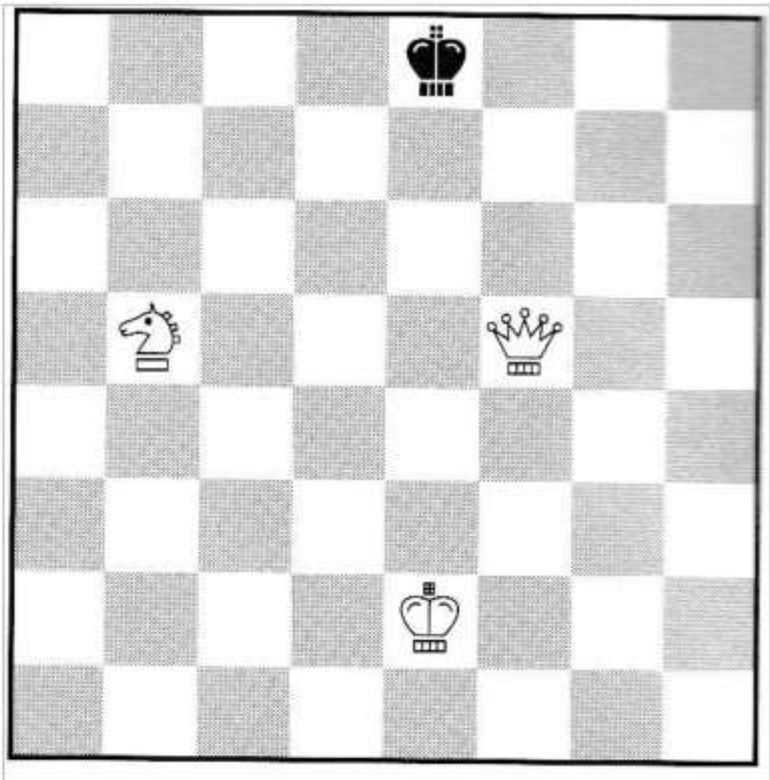
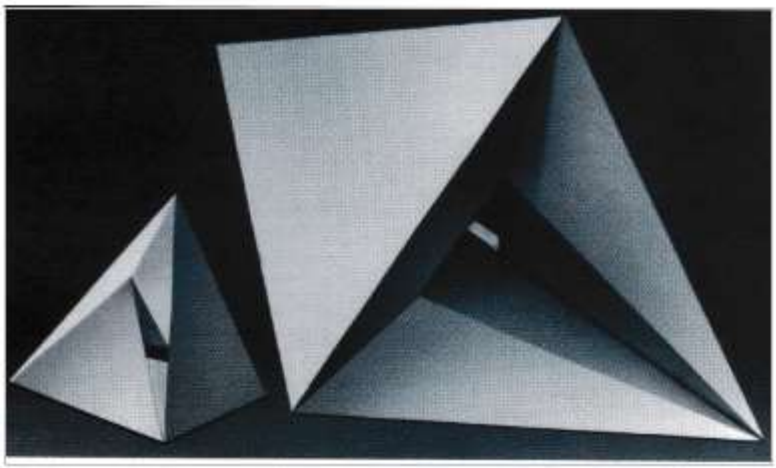
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 304 – Maggio 2024 – Anno Ventiseiesimo





Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM300 ha diffuso 3'389 copie e il 28/01/2024 per Google eravamo in 11'900 pagine.

La didascalia della prima immagine è: "Il bianco matta in quattro mosse", ma ammettiamo che manca un particolare. Nella seconda immagine, un aiutino. Ulteriori dettagli al fondo.

1. Controcorrente

> *“La nature ne s'est pas embarrassée des difficultés d'analyse; elle n'a évité que la complication des moyens.”*[1]

L’ingegnere è giovane, ha poco più di vent’anni. Sta facendo esattamente quello per cui ha studiato: costruire strade. Si trova in una regione non troppo distante da quella che da sempre è abituato a chiamare “casa”, quell’angolo nordoccidentale della Francia, marcato dall’angolo acuto della Bretagna e chiuso dalla Normandia a nord e dalla costa frastagliata in cui si insinua La Rochelle a sud. Sembra avere tutto quanto serve per guardare al futuro con soddisfazione e speranza: è giovane, ha tutta la vita davanti, ha un lavoro che promette soddisfazioni e tranquillità economica, e può sentire nell’aria l’odore dell’Atlantico francese, che gli è familiare fin dalla nascita. Eppure non si può fare a meno di immaginarselo corrucciato, nervoso, insoddisfatto. Impossibile non figurarselo infastidito da quel lavoro, e forse soprattutto da quell’entusiasmo che probabilmente hanno invece quasi tutti quelli che gli stanno vicini, che costruiscono strade e palazzi, e che nel farlo sentono la gioia di chi ha lottato, ha combattuto per la parte giusta; o, perlomeno, per la parte vincente.

Ma non è solo chi lavora e festeggia e gioisce a renderlo nervoso e contrariato: in ultima analisi, più di ogni altra cosa è proprio il luogo dove si trova a irritarlo: questo borgo piccolo e testardo, arroccato su una roccia anomala proprio nel punto dove un fiumiciattolo non meno testardo si scontra – e continua a scontrarsi perennemente – contro quella roccia che sembra volergli ostruire la via verso il mare. Solo alla fine pare raccogliere le sue acque in una serie di anse che sembrano quasi un accenno di retromarcia, una specie di rincorsa, e con quell’accumulo di energia riesce finalmente a proseguire la sua corsa verso il Lay, fiume di poco più grande, e insieme arrivano al mare nella baia dell’Aiguillon.

1 *Piano generale del progetto di fondazione della nuova città di La Roche sur Yon*

Il fiumiciattolo si chiama Yon, ed è lui a dare il nome a questo villaggio testardo che adesso gli ingegneri di Francia stanno trasformando in città: *La Roche-sur-Yon,* la roccia sullo Yon, diventerà presto una vera città, e non solo più una rocca di mediocre importanza militare. Sarà una vera città, ed è proprio per questo che pullula di ingegneri, tecnici e operai. Sulla carta è già stata disegnata, immaginata, prevista; le quattro case ammucchiate sulla roccia che infastidisce lo scorrere dello Yon sono già state promosse a capoluogo di Dipartimento, e avranno tutto ciò che compete a una robusta metropoli: l’edificio della prefettura, una grande chiesa da dedicare a san Luigi, e naturalmente il municipio, un tribunale, un liceo, e perfino un teatro. Così è stato deciso e decretato il 25 maggio del 1804, quando l’incupito futuro ingegnere stava per compiere sedici anni: tutta la nuova città, geometricamente fissata nella forma di un pentagono con due angoli retti (proprio come le casette disegnate dai bambini, se vista da ovest) avrà come baricentro una grande piazza che sarà allo stesso tempo il punto di riferimento della toponomastica e il cuore verde della città. E quella

[1] *La natura non è infastidita dalle difficoltà dell'analisi; ha solo evitato la complicazione dei mezzi.*

piazza prenderà il nome da chi quella città ha voluto, ma non solo la piazza: la città tutta scorderà il suo vecchio nome, e prenderà quello del suo nume tutelare: Napoléon.

La Storia insegna però che è sempre un po' rischioso, per le città, votarsi onomasticamente a un personaggio politico: sono tutt'altro che rari i ripensamenti, e una città non dovrebbe cambiare identità con la stessa frequenza con cui gli esseri umani cambiano destino, o anche solo opinione[2].

	da	a	Nome
1	fino al 1804		La Roche-sur-Yon
2	1804	1814	Napoléon
3	1814	1814	La Roche-sur-Yon
4	1814	1815	Bourbon-Vendée
5	1815	1815	Napoléon
6	1815	1848	Bourbon-Vendée
7	1848	1852	Napoléon
8	1852	1870	Napoléon-Vendée
9	dopo il 1870		La Roche-sur-Yon

Dal punto di vista dei nomi, infatti, La Roche-sur-Yon è un'ottima candidata al podio nella caccia al record del maggior numero dei cambi della storia (e in un lasso di tempo irrisorio, su scala storica): dopo il passaggio da *La Roche-sur-Yon* a *Napoléon* nel 1804, la città recupera il suo nome originario poco dopo la sconfitta di Lipsia dell'ottobre 1813. Non è un cambio che dura a lungo, perché il ritorno della monarchia borbonica, nel 1814, impone alla testarda cittadina napoleonica il nuovo nome di *Bourbon-Vendée*. Ma sono anni turbolenti: l'anno successivo, nel 1815, Bonaparte si stanca dell'Elba, rientra in Francia e dà inizio ai cosiddetti Cento Giorni, e ovviamente il borgo sullo Yon torna a chiamarsi orgogliosamente *Napoléon*. Solo che il 1815 è anche l'anno di Waterloo, e dopo la disfatta dell'imperatore dei francesi alle porte di Bruxelles la città torna a prendere il nome di *Bourbon-Vendée*, che si terrà addosso per trentatré anni, fino al 1848. Il '48 è però anno proverbialmente rivoluzionario, e figuriamoci se la città perde l'occasione di tornare a chiamarsi *Napoléon*, nome che stavolta si tiene stretto per ben quattro anni. La Seconda Repubblica poi cede il passo al Secondo Impero di Napoleone III, e il nuovo imperatore non osa togliere il nome del suo più famoso zio alla città, anche perché quel nome è anche il suo; ma lo modifica ugualmente aggiungendogli il suffisso geografico: *Napoléon-Vendée*, e la città si chiamerà così fino alla disastrosa guerra contro la Prussia del 1870, che crea la nuova nazione europea della Germania e lascia la Francia in ginocchio. A quel punto, la città recupera il nome originario, *La Roche-sur-Yon*, e non lo ha lasciato più (almeno finora).

La ragione ultima di cotanta alternanza di nomi non è poi troppo difficile da intuire, anche perché è ripetuta per tre volte nell'altalena dei toponimi: La Roche-sur-Yon si trova nella tormentata regione geografica della Vandea. Non sono tanti i luoghi geografici che riescono ad entrare nella lingua con un significato traslato; quando lo fanno, è sempre per un esercizio di antonomasia, volto a gratificare il luogo stesso attribuendo al suo nome l'essenza di un prodotto e di un episodio particolarmente significativo. Una volta era di uso comune la frase "vale un *perù*", perché il povero paese devastato a Francisco Pizarro fruttò enormi quantità d'oro agli spagnoli; molte citazioni, religiose o meno, citano *babilonia* per indicare la decadenza e la perdizione; e spesso le nazioni ricordano le peggiori sconfitte militari promuovendo il luogo delle disfatte a sostantivo. Nessuno – a parte forse qualche inglese o prussiano – vuole vivere una personale *waterloo*, e in Italia il miglior sinonimo di rotta disastrosa è ancora *caporetto*. Forse è per questo che in alcuni voluminosi dizionari italiani si trova anche, verso il fondo, la parola "vandea":

> **vandea** [van-dé-a] s.f. – Movimento, orientamento politico della destra cattolica e reazionaria.[3]

[2] Sulla volatilità dei nomi delle città abbiamo parlato già abbastanza a lungo, e neanche troppo tempo fa, nel compleanno dedicato ai tre Krylov, "*Le ali di San Pietroburgo*" (RM286, novembre 2022), e non ci pare il caso di ripeterci troppo.

[3] Sabatini-Coletti, *Dizionario della Lingua Italiana 2004*, Rizzoli Larousse.

Gran parte degli storici concordano sul fatto che, pur essendo un evento causato da pulsioni nazionali con conseguenze continentali e persino planetarie, la Rivoluzione Francese sia stata un *affaire* essenzialmente parigino, almeno nelle sue dinamiche principali. Tutta la nazione francese ha poi preso fuoco, e le fiamme si sono poi velocemente propagate anche oltre il Reno e le Alpi, ma non tutti i territori si sono infiammati con la stessa prontezza: le campagne erano più indecise delle città, e intere regioni, quelle caratterizzate da una forte influenza della chiesa cattolica e della fedeltà alla monarchia, non solo non si sono lasciate infiammare presto dallo spirito rivoluzionario, ma a volte lo hanno tenacemente combattuto. In questo scenario, la Vandea è stata la regione che più tenacemente si è opposta alla neonata Repubblica Francese. Le ragioni di questo suo agire controcorrente rispetto alla maggior parte della Francia sono diverse, e non è ancora facile discernere quali siano state quelle più decisive: di certo, era una regione estremamente attaccata alla fede cattolica, cosa che implicava anche la fedeltà alla monarchia, che da sempre era vista come originata da diritto divino; certo contava molto la resistenza che gran parte delle zone rurali opponevano alle coscrizioni obbligatorie che l'esercito repubblicano attuava per poter portare avanti le guerre che le muovevano le monarchie europee, spaventate dallo spirito acceso a Parigi nel 1789; ma forse contava anche la natura atlantica della regione, e le grandi influenze politiche e commerciali che su di esse esercitava l'Inghilterra.

Comunque, è curioso notare come geograficamente la Vandea sia proprio a metà strada (e relativamente vicina, in termini assoluti) tra Nantes, la città che nel 1598 dette il nome all'Editto di Tolleranza verso gli Ugonotti, e La Rochelle, l'ultimo baluardo degli stessi protestanti francesi, che fu posta sotto assedio dal cardinale Richelieu nel 1628 e che gli resistette per quattordici mesi prima di arrendersi. La costa atlantica francese sembrerebbe tutt'altro che ben disposta verso il cattolicesimo, almeno fino all'inizio del diciassettesimo secolo: eppure in meno di duecento anni si trasforma nella roccaforte cattolica che oppone resistenza ai repubblicani rivoluzionari. E lo fa con grande impegno e dedizione, visto che non basterà certo una battaglia, ma ci vorranno ben cinque guerre per ricondurla all'interno della nazione francese.

La prima – e più sanguinosa – guerra di Vandea scoppia nella primavera del 1793, ed è una guerra a tutti gli effetti, con decine di battaglie, e durerà quasi due anni. I realisti vandeani organizzano un vero e proprio esercito, che chiameranno "Esercito Cattolico e Reale", che a un certo punto verrà guidato da un generale di appena ventun anni che cadrà sul campo prima di compiere il ventiduesimo compleanno, Henri de La Rochejaquelein. La guerra è aspra e crudele, e la repressione repubblicana particolarmente feroce, al punto che alcuni storici critici della Rivoluzione Francese hanno ipotizzato che in Vandea si sia configurato il primo genocidio dell'era moderna. Il numero dei caduti, tra realisti e repubblicani, è ancora oggetto di dibattito: le stime oscillano tra duecentomila e mezzo milione di morti.

2 *Henri de La Rochejaquelein, generale dell'esercito Cattolico e Reale di Vandea.*

La seconda guerra scoppia dopo pochi mesi di pace, e si protrae per un altro anno, prevalentemente nel teatro di guerra marittimo della Bretagna meridionale. A questa segue un ulteriore breve conflitto nel 1799, che spesso viene considerato come l'ultima guerra di Vandea, che si chiude dopo soli tre mesi di scontri. In realtà, sedici anni dopo, nel 1815 e poi ancora addirittura nel 1832, la Vandea tornerà a sollevarsi e a protestare contro il potere centrale di Parigi. Ma è tempo di tornare al nostro ingegnere che scalpita per i cantieri di La Roche-sur-Yon, mentre lavora al fine di farla diventare la nuova città di Napoléon, capoluogo della Vandea repubblicana e rivoluzionaria.

Se la Vandea è stata il simbolo dell'opposizione alla prima repubblica di Francia, fiera di essere controcorrente nella generale esaltazione rivoluzionaria, La Roche-sur-Yon in quegli anni si caratterizza per essere la città di Vandea che si oppone alla resistenza vandeana. Il piccolo borgo sul fiumiciattolo si rivela autenticamente a favore della rivoluzione, ed è per questo che poi, a conflitti ormai spenti, l'imperatore Bonaparte – che, essendo diventato imperatore verosimilmente non si sentiva più tanto repubblicano, ma si riteneva pur sempre il frutto migliore della rivoluzione – decide di premiare la fedeltà della cittadina eleggendola a capitale del Dipartimento di Vandea, e facendola diventare davvero una grande città.

È per questo che quando il giovane ingegnere lavora sulle strade e i ponti che attraversano lo Yon, la città si chiama orgogliosamente Napoléon; ed è anche per questo che non è difficile immaginare che l'ingegnere abbia perennemente la faccia corrucciata. Lui è quasi contemporaneo della Rivoluzione: quando la Bastiglia fu presa nel luglio del 1789, aveva solo un anno di vita. Ma era nato e cresciuto in una famiglia davvero molto religiosa; i genitori erano giansenisti, quindi di una frangia della chiesa cattolica particolarmente oltranzista, al punto che alla fine la stessa chiesa di Roma si vedrà costretti a dichiararli eretici. In ogni caso, il giovane ingegnere ha idee assai precise su come dovrebbe essere organizzata una nazione, e sono idee assai lontane da quelle repubblicane e rivoluzionarie. In quella città, diventata grande e famosa per essere stata controcorrente, lui non si sente certo parte dell'entusiasmo collettivo: la parte eretica e controcorrente, questa volta, è tutta sua. E non sarà neppure l'ultima, nella sua non lunga vita.

3 *Jean Augustin Fresnel*

Jean Augustin Fresnel nasce in un piccolo (seppur significativo, anzi quasi fatidico) comune della Normandia il 10 maggio 1788, secondo dei quattro figli di Jacques Fresnel, architetto di vaglia, e Augustine Mérimée[4].

Non ci sono aneddoti significativi sulla sua infanzia, meno che mai del tipo di quelli che celebrano i successi di un bambino prodigio, anzi. Augustin e i suoi fratelli sono inizialmente educati in casa dalla madre, e Augustin è subito considerato come quello dalla salute più cagionevole e dalla comprensione più tarda: una leggenda, peraltro giudicata infondata dagli storici, sostiene addirittura che non sapesse leggere fino all'età di otto anni. Quel che è certo è che all'età di dodici anni sono ormai chiare le sue attitudini e preferenze; le prime lezioni di matematica e di scienza gli hanno acceso l'entusiasmo e a quell'età sembra essere già pienamente deciso a intraprendere la carriera da ingegnere. Nel 1804 entra nella prestigiosa *École Polytechnique* di Parigi, e due anni dopo passa alla *École des Ponts et Chaussées*, che in tre anni lo licenzia ufficialmente con il brevetto di ingegnere civile. Non c'è niente di più naturale, per un laureato alla *École des Ponts et Chaussées,* che finire assunto dal *Corps des Ponts et Chaussées*, l'ente pubblico incaricato della cura e costruzione dei ponti e delle strade; ed è proprio questa istituzione che lo manda, come primo incarico, a La Roche-sur-Yon.

[4] La madre di Fresnel è zia di Prosper Mérimée, uno dei più celebrati autori romantici francesi del XIX secolo, autore, tra molte altre cose, del romanzo *Carmen*, da cui Bizet trasse la sua celeberrima opera lirica.

È probabile che, nonostante la passione di sé stesso dodicenne, fare l'ingegnere non fosse la cosa più desiderata da Fresnel. Sembra attratto più dagli aspetti teorici della scienza, piuttosto che dalle applicazioni, per quanto utili, che consentono di costruire ponti e strade. In ogni caso, probabilmente neanche lui si sarebbe aspettato che gli eventi politici lo avrebbero presto costretto a dedicarsi più alla teoria che alle applicazioni.

L'impero napoleonico si estende ormai non solo nella Francia propriamente detta, ma arriva anche in Spagna e in Italia (oltre che in quasi tutto il resto dell'Europa continentale); diventa allora importante che una grande via di comunicazione terrestre sia aperta nel meridione francese, lungo la costa mediterranea che unisce le Alpi e i Pirenei. Nel 1812 questo progetto diventa il nuovo lavoro di Fresnel, ed è verosimile che Augustin abbia accolto l'incarico con piacere. Forse per la possibilità di abbandonare la città dal nome napoleonico, ma più probabilmente perché il nuovo lavoro gli lasciava più tempo libero, che lui riempiva occupandosi della sua passione: la luce. Fa esperimenti in proprio fino al 1814, mentre il suo odiato imperatore inizia il periodo più complicato della sua vita: la *Grande Armée* arriva fino a Mosca nel 1812, ma la campagna di Russia si rivela un vero disastro militare; Napoleone viene sonoramente sconfitto a Lipsia nel 1813, e Fresnel ha probabilmente gioito nel vederlo finalmente inoffensivo e relegato all'Elba. Ma nel 1815 cambia tutto, perché Napoleone fugge dall'Elba, rientra in Francia e inizia i suoi famosi ultimi Cento Giorni da imperatore dei francesi.

Augustin Fresnel è accecato dalla rabbia, al punto di abbandonare il lavoro che gli piaceva e che gli consentiva di fare i suoi esperimenti, e si offre volontario per le truppe realiste per opporsi ai bonapartisti accorsi in massa per rispondere all'appello dell'imperatore. È un momento fatale per entrambi: Napoleone avrà solo poco più di tre mesi per finire nella manzoniana polvere di Waterloo, ma nel frattempo Fresnel si è messo in una posizione difficile, perché in quella fase cruciale si è ritrovato senza più un lavoro e controllato dalla polizia politica.

4 *La carica della cavalleria scozzese a Waterloo – (Lady Butler, "Scotland forever!", 1881)*

In ultima analisi, però, è lecito concludere che questa rapida successione di eventi abbia favorito il destino di Augustin Fresnel. Durante i Cento Giorni è diventato un reietto, disoccupato, senza la possibilità di pagare un affitto, e quindi costretto a ritornare a Mathieu, un piccolo borgo vicino a Caen dove la sua famiglia si era rifugiata nei primi anni dopo la rivoluzione. Senza un lavoro, il tempo a disposizione per gli esperimenti cresce, e Fresnel può dedicarsi a tempo pieno ai suoi studi sulla luce: i Cento Giorni di Napoleone diventano, in una certa misura, il periodo più fecondo per le sue ricerche. Poi, dopo Waterloo, Augustin Fresnel riavrà il suo posto di lavoro, e sarà mandato in un ufficio a Rennes: ma ormai è contagiato da ciò che i suoi studi gli hanno rivelato, e il suo lavoro da ingegnere è in tutta evidenza passato in secondo ordine. Riesce a fare in modo di andare spesso a Parigi, dove si trovano scienziati, fisici, accademici, persone a cui poter mostrare i risultati della sua teoria sulla natura della luce.

All'inizio, non deve essere stato facile neppure riuscire a farsi ascoltare, a pensarci bene. In fondo era un ingegnere, non un cattedratico, un accademico con un laboratorio, un autore di testi scientifici: agli occhi degli scienziati di professione doveva per forza apparire, nel migliore dei casi, come un volenteroso dilettante. E poi, che diamine, la luce! Tutto il mondo scientifico, a quel tempo, si interrogava sulla luce, cosa poteva sapere di più, questo disegnatore di strade?

Capire la natura della luce era la massima questione della fisica, nei primi anni del XIX secolo. Erano stati fatti progressi, la scienza stava aumentando la velocità delle scoperte e soprattutto consentiva la realizzazione di applicazioni che stavano rapidamente cambiando la faccia del mondo. Sembrava impossibile che non fosse ancora chiaro quale fosse la natura di un elemento cruciale come la luce, che in fondo è il mezzo principale – quasi l'unico, dal punto di vista dell'indagine sperimentale – con cui gli esseri umani indagano il mondo. Ma i comportamenti della luce restavano misteriosi, e le ipotesi erano divise tra due scuole di pensiero: quella corpuscolare, che immaginava la luce come composta da piccolissime particelle, che era in grado di spiegare, attraverso l'ottica geometrica, virtualmente tutti i fenomeni luminosi macroscopici. L'altra corrente era quella che ipotizzava che la natura della luce fosse invece sostanzialmente ondulatoria: c'erano fenomeni che sembravano più trattabili se si supponeva che la luce fosse formata da onde, anziché da particelle che seguivano le leggi della meccanica; è proprio in quegli anni che si osservano scientificamente fenomeni come la diffrazione, la polarizzazione e l'interferenza.

È un argomento così importante che l'Accademia delle Scienze francese stabilisce che il Grand Prix del 1817 sarebbe stato attribuito alla memoria scientifica che meglio avrebbe contribuito alla spiegazione della diffrazione; ed è a questo concorso che Augustin Fresnel presenta il risultato dei suoi studi. Per capire al meglio l'atmosfera dell'evento, è bene rammentare che il comitato chiamare a giudicare i lavori è composto dalle menti migliori di quel periodo: molti di essi riempiono i testi dei corsi universitari ancora oggi. A presiedere il comitato c'è François Arago, e a fargli compagnia altri mostri sacri come Pierre Simon Laplace, Jean-Baptiste Biot e Poisson.

Quel che accade è storia nota e già raccontata[5]: Augustin Fresnel si aggiudica il primo premio del Grand Prix dell'Accademia tra l'entusiasmo di tutti i presenti, nonostante la stragrande maggioranza degli accademici fosse inizialmente a favore della teoria corpuscolare, resa celebre dal mostro sacro della fisica, Isaac Newton. A merito dell'Accademia di Francia – e segnatamente ad Arago e Poisson – va riconosciuto che fecero tutto il possibile per verificare il lavoro di Fresnel: su richiesta di Arago, Poisson studiò a fondo le formule di Fresnel fino al punto da dedurre l'esistenza del famoso punto luminoso che sarebbe dovuto apparire sullo schermo al centro dell'ombra di un disco opaco.

Ma l'opera di Fresnel resta eccezionale, e soprattutto dal punto di vista matematico: occorre ricordare infatti che quando si dedica agli studi sulla luce, Fresnel è del tutto all'oscuro dei precedenti (seppur recenti) studi di Biot e di Young; non è neanche del tutto chiaro se avesse piena consapevolezza della diatriba tra le due maggiori teorie, la corpuscolare e l'ondulatoria, e che la prima fosse di gran lunga quella sostenuta dalla maggior parte degli esperti.

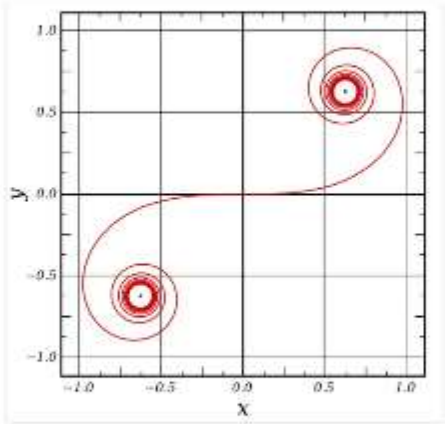
Soprattutto è davvero notevole che, nei suoi esperimenti, è guidato essenzialmente dalla matematica: in questo senso, la sua linea guida sono quelli che oggi si chiamano giustamente "gli *Integrali di Fresnel*", che hanno questa forma:

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(t^2\right) dt, \quad C(x) = \int_0^x \cos\left(t^2\right) dt.$$

Grazie ad essi, gran parte dei fenomeni luminosi trova una spiegazione, e in poco tempo la teoria ondulatoria soppianta quasi del tutto l'idea che la luce possa avere una natura corpuscolare. Fresnel aveva continuato ad andare controcorrente anche nella ricerca dei segreti della natura, e si ritrovò ad essere improvvisamente il portabandiera della corrente più forte e acclamata.

[5] I lettori più affezionati ricorderanno, che a questo punto il presente compleanno si aggancia all'episodio già narrato nel recente compleanno dedicato a Siméon-Denis Poisson in RM293, giugno 2023, "*Fiat lux*". Confidiamo sul fatto che nella pagina "Archivio" del sito www.rudimathematici.com i numeri precedenti della e-zine sono sempre accessibili, e ci concediamo il lusso di riassumere l'episodio in modo molto veloce, rinviando a RM293 gli interessati che se lo fossero perso.

Diventa uno scienziato famoso, ma non dimentica di essere un ingegnere, dopo tutto: sfruttando le conoscenze sviluppate nella sua teoria, riesce a disegnare quelle che si chiamano ancora con il suo nome, le "lenti di Fresnel" che rivoluzionano tutta la tecnologia ottica del suo tempo e che sono utilizzatissime ancora oggi. Alla base del loro funzionamento c'è uno straordinario principio di economia: frazionando la tradizionale lente monoblocco in una serie di sezioni anulari (gli "anelli di Fresnel") si riesce a conservare una grande superficie, una ridotta lunghezza focale con una quantità di materiale estremamente più piccola di quella necessaria per la costruzione di una lente monoblocco tradizionale. Sono ancora molto usate, e il nome di Fresnel è probabilmente noto ai più proprio per queste lenti; le aveva pensate soprattutto per le lampade dei fari, e non è esagerato affermare che, grazie a questa invenzione, abbia contribuito a salvare la vita di molti naviganti.



5 *La clotoide, o Spirale di Eulero, o Spirale di Cornu, o (surprise!) grafico parametrico di S(t) rispetto a C(t).*[6]

La teoria ondulatoria trionfa, ma ha ancora qualche mistero da spiegare. Il maggiore è il comportamento che ha l'etere, e cioè il mezzo (del tutto necessario, per la fisica del XIX secolo) di trasmissione delle onde luminose. Augustin Fresnel non farà in tempo a preoccuparsene troppo, perché morirà il 14 luglio 1827[7], di tubercolosi, all'età di 39 anni, proprio come il suo quasi contemporaneo Giacomo Leopardi, ma la teoria della luce dell'Ottocento ha nella natura dell'etere uno dei suoi misteri più difficili da risolvere. Abbastanza curiosamente, sarà la stessa persona a cambiare radicalmente paradigma in due punti fermi della visione di Fresnel: Albert Einstein, forte dell'esperimento di Michelson e Morley, costruirà la sua Teoria della Relatività Ristretta abolendo l'idea dell'etere, e in più riuscirà a spiegare l'effetto fotoelettrico tornando all'ipotesi corpuscolare, immaginando l'esistenza dei "quanti di luce", cioè i fotoni.

È un durissimo colpo per l'ipotesi ondulatoria; sembra quasi un colpo mortale. Einstein demolisce la gravitazione di Newton, ma in cambio sembra recuperare la newtoniana idea della luce fatta di corpuscoli. Ma la natura sembra continuare a riservare sopresе, in quei primi anni del Novecento: nella nascente teoria dei quanti le onde si prendono rapidamente una rivincita, e rifiutano di farsi cancellare dai libri di testo. Si notano presto comportamenti ondulatori nelle particelle che costituiscono i mattoni del mondo, e i fisici dovranno presto decretare una sorta di inscindibile pareggio: la luce è materia e onda allo stesso tempo, e a cambiare deve essere il nostro modo di indagare l'universo, più che schierarsi su teorie contrapposte.

Ed è curioso, quasi buffo, ricordare che il primo a rimettere le onde dentro gli atomi sia stato Louis De Broglie[8], settimo duca di Broglie, appunto. E Broglie è proprio quel piccolo borgo dove Augustin Fresnel vide la luce, il 10 maggio 1788.

[6] Immagine rubata dal blog "Notiziole di .mau" di Maurizio Codogno (xmau.com/wp/notiziole/2023/11/08/la-clotoide/).

[7] Trentottesimo anniversario della da lui tanto odiata Rivoluzione Francese.

[8] "*Dove nascono le onde*", RM175, agosto 2013.

2. Problemi

Mah... Abbiamo dei dubbi.

Per il primo, la domanda ci sembra molto bella, ma ci facciamo delle domande. Per il secondo, abbiamo una risposta molto bella, ma vorremmo delle altre risposte.

2.1 Ping, pong, pang, pong, ping, pang... and so on.

Avendo, nel nostro piccolo, la certezza che non riusciremo mai ad emulare Sinner (anche perché i VAdLdRM hanno "chiesto in prestito a tempo indeterminato" la racchetta di Rudy... OK, bieca scusa: non è mai andato oltre il livello di "incapace globale"), abbiamo deciso di limitarci al ping-pong. Ma siccome stiamo facendo delle cose nel campo della Teoria dei Giochi (non fate domande), abbiamo organizzato un torneo, secondo le "regole da oratorio": chi vince resta in campo, chi perde esce e si mette in coda. Essendo in tre, la cosa non è complicatissima ma, come al solito, abbiamo saltato alcune registrazioni.

Quello che sappiamo, è che:

Doc ha giocato 10 partite.

Rudy ha giocato 15 partite.

Alice ha giocato 17 partite.

La domanda è: chi ha *perso* la *seconda partita*?

In realtà, dai dati che vi abbiamo fornito si possono ricavare molte più informazioni su come sia andato il torneo; come espansione, provate a ricostruire il ricostruibile. E, considerato chi erano i tre giocatori, provate a pensare ad una radiocronaca. Fumando *solo* roba del Monopolio...

2.2 Crack The Net!

Ci pare di avervelo già detto, ma a noi non è mai piaciuto il termine "hacker" riferito a quelli che fanno danni sulla rete. "To hack", in inglese, ha implicito un concetto di miglioramento, ma se il vostro scopo è quello di fare danni, allora per favore usate un altro termine: ad esempio, "to crack". Siamo d'accordo che "cracker" può sembrare un brutto termine per l'agente, ma a noi pare importante distinguere le due *Weltanschauung*.

Comprendiamo il fatto che per qualcuno i due termini possano essere considerati equivalenti; ma in alcuni casi, come per esempio quello del problema, ci pare importante la distinzione. Quindi, andiamo con la spiegazione di cosa sta succedendo.

Siete gli Admin di una rete di 100 computer, connessi tra loro in un reticolo 10×10; avete appena scoperto che è arrivato un virus sulla vostra rete, e avete anche scoperto che questo virus ha delle caratteristiche piuttosto particolari; nella fattispecie, un computer può essere infettato *se e solo se* ha due computer infetti collegati *direttamente* con lui.

Sul vostro monitor è appena comparso un allarme: "*Warning! Nine (9) Computers in your Network are Infected!*. Per chi ha settato il piemontese come system language, "Y*ou are in the* bagna" (è noto che le traduzioni dei messaggi di sistema sono sempre piuttosto approssimative).

Il vostro contratto di assistenza sostiene che dovete evitare l'infezione ***totale*** dei computer della rete; cosa dovete fare, per rispettare gli accordi?

Una piccola nota: esiste una risposta "Q&D", ma vorremmo un'analisi con qualche dettaglio...

3. Bungee Jumpers

Un triangolo T è diviso in una serie di triangoli più piccoli in modo tale che i triangoli più piccoli o non hanno nessun punto in comune, o hanno un vertice in comune, o hanno un lato in comune (ossia non esistono triangoli piccoli che abbiano in comune una *parte* di un lato con un altro triangolo). I vertici del triangolo T sono numerati come 1, 2, 3, e i vertici dei triangoli piccoli sono numerati arbitrariamente come 1, 2, 3, ma con la regola che sui vertici dei triangoli piccoli giacenti sul lato di T opposto al vertice i, il numero i non compare. Dimostrate che tra i triangoli piccoli ne esiste almeno uno numerato 123. (*Lemma di Sperner*).

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Maggio!

Ce la faremo, ad uscire in tempo per l'ultimo compleanno della redazione? Chi vivrà vedrà… ma partiamo velocemente, che abbiamo soluzioni di problemi nascosti.

4.1 [301]

4.1.1 PM: Scale in economia

Una delle lamentele preferite di Rudy è che "nessuno legge i PM"; nel numero 301, per verificare questa ipotesi, vi ha lanciato un problemino, mettendolo al fondo per verificare se non solo lo leggevate, ma se foste riusciti ad arrivare alla fine:

> *La vostra azienda ha appena deciso di comprare nove diversi server al costo di* 10, 20, 40, 60, 75, 100, 130, 160 *e* 190 *K€. Un server è in grado di rimpiazzare qualsiasi modello di quelli più economici di lui, ma ogni tipo ha bisogno del suo software specifico. Per questo, il CEO propone di comprarne nove ma di soli quattro tipi, alla condizione che ognuno dei nove sia in grado di fare (almeno) il lavoro di un diverso server della base qui sopra (piccolo esempio: se ne comprate otto da* 160 *e uno da* 190 *va benissimo: quello da* 190 *fa il lavoro di quello originale da* 190*, gli altri fanno il lavoro dei rimanenti). Logicamente, hanno rifilato a voi la gatta da pelare dei soldi da risparmiare; in pratica, dovete comprare nove server, di quattro tipi, in grado di fare tutti i lavori, spendendo il meno possibile.*

Bene, ci è riuscito ***Valter***, che ci ha prontamente fornito la risposta. Nel senso che lui è stato prontissimo, ma abbiamo avuto qualche problema di formattazione e di impegni imprevisti. Pubblichiamo con le nostre scuse.

Interpreterei così (… se non ho sbagliato i conti):

495	…	…	…	…	…	1080	580	280	100	20	
…	800	…	…	…	1435	785	385	160	40		
…	530	1050	2970	1830	1030	510	210	60			
…	395	815	2255	1305	665	275	75				
…	320	550	1600	840	360	100					
0	130	320	1020	450	130						
	0	160	540	160							
		0	190								
			190	160	130	100	75	60	40	20	10
Gradini											
4	3	2	1								

Conteggio valori per 2 3 4 gradini:

495	...	...		190 130 75 100	...	...
...	800	...		...	540 100 160	...
...	530	1050		...	190 130 210	540 510
...	395	815		...	190 130 75	540 275
...	320	550		...	190 130	190 360
0	130	320		0	130	190 130
	0	160			0	160
		0				0
Gradini						
4	3	2				

La spesa totale dovrebbe essere: 2*190€ + 2*130€ + 2*75€ + 3*40€ = 910€.

...e noi, come d'uso, ci tacciamo (soprattutto Rudy che è contento che qualcuno legga i PM, e per questo motivo qui rinnova le sue scuse).

4.2 [303]

4.2.1 Un problema per Nero Wolfe

Un lavoro per l'assistente dell'investigatore!

> *L'investigazione in corso coinvolge 80 persone, tra le quali vi sono il colpevole e un testimone, entrambi ignoti. Il testimone, se convocato in assenza del colpevole, dirà tutto quello che sa; se invece il colpevole sarà presente, se ne starà zitto senza rivelare il suo ruolo. Dovete organizzare una serie di riunioni (una al giorno) durante almeno una delle quali sia presente il testimone ma non l'assassino, risolvendo il caso entro dodici giorni.*
>
> *Trovate la generalizzazione per n persone, ma sempre un colpevole e un testimone.*

Come spesso accade, cominciamo con ***Valter***:

> Ho pensato per giorni ma la soluzione più veloce, quella di nove giorni, non l'ho trovata. Mi pare vi sia un modo semplice per ottenere il numero minimo di giorni per gli incontri. Nello specifico tale "algoritmo" richiede, al più, dodici giorni come indicato dal testo. Siccome mi pareva fornisse sicuramente, e sempre, il numero minimo di incontri, sbaglio. Lo espongo, per non complicare, in modo discorsivo; forse qualcuno trova dov'è l'errore:
> - l'"algoritmo":
> -- individuo la fattorizzazioni di un numero >= *n* che ha la somma dei sui fattori minima
> -- la somma dei fattori fornisce il numero di incontri; per le 80 persone è: 3*3*3*3= 81
> -- parto con tre incontri di 27+27+26=80 persone; non trovo il solo testimone in nessuno
> -- ora so che la coppia colpevole/testimone si trova, sicuramente, in uno dei tre gruppi
> -- nel seguito, assumo la condizione sfavorevole: in nessun gruppo c'è solo il colpevole
> -- pianifico altri tre incontri prendendo per ognuno nove persone distinte dai precedenti
> -- ovviamente, dall'incontro di 26, ne prendo 9/9/8; ho nuovamente tre incontri: 27/27/26
> -- in uno degli otto gruppi di 9 persone più quello da 8 c'è sia testimone che colpevole
> -- allo stesso modo ottengo 26 gruppi di tre persone ciascuno più un ultimo con sole

due
-- in uno di essi c'è sia testimone che colpevole; restano quindi gli ultimi tre incontri
-- siccome ora seleziono una persona dai gruppi di 3 in un incontro c'è solo il testimone
- motivo l'"algoritmo":
- non conviene pianificare gruppi di incontri che escludono alcune delle persone da tutti
- così non si è certi che coppia testimone/colpevole sia in un incontro o fra le escluse
- stesso discorso se una o più persone si trovano in più di un unico incontro del gruppo
- gruppi di incontri con un numero di persone più omogeno possibile riducono i tentativi
- per spiegarmi: assumo p.e. che il primo gruppo di incontri fosse di 30+30+20=80 persone
- dovrei cercare testimone/colpevole tra 30 persone, non 27 come per: 27+27+26=80 persone.

Come solitamente faccio per verificare se posso le farneticazioni ho scritto un programma.

Al solito il programma ce lo teniamo, fatevi sentire se siete interessati. La seconda soluzione è quella del grande fustigatore, o meglio di ***Alberto R.***, che scrive:

"…vedete voi quale preferite trovare…." È ovvio che preferirei trovare la soluzione a 9 giorni, ma, purtroppo, non ci sono riuscito e devo accontentarmi di quella a 12 giorni.

Consideriamo tutte le quadruple ordinate (ABCD) in cui le lettere possono assumere i valori 1,2,3. Esse sono 3^4 = 81. Più che sufficienti per etichettare con un codice esclusivo ciascuno degli 80 personaggi del nostro problema, con l'ultima quaterna, la (3333), che resterà disoccupata.

Calendario delle convocazioni

(qui si intende che le lettere non quantificate possono valere 1, 2, 3)

1^ giorno: i 27 aventi codice (1BCD)

2^ giorno: i 27 aventi codice (2BCD)

3^ giorno: i 26 aventi codice (3BCD) (escluso 3333 che non esiste)

4^ giorno: i 27 aventi codice (A1CD)

5^ giorno: i 27 aventi codice (A2CD)

6^ giorno: i 26 aventi codice (A3CD) (escluso 3333 che non esiste)

7^ giorno: i 27 aventi codice (AB1D)

8^ giorno: i 27 aventi codice (AB2D)

9^ giorno: i 26 aventi codice (AB3D) (escluso 3333 che non esiste)

10^ giorno: i 27 aventi codice (ABC1)

11^ giorno: i 27 aventi codice (ABC2)

12^ giorno: i 26 aventi codice (ABC3) (escluso 3333 che non esiste)

È inevitabile che in una di queste riunioni il testimone parli.

Dimostrazione

Alla fine del terzo giorno tutti gli 80 sono stati convocati (27+27+26=80) quindi anche il testimone, che, se non ha parlato, vuol dire che nel suo gruppo era presente anche il colpevole, il che implica che il codice del testimone e quello del colpevole abbiano in comune la prima cifra A.

Analogamente, se alla fine del sesto giorno il testimone non ha ancora parlato vuol dire che anche la seconda cifra B del suo codice coincide con la seconda del colpevole.

Stesso ragionamento dopo il nono giorno, quando il silenzio del testimone attesta che la terza cifra C del suo codice coincide con il C del colpevole. Ma qui la nostra sfortuna si esaurisce perché alla dodicesima e ultima convocazione il silenzio del testimone

> implicherebbe che anche la quarta ed ultima cifra del suo codice sia identica a quella del colpevole il che è impossibile visto che abbiamo distribuito a tutti codici diversi.

Ecco, questa era la bellissima soluzione del Capo, che aveva assegnato ad ognuno un numero in base tre e divideva in gruppi come ha fatto ***Alberto***. Complimenti! Vi passiamo un estratto della soluzione del Capo anche se, dopo aver letto quella precedente, è piuttosto chiaro:

> (…) Dato che $80_{10}=2222_3$, ce la caviamo in *dodici* giorni. Supponendo il numero dell'assassino sia *abcd* e quello del testimone reticente *wxyz*, questi dovranno differire per almeno una cifra in base tre, quindi almeno un giorno avremo il testimone presente alla riunione ma non l'assassino. E il primo, sotto lo stesso sguardo che NW riserva agli acari sulle sue *Cattleiae*, vuoterà il sacco in sicurezza.

Così si diletta il Capo, con citazioni oscure… ma non abbiamo tempo da perdere e vediamo subito la versione di ***trentatre***:

> Ho trovato una soluzione valida per ogni numero N (pari) di persone, che per $N = 80$ mi dà 14 giorni; quindi sembra sbagliata ma non ho trovato di meglio; la descrivo lo stesso perché la sua algebra è semplice, e porta a valori ridotti anche per N grande, p.es. per $N = 1000$ bastano 20 giorni.
>
> Sia P una permutazione delle N persone, numerate da 1 a N, e con x, y i numeri (incogniti) del testimone e del colpevole; se P è divisa in due parti A e B tali che x e y siano uno in A e l'altro in B, la convocazione separata di A e B risolve il problema. Si può arrivare a questo trattando una serie $P_1, P_2, P_3 \ldots$ di permutazioni.
>
> Parto dal caso semplice $N = 8$; le P_n divise in parti uguali A e B sono
>
> | n | A | B | m |
> |---|---|---|---|
> | 1 | 1 2 3 4 | 5 6 7 8 | 32 |
> | 2 | 1 5 2 6 | 3 7 4 8 | 16 |
> | 3 | 1 3 5 7 | 2 4 6 8 | 8 |
>
> - si passa da n a n+1 con il metodo usato per dividere e mescolare un mazzo di N carte: si spostano i numeri in A e B di P_n rispettivamente nei posti dispari e pari di P_{n+1}
>
> - in colonna m il n° di coppie diverse (a, b) con i due valori uno in A e l'altro in B
>
> - p.es. in P_1 sono isolate fra A e B le coppie (x,y) e (y,x) con $x \in A, y \in B$, cioè $2 \times 4 \times 4 = 32$
>
> - nelle P successive non si contano le coppie trovate nelle P precedenti
>
> - in totale $56 = 8 \times 7$ cioè <u>tutte le coppie (a, b) possibili</u> – che sono in generale $N(N-1)$
>
> - quindi 3 P bastano per risolvere $N = 8$ convocando separatamente ognuna delle A, B in 6 giorni.
>
> Con un programma che simula il processo, ottengo per i primi N
>
> | N | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | ... | 32 | 34 | ... | 80 |
> |---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
> | p | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | ... | 5 | 6 | ... | 7 |
> | q | 1 | 2 | 4 | 3 | 6 | 10 | 12 | 4 | 8 | 18 | 6 | | 5 | 10 | | 39 |
>
> - dove $p(N)$ è il n° di P necessario per la soluzione
>
> - i valori p si ripetono uguali in blocchi di $2,3,4,5\ldots$ lunghi come le potenze di 2; bastano i primi termini per avere da *OEIS* la serie A070941 da cui si ricava che $p(N)$ è il <u>n° di cifre di (N – 1) in base binaria</u>
>
> - quindi $79_{10} = 1001111_2 \rightarrow p(80) = 7$ da cui appunto $2 \times 7 = 14$ giorni.

nb. è noto che continuando a mescolare le carte si torna al mazzo iniziale; ho quindi, per pura curiosità, calcolato la riga q con il n° di passi per arrivare a $P_{q+1} = P_1$; anche questa serie è riportata in *OEIS* come A002326, dove viene citato proprio il metodo di cui sopra e, dalla estesa bibliografia, si scopre che ordinare le carte da gioco è un difficile e intrigante problema per i matematici, e non solo per prestigiatori, cartomanti, giocatori e bari.

A tutte e quattro le categorie menzionate alla fine, in tempi e modi diversi, apparteniamo noi tre della Redazione, quindi grazie a ***trentatre*** per aver scovato questo metodo interessante. Un aggettivo che, assegnato ad una soluzione, per noi ha poco senso è proprio "sbagliato": potrebbe non essere ottimale, o contenere degli errori di calcolo, ma ogni approccio permette di scoprire qualcosa di nuovo. Del resto arriva sempre qualcuno che trova la soluzione ottima, come ***Alessandro*** in questo caso:

La soluzione "bellissima"

Si ottiene assegnando a ogni persona un numero in base 3 tra $0001_3 = 1$ e $2222_3 = 80$. Ogni numero ha 4 cifre, la cui posizione da destra a sinistra è indicata con $k \in \{0,1,2,3\}$, e il cui valore è $n \in \{0,1,2\}$. Si organizzano 12 riunioni, ciascuna delle quali composta da tutte le persone aventi la cifra n in posizione k.

Comunque presi due numeri, essi saranno differenti in almeno una posizione e quindi almeno una riunione avrà come partecipante il testimone ma non il colpevole.

La soluzione generale

Consideriamo $N \leq \binom{n}{k}$ persone e assegniamo ad ognuna un numero $1 \leq j \leq N$. Ogni j identifica un elemento s_j appartenente all'insieme S delle $C(n,k)$ combinazioni, e ogni s_j è a sua volta un insieme di k elementi dell'insieme $R = \{1, \dots, n\}$.

Comunque presi i e j (testimone e colpevole), gli insiemi s_i e s_j sono costruiti in modo tale che $s_i \cap \overline{s_j} \neq \emptyset$, e quindi $\exists r \in \{1, \dots, n\}$ tale che $r \in s_i$ e $r \notin s_j$.

In altre parole, dati k e $N \leq \binom{n}{k}$, n è il numero di riunioni necessarie perché almeno in una partecipi il testimone ma non il colpevole. Se il numero di persone è esattamente N, ogni riunione avrà $\binom{n}{k}\frac{k}{n} = \binom{n-1}{k-1}$ partecipanti.

Nel presente caso $\binom{9}{3} = 84$ e quindi 80 persone possono essere separate con 9 riunioni. Costruendo gli insiemi s_i per $k = 4$ si può isolare il testimone dal colpevole in un gruppo fino a $\binom{9}{4} = 126$ persone. 8 riunioni sono sufficienti fino a $\binom{8}{4} = 70$ persone.

Ecco fatto. Bravo ***Alessandro***. Tutto chiaro, andiamo avanti.

4.2.2 Nanoscacchiera

Il secondo problema vi fa giocare con una piccola scacchiera e tante pedine:

È data una scacchiera 4×4 *coperta da sedici pedine nere da una parte e bianche dall'altra, all'inizio tutte che mostrano la faccia nera. Scopo del gioco è averle a colori alternati sia per righe che per colonne, con la prima in alto a sinistra nera nel numero minimo di mosse, che consistono in scegliere un quadrato* 2×2 *e capovolgere tutte le pedine contenute nel quadrato.*

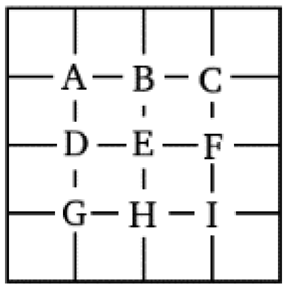
La prima soluzione è del nostro ***GaS***, che ci prepara qualcosa di speciale sui giochi per uno dei prossimi RM, anche se per il momento invia solo una soluzione:

La prima osservazione da fare sul problema è che non sono pedine "truccate" ma normali pedine da Othello!! Mi stupisce che vi siate dimenticati di un così bel gioco…

La prima osservazione "utile" da fare, invece, è che ogni mossa agisce sulle stesse 4 pedine a prescindere dal momento in cui viene fatta; da questa semplice osservazione ne deriva che:

1. l'ordine delle mosse non ha alcuna importanza, quindi una volta identificate le mosse necessarie queste possono essere poi applicate in qualsiasi ordine;
2. per minimizzare il numero di mosse, ogni mossa possibile deve essere eseguita al massimo una volta, fare un numero pari di mosse equivale infatti a non farne nessuna mentre farne un numero dispari equivale ad applicarla una volta sola.

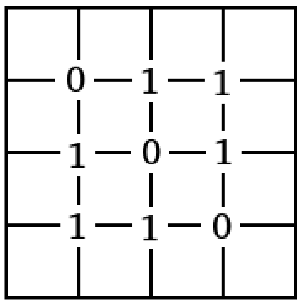
Le mosse possibili su una nanoscacchiera 4×4 sono 9 in totale, identifichiamole da A ad I:



Soluzione:

- La casella in alto a sinistra inizialmente è nera e deve rimanere nera, essendo impattata solo dalla mossa A allora A deve essere eseguita per un numero pari di volte → non deve essere mai eseguita: A=0
- La casella in alto a destra all'inizio è nera e alla fine deve essere bianca, essendo impattata solo dalla mossa C allora C deve essere applicata una volta: C=1
- La seconda casella in alto a sinistra all'inizio è nera e alla fine deve essere bianca, essendo impattata solo da A e da B ed essendo A=0 ne deriva che B=1
- …

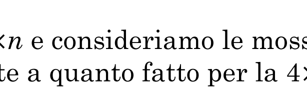
proseguendo allo stesso modo si ottiene la seguente soluzione obbligata in 6 mosse, non si può fare meglio di così:



Generalizziamo?

E generalizziamo….

Prendiamo una scacchiera n×n e consideriamo le mosse possibili che hanno impatto sulla prima riga analogamente a quanto fatto per la 4×4:



Ricordando che ogni mossa A, B, C, ..., Z può essere pari a 0 o ad 1 (vedi sopra) possiamo ricavare che a partire da A le mosse della prima riga sono obbligate:

- Considerato che la casella in alto a sinistra deve rimanere nera vuol dire che A=0
- Considerato che la seconda casella in alto a sinistra deve essere bianca vuol dire che B=1

- Considerato che la terza casella in alto a sinistra deve essere nera vuol dire che C=1
- Considerato che la quarta casella in alto a sinistra deve essere nera vuol dire che D=0
- ecc…

Proseguendo allo stesso modo si dà luogo a mosse obbligate per la prima riga che sono composte dalla stessa sequenza 0-1-1-0 ripetuta continuamente, quindi:

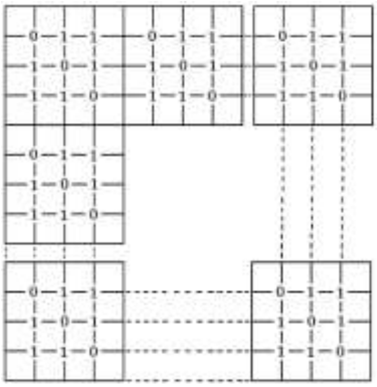
0-1-1-0-0-1-1-0-0-1-1-0-...

Considerato però che la cella in alto a destra deve essere:

- bianca per n pari
- nera per n dispari

ne consegue che l'ultima mossa Z deve essere pari a 1 per n pari e pari a 0 per n dispari. Considerato tale vincolo e la successione obbligata data sopra si ricava immediatamente che **si hanno soluzioni esclusivamente per *n* multiplo di 4**.

A questo punto la soluzione totale è molto facile da ricavare essendo semplicemente la soluzione della nanoscacchiera 4×4 replicata



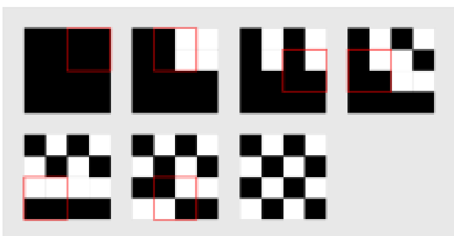
Per una Macroscacchiera $4n \times 4n$ servono quindi un totale di $6 \times n^2$ mosse in totale.

Il Capo è già in brodino di giuggiole in attesa del promesso articolo di ***GaS***, la soluzione è senz'altro la ciliegina sulla torta. Vediamo ora l'ultima versione (se non lo è speriamo sempre che ci perdoni) di ***Valter***:

(…) Con meno di 6 mosse delle 9 possibili, non si possono capovolgere tutte le celle che serve. Il segreto sta nel non capovolgere le due nere d'angolo in alto a sinistra e basso a destra. Analogamente le due d'angolo opposte sono capovolte una sola volta, il resto di conseguenza.

L'ordine è ininfluente: le celle al termine mosse, sono capovolte lo stesso numero di volte.

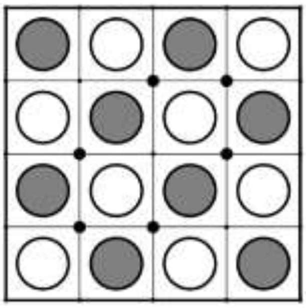
Nel disegno sono partito in alto a destra, poi a zigzag verso sinistra/basso/destra/basso/…:



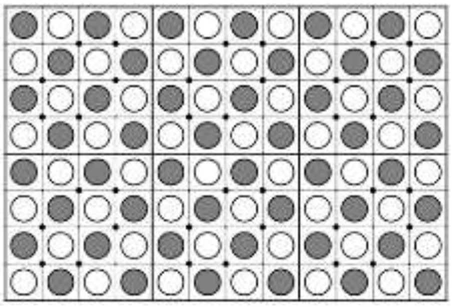
Niente male! Soluzione con disegno anche da ***trentatre***:

In fig. 1 la soluzione; i punti • sono centri di 4 caselle in cui cambia il colore delle pedine.

1



2



Una pedina cambia ogni volta che ha un • sui vertici della sua casella; quindi le 8 pedine che restano <u>nere</u> hanno sui vertici <u>un n° pari</u> di •, le 8 che diventano <u>bianche un n° dispari</u>

- questo consente di costruire i punti • in modo univoco procedendo riga x riga; il vertice in basso a destra di ogni casella diventa • a seconda del colore della stessa e dei punti • già assegnati.

La scacchiera 4×4 è priva di • sul perimetro e può essere estesa con copie della stessa accostate lungo i lati senza rotazioni; poiché 4×4 è la dimensione minima, queste sono le <u>uniche estensioni possibili</u> che rispettano lo schema bianco/nero.

In fig. 2 un rettangolo (12×8) . La forma rettangolare non è obbligatoria; i blocchi 4×4 possono essere in numero qualsiasi, connessi come quadrati adiacenti (cioè come polimini).

Si capisce bene che tipo di riviste leggono i nostri lettori… certe parole le capiscono solo personaggi come noi. E concludiamo anche qui in bellezza con ***Alessandro***:

Per mia comodità, invece delle pedine bianche e nere userò come notazione il numero di quadrati sovrapposti in ogni casella. La scacchiera vuota avrà dappertutto valore 0, e dopo aver posato un quadrato il valore diventerà 1 nelle quattro caselle coperte dal quadrato. Un valore pari corrisponde a una casella con una pedina nera (●) e un valore dispari a una casella con una pedina bianca (◯). L'insieme di case con valore > 0 corrisponde alle caselle coperte da almeno un quadrato.

Consideriamo due quadrati sovrapposti sul bordo superiore della scacchiera.

0	1	2	1	0
0	1	2	1	0

La sequenza pari/dispari sulla prima riga è esattamente quella richiesta dalla soluzione.

Le caselle sul bordo non possono avere valori superiori a 2. Questo implica che per poter mantenere la sequenza pari/dispari, le due case laterali contenenti il valore 0 non possono fare parte di alcun quadrato. Di conseguenza, i pattern potenzialmente possibili sono quelli con periodo $4k-1$, $4k$ e $4k+1$. Restano esclusi i pattern di periodo $4k+2$.

In generale per ogni sovrapposizione di quadrati esiste la seguente invarianza:

In ogni riga e colonna, il numero di caselle contenenti un valore dispari (una pedina bianca) è pari.

L'invarianza è banale nel caso di un solo quadrato.

Aggiungendo un nuovo quadrato avente intersezione vuota coi quadrati già posizionati, in ogni riga e colonna il numero di caselle con ◯ aumenta di 2 unità.

Se l'intersezione è di due caselle in una riga o colonna, il numero di caselle con ◯ aumenta di 2, diminuisce di 2 o resta costante a seconda che i valori presenti siano entrambi pari, entrambi dispari, o uno pari e l'altro dispari.

Se l'intersezione è di una sola casella, il numero di caselle con ◯ aumenta di due o resta costante a seconda che l'intersezione contenga rispettivamente un valore pari o dispari.

Le scacchiere di ordine dispari contengono righe e colonne con un numero dispari di pedine bianche, e l'invarianza mostra che per esse non ci sono soluzioni.

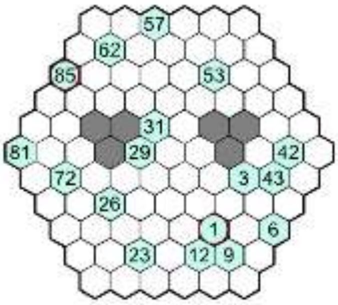
Resta da vedere che esiste una soluzione per la scacchiera 4x4. È composta da sei quadrati (tutte le posizioni possibili tranne quelle sulla diagonale principale), e può facilmente essere replicata su scacchiere di ordine $4k$:

0	1	2	1
1	2	3	2
2	3	2	1
1	2	1	0

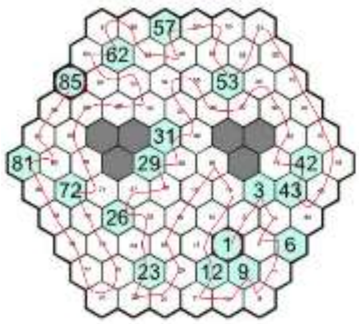
E con questo ci fermiamo, anche se c'è ancora un problemino, che era inserito nell'ultimo numero.

4.2.3 Hidato

Forse non tutti se ne sono accorti, ma c'era un giochino in copertina il mese scorso:



Chi se n'è accorto di sicuro è stato ***Valter***:



Se siete arrivati a leggere fino a qui, mi raccomando, mandate soluzioni alternative e commenti. Ci mettiamo un po' di tempo, ma leggiamo tutto e proviamo a pubblicare il più possibile. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Un esagono avente tre lati di lunghezza 1 e tre di lunghezza 3 è iscritto in un cerchio. Trovate l'area dell'esagono.

6 *Un caso.*

Il problema non definisce in che ordine siano i lati nell'esagono. Dati però tutti gli esagoni di questo tipo, tracciando i triangoli aventi per base un lato dell'esagono e per vertice il centro del cerchio, si vede che nei vari casi vengono sempre generati tre triangoli isosceli di base 1 *e tre triangoli isosceli di base* 3*, con i cateti tutti uguali tra loro, e quindi le aree degli esagoni saranno uguali tra loro qualunque sia l'esagono. Possiamo quindi limitarci al caso più semplice (con i lati dell'esagono di lunghezze "alternate"), e con la costruzione indicata in figura si vede che l'area è pari a quella di* 22 *triangoli equilateri di lato unitario, e quindi pari a:*

$$22\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right)=\frac{11\sqrt{3}}{2}.$$

6. Zugzwang!

No, non ci piace il nome originale. Quindi lo cambiamo. E, come diceva Groucho Marx, "Queste sono le mie idee! E se non vi piacciono... Ne ho delle altre" (alla fine).

6.1 Schrödinger!

Continuiamo la nostra esplorazione sia delle mini-scacchiere che del "filetto" (aka TicTacToe, Tria, Cerchi e Croci, e chi più ne ha più ne metta). Quello di questa volta è stato inventato da ***Allan Goff***, che a quanto pare è un tipo piuttosto strano (o almeno lo era nel 2002, quando ha inventato il gioco: leggendo il seguito, capirete perché non possiamo sviluppare ipotesi sul suo stato prima o dopo).

La ***scacchiera*** è una normale scacchiera da filetto 3×3: disegnatela piuttosto larga, che dovrete fare un mucchio di cose in ogni casella. Consigliata caldamente una matita di quelle che si cancellano facilmente (e una biro).

Le ***mosse*** sono quasi normali. Anzi, doppiamente quasi normali.

Nel senso che ogni giocatore inserisce a matita ***due*** dei propri simboli, in due caselle diverse (non necessariamente contigue) e li unisce da una linea sottile. Poi si passa al secondo giocatore, che fa la stessa cosa con l'altro simbolo; liberi di giocare in qualunque casella, anche se occupata da un simbolo vostro o avversario. I due simboli legati tra loro sono *entangled* e, quantisticamente, sono in una sovrapposizione di stati tra le due caselle.

Ad un certo punto, un giocatore formerà un ***loop***, ossia una catena chiusa (dalle linee sottili) che legano le diverse caselle, anche (questa è la parte più divertente) formata da coppie di tipo diverso; adesso, l'***altro*** giocatore (rispetto a quello che ha chiuso il loop) osserva il loop, e lo fa collassare in uno stato ben preciso; nel senso che sceglie dov'è (nel senso della fisica classica del termine) la particella, per tutte le particelle del loop appena chiuso; in ogni casella può esserci una sola particella, quindi quando una delle coppie collassa in una data casella, la sua connessa scompare; non solo, ma nella casella dove abbiamo fatto comparire la particella (nel senso classico: se preferite, "nella casella dove è collassata la funzione d'onda") non possono esserci altre particelle, quindi le coppie che hanno una delle particelle ancora in quella casella collassano anch'esse (nell'altra casella), il che può portare ad una serie di reazioni a catena piuttosto interessanti; nel caso di dubbi (sensati: non perché "vi conviene"), decide chi sta facendo collassare il tutto.

Si vince quando fate un "tre in riga", ma *composto da particelle classiche*: attenzione che se, con il collasso multiplo che decide il gioco, anche l'altro giocatore fa "tre in riga" con i propri simboli da qualche parte, *hanno vinto tutti e due*. Non esiste la parità (Allan si è raccomandato tanto di specificarlo sempre, questo). L'unico caso di parità è quando avete ***otto*** particelle classiche e non avete fatto nessun filetto. In questo caso, pari.

A noi l'idea piace molto, fate qualche prova quando avete finito di leggere questo numero.

Dicevamo, il nome: l'originale è "Quantum TicTacToe", ma non ci entusiasma: cosa ne dite di "Filetto di Schrödinger"? O "Non dire gatto... a un fisico teorico"?

Ci sono anche delle complicazioni, come se non bastasse il gioco base: una di queste è il ***multiverso quantistico***, nella quale non viene deciso dall'altro giocatore come collassa il loop: qui, si fanno collassare le particelle in ***tutti*** i modi possibili su diverse scacchiere e si gioca su *tutte* le scacchiere; vince chi vince più partite (secondo le regole viste sopra per ogni partita).

Su una linea completamente diversa, il modello "torneo": la scacchiera è 4×4, ma come al solito basta fare "tria", anche se si va avanti fino alla fine della scacchiera; ogni tre in linea vale un punto.

La follia degli umani non ha limiti. Come dimostra il prossimo paragrafo.

Negli ***scacchi quantistici***, in realtà l'unico pezzo quantistico è il Re; anziché muovere il Re, vi limitate a mettere una monetina in tutte le caselle dove può andare (se non decidete di muoverlo non mettete nessuna monetina, ovvio: mettere le monetine conta come una mossa). Quando una casella "con monetina" è minacciata da un altro pezzo, potete scegliere: o la difendete (come se ci fosse il Re) o togliete la monetina (il re non può essere lì).

Se "da una monetina" decidete di prendere un pezzo con una mossa di Re, a questo punto il Re Quantistico "collassa" in un Re Classico, si mette nella casella dove ha preso e ritirate tutte le vostre monetine. Dalla prossima mossa, potete ricominciare con un nuovo Re Quantistico...

Per questa ultima variazione, ci pare interessante utilizzare, anziché delle monetine, delle aspirine: mi sa che ve ne serviranno molte, durante la partita (no, non per giocare).

7. Pagina 46

Proveremo che il numero dei triangoli i cui vertici sono numerati 123 è dispari (e quindi maggiore di zero).

Siano i triangoli piccoli T_1, T_2, ..., T_n, e sia a_i il numero degli "12-*lati*" di T_i (ossia lati i cui punti finali sono numerati "1" o "2"). Se, ad esempio, i lati di T_i sono numerati "123", allora a_i=1; se sono numerati "112" o "122", allora a_i=2; in tutti gli altri casi, a_i=0.

L'idea della dimostrazione è di valutare la somma $a_1+a_2+...+a_n$ in due modi diversi.

In prima istanza, sia X il numero dei triangoli etichettati "123" e Y il numero dei triangoli etichettati "112" o "122"; sarà allora:

$$a_1+a_2+...+a_n = X+2Y.$$

Consideriamo però ora il numero U dei lati di tipo "12" in T, e sia V il numero dei lati "12" sui lati di T. Ogni lato "12" all'interno del triangolo T contribuisce alla costruzione di *due* triangoli, quindi è contato due volte nella somma $a_1+a_2+...+a_n$, mente ogni lato "12" sul perimetro di T viene contato una volta sola. Quindi:

$$a_1+a_2+...+a_n = 2U+V.$$

Uguagliando le due espressioni per la somma, si ha che:

$$X+2Y = 2U+V,$$

e quindi X è pari (dispari) se e solo se V è pari (dispari); dobbiamo quindi dimostrare che V è sempre dispari.

Secondo le condizioni fornite nel problema, il lato "13" di T non può includere nessun segmento numerato "2", mente il lato "23" non può includere vertici numerati "1", e quindi i lati "12" possono ricorrere solo nel lato "12" di T. Esaminiamo il susseguirsi di questi segmenti mente ci muoviamo dal vertice "1" al vertice "2" di T: incontreremo una serie di "1" (ossia di segmenti numerati "11"), sin quando non incontreremo un vertice numerato "2" (al limite, il punto finale), e l'ultimo segmento superato sarà numerato "12"; a questo punto, potremmo incontrare una serie di "2" (ossia, di segmenti numerati "22"), sin quando, attraverso un nuovo segmento numerato "21", incontreremo un nuovo vertice "1"; passato poi un nuovo segmento "12" saremo di nuovo ad un vertice numerato "2" dal quale, attraverso un nuovo segmento numerato "21" ci troveremo ad un vertice numerato "2", e avanti in questo modo.

Quindi, dopo un numero *dispari* di segmenti "21" arriviamo ad un vertice "2", e dopo un numero pari di segmenti "21" arriviamo ad un vertice "1". Ma il punto finale del segmento è un vertice "2", quindi dobbiamo aver incrociato un numero *dispari* di segmenti "12", e quindi il numero V è dispari, il che prova il nostro teorema.

8. Paraphernalia Mathematica

OK, prima la soluzione del problema in copertina. Il dettaglio mancante è che stiamo giocando su un toro. Ah, non ve l'avevamo detto? Beh, non ci sembrava importante…

Dopo 1. Df5–h7!, il Re nero ha solo due mosse possibili:

(a): 1. … Re8–f8 2. Dh7–g6 Rf8–e7 3. Re2–e1 Re7–d7 4. Dg6–e8#!

(b): 1. … Re8–d8 2. Dh7–g7+ Rd8–e8 3. Cb5–h6 Re8–f8 Dc7–e1#!

...e dovreste aver capito di cosa vogliamo parlare.

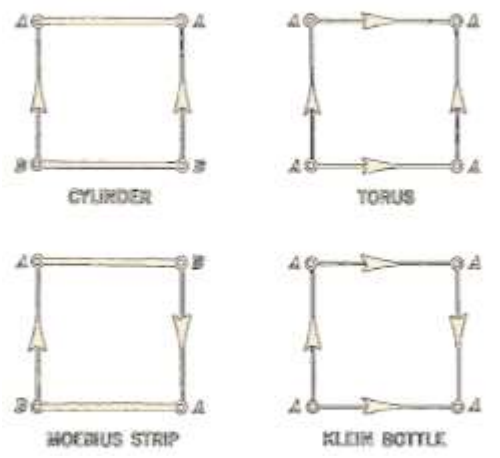
8.1 Carta, forbici & colla

Asteroids inhabits[9] a toroidal universe. Someone should tell NASA.

Ben ORLIN

Se siete degli apprezzatori dei videogiochi *vintage*, o lo sapevate già o avete appena avuto una sorpresa, come Rudy molti anni fa. All'epoca, quando un qualchecosa spariva sul bordo superiore dello schermo, ricompariva su quello inferiore nella stessa colonna; nella testa di tutti, quello era il comportamento di un oggetto che si muoveva su una sfera, e solo il successivo scontro con i simboli di Ricci portava alla comprensione del fatto che ci eravamo completamente sbagliati.

La spiegazione del loro funzionamento è ragionevolmente immediata: prendete il solito foglio di gomma sottilissima e infinitamente estensibile, poi incollate i bordi tra di loro in modo tale che le frecce coincidano in direzione e verso (se non ci sono frecce, il bordo va lasciato libero); qualche prova con il cilindro e la striscia di Möbius (tenete i bordi AB della striscia piuttosto lunghi) dovrebbe chiarirvi il funzionamento degli oggetti, e a questo punto siete pronti per il loro utilizzo teorico. In particolare, se considerate le frecce come senso di assi cartesiani, il simbolo del toro dovrebbe chiarirvi il funzionamento di "Asteroids" (e di "Hydros", e di un mucchio di altri giochini d'epoca).



7 *Dal mitico Courant&Robbins.*

Oggi, comunque, vorremmo focalizzarci sul toro: il tentare di costruirlo con carta, forbici e colla lascia sempre piuttosto insoddisfatti, visto che riuscire ad avere qualcosa di regolare è molto difficile. Ma non esiste un modo per ottenere un risultato soddisfacente?

Niente da fare, bisogna accontentarsi di un "poliedro col buco" (tutta colpa di Gauss e del suo "Theorema Egregium", come dovremmo avervi già detto); costruirlo partendo da un cubo o da un parallelepipedo dà una certa soddisfazione ma, tra riuscire ad andare a incollare le facce interne e la sensazione da "...tutto lì?" che si dipinge sulle facce dei nostri spettatori, riesce ad essere al contempo troppo complicato e troppo semplice.

Sorvolando sul "troppo complicato", che come al solito attribuiamo alla nostra inettitudine ai lavori manuali, focalizziamoci sul "troppo semplice". Ma *quanto* è semplice il nostro cubo bucato?

Per prima cosa, farebbe comodo avere una definizione di "semplice": qui, non intendiamo "il più facile da costruire" (anzi, è decisamente complicato), ma "quello con meno vertici possibile"; intuitivamente, dovrebbe essere quello meno spigoloso, e che somiglia di più a quello che volevamo ottenere...

[9] E se quella "s" non vi chiarisce di cosa stiamo parlando, siete troppo giovani per certe cose.

Prima di provare a costruirlo, cerchiamo di capire cosa significhi "minimo numero di vertici". Se F, S e V sono rispettivamente il numero degli spigoli, delle facce e dei vertici del nostro solido, partendo alla formula di Eulero per il toro F–S+V=0 dovremmo riuscire a ottenere qualche misura interessante. Ma prima facciamo una premessa, che vi vediamo perplessi.

In effetti, la formula vista sopra di solito è applicata ai solidi "senza buco", e in questo caso risulta, anziché uguale a zero, pari a due; questa, però, è un caso particolare dell'espressione più generale[10]:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i e_i = 2(1-g)$$

dove n è il numero delle dimensioni nelle quali stiamo lavorando (tre, nella nostra attuale realtà), e_i è il numero delle *celle i-dimensionali* che compongono l'oggetto (...vertici, spigoli, facce, volumi, eccetera... è più chiaro, adesso?) e g è il *genus* dell'oggetto: in primissima approssimazione (e con grandi scuse ai topologi), il "numero dei buchi" o, se preferite, il "numero delle maniglie" che ha il nostro oggetto; nel caso del toro, abbiamo un buco (o, se preferite, è tutto una maniglia) e i conti tornano.

Fine della premessa. Torniamo ai nostri tori, come (non) dicono i francesi.

Qualunque poligono (convesso: non andiamo a complicarci la vita) abbiate scelto come faccia, potete dividerlo in triangoli, nel caso peggiore scegliendo un vertice e tracciando tutte le diagonali da quel vertice ai vertici restanti (così siamo sicuri che le diagonali non si incrociano, che potrebbero succedere guai), quindi se il nostro toro poliedrico (toriedro? politoro? No, meglio di no...) ora formato tutto da triangoli ha f facce possiamo contare i lati di ogni faccia come $3f$, visto che ogni faccia ha tre spigoli, oppure come $2s$, visto che ogni spigolo è il lato di due facce e quindi, visto che stiamo parlando sempre della stessa cosa, deve essere $3f=2s$, ossia dalla formula di Eulero $3v = 3s - 3f = s$.

Ma ogni spigolo unisce due vertici, quindi il numero di spigoli non può essere maggiore del numero di coppie di vertici, e quindi

$$e \leqslant \frac{v(v-1)}{2}$$

il che implica:

$$3v \leqslant \frac{v(v-1)}{2}$$

ossia $v \geq 7$. Ma siamo solo a metà dell'opera: infatti, questa che abbiamo ricavato è una condizione *necessaria*; ma è anche sufficiente?

Beh, sì. Un oggetto del genere è costruibile. Quello che dobbiamo fare, è costruire una mappa di triangoli (facce) su un toro, per la quale due facce qualsiasi abbiano in comune un lato (spigolo), o un vertice, o nulla. Nel caso $v=7$, la nostra disequazione qui sopra diventa un'eguaglianza, il che significa che due vertici qualsiasi sono connessi da uno spigolo (anche se tre spigoli qualsiasi non definiscono una faccia). Bene, non resta che costruire questo oggetto.

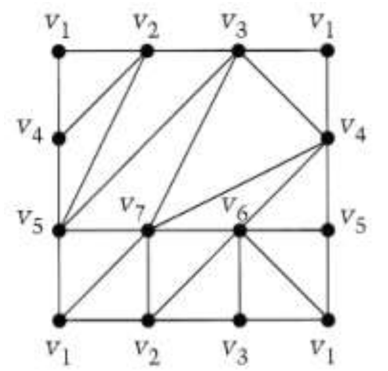
Tranquilli, ve *li* disegniamo noi. E il fatto che si sia usato il plurale dovrebbe preoccuparvi, visto che, come sempre quando si parla di grafi, con qualche piccola deformazione qui e là si ottengono delle cose completamente diverse.

Cominciamo con quella che, si dice, sia stata "la prima", immaginata da chi ha fatto tutti questi conti: considerato che i vertici che "si chiamano nello stesso modo" vanno incollati insieme, questo oggetto ci descrive completamente il toro poliedrico. Il motivo per il quale viene disegnata quadrata (...non provateci neanche, a costruirla così!) è che se guardate i

[10] I più diversamente giovani tra i lettori ricorderanno che, secondo Rudy, questa è la più bella formula della matematica. Non quella robaccia piena di e, pigrechi e radici strane...

vertici sui bordi, vedete che vanno tutti nello stesso ordine: la mappa non è altro che un simbolo di Ricci!

Fermo restando che, per costruire il nostro aggeggio, questa è probabilmente la miglior mappa possibile, sarebbe comodo avere qualcosa di un po' più visualizzabile, anche senza costruire effettivamente l'oggetto. La cosa è possibile, anzi lo è in alcuni modi diversi. Nell'immagine successiva, trovate la *stessa mappa* disegnata in un altro modo. Considerate solo le linee nere fini, e le due strutture sono equivalenti.



8 *…ora è tutto più chiaro…*

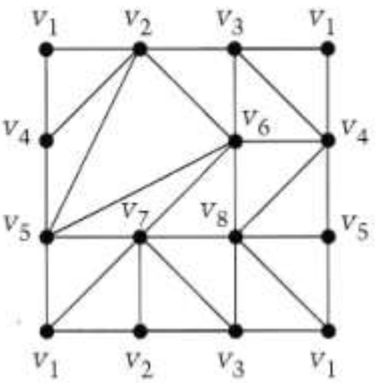
"...e a cosa servono le zone colorate?" Beh, i vertici delle zone colorate sono i baricentri di ogni faccia; è un'altra mappa, duale di questa, che ha una caratteristica interessante: le zone che, nel quadrato, "sporgono" e vanno a finire "dall'altra parte", sono evidentemente la stessa zona; se voi colorate la mappa, quelle aree devono essere dello stesso colore. Il che vi dà dei problemi nella colorazione, e vi servono ***sette*** colori per colorare la mappa. Questa è una caratteristica generale dei tori, a partire da quello diviso in regioni "minime", come abbiamo fatto noi.

Crediamo ormai siate stati conquistati dalla bellezza di questo toro poliedrico (seeh, come no...), e non vediate l'ora di costruirlo; i più sperimentali tra i matematici da queste parti hanno provato a fare qualcosa in merito, e pare che il modo migliore per costruirlo, seguendo la "mappa" che vi abbiamo dato nella figura, sia quella ottenibile utilizzando le misure (in centimetri) nell'immagine che segue. Se adesso vi state chiedendo perché l'abbiamo copiata e non riscritta, beh, ci sembrava di essere stati già sin troppo cattivi con il problema di scacchi in copertina, quindi per evitare errori di copiatura che vi avrebbero reso ulteriormente alterati abbiamo preferito copiare l'immagine. E se quei numeri sono sbagliati, stavolta è colpa di ***Vladimir Dubrowsky***. Seguendola (si consiglia cartoncino piuttosto sottile) e incollando le cose come i vertici spiegano, dovreste ottenere uno dei due aggeggi in copertina (quello più piccolo):


9 *…poi dicono che "i colori aiutano"….*

$$
\begin{aligned}
&v_1v_4 = v_2v_3 \cong 10.3,\\
&v_4v_7 = v_3v_7 \cong 7.8,\\
&v_4v_3 = 10.0,\\
&v_2v_4 = v_1v_3 \cong 8.7,\\
&v_4v_5 = v_3v_6 \cong 7.0,\\
&v_1v_6 = v_2v_6 = v_1v_5 = v_2v_5 \cong 7.0,\\
&v_1v_2 \cong 6.0,\\
&v_5v_6 \cong 4.1,\\
&v_1v_7 = v_2v_7 \cong 3.4,\\
&v_6v_7 = v_5v_7 \cong 4.9,\\
&v_4v_6 = v_3v_5 \cong 3.8.
\end{aligned}
$$

"Appunto, *due* aggeggi... l'altro cos'è?" Oh, è solo il più semplice "fratello maggiore" di quello che abbiamo appena fatto; ha otto facce, e le sue descrizioni (teorica e pratica) sono:



$$v_iv_j \cong 15.0,$$
$$v_iv_k \cong 18.1 \ (i = 1, 6;\ j = 3, 4, 8;\ k = 2, 5, 7),$$
$$v_7v_2 = v_2v_5 = v_5v_7 \cong 18.5,$$
$$v_8v_3 = v_3v_4 = v_4v_8 \cong 6.3,$$
$$v_7v_8 = v_2v_3 = v_4v_5 \cong 7.0,$$
$$v_7v_3 = v_2v_4 = v_5v_8 \cong 12.9.$$

...se riuscite a costruirli, avete tutta la nostra invidia; ma mi raccomando, *non* disegnateci una scacchiera sopra (...pare che il miglior modo per far fare qualcosa a qualcuno sia proibirgli di farlo).

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms