è passato senza prendere il volo. Il sabotaggio non esisteva; era un falso positivo, ma è bastato a far rinviare la partenza. Il signor Spock e il capitano Kirk percorrono il lungo corridoio in penombra che porta agli alloggi degli ufficiali. Il capitano sbuffa, scuote la testa, e infine sbotta verso l'amico vulcaniano: «*Falso positivo, ancora… Non lo capirò mai, il calcolo delle probabilità. Perché siamo costretti dai protocolli ad applicarli sempre?*». Spock alza il sottile sopracciglio: «*Non essere sciocco, Jim… come faremmo a riportare a casa un'astronave, se non avessimo a disposizione una solida teoria probabilistica per valutare le migliaia di opzioni di una navigazione interstellare?*». Kirk continua a scuotere la testa: «*Che c'entra, quelle sono decisioni normali, i computer sono lì per questo. Ma il fatto è che proprio non la capisco: ricordi quel vecchissimo problema preso da indovinello in televisione? Con uno che ha tre porte da aprire, dietro una c'è una fuoriserie, dietro le altre due una capretta…*» - «*Certo,*» annuisce Spock, «*è il famosissimo Problema di…*», ma Kirk non lo lascia finire: «*E insomma il tizio sceglie una porta, e vincerà quello che c'è dietro; ma dopo che ha scelto una porta il presentatore ne apre un'altra e gli fa vedere che dietro c'è una capretta, e subito gli chiede se vuole cambiare la prima scelta con l'altra porta rimasta chiusa.*» - «*Sì, ti ho detto che lo conosco! E infatti…*». Ma Kirk sbraita «*"Infatti" niente, Spock! Quando viaggi nello spazio, non puoi perdere tempo con fuoriserie e caprette: se trovi un presentatore pedante le sole cose giuste da fare sono alzare gli scudi, preparare i phaser, e sperare di non doverli usare contro quel Klingon travestito!*»

Domanda ed eventuali istruzioni

Anche se il capitano Kirk si rifiuta di analizzarlo, il problema è molto famoso ed è stato oggetto di grandi contenziosi. Qual è la vostra opinione? Conviene cambiare la scelta, oppure il cambio della porta non cambia nulla? Ipotizzate di optare per cambiare la vostra scelta iniziale, e digitate "3333" se pensate che le vostre probabilità di vincere la fuoriserie siano il 33,33%, "5000" se pensate che avete metà probabilità di vincere una capra e pari metà di vincere la macchina, oppure scrivete "6666" se pensate di avere due probabilità su tre di portarvi a casa la macchina.

SOLUZIONI[2]

PRIMA TAPPA – «Questi Terrestri…»

3672 CREDITI – Il gioco si basa sull'ingannevole concetto degli "sconti ulteriori". Si può pensare che sia lecito sommarli e poi applicarli al prezzo iniziale, e questo è l'errore che fa Scott. In realtà, i tre sconti in caduta del 25% ridurrebbero il prezzo iniziale di 9600 crediti a 4050 (sconto totale 57,81% circa), mentre la successione 50%, 15% e 10% riduce il prezzo a 3672 crediti (sconto totale 61,75%).

SECONDA TAPPA – «Questi Vulcaniani…»

0022 MICROPARSEC – Le velocità delle due navi cargo dei Klingon e il nevrastenico volo avanti e indietro della sonda servono solo a far rumore e a distrarre dal fatto che basta considerare semplicemente che la sonda fa 666 nanoparsec al secondo, e che vola per 33 secondi. In quel lasso di tempo percorre ovviamente 33x666=21978 nanoparsec, che corrispondono quasi esattamente a 22 microparsec (μp).

[2] Non consegnare questa sezione ai partecipanti è di solito una buona idea.

TERZA TAPPA – La crisi interplanetaria del teletrasporto

2222 – Servono un po' di andate e ritorni. 1) Andata di una coppia di ambasciatore con il suo robot; 2) Ritorno del solo ambasciatore. 3) Andata dei due robot residui; 4) Ritorno del robot che aveva fatto il primo attraversamento con l'ambasciatore. 5) Andata degli altri due ambasciatori, 6) Ritorno di uno di loro e del suo robot-segretario. 7) Andata dei due ambasciatori; 8) Ritorno del robot che stava già lì. A questo punto i tre ambasciatori sono tutti e tre sulla Terra, i loro tre robot sono ancora sull'Enterprise. 9) Andata di due robot; 10) Ritorno dell'ambasciatore proprietario del robot rimasto a bordo dell'astronave. 11) Andata conclusiva alla riva di destinazione dell'ultima coppia di ambasciatore e robot. In conclusione, i teletrasporti totali sono 11, il valore del primo viaggio è 101, quello dell'ultimo è pure 101, e il risultato conclusivo è (101+101)x11=2222.

QUARTA TAPPA – Tappi sbagliati in Accademia

0015 – Nel buco quadrato di lato unitario entra un cerchio di raggio ½, che copre pertanto un'area pari $\pi/4$, ovvero circa il 78,54% del foro quadrato. Il buco tondo di area unitaria ha raggio pari a $1/\sqrt{\pi}$, il tappo quadrato massimo che vi entra ha quindi diagonale pari a $2/\sqrt{\pi}$, quindi ha lato pari a $(2/\sqrt{\pi})/\sqrt{2}$ e area pari a $2/\pi$, quindi a circa il 63,66% dell'area del foro. La differenza tra le due percentuali è quindi pari a circa 78,54-63,66=14,88 che si arrotonda a 15, ergo "0015".

QUINTA TAPPA – C'è Accademia e Accademia

0024 – Uno zero in coda significa che è avvenuta una moltiplicazione per 10, e 10 è dato da 2x5. Considerando i fattori primi di tutti i cento numeri, di 2 ne abbiamo quanti ne vogliamo (tutti i numeri pari ne hanno almeno uno), quindi bisogna trovare i fattori 5, che tra 1 e 100 sono 20. Non bisogna però dimenticare i casi in cui il 5 compare alla seconda potenza, perché lì bisogna contarlo doppio. Poiché 52=25, ai 20 trovati bisogna aggiungere i 4 multipli di 25 (25, 50, 75, 100), e si arriva così a 24.

SESTA TAPPA – Scuola Cadetti

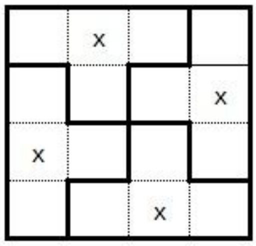
0008 AZIONI – La tabella riepiloga le predisposizioni degli interruttori prima di ogni pressione della barra ENTER, e mostra il display risultante. La prima riga (0) indica la situazione di partenza, il fondo giallo di una casella la modifica di stato degli interruttori, per metter in evidenza che, per ritornare alla situazione di partenza, ogni interruttore andrà premuto un numero pari di volte. Si vede anche che ogni colonna, dovendo essere necessariamente cambiata almeno una volta perché non c'è nessuna cifra uguale tra lo 0000 di partenza e il 1234 finale, ha subito una sola coppia di pressioni, che è il minimo.

	A	B	C	D	*Enter*	DISPLAY
0	off	off	off	off		**0000**
1	**ON**	off	off	off	⇨	**1000**
2	**OFF**	off	off	off	⇨	**1000**
3	**off**	off	**ON**	off	⇨	**1010**
4	**off**	off	**on**	**ON**	⇨	**1021**
5	**off**	**ON**	**on**	**on**	⇨	**1132**
6	**off**	**on**	**OFF**	**on**	⇨	**1233**
7	**off**	**OFF**	**off**	**on**	⇨	**1234**
8	**off**	**off**	**off**	**OFF**	⇨	**1234**

SETTIMA TAPPA – Anche le astronavi fanno il pieno

0356 – Impostando correttamente il sistema di equazioni (preferibilmente in termini di "efficienza oraria": la prima equazione, quella che afferma che Vulcaniani e Androidi insieme impiegano 9 ore per completare un lavoro unitario, avrebbe quindi la forma $V+A=1/9$) si ottiene un tempo per i Vulcaniani pari a TV=25,714 ore, e per gli Androidi un TA=13,846 ore, e il loro prodotto è assai prossimo a 356. È notevole che il sistema d'equazioni restituisce un valore negativo all'efficienza degli Umani; significa che questi non solo non arrecano nessun progresso nel carico, ma che addirittura rallentano gli altri.

OTTAVA TAPPA – Sedici pannelli di controllo



0004 – Esistono molte combinazioni possibili in grado di arrivare alla posizione OFF per tutti i 16 pannelli della griglia; anche procedendo un po' a caso si può riuscire ad ottenere la situazione desiderata. Scott ha però notato che agendo su un pannello del bordo della griglia si spengono quattro pannelli a forma di T, e che quattro configurazioni di questo tipo saturano bene la grigli intera, come da figura. In questo modo tutti e 16 pannelli fanno un solo cambio di stato da ON a OFF, con solo 4 pressioni di pulsante. E 4 è certamente il minimo possibile, perché anche se esistono azioni in grado di cambiare stato a cinque pannelli, tre azioni di questo tipo non basterebbero a spegnere tutti i 16 pannelli.

NONA TAPPA – Falsa partenza

0009 – Per interpretare correttamente il segnale, conviene ragionare su un equipaggio ideale di 1000 membri. In media, uno di essi è effettivamente responsabile di sabotaggi, e i restanti 999 sono innocenti. Il SSS segnala sempre le situazioni realmente dovute a sabotaggio, quindi ci si aspetta una segnalazione corretta; poiché però segnala erroneamente l'1% dei casi non reali (falsi positivi), si avranno anche, sempre in media, circa 10 segnalazioni non pertinenti. Nel complesso, il sistema produce quindi: 11 segnalazioni di situazioni sospette, una sola delle quali è effettivamente riconducibile a un sabotaggio reale. La probabilità che una situazione segnalata come quella osservata sia davvero dovuta a un sabotaggio è quindi: $1/11 \approx 0{,}0909$; cioè circa il 9%.

DECIMA TAPPA – Domani è un altro giorno

6666 – Che ci crediate o no, se dopo l'apertura della porta con la capretta decidete di cambiare la vostra porta con l'altra rimasta chiusa, le vostre probabilità di vincere la fuoriserie diventano 2/3, ovvero il 66,66%. Si tratta di un problema famosissimo, chiamato "Problema di Monty Hall", e in rete ci sono centinaia di analisi dettagliate.

2. Problemi

2.1 Un giochino di nove anni fa

Una caratteristica di svariati problemi delle Olimpiadi Matematiche è quella di essere legati all'anno di edizione; di solito, la cosa è facilmente generalizzabile a un generico valore, e l'anno è lì solo per dare un po' di fastidio. Ogni tanto, però, ne compare qualcuno per il quale sembra ci siano dipendenze molto strette con il fatto che "è stato scelto proprio quel numero lì", e la generalizzazione potrebbe essere non immediata. Un caso potrebbe essere il problema che segue (non andate a curiosare: peschiamo quelli delle olimpiadi matematiche *locali*!).

Rudy e Doc si sono inventati un nuovo gioco. Dati i numeri 2, 3, 4, ..., 2017, viene scelto un numero $n \leq 2014$ e quindi si comincia a giocare; Rudy sceglie n numeri (distinti tra loro, chiaro!), e quindi Doc ne sceglie 2 tra quelli restanti.

Dopodiché gli $n+2$ numeri vengono messi in ordine, in modo tale che:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{n+2}$$

(sì, tutti assieme). A questo punto, se esiste almeno un i tale che nella sequenza qui sopra a_i divide a_{i+1}, allora vince Doc; se invece questo numero non esiste, vince Rudy. Ci si chiede per quali valori di n Rudy abbia una strategia di vittoria.

Crediamo non sia un grosso problema il capire come mai n debba essere al più uguale a 2014 e come questo valore sia facilmente generalizzabile, ma la nostra paura è che anche il massimo dei numeri dati abbia una funzione importante nel calcolo di n per garantire una strategia a Rudy.

Nel caso questa generalizzazione vi sembri un'emerita stupidaggine che si risolve immediatamente, provate a generalizzare questo: "Qual è la media (aritmetica) degli interi maggiori o uguali a zero e minori di 9261 non divisibili né per 3 né per 7?"

2.2 Toh, un paio di forbici...

È noto che qui nella stanza imbottita la cosa più tagliente che ci lasciano maneggiare è una palla di gomma (morbida e leggera). Siamo quindi molto felici di aver trovato un paio di forbici abbandonate e una serie di fogli di carta 10×12 (10 è l'altezza: dopo è importante).

Visto che il nostro divertimento principale è piegare la carta, tanto per cominciare ci mettiamo a piegare la carta, sino ad ottenere un quadrato 1×1 mantenendo l'orientamento (insomma, il lato verticale era, in origine, verticale).

A questo punto, tagliamo il quadrato ottenuto (beh, 10×12… sembra più un cubo, che un quadrato…) in verticale a metà. Quando... arrivano due signori vestiti di bianco che, urlando, ci portano via tutto!

Per consolarci, ripensiamo al gustoso momento nel quale il Potere era nelle nostre mani, e ci chiediamo... Quanti pezzi di carta avevamo ottenuto, dal taglio?

Siccome noi abbiamo sempre, come DPpCiM (Diabolici Piani per Conquistare il Mondo), un piano B, adesso ci stiamo ponendo una domanda: e se il taglio lo avessimo fatto in *orizzontale*?

Purtroppo, non ci ricordiamo la sequenza delle piegature, quindi può darsi che ci siano un po' di casi da calcolare. Fate alla svelta, che Rudy sta cercando di capire cosa succede se i tagli sono lungo una diagonale (su questo non abbiamo la più pallida idea, ma ci sembra una domanda interessante).

3. Bungee Jumpers

Qual è il massimo numero di parti nelle quali il piano può essere diviso da:

1. *n* linee?
2. *n* circonferenze?

Qual è il massimo numero di parti nelle quali lo spazio può essere diviso da:

3. *n* piani?
4. *n* sfere?

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Gennaio!

Si cambia. Conosciamo molte citazioni famose sul cambiamento, a questa redattrice piace molto quella dal Gattopardo "Se vogliamo che tutto rimanga com'è, bisogna che tutto cambi", perché somma le due facce del processo: il desiderio intrinseco di ognuno di noi di mantenere lo status quo, ciò a cui si è abituati, e la necessità di un'evoluzione, di una rivisitazione, di un miglioramento. Siamo continuamente obbligati ad accettare nuove versioni software su computer e telefonini – anche perché altrimenti se ne va all'aria la compatibilità con tutte le app da cui dipendiamo – ma passiamo ore ad imprecare alla ricerca di icone cambiate o spostate (ma perché?) e settaggi diventati introvabili. Così anche noi di RM – dopo innumerevoli discussioni – abbiamo deciso di fare qualcosa. Che cosa, non lo sappiamo ancora esattamente. Per il momento abbiamo un nuovo logo. Lo vedete nella testata di questo primo RM del 2026 e lo vedete già sul sito e sul blog. Lo abbiamo perfino cambiato sul calendario dopo averlo lanciato, per cui se lo avevate già scaricato fareste bene a scaricarlo di nuovo. Ogni nuova versione del logo fino ad ora è un'evoluzione del precedente, e questo non è da meno:

RM001 RM008 RM018 RM049 RM308 RM324

Stiamo lavorando alla nuova versione del nostro sito, che – come sanno quelli che sono andati a dare un'occhiata – non è rivisto da parecchi anni, ma tutta la faccenda dei lucertoloni, poi diventati gechi, è nata da un'illustrazione di Escher (ancora si scorcia sul sito, ma presto la elimineremo). Ci si può giocare – matematicamente e no – in diversi modi, ma il mio preferito è il fatto che i tre, che arrivano da direzioni diverse, con modalità diverse, si incastrano inaspettatamente per costruire qualcosa di completo. Così siamo sempre stati noi: diversi ma complementari, litighiamo per ogni piccola operazione, ma troviamo sempre un modo per andare avanti.

Eppure stiamo invecchiando, e il cambiamento ci riesce sempre più difficile. Siamo affezionati alla "forma libro" della nostra cara rivista, e il Capo continua ad insistere sui suoi caratteri, colori, formati. E non sarebbe nemmeno tanto male, se non fossimo presi da mille attività, e anche se il Capo e il Doc sono andati in pensione dai loro lavori "ufficiali", sembra che ci sia sempre più da fare: conferenze, apparizioni spontanee, interviste, libri, articoli per LeScienze, Nuova Lettera Matematica, Archimede, … recentemente siamo anche finiti su *Comics & Science*! Questo mese, se avete letto l'articolo iniziale, sapete che i miei compari hanno fatto un *tour de force* a Pistoia. E poi RM è in ritardo. Ma certo.

Ma lo sapete, siamo affezionati alle nostre tradizioni, e sì, forse qualcosa cambia. Certo sotto sotto siamo sempre gli stessi, ma il mese prossimo RM compie ventisette anni, e se qualcuno ci avesse detto, ventisette anni fa, che saremmo diventati quello che siamo oggi, gli avremmo dato del matto. E il giorno di San Valentino, come ogni anno, ospiteremo il

Carnevale della Matematica dal nostro blog. Ecco, vedete che tutto cambia, ma noi restiamo sempre qui. Come resta la tradizione degli auguri di ***Alan*** per il nuovo anno:

2026

Serie di endecasillabi con parole crescenti[3] e acrostico

Da tempo rinomata tradizione:
Un tipico pensiero natalizio,
E in voi crea tanta affabil emozione
Ma dell'ingegno ingenera esercizio,
In casa vostra approdi benaccetto.
Là dove regna troppo pregiudizio,
A chi così palesasi scorretto
«**V**a' via!» tutti diciamo immantinente
E chi suol farsi infido diavoletto
Non deve rovinarci ulteriormente.
Ti sia questo scherzetto strampalato
In rima, dalla metrica crescente,
Senz'alcun dubbio proprio fortunato
E fare posso questa previsione:
Il "ventisei"? Splendore incontrastato!

L'altro regalo ormai tradizionale, l'orologio per il nuovo anno di ***Giorgio Dendi***, lo avete visto in copertina. Quello che manca ancora è la tradizionale composizione dell'anno:

Cifre crescenti, solo le 4 operazioni

$$1 + 2 + 34 \times 56 + 7 \times (8 + 9) = 2026$$

$$12 \times 34 \times 5 - 6 - 7 + 8 - 9 = 2026$$

Cifre crescenti, tutti gli operatori ammessi

$$-0! - 12 + 34 \times 56 + (7 + 8) \times 9 = 2026$$

$$-0! - 1 + 2 \times (345 + 678 - 9) = 2026$$

$$1 \times 2 + 3!^4 + 5! \times 6 + 7 - 8 + 9 = 2026$$

$$(0! + 1 + 2) \times 34 + (5! + 6) \times (7 + 8) = 2026$$

$$1 + 2 \times \frac{(3 + 4)!}{5} - 6 + 7 + 8 = 2026$$

$$0! + 12^3 + 4^5 - 6! - 7 = 2026$$

$$-1 \times 2 + 3!^4 + 5 + 6! + 7 = 2026$$

$$1^2 + \sqrt[3]{45^6} = 2026$$

$$0! + (1 + 2) \times \left((3!)! - 45\right) = 2026$$

$$1 + 2 + (3!)^{\sqrt{4}} \times 56 + 7 = 2026$$

$$\frac{0!}{,1} + 2 \times \frac{(3 + 4)!}{5}$$

$$0! + (arctan1)^2 = 2026$$

$$\sqrt{4} + 56 \times \sqrt{\sqrt{7^8}} - (\sqrt{9}!)! = 2026$$

Cifre decrescenti

$$9 \times 8 + 76 + 5^4 \times 3 + 2 + 1 = 2026$$

[3] In ogni verso ciascuna parola dopo la prima ha un numero di lettere strettamente superiore rispetto a quello della parola precedente.

$$\left(\sqrt{9}\times 8+7\right)\times 65+4+3\times 2+1=2026$$
$$(9\times 8-7)\times 6\times 5+4\times(3^2+10)=2026$$
$$987+\frac{65\times 4!}{3}\times 2-1=2026$$
$$98\times\left(7+6+5+\sqrt{4}\right)+3\times(21+0!)=2026$$
$$\sqrt{9^8}-7!+(6+5!)\times 4+3-2\times 1=2026$$
$$\sqrt{9}!-\frac{8!}{7}+6^5+4=2026$$
$$\frac{8\times 7!\times 6}{5!}+\sqrt{4}+3!+2\times 1=2026$$
$$8+\frac{7\times 6\times 5!\times\sqrt{4}}{3+2}+1+0!=2026$$
$$-\frac{8!}{7}+6^5+(\sqrt{4}+3)\times 2\times 1=2026$$
$$-\frac{6}{,5}+\frac{4^{3!}}{2}-10=2026$$

Con le cifre da 1 a 5

$$45^2+1^3=2026$$
$$25\times 3^4+1=2026$$

Le 10 cifre come base e le 10 cifre come esponente

$$0^7-1^9+2^6-3^8+4^3+5^4+6^5+7^2+8^0+9^1=2026$$

Con tre 5 e tre altre cifre uguali

$$2\times\left(\frac{25+(2+5)!}{5}\right)=2026$$
$$3\times\left((3!)!-3\right)-5\times 5\times 5=2026$$
$$\frac{(4+4)!}{4\times 5}+5+5=2026$$
$$5+5+56\times 6\times 6=2026$$
$$5!\times(5+5+7)-7-7=2026$$
$$55\times\frac{5!-9}{\sqrt{9}}-9=2026$$

Con le cifre di 2026

$$Antilog2+\frac{(Antilog0!)!!}{2}+6=2026$$

Numeri primi

$$2\times\left(\frac{3!}{,5}+7\times 11\times 13\right)=2026$$
$$-\sqrt{\sqrt{2\times(3+5)}}+711+1317=2026$$

Successione di Fibonacci

$$-1+2^{(3!+5)}-8-13=2026$$
$$(13+8\times 5^3)\times 2+1-1=2026$$

Numeri di Catalan

$$\left(42+\sqrt{14-5}\right)^2+1\times 1=2026$$

Con cifre tutte uguali

$$(1+1)^{11}-11-11=2026$$

$$\sqrt{2^{22}} - 22 = 2026$$

$$3^3 + \frac{3}{3} + (3 + 3) \times 333 = 2026$$

$$\sqrt{\sqrt{4^{4!}}} : \sqrt{4} - 4! + \sqrt{4} = 2026$$

$$\frac{\sqrt{\sqrt{4^{4!}}} - 44}{\sqrt{4}} = 2026$$

$$\sqrt[,5]{\frac{5 \times 5}{,\bar{5}}} + \frac{5}{5} = 2026$$

$$55 \times 55 - \frac{555}{,\bar{5}} = 2026$$

$$(5 \times 5 \times 5 + 5 + 5) \times 5!! + \frac{5}{5} = 2026$$

$$7!/\left(7 - \frac{7}{,\bar{7} + ,\bar{7}}\right) + \frac{7}{,7} = 2026$$

$$\left(\frac{7 + 7 + 7}{7}\right)^7 - 77 - 77 - 7 = 2026$$

$$88 \times (8 + 8 + 8) - 88 + \sqrt{\sqrt{8 + 8}} = 2026$$

$$\frac{8 + 8}{8} + 88 \times \left(8 + 8 + 8 - \frac{8}{8}\right) = 2026$$

$$(9 + 9) \times (99 + 9) + 9 \times 9 + \frac{9}{9} = 2026$$

Le cifre dispari in ordine decrescente

$$9 \times 75 \times 3 + 1 = 2026$$

Le cifre pari

$$4 + 6 + \frac{8!}{20} = 2026$$

Le cifre pari crescenti, due volte

$$0! + 2 \times 4! \times 6 \times (8 - 0!) + \frac{2 + 4}{6} + 8 = 2026$$

Le cifre pari decrescenti, due volte

$$86 \times 24 + 0! - 8 \times 6 + 4 \times 2 + 0! = 2026$$

Le potenze di 3

$$1 - 3 \times 27 - 81 + 9 \times 243 = 2026$$

Terne pitagoriche

$$90^2 + 2024^2 = 2026^2$$

$$2026^2 + 1.026.168^2 = 1.026.170^2$$

©Alexandre Costa, Dario Uri, Elia Bergamin, Giovanni Battista Scambia, Giovanni Lucarelli, Jacopo Garlasco, Marco Broglia, Marco Primo Portioli, Giorgio Dendi

Ma adesso basta trastullarsi, è ora di passare alle vostre soluzioni, che dobbiamo riprendere un mese di assenza.

4.1 [321]

4.1.1 Fall Contest 2025

Abbiamo promesso queste soluzioni entro primavera, e quindi aspetteremo ancora un mese. Purtroppo ci sono arrivate poche soluzioni – o meglio solo la soluzione, peraltro molto bella e dettagliata, di ***Alessandro*** – per cui approfitto di questo spazio per ricordarvi di risolvere e di scrivere!

4.2 [322]

4.2.1 Cosa c'entrano i nani?

Effettivamente il Capo ce l'aveva messa tutta per essere *politically correct*, ma qui dobbiamo fare un sommario, quindi il problema sarebbe, effettivamente, con i nani:

> *Abbiamo N nani, rispettivamente, di 1, 2, ..., N chilogrammi sulla riva di un fiume e una barca in grado di trasportare al più N chilogrammi per volta; ogni nano è un provetto rematore, ma ha la capacità di traversare come rematore il fiume solo due volte: in compenso può fare avanti e indietro come passeggero quante volte vi pare. Devono attraversare tutti. Quanti sono i nani?*

La prima soluzione arrivata in Redazione è – come spesso accade – di ***Valter***, che allega il codice in un link:

> L'attraversamento è possibile per qualsiasi N (tranne per: $N = 2$ e $N = 4$).
>
> Assumo che si attraversi da destra (R) a sinistra (L). Fornisco due algoritmi per la sequenza degli attraversamenti (uno nel caso di N pari e l'altro per N dispari).
>
> Allego il codice ottenuto traducendoli in Python3:
>
> https://drive.google.com/file/d/1lC_LIWt2_uD73QL6IkQHlWRa9AgftIaQ/view?usp=sharing
>
> https://drive.google.com/file/d/1uJp0BmnHSa0A35xcxTs-ui2cYTZofe5B/view?usp=sharing
>
> Eseguendoli il log fornisce la sequenza degli attraversamenti, ad esempio:
>
> === Traversata per N=5 ===
>
> 1. Leggero porta pesante Rematore: 1 Passeggero: 4 R->L
> 2. Leggero torna da solo Rematore: 1 Passeggero: - L->R
> 3. Leggero porta pesante Rematore: 2 Passeggero: 3 R->L
> 4. Leggero torna da solo Rematore: 2 Passeggero: - L->R
> 5. N rema da solo (porta la barca su L) Rematore: 5 Passeggero: - R->L
> 6. Pesante torna da solo Rematore: 4 Passeggero: - L->R
> 7. Pesante porta leggero Rematore: 4 Passeggero: 1 R->L
> 8. Pesante torna da solo Rematore: 3 Passeggero: - L->R
> 9. Pesante porta leggero Rematore: 3 Passeggero: 2 R->L
>
> === TEST N = 8 ===
>
> 1. (7, 1) R->L
> 2. (1) L->R
> 3. (6, 2) R->L
> 4. (2) L->R
> 5. (5, 3) R->L
> 6. (3) L->R
> 7. (4, 1) R->L
> 8. (1) L->R
> 9. (8) R->L
> 10. (4) L->R
> 11. (3, 1, 4) R->L
> 12. (6) L->R
> 13. (2, 6) R->L

Remate finali: {1: 2, 2: 2, 3: 2, 4: 2, 5: 1, 6: 2, 7: 1, 8: 1}

Persone rimaste a destra: []

Persone a sinistra: [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]

<u>CASO *N* DISPARI</u>

Sia $N=2m+1$.

Persone di peso 1, 2, …, N.

La barca può trasportare un peso totale $\leq N$.

Ogni persona può remare al massimo due volte.

FASE I — Coppie iniziali (R→L e ritorno)

Per ogni $i=1, 2, \dots, m$:

Andata (R→L) – Il leggero i rema portando il pesante $N–i$. → i ha usato la prima remata.

Ritorno (L→R) – Il leggero i torna da solo. → i ha usato la seconda remata.

Dopo questa fase:

Sulla riva sinistra (L) si trovano tutti i pesanti: $m+1$, $m+2$, …, $2m$.

Sulla riva destra (R) rimangono tutti i leggeri: 1, 2, …, m (e il più pesante N, che non si è ancora mosso).

FASE INTERMEDIA — Trasferimento di N

Il più pesante N rema da solo R→L. → prima e unica remata per N.

Ora la barca è su L e N si trova su L.

FASE II — Ritorno dei pesanti (chiusura)

Per ogni $i=1, 2, \dots, m$:

Il pesante $N-i$ rema da solo L→R. → prima remata per $N-i$.

Poi $N-i$ rema con il leggero i R→L. → seconda remata per $N-i$.

Alla fine:

Tutti sono su L.

Ogni persona ha remato ≤ 2 volte.

In ogni traversata, somma dei pesi $\leq$ N.

Esempio $N=9$

Coppie: (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5).

Sequenza:

1→8, 1←

(significato:1 porta 8 sulla riva sinistra: 1→8, 1 torna sulla riva destra da solo: ←)

2→7, 2←

3→6, 3←

4→5, 4←

9→ (solo)

8←, 8→1

7←, 7→2

6←, 6→3

5←, 5→4

Tutti su L, nessuno ha remato più di due volte.

CASO N PARI

Sia $N=2m$, con $N\geq 6$.

Persone di peso 1, 2, …, N.

Barca di capacità N.

Ogni persona può remare al massimo due volte.

FASE I — Coppie iniziali

Per ogni i=1, 2, …, m−1:

Andata (R→L) – Il pesante N−i rema portando il leggero i. → prima remata per N−i.

Ritorno (L→R) – Il leggero i torna da solo. → seconda remata per i.

Dopo questa fase:

Sulla riva sinistra (L) ci sono i pesanti: N−1, N−2, …, m+1.

Sulla riva destra (R) sono ritornati i leggeri: 1, 2, …, m−1 (più il più pesante N e il centrale m che non hanno ancora remato).

FASE CENTRALE — Inserimento e bilanciamento

Mossa centrale (R→L) – Il binomio (m, 1) attraversa (R→L). → prima remata per m.

Ritorno (L→R) – Il leggero 1 torna da solo. → seconda remata per 1.

Ora la configurazione è pronta per inserire N.

Il più pesante N rema da solo R→L. → prima remata per N.

Il medio m torna da solo L→R. → seconda remata per m.

Mossa speciale a tre (R→L) – Il gruppo (m−1, 1, m) attraversa insieme. È l'unico passaggio con 3 persone. Serve per riallineare la parità e permettere la chiusura simmetrica.

FASE FINALE — Chiusura simmetrica

I pesanti rimasti su L (con 1 remata disponibile) tornano a R (uno per volta e riportano i rispettivi leggeri a L). (es. N−2 torna e poi porta 2; N−3 torna e porta 3; …). Il processo continua sino a che non vi sono più persone sulla riva destra (R).

Alla fine:

Tutti su L.

Tutti ≤ 2 remate.

Nessuna traversata supera la capacità N.

L'unico passaggio a 3 persone è quello centrale (m−1, 1, m).

Esempio N=8

m=4, coppie base: (7, 1), (6, 2), (5, 3).

7→1, 1←

6→2, 2←

5→3, 3←

(Fase I completata: L = {5, 6, 7}, R = {1, 2, 3, 4, 8})

(4, 1)→, 1←

8→ (solo)

4←

(3, 1, 4)→ (tripla)

Poi i pesanti rimasti tornano a prendere i leggeri secondo simmetria.

Tutti su L, nessuno ha remato più di due volte.

Bene, ci pare molto chiaro, ma è la soluzione migliore? Vediamo l'approccio di ***Luigi***, che non pensa di aver trovato la soluzione ottimale:

Per N dispari la procedura è uniforme e vale per ogni N. Ad esempio per N=11 avremo (indicando con una R la persona ai remi):

10R 1 ->

1R <-   10

9R 2 ->

2R <- 9, 10

…

6R 5 ->

5R <- 6, 7, 8, 9, 10

11R ->

10R <- 6, 7, 8, 9, 11

1R 10 ->

9R <- 1, 6, 7, 8, 10, 11

2R 9 ->

8R <- 1, 2, 6, 7, 9, 10, 11

…

5R 6 ->

Naturalmente ci sono procedure più efficienti ma questa procedura è la più lineare e vale sempre.

Per N pari abbiano il valore $N/2$ che rimane da solo per cui dovrà portare con sé almeno 2 altri viaggiatori uno dei quali dovrà portarlo anche indietro. Quindi $N/2 +3$ (valore minimo del peso di 2 viaggiatori) dovrà essere $\leq N$. Ciò ci porta ad escludere $N=4$ e partire da $N=6$. A parte i movimenti centrali che di seguito illustrerò, si prosegue poi come per il caso dispari.

Per $N=10$ avremo ad esempio:

9R 1 ->

1R <- 9

…

6R 4 ->

4R <- 6, 7, 8, 9

5R 1 2 ->

1R 5

10R ->

2R <- 6, 7, 8, 9, 10

5R 1 2 ->

6R <- 1, 2, 5, 7, 8, 9, 10

4R 6 ->

7R <- 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10

3R 7 -> 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

È anche arrivata una soluzione di ***Trekker***! Ed ha anche deciso di porre ulteriori condizioni alla capacità della barca!

Non è esplicitamente detto quale è il numero massimo di persone che possono essere imbarcate contemporaneamente ma impongo la condizione più restrittiva possibile, cioè 2, ovvero al massimo un passeggero e un rematore (ricordando il famoso problema del contadino che doveva attraversare il fiume su una barca con un lupo, o con una capra, o con un cesto di cavoli ...).

La difficoltà del problema risiede nel fatto che, per ogni viaggio di andata, è necessario pianificare con cura anche un viaggio di ritorno per riportare la barca indietro.

Osservazioni preliminari:

- ogni viaggio “consuma” una remata di qualcuno;

- ogni persona ha 2 remate, per un totale di $2N$ remate disponibili;
- per spostare N persone, sono necessari almeno $2N-1$ viaggi (N viaggi di andata e $N-1$ viaggi di ritorno);
- la difficoltà principale non è il numero totale di remate ($2N$ vs $2N-1$ viaggi minimi), ma la necessità di **riportare la barca indietro** senza esaurirle prematuramente;
- la persona più pesante farà, da sola, un solo viaggio di andata, e non rientrerà mai perché sarebbe uno spreco inutile della sua seconda remata.

I valori di N per cui è a me risulta possibile portare tutte le persone sull'altra riva sono **tutti i numeri *N* dispari maggiori o uguali a 1 (che è il caso "banale").**

Per trovare una soluzione, ho utilizzato un algoritmo di **Ricerca in Ampiezza (Breadth-First Search o BFS)**. Questo metodo è ideale per trovare il percorso più breve (il minor numero di viaggi) da uno stato iniziale a uno stato finale, esplorando sistematicamente tutte le possibilità.

Ecco i punti chiave dell'algoritmo:

Definizione di stato – Il cuore dell'algoritmo è la definizione dello "stato" del sistema in un dato momento. Lo stato deve contenere tutte le informazioni necessarie per determinare le "mosse" future e per evitare di ripetere cicli. E' la collezione di queste quattro informazioni:

1. insieme delle persone sulla riva destra;
2. insieme delle persone sulla riva sinistra;
3. quante remate restano a ciascuna persona;
4. dove si trova la barca.

Definizione di mossa valida – Una "mossa" è un viaggio in barca. Una mossa è considerata valida solo se:

1. il peso totale delle persone a bordo (max 2, per l'ipotesi di partenza) non supera N;
2. la persona che rema ha ancora almeno una remata disponibile.

Esplorazione – Partendo dallo stato iniziale (tutti a destra), l'algoritmo genera tutti i possibili viaggi validi successivi. Ogni nuovo stato raggiunto viene aggiunto a una coda per essere esplorato in seguito.

Obiettivo – La ricerca termina con successo quando viene raggiunto uno stato in cui tutte le persone si trovano sulla riva sinistra.

In pratica si prova ogni combinazione di viaggi, assicurandosi di non ripetere mai la stessa situazione (stesse persone sulla stessa riva del fiume e stesse remate rimanenti) e garantendo che tutti i vincoli siano rispettati.

Sotto presento qualche simulazione con N=3, 5 e 7.

In sintesi, una (probabilmente non l'unica) strategia ottimale sembra essere identica per tutti i valori di N dispari (testati), precisamente:

- massimizzare il carico nei viaggi di andata al 100%, cioè all'andata il carico sulla barca deve essere sempre N;
- minimizzare il carico nei viaggi di ritorno riportando sempre la persona più leggera ma che non ha esaurito il numero delle sue remate;
- il primo viaggio (andata) si può fare con le persone [1] e [$N-1$], con [1] come rematore;
- il secondo viaggio (ritorno) è ancora con la persona [1], ma ora sola;
- il terzo viaggio (andata) è della persona più pesante [N] da sola. E questa non si muoverà più;
- il quarto viaggio (ritorno) è della persona [$N-1$] sola.

- etc.;
- l'ultimo viaggio è con a bordo le persone $\lfloor N/2 \rfloor$ e $\lceil N/2 \rceil$ con $\lceil N/2 \rceil$ come rematore.

Partendo dallo stato iniziale:

- persone @ riva destra: {1, 2, ..., N};
- persone @ riva sinistra: {};
- remate rimanenti: tutte le persone hanno 2 remate;
- barca sulla riva destra;

le tabelle seguenti fanno vedere, per N=3, 5 e 7, i dettagli di tutti i viaggi, come sono composti i rispettivi carichi della barca, chi è il rematore, e dove sono le persone dopo ogni viaggio con i rispettivi numeri di remate rimanenti.

N=3

#	Carico	Rematore	A/R	Peso (kg)	Persone @ riva destra	Persone @ riva sinistra	Persona:remate rimanenti
1	[1] [2]	1	A	3	{3}	{1,2}	1:1, 2:2, 3:2
2	[1]	1	R	1	{1,3}	{2}	1:0✓, 2:2, 3:2
3	[3]	3	A	3	{1}	{2,3}	1:0✓, 2:2, 3:1
4	[2]	2	R	2	{1,2}	{3}	1:0✓, 2:1, 3:1
5	[1] [2]	2	A	3	{}	{1,2,3}	1:0✓, 2:0✓, 3:1

N=5

#	Carico	Rematore	A/R	Peso (kg)	Persone @ riva destra	Persone @ riva sinistra	Persona:remate rimanenti
1	[1] [4]	1	A	5	{2,3,5}	{1,4}	1:1, 2:2, 3:2, 4:2, 5:2
2	[1]	1	R	1	{1,2,3,5}	{4}	1:0✓, 2:2, 3:2, 4:2, 5:2
3	[5]	5	A	5	{1,2,3}	{4,5}	1:0✓, 2:2, 3:2, 4:2, 5:1
4	[4]	4	R	4	{1,2,3,4}	{5}	1:0✓, 2:2, 3:2, 4:1, 5:1
5	[2] [3]	2	A	5	{1,4}	{2,3,5}	1:0✓, 2:1, 3:2, 4:1, 5:1
6	[2]	2	R	2	{1,2,4}	{3,5}	1:0✓, 2:0✓, 3:2, 4:1, 5:1
7	[1] [4]	4	A	5	{2}	{1,3,4,5}	1:0✓, 2:0✓, 3:2, 4:0✓, 5:1
8	[3]	3	R	3	{2,3}	{1,4,5}	1:0✓, 2:0✓, 3:1, 4:0✓, 5:1
9	[2] [3]	3	A	5	{}	{1,2,3,4,5}	1:0✓, 2:0✓, 3:0✓, 4:0✓, 5:1

N=7

#	Carico	Rematore	A/R	Peso (kg)	Persone @ riva destra	Persone @ riva sinistra	Persona:remate rimanenti
1	[1] [6]	1	A	7	{2,3,4,5,7}	{1,6}	1:1, 2:2, 3:2, 4:2, 5:2, 6:2, 7:2
2	[1]	1	R	1	{1,2,3,4,5,7}	{6}	1:0✓, 2:2, 3:2, 4:2, 5:2, 6:2, 7:2
3	[7]	7	A	7	{1,2,3,4,5}	{6,7}	1:0✓, 2:2, 3:2, 4:2, 5:2, 6:2, 7:1
4	[6]	6	R	6	{1,2,3,4,5,6}	{7}	1:0✓, 2:2, 3:2, 4:2, 5:2, 6:1, 7:1
5	[2] [5]	2	A	7	{1,3,4,6}	{2,5,7}	1:0✓, 2:1, 3:2, 4:2, 5:2, 6:1, 7:1
6	[2]	2	R	2	{1,2,3,4,6}	{5,7}	1:0✓, 2:0✓, 3:2, 4:2, 5:2, 6:1, 7:1
7	[1] [6]	6	A	7	{2,3,4}	{1,5,6,7}	1:0✓, 2:0✓, 3:2, 4:2, 5:2, 6:0✓, 7:1
8	[5]	5	R	5	{2,3,4,5}	{1,6,7}	1:0✓, 2:0✓, 3:2, 4:2, 5:1, 6:0✓, 7:1
9	[3] [4]	3	A	7	{2,5}	{1,3,4,6,7}	1:0✓, 2:0✓, 3:1, 4:2, 5:1, 6:0✓, 7:1
10	[3]	3	R	3	{2,3,5}	{1,4,6,7}	1:0✓, 2:0✓, 3:0✓, 4:2, 5:1, 6:0✓, 7:1
11	[2] [5]	5	A	7	{3}	{1,2,4,5,6,7}	1:0✓, 2:0✓, 3:0✓, 4:2, 5:0✓, 6:0✓, 7:1
12	[4]	4	R	4	{3,4}	{1,2,5,6,7}	1:0✓, 2:0✓, 3:0✓, 4:1, 5:0✓, 6:0✓, 7:1
13	[3] [4]	4	A	7	{}	{1,2,3,4,5,6,7}	1:0✓, 2:0✓, 3:0✓, 4:0✓, 5:0✓, 6:0✓, 7:1

Per confronto verifichiamo alcune "certezze" che sembrano ricorrenti:

	N=3	N=5	N=7
Numero di viaggi	5	9	13
Minimo teorico (2N-1)	5	9	13
Numero viaggi di andata	3	5	7
Numero viaggi di ritorno	2	4	6
Carico nei viaggi di andata (kg)	3	5	7
Carico medio nei viaggi di ritorno (kg)	1.5	2.5	3.5

E se invece il numero di persone trasportabili contemporaneamente sulla barca non avesse limiti? O se il numero delle remate fosse maggiore di 2 per ogni persona? Allora ci sarebbero soluzioni anche per (alcuni) numeri pari, ad esempio N=6.

Siamo molto contenti che qualcuno si sia ricordato del vecchio classico del cavolo capra e lupo. Avevamo fatto attraversare il fiume a una nota band, in passato, e sono tutti sopravvissuti, per fortuna. Ma non ci fermiamo ancora, che arriva un altro classico solutore, il nostro ***GaS***:

Per N=1, il nano solitario attraversa facilmente il fiume.

Per N=2, non c'è speranza di attraversare il fiume: non possono attraversare insieme e dopo che il primo ha attraversato deve poi tornare indietro a prendere il compagno… e siamo punto a capo.

Per N=3, c'è una soluzione in 5 viaggi:

1. attraversano 1-2, rema 1
2. torna indietro 1
3. attraversa 3
4. torna indietro 2
5. attraversano 1-2, rema 2

Notare che la soluzione può essere letta specularmente ottenendo una soluzione alternativa. Questo varrà sempre: ogni soluzione avrà una soluzione speculare leggendo la soluzione dall'ultima alla prima mossa.

***N* Dispari**

Possiamo adesso dimostrare in maniera "costruttiva" l'esistenza di (almeno) una soluzione per ogni N dispari; la soluzione è la seguente:

- passano 1 e (N−1), rema (N−1)
- torna indietro 1
- passano 2 e (N−2), rema (N−2)
- torna indietro 2
- passano 3 e (N−3), rema (N−3)
- …
- passano (N−1)/2 e (N+1)/2, rema (N+1)/2
- torna indietro (N−1)/2
- **passa *N***
- torna indietro (N−1)
- passano 1 e (N−1), rema 1
- torna indietro (N−2)
- passano 2 e (N−2), rema 2
- torna indietro (N−3)
- …
- torna indietro (N+1)/2
- passano (N−1)/2 e (N+1)/2, rema (N−1)/2

Con questa soluzione, estendibile per ogni N dispari, si attraversa sempre il fiume in $2N-1$ turni ed ogni PaMFV rema 2 volte, una volta in ogni direzione, a meno di N che rema una volta sola ed esattamente a metà della sequenza.

***N* pari**

Abbiamo visto che per $N=2$ non esistono soluzioni ed una ricerca esaustiva dimostra facilmente che non esistono soluzioni neanche per $N=4$. Verrebbe quindi da comportarsi come il celebre, e bistrattato, tacchino induttivista ed ipotizzare che non esistano soluzioni per N pari… ma già $N=6$ ci smentisce con facili soluzioni che si trovano in pochi tentativi manuali.

In generale, possiamo dimostrare in maniera "costruttiva" che anche per $N=2k$ e $k>2$ esiste (almeno) una soluzione:

- passano 1 e $(2k-1)$, rema $(2k-1)$
- torna indietro 1
- passano 2 e $(2k-2)$, rema $(2k-2)$
- torna indietro 2
- passano 3 e $(2k-3)$, rema $(2k-3)$
- …
- passano $(k-2)$ e $(k+2)$, rema $(k+2)$
- torna indietro $(k-2)$
- passano $(k-1)$ e $(k+1)$, rema (k+1)
- torna indietro $(k-1)$
- passano $(k-1)$ e k, rema k
- torna indietro $(k-1)$
- **passa $2k$**
- torna indietro k
- passano 1, k e $(k-1)$, rema 1 ⇐
- torna indietro $(2k-2)$
- passano 2 e $(2k-2)$, rema $(2k-2)$
- torna indietro $(2k-3)$
- …
- torna indietro $(k+2)$
- passano $(k-2)$ e $(k+2)$, rema $(k+2)$

Con questa soluzione, estendibile per ogni N pari maggiore di 4, si attraversa sempre il fiume in $2N-3$ turni ed ogni PaMFV rema 2 volte a meno di $(k+1)$, $(2k-1)$ e $2k$ che remano una volta sola.

N.B.: il passaggio critico è quello in cui passano contemporaneamente sulla barca 1, k e $(k-1)$, passaggio indicato con una freccia: la soluzione proposta è consistente solo se i 3 nani sono distinti e quindi solo per $k>2$. Non vale quindi per $N=2k=2$ e $N=2k=4$ come già osservato precedentemente.

Conclusioni

Abbiamo quindi dimostrato che esistono soluzioni per tutti gli N tranne che per $N=2$ e $N=4$.

Ma guarda! È la stessa soluzione di ***Valter***! Ma adesso ci preoccupiamo, perché ***Alessandro*** arriva ad un'altra conclusione:

Soluzione troppo lunga! La risposta è: ogni N eccetto 2, 4 e 5.

Il caso più semplice è quello per cui la barca può trasportare solo un PaMFV. Se c'è un solo PaMFV di massa 1, la massa non è fortemente variabile per cui siamo al di fuori del perimetro del problema. Ma il Nostro Eroe non se ne cura, monta in barca, rema e passa allegramente sull'altra sponda. Se i PaMFV sono 2 non c'è modo di fare ritornare la barca per cui gli Eroi possono solo rimanere sulla riva di partenza o separarsi.

Se il numero N è tale per cui la barca può trasportare almeno due PaMFV (quindi $N \geq 3$), mettiamo in atto una strategia che consiste nel portare per primi sull'altra riva gli Eroi di stazza maggiore.

Ogni PaMFV è identificato dalla sua massa tra parentesi quadre: si inizia con [1] e [N–1], facendo ovviamente remare quest'ultimo perché si renda utile almeno una volta, mentre [1] tornerà indietro da solo. Proseguiamo con le coppie [2] e [N–2], eccetera fino a che non si possono più formare coppie con massa totale uguale a N. A questo punto [N] remerà da solo, e la barca sarà riportata indietro dal più leggero dei PaMFV già sull'altra sponda.

La situazione che si viene a creare è leggermente differente a seconda che i PaMFV siano pari o dispari. Il riassunto è nella tabella seguente e, per semplificare i risultati, N dispari viene scritto come $2n + 1$ ed N pari come $2n$.

	Viaggi effettuati	PaMFV trasportati	PaMFV da trasportare
PaMFV dispari ($N = 2n + 1$)	$2(n + 1)$	$[n + 2] \dots [2n + 1]$	$[1] \dots [n + 1]$
PaMFV pari ($N = 2n$)	$2n$	$[n + 2] \dots [2n]$	$[1] \dots [n + 1]$

Ora il problema si è ridotto a trasportare poco più della metà dei PaMFV, ma quanti rematori sono rimasti?

- Nel caso dispari, [n+1] ha già effettuato due traversate da rematore (ha remato all'andata, e poi di nuovo al ritorno per riportare la barca dopo il passaggio di [N]), e tutti gli altri sono una. Rimangono n traversate potenziali, però quelle utili sono solo la metà – arrotondata all'intero inferiore – perché dopo ogni viaggio bisogna riportare indietro la barca.
- Anche nel caso pari [n+1] ha già effettuato due traversate da rematore. [n], che non ha un compagno di massa complementare, ha ancora due traversate possibili, e tutti gli altri una: totale $n + 1$, ma ancora una volta le traversate utili sono la metà.

Non solo nel viaggio di ritorno si riporta indietro la barca, ma anche della massa supplementare di cui bisogna tenere conto. Si possono calcolare sia la massima massa trasportabile, che è il prodotto di N per il numero di traversate utili, sia la massa da trasportare, in cui viene dato per scontato che ritornino ogni volta i PaMFV più leggeri. Tutte le formule sono riassunte nella tabella seguente.

PaMFV iniziali	PaMFV rimasti	Traversate rimaste	Traversate utili (T_u)	Max. massa trasportabile	Massa da traportare
$N = 2n + 1$	$n + 1$	n	$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$	$2n \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$	$\sum_{m=0}^{n+1} m + \sum_{m=0}^{T_u - 1} m$
$N = 2n$	$n + 1$	$n + 1$	$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$	$2n \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right)$	$\sum_{m=0}^{n+1} m + \sum_{m=0}^{T_u - 1} m$

Mi pare sia assolutamente chiaro che dalle formule non si evince una beata mazza. È necessaria un'altra tabella nella quale le formule vengano rimpiazzate dai numeri.

PaMFV iniziali	PaMFV rimasti	Traversate rimaste	Traversate utili	Massa da traportare	Max. massa trasportabile
3	2	1	1	3	3
4	3	3	2	7	8
5	3	2	1	6	5
6	4	4	2	11	12
7	4	3	2	11	14
8	5	5	3	18	24
9	5	4	2	16	18
10	6	6	3	24	30
11	6	5	3	24	33
12	7	7	4	34	48

Per $N \geq 7$ sia la differenza tra massa da trasportare e massa trasportabile che la distribuzione di rematori potenziali cominciano a permettere più soluzioni. Rimangono da esaminare i casi limite per $3 \leq N \leq 6$

Il caso $N = 3$ è semplice: resta un solo viaggio e la massa da trasportare è esattamente uguale alla massa trasportabile. Quindi [1] e [2] passano, con [1] che rema dato che [2] ha già esaurito il bonus.

Anche il caso $N = 5$ è semplice: resta un solo viaggio e purtroppo la massa degli Eroi rimasti è maggiore della massa trasportabile.

Per $N = 4$ le formule dicono che una soluzione potrebbe esistere, ma [2] e [3] non possono montare in barca assieme. Tutte le opzioni e/o strategie possibili lasciano uno dei PaMFV sulla riva di partenza.

Per $N = 6$ i valori trovati lasciano poco margine, e per trovare una soluzione bisogna cambiare leggermente la strategia e la distribuzione di rematori così da poter massimizzare gli ultimi due trasbordi. Ecco una soluzione (in cui lascio al lettore l'interpretazione dei simboli):

Rematori andata	Riva sinistra	Fiume	Riva destra	Rematori ritorno
	2 3 4 6	1 **5**>		2x: 1 - 1x: 5
2x: 2 3 4 6 - 1x: 1	2 3 4 6	<**1**	5	
	1 4 6	2 **3**>	5	2x: 2 - 1x: 3 5
2x: 4 6 - 1x: 1 2	1 4 6	<**2**	3 5	
	1 2 4	**6**>	3 5	1x: 3 5 6
2x: 4 - 1x: 1 2	1 2 4	<**3**	5 6	
	1 3	2 **4**>	5 6	1x: 2 4 5 6
1x: 1	1 3	<**2**	4 5 6	
		1 2 3 >	4 5 6	

Quello che si evince dalle formule è che siamo arrivati al fondo di questo problema. Siamo dell'idea che – se nessuno ha trovato la soluzione per N=2 o N=4 – questa non esiste. Andiamo avanti che, come al solito, siamo molto in ritardo.

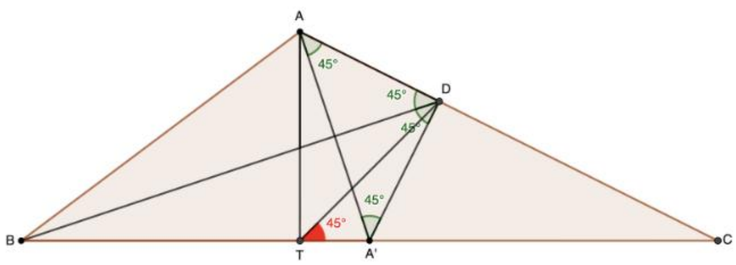
4.2.2 Ma chissenefrega degli angoli?

Un problema non ambientato, per una volta. Vediamo di che cosa si trattava:

> *Nel triangolo ABC, il piede dell'altezza da A è T, e la bisettrice di B interseca AC in D. Se l'angolo BDA vale* 45°*, trovare il valore dell'angolo DTC.*

Il Capo ha gettato la spugna con questa ambientazione, ma i nostri solutori non sembrano preoccupati. Cominciamo (ma dai?) con ***Valter***:

Disegno un triangolo △ABC.



La bisettrice in B incontra il lato AC nel punto D.

Rifletto il triangolo △ABD sul lato BD.

Sia A' il riflesso di A rispetto alla retta BD:

- BD biseca ∠ABA' in quanto asse di simmetria
- BD biseca ∠ABC per ipotesi.

Quindi:

- la semiretta BA' coincide con la semiretta BC
- A' giace sulla retta BC
- DA = DA' e BA = BA'.

Il triangolo △AA'D è rettangolo isoscele:

- l'angolo ∠BDA è di 45° per ipotesi
- l'angolo ∠BDA' è di 45° per simmetria
- quindi l'angolo ∠ADA' è di 90°
- i lati DA e DA' sono uguali per simmetria
- quindi gli angoli ∠A'AD e ∠AA'D sono di 45°.

Il quadrilatero TADA' è ciclico:

- gli angoli ∠ATA' e ∠ADA' sono di 90° (quindi la loro somma vale 180°)
- perciò pure la somma: ∠TAD + ∠TA'D = 180°.

Considero gli angoli alla circonferenza ∠A'AD ∠DTA'

- sottendono entrambi l'arco di circonferenza A'D
- quindi ∠DTA', e di conseguenza ∠DTC, vale 45°.

Alla stessa conclusione giunge, anche se non da solo, ***Luigi***:

Premetto che questa soluzione è frutto di una collaborazione con il mio giovane amico ***Alessandro Rossi***.

Disegniamo il triangolo ABC, tracciamo la bisettrice di B fino al punto D su AC, tracciamo l'altezza da A fino al punto T su BC, tracciamo il segmento TD.

Notiamo che l'angolo BDA è = 45° e che gli angoli BTA e ATC sono = 90°

Vogliamo conoscere l'angolo DTC = x

Definiamo l'angolo B = 2α

L'angolo in A, considerando il triangolo ABD, sarà = $180° - 45° - \alpha = 135° - \alpha$

L'angolo in C sarà = $180° - (135 - \alpha) - 2\alpha = 45° - \alpha$

L'angolo TAB sarà = $90° - 2\alpha$

L'angolo DAT sarà = $135° - \alpha - (90° - 2\alpha) = 45° + \alpha$

Indichiamo con E il punto di incrocio tra BD e AT:

Avremo AED e TEB = $180° - 45° - (45° + \alpha) = 90° - \alpha$

E BEA e DET = $90° + \alpha$

A questo punto tracciamo il segmento AH in modo che l'angolo TAH sia = $45° - \alpha$ e il punto H sia sul segmento BT e indichiamo con K l'intersezione con il segmento BE.

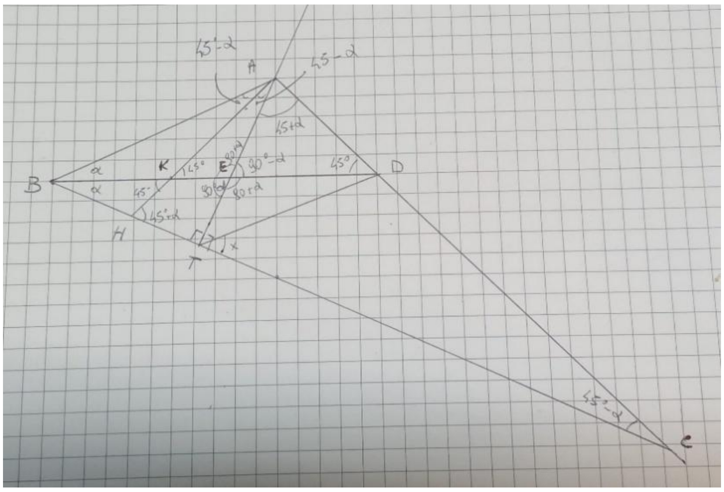
THA = $180° - 90° - (45° - \alpha) = 45° + \alpha$

Il triangolo TAH è congruo (angoli uguali) al triangolo TCA.

Il punto H è congruo ad A, il punto A è congruo a C e T è congruo a sé stesso. Praticamente sono ruotati di 90° con perno sul punto T.

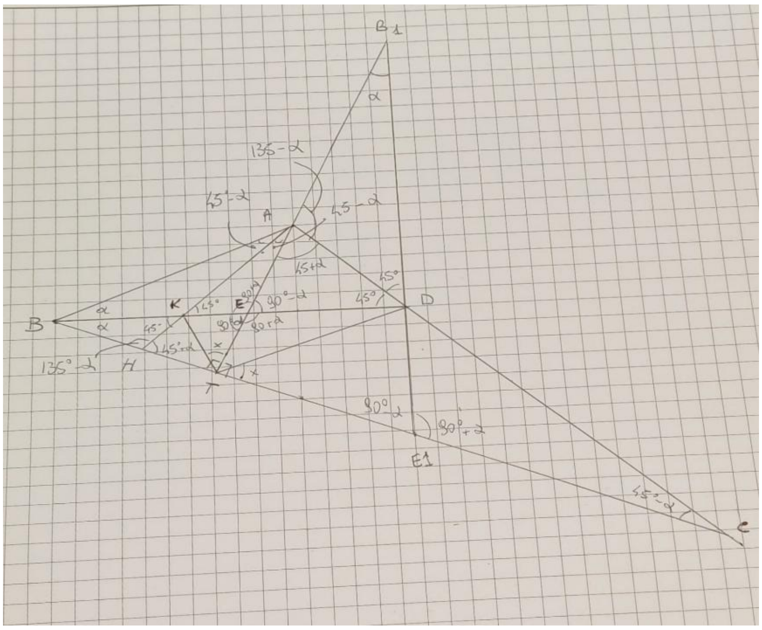
Inoltre gli angoli EKA e HKB sono = $180° - (45° - \alpha) - (90° + \alpha) = 45°$

La situazione è riassunta nella figura 1



Il punto chiave è notare come il punto K sia congruo al punto D. Possiamo quindi tracciare il segmento TK (congruo al segmento TD) che formerà l'angolo KTE pari ad x.

Per verificarlo vediamo la figura 2 dove abbiamo aggiunto il punto B_1 congruo a B ed il punto E_1 congruo ad E. Si può notare che i Triangoli HKB e ADB_1 sono congrui (angoli uguali) così come sono congrui i triangoli TEB e TE_1B_1



Notiamo ancora che il triangolo DKT è anch'esso un triangolo rettangolo e che, poiché per la congruità dei triangoli TAH e TCA, TK:TD = TA:TC, anche DKT sarà congruo a TCA.

Quindi l'angolo TDK sarà = $45° - \alpha$, l'angolo ETD sarà = $180° - (90° + \alpha) - (45° - \alpha) = 45°$ e l'angolo DTC = x sarà anch'esso = 45°.

È facile generalizzare se si tiene conto che tutti i ragionamenti fatti non cambiano al cambiare del punto D lungo la retta individuata dai punti BD.

Indicando con β l'angolo BDA avremo che:

l'angolo DAB sarà = $90° + \alpha - \beta$

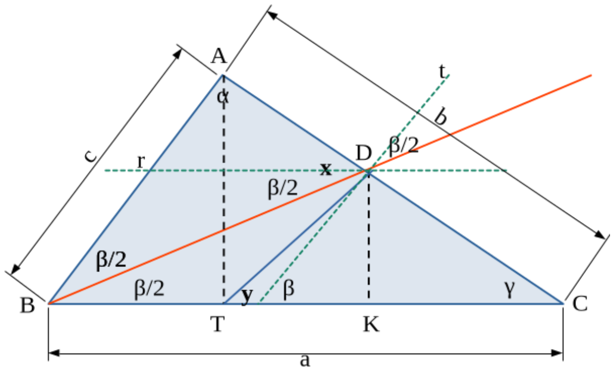
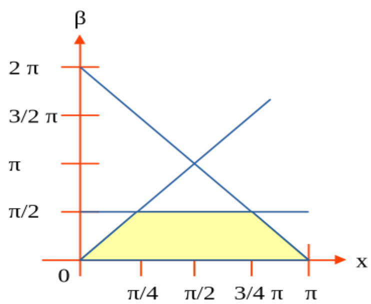
gli angoli TCD e TDK saranno = $\beta - \alpha$

L'angolo ATD sarà = $90° - \beta$

L'angolo DTC sarà = β

Si conserva quindi l'identità fra i due angoli BDA e DTC.

La prossima soluzione non piacerà al Capo, che ha esplicitamente richiesto di non usare la trigonometria, ma è ***Trekker***, lui può fare un po' quello che vuole:

> Sia x l'angolo BDA (non uso α perché lo voglio usare per uno scopo più comune ...) e y l'angolo DTC (di solito si usano lettere greche per gli angoli ma y è troppo bello da usare per studiare una funzione...).
>
> Sia ABC il triangolo con vertici (A, B, C) dove (α, β, γ) e (a, b, c) sono rispettivamente i corrispondenti angoli e lati opposti.
>
> Supponiamo per il momento che l'angolo β sia acuto, cioè $0 < \beta < \pi/2$.
>
> Si noti che AD, lato che concorre a formare l'angolo x con la bisettrice, deve essere compreso nell'angolo formato dalle semirette r (parallela a BC) e t (parallela a BA), cioè $x>\beta/2$ e $x< \pi-\beta/2$
>
> Se AD "scendesse sotto" la retta r il punto C non esisterebbe e, analogamente, se AD "salisse oltre" la retta t il punto A non esisterebbe.
>
> 
>
>
> In pratica sono validi i punti compresi nella parte gialla centrale della figura sotto:
>
> 
>
>
> Facciamo una prima analisi a "occhio". Quando x è poco più di $\beta/2$ l'angolo y è molto vicino ad arctang(sin(β)) e all'aumentare di x, sia T sia C si avvicinano a K e l'angolo y aumenta.
>
> Quando $x=\beta/2 + \pi/2$ i punti A, D, T=K=C sono allineati e $y=\pi/2$. Continuando ad aumentare x il punto T si sposta a destra di K mentre il punto C si sposta alla sua sinistra e l'angolo y diminuisce tendendo a zero.
>
> Ora facciamo qualche calcolo più preciso.
>
> Dal **teorema dei seni** sappiamo che i lati di un triangolo sono proporzionali ai seni del loro angolo opposto, cioè:
>
> $$\frac{a}{sin(\alpha)} = \frac{b}{sin(\beta)} = \frac{c}{sin(\gamma)}$$
>
> Per semplicità possiamo esprimere queste relazioni in funzione di a e α ottenendo:
>
> $$b = a\frac{sin(\beta)}{sin(\alpha)}\,; c = a\frac{sin(\gamma)}{sin(\alpha)}$$
>
> Ricordiamo ora il **teorema della bisettrice** che afferma che la bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali ai due lati che formano l'angolo "bisecato".
>
> Per il nostro triangolo questo equivale a scrivere:
>
> DC:BC=AD:AB, cioè DC:a=AD:c

e con la condizione AD+DC=AC=b
troviamo facilmente:

$$DC = \frac{ab}{a+c}\ ; AD = \frac{bc}{a+c}$$

Dal triangolo ABD troviamo che l'angolo α vale $\alpha = \pi - \frac{\beta}{2} - x$ e dal triangolo ABC ricaviamo l'angolo γ, cioè $\gamma = \pi - \alpha - \beta = \pi - \left(\pi - \frac{\beta}{2} - x\right) - \beta = x - \frac{\beta}{2}$.

Calcoliamo la tangente dell'angolo y come rapporto fra DK e KT ottenendo con semplici passaggi trigonometrici:

$$tan(y) = \frac{DK}{KT} = \frac{DCsin(\gamma)}{ADcos(\gamma)} = \frac{a}{c}\frac{sin(\gamma)}{cos(\gamma)} = \frac{sin(\alpha)}{cos(\gamma)} = \frac{sin\left(\pi - \frac{\beta}{2} - x\right)}{cos\left(x - \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{sin\left(x + \frac{\beta}{2}\right)}{cos\left(x - \frac{\beta}{2}\right)}.$$

ovvero:

$$y = arctan\left(\frac{sin\left(x + \frac{\beta}{2}\right)}{cos\left(x - \frac{\beta}{2}\right)}\right),$$

Siccome $0 < x+\beta/2 < \pi$ il numeratore della frazione argomento dell'arcotangente è sempre positivo mentre il denominatore diventa negativo quando l'argomento del coseno supera $\pi/2$, cioè quanto i punti T e C si scambiano di lato rispetto al punto K.

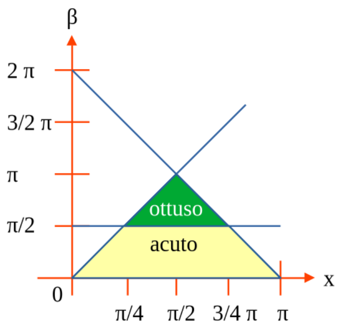
Formalmente l'arcotangente restituisce valori negativi per argomenti negativi ma visto che l'angolo y è sempre positivo prendiamo il valore assoluto del denominatore arrivando a: $y(x) = arctan\left(\frac{sin\left(x + \frac{\beta}{2}\right)}{\left|cos\left(x - \frac{\beta}{2}\right)\right|}\right)$, definita nel trapezio giallo con $x > \beta/2$ e $x < \pi - \beta/2$ e solo dove non si annulla il denominatore, cioè $x \neq (\beta + \pi)/2$. Naturalmente è $y = \pi/2$ proprio in $x = (\beta + \pi)/2$.

Scrivendo $sin\left(x + \frac{\beta}{2}\right) = sin\left(\left(x - \frac{\beta}{2}\right) + \beta\right)$ e applicando le formule trigonometriche di addizione si trova anche un'altra espressione, cioè $y(x) = arctan\left(\left|\left(sin(\beta) + cos(\beta)tan\left(x - \frac{\beta}{2}\right)\right)\right|\right)$

Supponendo che il triangolo ABC sia acuto in B, per $BDA = x = \frac{\pi}{4}$, si ottiene $DTC = y = arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ per ogni β compatibile con il dominio di esistenza.

Ora viene la voglia di ripetere tutto anche per triangoli rettangoli con angolo retto in B e per triangoli con angolo ottuso in B. Non c'è niente di sostanzialmente diverso. Si ottiene sempre la stessa formula.

Complessivamente quindi il dominio di esistenza della funzione $y(x)$ è l'unione del trapezio giallo e del triangolo verde – rispettivamente per triangoli con angolo acuto in B e triangoli con angolo ottuso in B – come da figura che segue:



Si noti che in tutti i triangoli con angolo ottuso o retto in B **non** si può costruire l'angolo $BDA = x = \frac{\pi}{4}$.

Si osservi che y tende ad arctan(sin(β)) per x che tende a $\beta/2$ e y tende a 0 per x che tende a $\pi-\beta/2$.

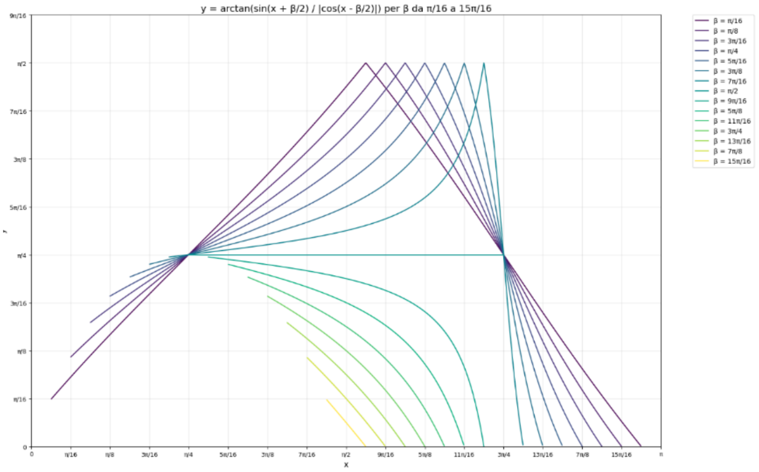
Come si dice in questi casi, lascio al lettore trovare la derivata prima:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\pm cos(\beta)}{cos^2\left(x-\frac{\beta}{2}\right)+sin^2\left(x+\frac{\beta}{2}\right)}$$

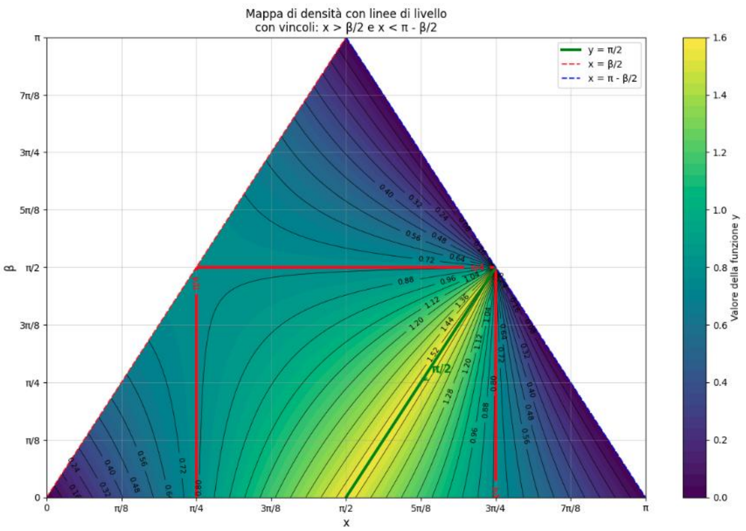
Per $\beta<\pi/2$ in $x=(\beta+\pi)/2$ c'è un punto angoloso con derivata prima che tende a $1/\cos(\beta)$ alla sua sinistra e a $-1/\cos(\beta)$ alla sua destra.

Inoltre le curve "partono" nell'intorno di $x=\beta/2$ con pendenza pari a $\frac{cos(\beta)}{1+sin^2(\beta)}$ e "terminano" nell'intorno di $x=\pi-\beta/2$ con pendenza $-\frac{1}{|(cos(\beta))|}$.

Per completare l'analisi mostro nella figura che segue come varia l'angolo DTC=y richiesto al variare dell'angolo BDA=x a β costante, con $\beta=\pi/16$, $\pi/8$, $3\pi/16$, ..., $15\pi/16$:



E queste sono le curve di livello a y costante e tutto espresso in radianti:



Bellissimo, non solo un risultato congruente con gli altri, ma anche derivate (che mandano il Capo in brodo di giuggiole) e ulteriori analisi. Continuiamo con la versione, altrettanto trigonometrica, di ***Alessandro***:

> Ci sono tre modi possibili per risolvere un problema del genere: un teorema di geometria piana che automagicamente faccia trovare il valore dell'angolo, la risoluzione trigonometrica dei triangoli o la geometria analitica.

Il teorema non ce l'ho, e neanche il disegno. Per procurarmene uno vado con un miscuglio di trigonometria e geometria analitica. Pongo B nell'origine di un piano cartesiano in cui la bisettrice dell'angolo ABC (che chiamiamo β) è l'asse delle ascisse.

Il punto A, per seguire le convenzioni date, deve essere nel primo quadrante. Fissando la lunghezza del lato AB a 1 le coordinate di A sono $x_A = \cos\frac{\beta}{2}$, $y_A = \sin\frac{\beta}{2}$.

La retta AC è simmetrica ad AB rispetto all'asse delle ascisse. Per costruzione $\overline{BT} = \overline{AB}\cos\beta$, per cui le coordinate di T sono proporzionali a quelle di A: $x_T = \cos\beta\cos\frac{\beta}{2}$ e $y_T = -\cos\beta\sin\frac{\beta}{2}$.

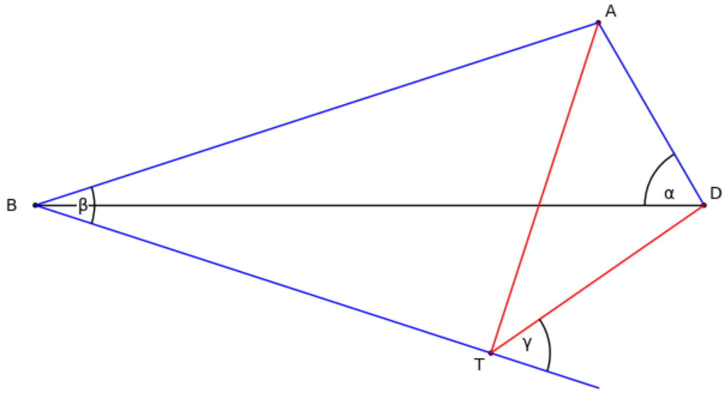
Da B tracciamo la retta che interseca in D l'asse delle ascisse e forma con quest'ultimo un angolo α. La coordinata $y_D = 0$, mentre x_D è un po' più complicata da scrivere per α qualsiasi:

$$x_D = \cos\frac{\beta}{2} + \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\tan\alpha}$$

mentre quando $\alpha = \frac{\pi}{4}$ si riduce al più maneggiable

$$x_D = \cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}$$

Ecco, a questo punto ho abbastanza dati per programmare il disegno.



Disegnata la figura, ci si può mettere nei casi limite, che sono $\beta = 0$ e $\beta = 2\alpha$ (deve essere $\frac{\beta}{2} < \alpha$ altrimenti non otteniamo più un triangolo) e trovare che per entrambi deve essere $\gamma = \alpha$. Purtroppo, questo non ci dice niente sui valori intermedi per cui qualche conto bisogna farlo.

Chiamato m_{BT} il coefficiente angolare della retta BT e m_{DT} quello della retta DT, il valore cercato è

$$\gamma = \arctan(-m_{BT}) + \arctan(m_{DT})$$

In particolare, $m_{BT} = -\tan\frac{\beta}{2}$ per cui $\arctan(-m_{BT}) = \frac{\beta}{2}$.

"Non resta che" determinare il coefficiente angolare della retta DT, che è $m_{DT} = \frac{y_D - y_T}{x_D - x_T}$.

Il numeratore è semplicemente

$$y_D - y_T = \cos\beta\,\sin\frac{\beta}{2}$$

Il denominatore nel caso generale è invece

$$x_D - x_T = \cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\frac{1}{\tan\alpha} - \cos\beta\,\cos\frac{\beta}{2}$$

Dopo aver applicato nell'ordine le seguenti identità:

$$\frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1 + \tan\alpha - \tan\alpha}{\tan\alpha}$$
$$\cos\beta = \cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}$$
$$2\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \sin\beta$$

ci si ritrova alla fine con l'equazione

$$m_{DT} = \frac{\tan\alpha\,\cos\beta}{1 + \tan\alpha\,\sin\beta}$$

Nel caso generale non saprei proprio cosa fare a parte calcolare l'arcotangente, ma potrebbe anche essere dovuto all'orientamento che ho scelto nel piano cartesiano. Invece, nel caso $\alpha = \frac{\pi}{4}$ e quindi $\tan\alpha = 1$ si possono usare un altro paio di sporchi trucchi:

$$\cos\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$
$$\sin\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$
$$\frac{\sin x}{1 - \cos x} = \tan\frac{x}{2}$$

ed in definitiva $m_{DT} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)$, $\gamma = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Oh, forse è una delle prime volte che tutti i solutori arrivano ad uno stesso risultato in più modi, faremmo meglio a dire al Capo che il problema era descritto troppo bene. E andiamo avanti con le soluzioni dello scorso numero.

4.3 [323]

4.3.1 Quasi Natale

Quando dico che il Capo "mi ha rotto le scatole" non scherzo quasi mai. Pensate solo a quante ne ha messe in questo problema:

Avete N^2 scatole con il fondo quadrato, di altezza e larghezza di dimensioni intere comprese tra i valori 1 e N, e ogni scatola differisce dalle altre in almeno una delle due dimensioni. Potete mettere le scatole una dentro l'altra, ma avete due limitazioni: una scatola entra nell'altra solo se una delle dimensioni dell'una è strettamente minore della corrispondente dimensione dell'altra, ma l'altra dimensione dell'una deve essere di almeno due unità minore della corrispondente dimensione dell'altra. Dentro la scatola dentro la scatola può esserci un'altra scatola, eccetera. Il vostro scopo è ottenere il minor numero di "scatole esterne" possibili, visto che poi andrete a depositarle una per ogni scaffale del ripostiglio e vorreste occupare il minimo numero di scaffali. Qual è il numero minimo di ripiani che vi servono?

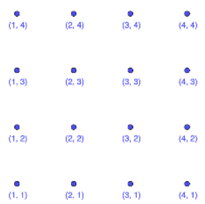
Per fortuna che i nostri solutori sono tolleranti e comprensivi, perché la domanda qui aveva almeno un trucco. Vediamo la prima soluzione, di ***Valter***:

Dispongo le N^2 scatole in un quadrato di $N \times N$:

- su ogni riga, a crescere, con la stessa altezza

- su ogni colonna quelle con la stessa larghezza.

Ad esempio, per N=4, il quadrato è qualcosa tipo:

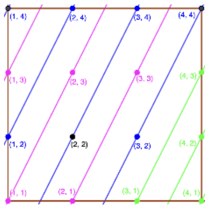


(h, l) sono rispettivamente altezza/larghezza.

Chiamo:

- "verticali" (scatole più simili in larghezza)
- "orizzontali" (scatole più simili in altezza).

Rette parallele collegano scatole "matrioska" (scelgo matrioske più "simili" in verticale):



Tutte le $N \times N$ scatole sono state considerate. Le matrioske sono le più complete possibili (se si usano solo collegamenti "verticali"). Ad ognuno ne corrisponde uno "orizzontale".

Ad esempio, per capirci, nel disegno vedo:

- la scatola (4,4) che ha dentro la (3,2)
- ma potrebbe anche avere dentro la (2,3).

Si potrebbe portare tutto in "orizzontale". Per simmetria, però, il disegno non cambia. Si potrebbero farne orizzontali e verticali (ma ciò non riduce gli scaffali/matrioske). Infatti, le due direzioni si "intralciano" (alcune matrioske non si completerebbero).

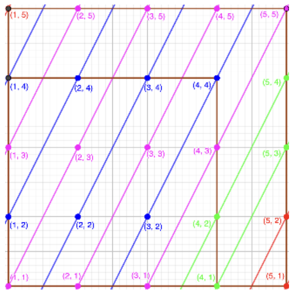
La risposta è, quindi, il numero di line (nel nostro disegno per N=4 ce ne sono 10).

Le analizzo per poter dedurre una formula:

- ne partono N da riga 1 (in blu)
- ne partono N da riga 2 (in fucsia)
- restano N–2 in colonna N (in verde)
- totale $3N - 2$ scaffali necessari.

Quindi, per N+1 servono 3 scaffali in più (perciò, per N=5, ce ne servirebbero 13).

Verifico con un disegno il conteggio fatto (le 3 linee rosse sono i nuovi scaffali):



Si è aggiunta una riga e colonna al 4×4.

Non si può fare meglio di così per N=5:

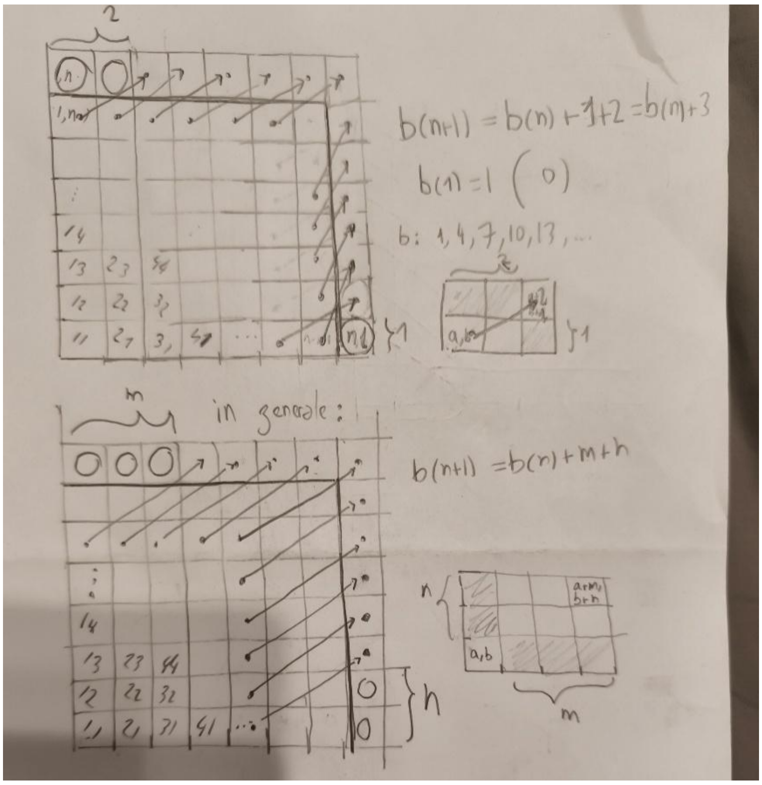
- altrimenti 4×4 ne avrebbe meno di 10
- ma risulta che ciò non sia possibile (per il basso numero basta controllare).

Un'altra verifica che la formula funziona:

- N=1: 3*1 – 2 = 1 → una sola scatola
- N=2: 3*2 – 2 = 4 → 4 scatole singole
- N=3: 3*3 – 2 = 4 → 2 matrioske 5 singole (le 2 matrioske: (3,3)⊃(2,1) (2,3)⊃(1,1).

Ci scrive poi ***Bluemonday*** con una soluzione senza parole:

Dimostrazione "senza parole" per il problema 1 con generalizzazione. i meriti vanno alla mia ragazza che ha avuto l'idea vincente iniziale, io ho solo riordinato l'idea in un diagramma che devo dire è molto piacevole da guardare.



Lettura consigliata da abbinarsi a questo problema: "Gnomon" di Paolo Zellini.

Graficamente sono orribili da sistemare nella rivista, ma ogni volta le soluzioni fatte carta e penna sono più belle da vedere. E adesso il secondo problema.

4.3.2 Tranquilli, non diventerà un'abitudine

Un problema di cui non conosciamo la soluzione, per divertirci a confrontare le vostre, ovviamente:

> *Abbiamo N diamanti, dei quali sappiamo che N/2 sono veri, e gli altri falsi. Presentate a un esperto tre diamanti a vostra scelta, lui ne sceglie due e vi dice (onestamente) una di queste tre frasi:*
>
> *"Questi due diamanti sono falsi"*
>
> *"Uno di questi due diamanti è falso"*
>
> *"Questi due diamanti sono veri"*
>
> *Esiste una procedura per trovare tutti i diamanti veri?*

Come sempre, cominciamo con ***Valter***:

> Scelgo che l'esperto voglia impedirmi di individuare i diamanti (la scelta collaborativa mi pare troppo semplice da risolvere).
>
> In partenza so solo che metà dei diamanti sono veri e metà falsi. Mostro come identificare i veri se il loro numero *N* è pari e > 4:
>
> - perché metà siano veri, il loro numero totale deve essere pari
> - non posso proporre all'esperto tre diamanti se ne ho soltanto 2
> - con solo quattro diamanti mi pare non si possa identificarli.
>
> **Fase 1.**
>
> Prendo un gruppo di cinque diamanti ancora incerti:
>
> - se *N* è uguale a quattro questa fase non serve
> - inizialmente gli *N* diamanti sono tutti incerti (di ciascuno non so se è vero oppure è falso)

- iterando, ad ogni ciclo, gli incerti si riducono di due.

Propongo tutte le 10 terne possibili ottenute da questi 5. Tra 5 diamanti ce ne sono almeno 3 uguali: 3 veri o 3 falsi. L'esperto deve dichiarare, in almeno una terna, una coppia VV o FF. Ogni volta che ciò accade il numero di incerti scende di due unità. Ora proseguo col prossimo ciclo di **Fase 1** con altri cinque incerti.

Fine partita anticipata:

- durante il processo, tengo il conto dei veri e falsi certi identificati
- se restassero solo veri o falsi per completare l'elenco "avrei" risolto (i restanti diamanti incerti a quel punto diventano certi di quel tipo)
- per $N \equiv 0 \bmod 4$, potrei accorgermi che ne rimangono solo due di un tipo
- e per $N \equiv 2 \bmod 4$, potrei accorgermi che ne rimane solo uno di un tipo
- l'esperto però, a quel punto, può impedirmi di sapere la loro identità (infatti ha comunque la possibilità di non darmi informazioni su essi).

Fase 2.

Poiché riduco gli incerti a coppie di due ne possono restare solo quattro. Identifico, da qui in poi, con: {A, B, C, D} i 4 diamanti incerti rimasti. Mi si presentano due diversi casi che devo, ora, analizzare separatamente:

- A: se $N \equiv 2 \bmod 4$ i quattro incerti sono tre di un tipo e uno dell'altro (dal numero di certi veri/falsi so di che tipo sono i tre e il solo)
- B: se $N \equiv 0 \bmod 4$ i quattro incerti sono due di un tipo e due dell'altro.

<u>Caso A</u>: (es. 102 diamanti).

Restano 4 incerti: 1 di un tipo e 3 dell'altro.

Dai diamanti certi risalgo al tipo di quello di cui ce n'è uno solo.

Con qualsiasi terna l'esperto mi lascia con due incerti di tipo diverso. Infatti, può sempre dirmi che due diamanti scelti sono dello stesso tipo (i due diamanti rimasti incerti non potranno che essere di tipo diverso).

Con solo due diamanti incerti di tipo diverso l'esperto mi "incastra" (può sempre propormene due che forniscono informazioni già conosciute):

- se propongo i due e un terzo può dirmi che i due sono di tipo diverso (il terzo può essere sia uno dei veri o falsi certi già individuati)
- se propongo uno dei due più altri due certi mi dice come sono i certi (i certi possono essere dello stesso tipo o diverso ma è ininfluente)
- qualunque terna propongo riesce a non fornirmi ulteriori informazioni.

<u>Caso B</u>: (es. 100 diamanti).

Restano 4 incerti: 2 veri e 2 falsi.

Propongo {A, B, C}.

L'esperto dice che tra A e C c'è un falso, quindi: ($A \neq C$) (per come procedo con la scelta non si perde di generalità).

Deduco: anche gli altri due sono diversi tra loro: ($B \neq D$).

Propongo {A, B, D}.

L'esperto deve scegliere una coppia mista:

Se dice $A \neq B$: dato che $A \neq C$, allora B e C sono uguali. (identità trovata tra coppie di diamanti: {A, D} e {B, C}).

Se dice $A \neq D$: dato che $A \neq C$, allora C e D sono uguali. (identità trovata tra coppie di diamanti: {A, B} e {C, D}).

Se dice $B \neq D$: mi sta ripetendo un'informazione già nota.

Questo "stallo" restringe il campo a sole due possibilità:

Schema 1: {A = B} e {C = D}

Schema 2: {A = D} e {B = C}

Fase 3.

Devo individuare quale dei due schemi è quello reale. Per farlo uso un diamante vero certo V_c già scoperto. Lo uso per testare come sono i diamanti in: {A, B}.

Propongo la terna: {A, B, V_c}.

Qualunque coppia scelga posso "carpire" informazioni:

- sceglie {A, B}:

-- se dice "sono uguali", lo Schema 1 è quello vero

-- se dice "uno è falso", è vero lo Schema 2

- sceglie {A, V_c}:

-- se dice "sono uguali", A è vero

-- se dice "uno è falso", A falso

- sceglie {B, V_c}:

-- se dice "sono uguali", B è vero

-- se dice "uno è falso", B falso (questi sono i due casi in sospeso).

Per i due sospesi uso un falso certo F_c individuato. L'analisi delle risposte è come per vero certo V_c. Alla peggio comunque so se B è vero oppure è falso. Conoscendo A e B si deduce quale schema è reale. Ora conosco quali coppie sono dello stesso tipo. Resta da capire quale è la coppia dei veri e falsi

L'esperto, però, può impedirmelo, come nel caso A (per mostrarlo il ragionamento è del tutto simile).

L'esperto può isolare una coppia di tipo diverso (finché gli incerti si riducono a due o quattro).

Così può bloccare il processo di identificazione:

- per le prossime terne può usare almeno un certo (nel caso che restino due incerti è obbligato)

- può vanificare l'utilizzo di un eventuale certo (…sfruttando la libertà di scelta sulla terna).

Quindi si capisce che l'esperto può impedirci di risolvere il problema. Così la pensa anche ***Alessandro***:

Poniamo che l'esperto segua queste regole:

- Seleziona due diamanti di cui uno vero e uno falso.
- Quando nessuno dei due diamanti viene presentato per l'identificazione, sceglie due diamanti a caso tra i tre.
- Se uno solo dei due diamanti viene presentato, sceglie gli altri due.
- Se vengono presentati entrambi, vengono scelti entrambi.

Poiché i due diamanti selezionati non vengono mai paragonati ad altri già identificati, non c'è modo di determinare quale sia quello vero.

Della stessa opinione è anche ***Emanuele***:

Forse mi sbaglio ma sono arrivato alla conclusione che se un esperto non è collaborativo non si possa arrivare a riconoscere tutti i diamanti veri.

Infatti consideriamo di sottoporgli tutte le terne combinazioni di N su 3 diamanti che è il massimo che possiamo fare.

Ovviamente proponendo un sottoinsieme di queste avremo ancor meno informazioni.

L'esperto cattivo potrebbe usare ad esempio il seguente algoritmo.

Dividere i diamanti in 2 insiemi A e B.

Insieme A formato da 49 diamanti veri

Insieme B formato da 50 diamanti falsi e 1 vero.

Per ciascuna terna pronunciarsi su una coppia di maggioranza:

- se ci sono almeno 2 diamanti di A rivelarli con la proposizione "questi 2 sono veri" arrivando al più a distinguere tutti i 49 diamanti di A senza informazioni su B
- se ci sono almeno 2 diamanti di B usare la proposizione "almeno 1 di questi è falso" la quale è sempre vera per ogni coppia di B e quindi inutile.

Se invece l'esperto fosse collaborativo allora si arriva a distinguere tutti i diamanti al più in circa N/2 scelte in modo piuttosto facile dato che in ogni terna almeno 2 diamanti hanno la stessa caratteristica rivelabile (che evoca il famoso problema dei calzini al buio…).

I nostri lettori di lunga data si distinguono dai riferimenti ai vecchi problemi. Ma ci fermiamo qui, dopo più di 25 pagine di soluzioni. Speriamo di non averne persa nessuna e che il vostro 2026 sia iniziato nel migliore dei modi. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Il primo e il secondo miglior tempo sui 100 metri piani nelle semifinali erano entrambi nella stessa batteria, e il primo ha vinto con un vantaggio di 10 metri sul secondo. Il primo classificato, per rendere la finale più *spicy*, si candida per partire 10 metri più indietro; tutti e due, come nella semifinale, correranno alla loro massima velocità possibile. Chi vince la finale?

> *Sempre lo stesso: mentre il primo arrivato nella semifinale corre* 100 *metri, il secondo ne corre* 90*, quindi a* 10 *metri dall'arrivo sono a pari merito; ma il primo è più veloce (avendo vinto la semifinale), quindi percorrerà i* 10 *metri restanti più velocemente dell'avversario.*

6. Zugzwang!

6.1 Microscacchiere

...ve l'avevamo detto, di non giocare a scacchi con il campione rionale di wrestling nel fango.

Adesso, dopo che vi ha spaccato in testa la vostra scacchiera e costretto ad ingoiare un certo numero di pezzi, avrete finalmente la possibilità di comprare quel bellissimo set di scacchi, ma intanto… Cosa fate?

Fortunatamente, ***Jason Whittman*** ha trovato la soluzione. O meglio, *le soluzioni*. In fondo, adesso avete un mucchio di scacchiere, no? Partiamo dal pezzo più grosso.

6.1.1 Tic Tac Cheq

Qui, Doc vorrà sicuramente cambiare nome ma l'originale è questo: anche se "Tic Tac Cheq Toe" a Rudy sembra migliore...

Materiale: Una scacchiera 4×4, pedone, torre, alfiere e cavallo (bianchi e neri, ovvio).

Inizio: Scacchiera vuota

Mossa: A turno, i giocatori depositano sulla scacchiera un proprio pezzo (dove vogliono); i pezzi sulla scacchiera possono essere mossi solo dopo che ne avete depositati tre. *Non si prendono pezzi avversari* (e neanche i propri); i pezzi muovono come i pezzi degli scacchi normali (sì, il cavallo salta, gli altri pezzi no) e la casella di arrivo deve essere libera.

Scopo del gioco: avere i vostri quattro pezzi allineati in verticale, orizzontale o diagonale: l'ordine non è importante.

E, da una scacchiera normale, usando la testa ne ottenete quattro: potete organizzare un torneo!

Frammenti di scacchiera più piccoli? Beh, si può provare...

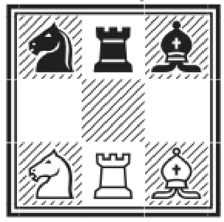
6.1.2 Knight's Court

Restiamo sul democratico: niente re neanche in questo gioco. In compenso viene riconosciuta l'importanza del cavallo (…potremmo chiamarlo "la scuderia", o "la stalla"… No, eh?).

Materiale: Una scacchiera 3×3, cavallo, torre e alfiere (sempre bianchi e neri, ri-ovvio).

Inizio: con i pezzi come indicato in figura.

Mossa: i pezzi muovono come negli scacchi tradizionali (prima il bianco); quando un giocatore perde un pezzo, questo gli viene reso e può essere rimesso in gioco al costo di una mossa (insomma, non muovete ma rimettete a posto il vostro pezzo). È vietato ripetere la mossa: se spostate il pezzo in una casella e poi tornate indietro, la vostra prossima mossa non può portarvi sulla casella dove eravate prima (*piccolo dubbio che Jason non chiarisce: neanche se prendo? A noi verrebbe, in questo caso, da autorizzare la ripetizione, ma non abbiamo fatto molte prove*).



1 *"Ballo a corte"?*

Scopo del gioco: come vi dicevamo, qui il cavallo è molto importante: infatti, dovete *dare matto al cavallo avversario*.

Ancora più piccola? Ragazzi, dopo questo la scacchiera è ormai segatura...

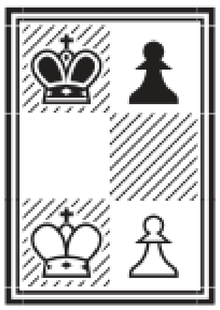
6.1.3 Dueling Archbishops

Qui saremmo non solo per cambiare nome al gioco, ma anche ai pezzi. Si accettano proposte, ma solo dopo che avrete giocato qualche partita, che non ci pare semplicissimo, soprattutto con certe mosse…

Materiale: Scacchiera 2×3, un Arcivescovo e un Matto, verdi e rossi… eh? No, vanno benissimo un re e un pedone a testa, bianchi e neri. È che muovono diverso dagli originali, e quindi…

Inizio: come da figura.

Mossa: L'Arcivescovo si muove come il cavallo o come l'alfiere (a sua scelta), mentre il Matto cambia movimento a ogni sua mossa: nell'ordine, muove come re, alfiere, torre, donna, re, … eccetera. Quando vi prendono il Matto, questo vi viene restituito e potete farlo rientrare in gioco (al suo posto); alla prima mossa, muove come muoveva l'ultima volta (meglio prendere appunti da qualche parte…).



2 *Nome cercansi.*

Scopo del gioco: dare scacco matto (no, non in quel senso… nell'altro) all'Arcivescovo. La cosa è volutamente lasciata nel dubbio da Jason, ma ci pare che all'Arcivescovo debba essere proibita qualsiasi mossa e l'Arcivescovo avversario per contribuire al matto possa utilizzare entrambi i movimenti (il fatto che per dare scacco finisca sotto scacco – non matto, ci verrebbe da dire, ma provate – non dovrebbe essere significativo, ma provate). Inoltre, il Matto deve fare attenzione a dare scacco con la sua prossima "tipologia di mossa".

Diciamo che ci sembra difficile, aggiungere ulteriori complicazioni in sei (o meno) caselle...

7. Pagina 46

Parte 1: È evidente che n rette divideranno il piano nel massimo numero di parti se due qualsiasi di loro si incrociano (ossia se non sono parallele tra loro) e se tre qualsiasi non sono concorrenti in un punto. Quindi, dobbiamo determinare in quante parti può essere diviso il piano da n linee a due a due non parallele tra loro e a tre a tre non concorrenti.

Supponiamo k linee siano già state tracciate; tracciamo quindi la $(k+1)$-esima linea e vediamo di quanto incrementa il numero delle parti nelle quali il piano è diviso.

Quest'ultima linea, non essendo parallela a nessuna delle linee precedentemente tracciate, le incontra in k punti e i k punti di intersezione la dividono in $k+1$ parti: di conseguenza, la nuova retta divide le k+1 parti del piano che interseca in due, ossia il tracciamento di questa linea incrementa il numero di pezzi nei quali è diviso il piano di k+1. Ma se tracciamo un'unica linea, il piano risulta diviso in due parti, e quindi dopo il tracciamento di n linee avremo un numero di parti pari a:

$$2+2+3+\cdots+n=(1+2+\cdots+n)+1=\frac{n(n+1)}{2}+1=\frac{n^2+n+2}{2}$$

Da questo si vede che il numero di parti nelle quali viene diviso il piano è *indipendente* dalla scelta delle specifiche linee, purchè queste siano non parallele (a due a due) e non concorrenti (a tre a tre).

Parte 2: n circonferenze divideranno il piano nel massimo numero di parti se ognuno di loro interseca tutti gli altri (ossia se nessun cerchio è tangente a un altro o completamente all'interno o all'esterno di un altro) e se non esistono tre cerchi che si intersechino nello stesso punto (ossia se non ci sono tre cerchi concorrenti).

Attraverso lo stesso ragionamento della Parte 1, si vede che il (k+1)-esimo cerchio aumenta di $2k$ il numero delle parti nelle quali il piano viene diviso: quest'ultimo cerchio intercetta infatti ognuno dei k cerchi precedenti in due punti, e questi $2k$ punti dividono il (k+1)-esimo cerchio in $2k$ archi, e ognuno di questi archi divide in due parti una delle regioni formate dai precedenti k cerchi; dato che un singolo cerchio divide il piano in due parti, il numero totale di parti nelle quali viene diviso il piano dopo aver tracciato n cerchi è:

$$\begin{aligned}2+2+4+6+8+\cdots+2(n-1)&=2+2\big(1+2+3+\cdots+(n-1)\big)=2+2\frac{n(n-1)}{2}\\&=n^2-n+2\end{aligned}$$

Parte 3: n piani dividono lo spazio nel massimo numero di parti se tre qualsiasi di loro hanno uno e un solo punto in comune e quattro qualsiasi di loro non hanno un solo punto in comune.

Come sopra, supponiamo siano stati già tracciati k piani: il (k+1)-esimo piano incontra ornuno degli altri lungo una linea, e due qualsiasi di queste linee hanno uno e un soloo punto in comune (in quanto tre qualsiasi piani hanno un solo punto in comune) e tre linee qualsiasi non sono concorrenti (in quanto se tre linee passassero per lo stesso punto, avremmo quattro piani passanti per quel punto, il che è escluso dalle premesse).

Quindi, queste k linee dividono il (k+1)-esimo piano in (k^2+k+2)/2 parti (come visto nella prima parte), ognuna delle quali è la superficie sulla quale il (k+1)-esimo piano incontra una delle parti formate dai primi k piani. Quindi, il (k+1)-esimo piano taglia le (k^2+k+2)/2 parti dividendone ognuna in due, e quindi tracciare il (k+1)-esimo piano aumenta il numero delle parti di (k^2+k+2)/2. Ricordando che un piano divide lo spazio in due parti, si ha che gli n piani divideranno lo spazio in:

$$\begin{aligned}&2+\frac{1^2+1+2}{2}+\frac{2^2+2+2}{2}+\frac{3^2+3+2}{2}+\cdots+\frac{(n-1)^2+(n-1)+2}{2}\\&=2+\frac{\big(1^2+2^2+\cdots(n-1)\big)^2+\big(1+2+\cdots+(n-1)\big)+\overbrace{2+2+\cdots+2}^{n-1}}{2}\end{aligned}$$

Ricordando che è:

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

e che:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

il numero totale delle parti risulta:

$$
\begin{aligned}
2+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+\frac{n(n-1)}{4}+(n-1)\\
=2+\frac{(n-1)(2n^2-n+3n+12)}{12}\\
=\frac{n^3+5n+6}{6}
\end{aligned}
$$

Parte 4: La soluzione è simile alle precedenti, e le condizioni per ottenere il massimo numero di pezzi sono sostanzialmente identiche.

Supponiamo siano state definite k sfere: vediamo di quanto la (k+1)-esima sfera incrementa il numero delle parti.

Quest'ultima sfera interseca tutte le altre in cerchi: i cerchi di intersezione saranno tutti diversi tra loro, non ne esisteranno due tangenti l'uno all'altro e, visti come curve sull'ultima sfera, nessuno di loro sarà contenuto in un altro.

Nella parte 3 abbiamo visto come, sotto queste condizioni, un cerchio *sul piano* lo dividerà in k^2–k+2 parti, ed esattamente la stessa argomentazione può essere applicata per dimostrare l'identica relazione per quanto riguarda i cerchi su una sfera, e quindi la superficie della (k+1)-esima sfera sarà divisa in k^2–k+2 regioni dai cerchi di intersezione con le precedenti k sfere.

Ognuna di queste regioni divide in due ognuna delle parti nelle quali le prime k sfere hanno diviso lo spazio; la (k+1)-esima sfera quindi incrementa il numero delle parti di k^2–k+2 e quindi il numero totale di parti risulta:

$$
\begin{aligned}
2+(1^2-1+2)+(2^2-2+2)+(3^2-3+2)+\cdots+[(n-1)^2-(n-1)+2]\\
=2+\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)\right)^2-\left(1+2+\cdots+(n-1)\right)+\overbrace{(2+2+\cdots+2)}^{n-1}\\
=2+\tfrac{(n-1)(2n-1)}{6}-\tfrac{n(n-1)}{2}+2(n-1)=2+\tfrac{(n-1)\left(2n^2-n-3n+12\right)}{6}\\
=\tfrac{n^2\left(n^3-3n+8\right)}{3}
\end{aligned}
$$

8. Paraphernalia Mathematica

Con la fine di Giubilei e Anni Santi (almeno per qualche anno...) abbiamo la speranza che alcuni luoghi tornino ad essere visitabili dal punto di vista meramente turistico e, arrivando ad ora ragionevolmente presta nel periodo freddo (vi ricordiamo che la fine di questo mese sono i cosiddetti "giorni della merla", tradizionalmente i più freddi dell'intero anno), dovrebbe essere possibile verificare alcune dichiarazioni che faremo in seguito.

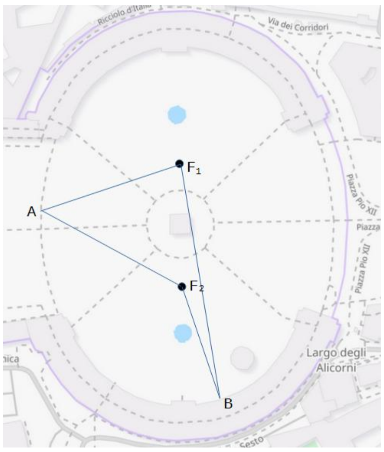
8.1 Piazza San Pietro, prima dell'alba

Voce fuori campo della guida: "...il papa Alessandro VII (nato Fabio Chigi: Siena, 13 febbraio 1599 – Roma, 22 maggio 1667 – Pontefice dal 7 aprile 1655) commissionò a Gian Lorenzo Bernini (scultore, urbanista, architetto, … Napoli, 7 dicembre 1598 – Roma, 28 novembre 1680) il progetto di Piazza San Pietro, di fronte alla Basilica..."[4].

E fin qui, tutto bene. Quello che vi manda per traverso cappuccino & maritozzo è la successiva affermazione:

"...la piazza è bordata da quattro ordini di colonne perfettamente allineate in modo tale che, ponendosi in un fuoco dell'ellisse che definisce la piazza, del lato dal quale vi trovate è visibile solo la colonna dell'ordine più interno..."

No, *wait*, come direbbe l'attuale inquilino. Siamo sicuri?



3 *Ellisse?*

La definizione classica dell'ellisse[5] recita che è il luogo dei punti per i quali è costante la distanza da due punti detti fuochi; Bernini ha chiaramente indicato due punti (non visibili nella mappa[6]) come "centro del colonnato", approssimativamente posti dove li abbiamo indicati; secondo quanto recitato dalla nostra guida, dovrebbe essere:

$$\overline{F_1A} + \overline{AF_2} = \overline{F_1B} + \overline{BF_2}$$

ma se vi fornite di pazienza e righello (o di un software in grado di misurare le distanze tra due punti) vedete che la cosa non è vera: o quei due punti non sono i fuochi dell'ellisse, o quello non è un'ellisse.

Qualche veloce prova con altri punti vi permette di scoprire che non ci siamo proprio: quella piazza non è un'ellisse.

Ma allora, cos'è?

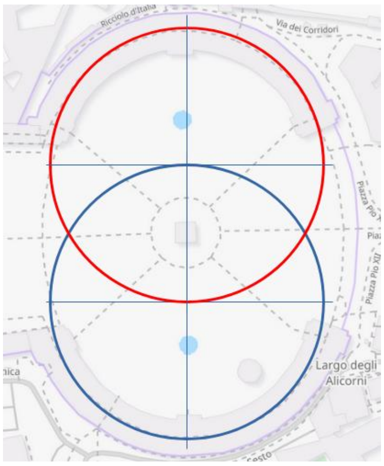
Se qualcuno architetto e degno di fede come il Bernini mi scrive per terra "centro del colonnato" non ho ragione di non fidarmi, e la prima cosa che mi viene in mente quando qualcuno parla di "centro" è che attorno ci sia un cerchio.

[4] Un grosso "grazie" (anzi due: qui e al fondo) a Wikipedia.

[5] Sarebbe interessante avere la dimostrazione che questa definizione è equivalente a quella, più generale, secondo la quale "l'ellisse è la conica per la quale il rapporto tra le distanze di un suo punto e il fuoco e tra il punto e la direttrice (*eccentricità*) è minore di zero". Qualcuno ha qualche idea, possibilmente che funzioni anche per l'iperbole?

[6] Cortesia OpenStreetMaps: www.openstreetmaps.com. I due puntini azzurri sono le fontane, che non c'entrano niente.

Se proviamo a disegnare un cerchio centrato in uno dei centri del colonnato con raggio pari alla distanza tra il punto e un qualsiasi ordine di colonne, vediamo che "ci sta": forse, per almeno mezza piazza, abbiamo trovato qualcosa.



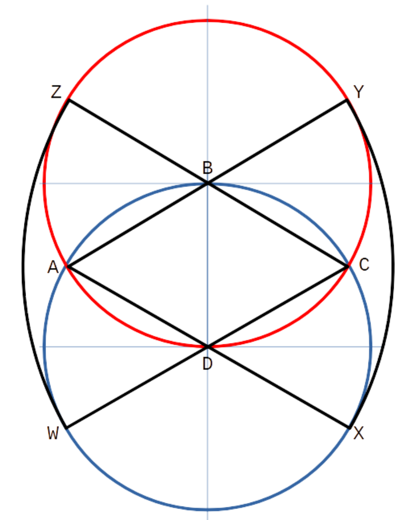
4 *Centro pieno. Anzi due.*

Per simmetria, la stessa cosa funziona dall'altra parte della piazza; non solo, ma la circonferenza che definisce un ordine di colonne (ad esempio, quella rossa) se prolungata vediamo che *passa per il centro* dell'altra circonferenza!

Per ottenere una figura sensata dobbiamo però chiudere questa figura in un qualche modo; all'uopo, se guardate i tracciati della figura, lato via della Conciliazione (sulla destra di chi guarda, per chi a Roma si perde sempre) c'è un arco tratteggiato che promette bene (per usare quello dal lato della Basilica avremmo dovuto fare i cerchi più piccoli: gioca lo stesso ruolo ma su un ordine di colonne più interno). Anche qui, qualche veloce tentativo vi permette di stabilire che i centri dei due cerchi di raccordo sono nei punti di incontro delle due circonferenze.

L'oggetto che otteniamo è noto in geometria su tutti i testi di lingua inglese come ***vesica piscis*** o, in italiano, per chi è disamorato degli anglicismi (eh? Ah. Ops), come "mandorla" (che all'estensore di queste note come nome non piace).

In realtà, con riferimento alla figura qui di fianco (tranquilli: un mucchio di cose sono inutili), la vesica piscis è solo l'unione dei due archi di cerchio ABC e ADC; tutto il resto (quindi anche l'intera piazza) sono costruzioni accessorie, che ci servono solo per spiegare alcune cose. La vesica piscis è il caso particolare di una figura più generale: infatti, quando due cerchi si intersecano in un qualche modo, l'area in comune è nota in matematica come *lente* (sì, proprio per quel motivo[7]). E, ogni volta che c'è un caso particolare, saltano fuori delle caratteristiche un po' speciali.



5 *Togliere la piazza complica le cose.*

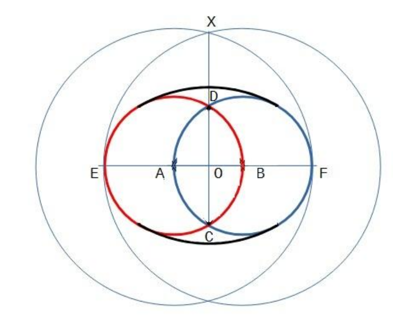
Tanto per cominciare, per costruzione i triangoli ADB e CBD sono equilateri, quindi si può calcolare quanto è grande la vesica piscis: se il raggio è r, la sua superficie sarà pari alla somma di due settori circolari (ADC e ABC), ciascuno sottendente un'area di $2\pi/3$ (angolo ADC), da cui va sottratta l'area dei due triangoli equilateri di cui sopra (li stiamo contando due volte, quindi dobbiamo togliere una coppia). Totale:

$$\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r^2$$

Una delle caratteristiche più interessanti (secondo noi) è però un'altra: sempre nel disegno qui sopra, tracciate il segmento BX, che incontrerà DC in un qualche punto K; tracciate quindi il segmento da A a K, e considerate l'intersezione tra quest'ultimo segmento e BD:

[7] "quasi" proprio per quel motivo: i nostri coetanei (ormai tutti appartenenti al genere *Tyrannosaurus*) ricorderanno che c'era un errore nelle lenti dell'Hubble Space Telescope, che ha richiesto di andare a montare una lente di correzione con lo Shuttle: l'errore, dicono i più pettegoli, era proprio che lo specchio (era un riflettore, non un rifrattore) era una superficie sferica e non parabolica. Ma per piccole cose va benissimo una sferica, soprattutto se fate i conti a mano.

considerato che *BD* e *AK* sono *mediane* del triangolo *BAX*, si ha che *AK* divide *BD* nelle parti di rapporto 1/3 e 2/3.



6 *Tolto qualcosa e aggiunto altro…*

Se il disegno prima era complicato, il prossimo è ancora peggio.

...in pratica, abbiamo costruito una vesica piscis sopra una vesica piscis: i due cerchi grandi hanno centro sempre in *A* e in *B*, e raggi rispettivamente *AF* e *BE*. Inoltre, *O* è il punto medio di *AB*, e *X* è un punto di intersezione dei due cerchi nuovi: si verifica che, per costruzione, *X*, *D* e *O* sono collineari; ponendo *OA*=*OB*=1, si ha che i raggi dei nostri cerchi originali (quelli centrati in *A* e *B*) valgono 2, e quindi si ha *AC*=*AB*=2 e *AX*=*AF*=4; questo implica $CO=\sqrt{3}$ e quindi deve essere $OX=\sqrt{15}$.

Da questo si deduce che:

$$\frac{CX}{CD} = \frac{CO + OX}{CD} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2\sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$

Insomma, la sezione aurea riesce ad infilarsi anche qui!

Questa faccenda del pesce e del fatto che San Pietro fosse un pescatore ci ha fatto pensare ad una correlazione voluta dal Bernini e quindi va bene così, ma visto che lavorare di fantasia è gratis...

Mentre siete tutti intenti a fare le vostre misure, vi si avvicina un tizio dall’aria simpatica vestito di bianco (accompagnato da alcune persone dall’aria poco raccomandabile vestite in modo a dir poco balzano ma con alabarde sicuramente minacciose) e vi dice: “Senti, caro, ho capito quasi tutto quello che hai detto e devo dire che hai ragione. Converrai con me, però, che avere il massimo luogo di riunione dei fedeli a forma di *vescica di boccalone*[8] non è esattamente una cosa entusiasmante. Riesci a riprogettarla mantenendo delle simmetrie, ma lavorando con le ellissi? E di quanto verrebbe più grossa (o più piccola) la piazza? I signori qui dietro ti seguiranno per verificare che sia un lavoro fatto bene e alla svelta...”.

Rudy d’Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[8] Trattasi del *Persico Trota*, o *Micropterus samoides*, pesce osseo d’acqua dolce appartenente alla famiglia *Centrarchidae* (e questo è il secondo “grazie” a Wikipedia).