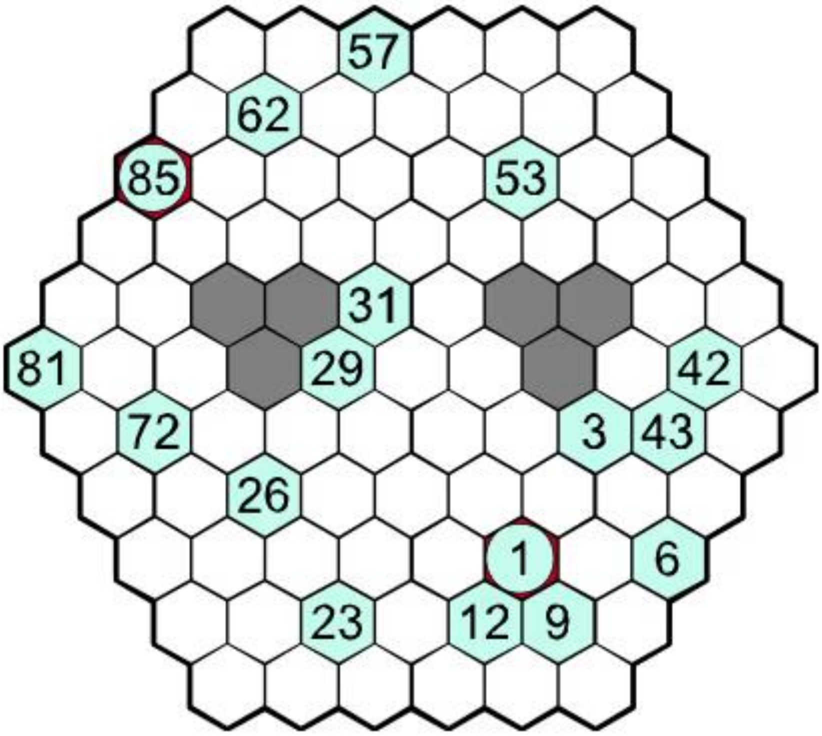
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 303 – Aprile 2024 – Anno Ventiseiesimo



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM300 ha diffuso 3'389 copie e il 28/01/2024 per Google eravamo in 11'900 pagine.

Il giochino in copertina si chiama(va) ***Hidato***, e nel 2015 qualcuno era convinto che avrebbe sbaragliato il Sudoku. A noi non sembra questo sia successo, ma il gioco sembra carino. Le regole sono semplicissime: partendo da 1, dovete costruire una catena di esagoni (aventi tra di loro un lato in comune) con i numeri in successione. Mettere il 2 è decisamente facile, il 4 e il 5 già un po' meno; consideriamo un grande trionfo l'essere arrivati al 12. Le regole del gioco evidentemente non obbligano a risolverlo in sequenza: se a un certo punto vi pare meglio partire da qualche altro punto, fate pure.

1. Caduta libera

> *"È assai raro che una nuova e importante teoria scientifica riesca a farsi strada superando di volta in volta le obiezioni e convertendo progressivamente i suoi avversari: non capita quasi mai che Mario diventi Dario. Ciò che accade è che i suoi oppositori gradualmente muoiono, e che le generazioni successive si familiarizzano con le nuove idee fin dall'inizio."*

Con ogni probabilità, la frase più citata di Karl Marx è quella che recita "*La religione è l'oppio dei popoli*". Come quasi tutte le frasi celebri, anche questa sembra essere diventata famosa in una maniera diversa da come era stata inizialmente pronunciata (o scritta): in questo caso, però, la differenza è effettivamente leggera, quasi del tutto trascurabile: nel tedesco originale del filosofo di Treviri la frase suona "La religione è l'oppio *del popolo*". Forse la pluralizzazione del termine "popolo" suonava più adatto a chi voleva diffondere il pensiero del teorico dell'internazionalizzazione del proletariato.

La sentenza marxiana è comunque diventata così famosa da prestarsi inevitabilmente a usi impropri, battute, scherzi e commenti di ogni tipo. E, ovviamente, a centinaia di variazioni sul tema, con opportune sostituzioni dei termini in gioco: in Italia, la variazione più nota è probabilmente quella che risale al 1963, in uno degli episodi del film "*I mostri*" di Dino Risi, episodio che non a caso si intitola proprio "*L'oppio dei popoli*", e che scherza su un adulterio commesso da una signora nonostante la presenza in casa del marito (Ugo Tognazzi) che non si accorge di nulla perché troppo preso da uno spettacolo televisivo. Negli Anni Sessanta, effettivamente, la televisione rivestiva sia il ruolo di principale strumento di informazione che quello di feticcio ipnotizzatore, e la sentenza "la televisione è l'oppio dei popoli", se non del tutto realistica, aveva comunque una certa ragion d'essere.

Nel terzo decennio del terzo millennio le cose sembrano essere cambiate parecchio. Le due missioni principali della televisione – l'informazione e l'intrattenimento – sono disponibili in una quantità di modi alternativi, e soprattutto da fonti che, ancorché essere assai poche com'erano sessant'anni fa, adesso sono innumerevoli (e non usiamo l'aggettivo "innumerabili" solo per decenza, visto che questa è una rivista di matematica). Soprattutto i giovani disertano la fruizione della "televisione" in senso stretto; quello che una volta era un oggetto sacro più o meno quanto un tabernacolo – tanto per restare nella metafora religiosa – cioè lo schermo del televisore, è adesso sostituito e sostituibile da quasi ogni superficie trasparente in grado di ospitare un microchip: pc, laptop, telefoni – oh, soprattutto telefoni! – e anche orologi, lenti d'occhiali, citofoni e finestrini d'aereo o di treno. Una superficie liscia che non sia in grado di mostrare immagini in movimento è probabilmente guardata con sospetto dai bambini delle elementari, ormai: e diventa davvero difficile, quasi mistico (appunto) spiegare a queste nuove generazioni che, solamente ai tempi dei loro nonni o giù di lì, un'intera nazione si mobilitava compatta e si sedeva nei tinelli ogni lunedì sera, perché il lunedì sera c'era il film in tv. Provate a raccontarglielo: crederanno più facilmente alla reale esistenza di Spiderman che a una simile, collettiva e nazionale sincronizzazione televisiva.

Adesso l'esperienza televisiva è assai meno stupefacente, con buona pace sia di Marx che di Tognazzi. Però mantiene un certo grado di effetto rilassante, o per meglio dire anestetico, che a ben vedere è pur sempre una possibile conseguenza dell'assunzione di certi tipi di droghe. A notte tarda si finisce semisdraiati sul divano poco prima di decidere di muoversi verso il più accogliente letto, e si lasciano rotolare le immagini e le voci dallo schermo in attesa che il barbiturico elettronico faccia il suo effetto. Non è tanto importante il programma in sé, anche perché ormai, nonostante le centinaia di canali disponibili, le trasmissioni si somigliano un po' tutte, come le facce di una folla: sono tutte diverse, in realtà, e si vede benissimo che sono diverse, ma prese tutte insieme sono abbastanza indistinguibili una dall'altra. Televendite, talk-show, canali monotematici, pubblicità, cuochi che cucinano, commenti sportivi, balli-canzoni-pubblicità, cuochi che urlano e film e telefilm e previsioni meteo; così in un amen si viene presi da vortice e si corre a chiedere ospitalità a cuscini e coperte. Nei vortici si cade, e tutto il trucco sta nel mantenere disponibile quel minimo di energie necessario per passare dal divano al letto, sennò si finisce con lo svegliarsi al mattino con ossa rotte e televisione ancora impietosamente accesa.

Però bisogna riconoscere che quel senso di caduta libera ha un che di piacevole. Gli elementi del cervello deputati a mantenere vivi e vigili i pensieri razionali sono a fine turno di lavoro, e la torma irrazionale comincia la festa: si mescolano gli ultimi pensieri consapevoli con le chiacchiere dello chef che propone la vellutata di asparagi, con la voce roca del poliziotto e con il jingle della pubblicità delle pastiglie per lavastoviglie. Gli ultimi neuroni ancora svegli cercano di stabilire contatti e collegamenti, ma alla fin fine non possono far altro che prendere appunti per il lavoro di domani, annodare fazzoletti, e poi finalmente cedono le armi.

Così capita persino che uno si svegli poi con quesiti difficilissimi da risolvere, come quella volta che ci si era addormentati con la tv inchiodata su un canale che trasmette solo serie di telefilm gialli e polizieschi. C'è già uno strano mistero alla base di certi canali monotematici: se lo scopo dello spettatore è quello di scoprire l'assassino, come si fa a mandare avanti una rete che, per banali questioni di tempi e di bilanci, deve per forza mandare in replica ogni episodio almeno venti o trenta volte all'anno[1]? Probabilmente c'è qualcosa di sbagliato nelle premesse: allo spettatore quadratico medio dei film gialli non importa più di tanto scoprire l'assassino, l'importante è che l'assassino ci sia, e che venga sbattuto in gattabuia, anche dieci volte al mese per lo stesso reato identicamente replicato. Del resto, se c'è un merito che bisogna riconoscere alle serie tv gialle è che sono corrette nei titoli: si chiamano quasi sempre "il commissario Tizio" o "l'ispettrice Sempronia", con poche variazioni che rimangono comunque sostanzialmente oneste. Quasi sempre: una "caduta libera" verso le braccia di Morfeo è stata qualche tempo fa invece interrotta, bloccata da un neurone troppo sveglio, proprio perché un attimo prima che il sonno vincesse aveva annodato il fazzoletto con su scritto "Che caspita di titolo è questo? Perché è così strano, e perché mi ricorda qualcosa?"

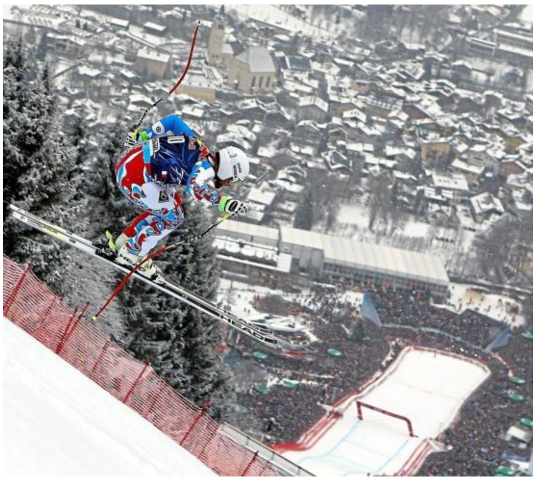
1 *Sigla di SOKO Kitzbühel.*

Al mattino successivo è stato relativamente facile, dopo il giusto numero di tazze di caffè, ricordare che lo strano titolo era "*Soko Kitzbühel*" e grazie alla Rete sciogliere sia la stranezza del titolo che il ricordo che quel titolo generava. Si tratta di una serie poliziesca che non ci sentiamo di definire troppo entusiasmante: ci sono una coppia di poliziotti che scoprono delitti, un poliziotto più anziano, due personaggi abbastanza insoliti (uno chef e una contessa) che indagano per conto loro e non si capisce mai perché lo facciano, e una signora che fa il medico legale, personaggio ormai immancabile in qualsiasi serie che parli di morti ammazzati (tutto sommato, meno male: i medici legali sono spesso tra i personaggi più originali delle serie poliziesche, e portano una specie di rivincita della scienza nei confronti del fantomatico "intuito" dell'investigatore). Il titolo della serie pare strano essenzialmente perché è tedesco, e a parte i madrelingua saranno assai pochi coloro che sanno riconoscere nell'acronimo "SOKO" l'abbreviazione di "*Sonderkommission*", insomma qualcosa che, tradotto dal teutonico, suona più o meno come l'italico "Squadra Speciale". Come fanno quasi tutte le serie gialle contemporanee, gran parte dell'appeal degli episodi è delegato al luogo dove si svolgono le vicende, che in questo caso sono le montagne del Tirolo austriaco, e più precisamente il suo capoluogo, appunto Kitzbühel. Ed era proprio Kitzbühel il nome

[1] Stiamo scherzando. Probabilmente il numero è molto superiore a trenta.

che il neurone stakanovista cercava di recuperare: perché, serie tv a parte, Kitzbühel è universalmente noto come il posto che ospita la *Streif*, la pista di discesa libera più famosa del mondo.

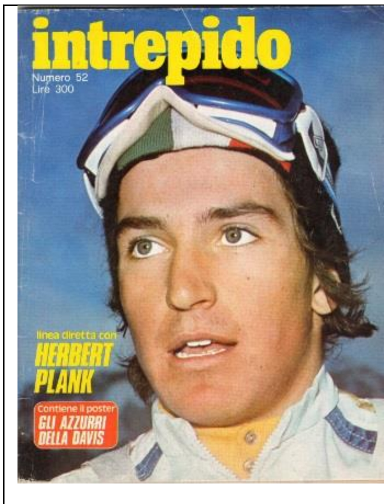
Buffo, vero? Uno non fa in tempo a battezzare "caduta libera" quel momento in cui veglia e sonno combattono davanti alla tv, che improvvisa arriva questa connessione involontaria: e non vale l'obiezione che "caduta libera" e "discesa libera" sono cose assai diverse: cercate in Rete una qualsiasi foto presa dal punto di vista dello sciatore pronto a partire dal cancelletto di partenza, e capirete subito che, almeno per quel che riguarda la Streif, i due termini hanno tutto il diritto di definirsi sinonimi.



2 *La Streif.*

L'Italia ha una gran bella tradizione nello sci. È stato però a lungo vero che i campioni nazionali brillassero soprattutto per le cosiddette discipline "tecniche", insomma gli slalom. In anni relativamente più recenti le cose sono cambiate: anche nella discesa libera (che misteriosamente pare non meritarsi il titolo di "tecnica", probabilmente perché il primo aggettivo che viene in mente guardandone una gara è "folle") l'amata patria ha partorito dei rompicollo davvero fenomenali, come l'incredibile Dominik Paris, che ha vinto la discesa libera della Streif per ben tre volte tra il 2013 e il 2019, dopo che Kristian Ghedina aveva piantato per la prima volta il tricolore nazionale sul gradino più alto del podio nel 1998.

Però, per molto tempo, la "discesa libera" stava un po' allo sci alpino come i campi d'erba alla Wimbledon stavano ai tennisti nostrani. Nell'epoca d'oro, quella quasi mitica della Valanga Azzurra, quando tutto lo sci internazionale sembrava dovesse adattarsi a inseguire gli slalomisti italiani, sulle discese non vincolate dalle bandierine rosse e blu gli azzurri brillavano raramente. Per fortuna, ogni regola, così come ogni maledizione, ha le sue eccezioni: sui campi da tennis degli Anni Settanta, quando Panatta, Bertolucci e Barazzutti strapazzavano le terre rosse, c'era Zugarelli che a Wimbledon e campi simili si trovava benissimo; e nello stesso periodo, mentre sulle piste da sci di slalom speciale e gigante Thöni, Gros e compagni facevano meraviglie, a difendere il nome della squadra sulle discese così verticali da sembrare quasi perpendicolari c'era Herbert Plank.



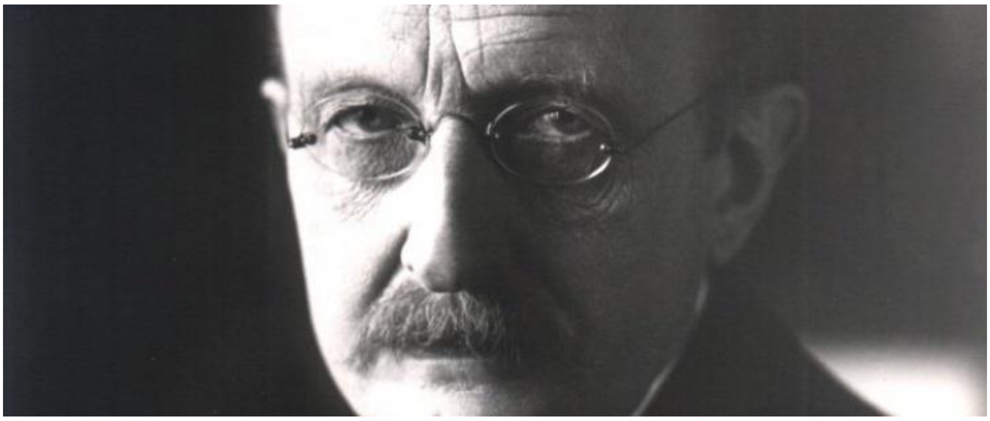
3 *Herbert Plank.*

La città di Herbert è ancora quella che ha i due nomi propri più diversi. Nel bilingue Alto Adige si trova Merano in italiano, Meran in tedesco; Bolzano che diventa Bozen, Brunico-Brucken; perfino Bressanone è riconducibile, con poca fantasia, a Brixen; ma passare da Vipiteno a Sterzig è quasi un triplo salto mortale, o una discesa a rotta di collo giù per la Streif.

A Vipiteno Herbert Plank (fratello di Jolanda e padre di Andy, anch'essi sciatori di grande talento) ha riportato trofei importanti: una medaglia di bronzo dalle Olimpiadi di Innsbruck del 1976, ventuno podi in gare di Coppa del Mondo, cinque dei quali, tra il 1973 e il 1980, sul gradino più alto.

Ha tutto il diritto di essere ricordato come uno degli atleti più rappresentativi della Valanga Azzurra e, come meritano tutti gli sportivi che si dimostrano campioni, di avere il proprio nome ricordato nel tempo, soprattutto negli Albi d'Oro della propria disciplina.

La cosa un po' meno legittima e meno positiva – anche se di questo Herbert Plank non ha davvero nessunissima colpa – è quello di vedere il proprio nome riportato spessissimo lontano dai campi di sci, citato a sproposito, ripetuto ossessivamente nei social network, soprattutto in quelli di (velleitario) carattere scientifico. Ripetiamo: Herbert – e a ben vedere neppure Jolanda né Andy – non ha davvero alcuna colpa, eppure è indubbio che quel cognome è il centro d'attrazione del più frequente strafalcione che si trova in Rete (e spesso non solo in Rete, ma anche su autorevole carta stampata) di natura biografico-scientifica. La cosa più curiosa di tutte, almeno secondo chi scrive questo articolo, è che si tratta anche qui di una "caduta": una caduta più indebita che libera, stavolta; ma, a ben vedere, tutte le cadute sono indebite. Stiamo parlando della caduta della "c" dal cognome del padre della fisica quantistica.



4 *Max Planck.*

Max (Karl Ernst Ludwig)) Planck (pi-elle-a-enne-CI-kappa) nasce a Kiel il 23 Aprile 1858. Vivrà quasi novant'anni, forse i novant'anni più complicati di tutta la storia tedesca. Per nascita, ad esempio, si potrebbe quasi classificarlo tra le glorie scientifiche della Danimarca, visto che la martoriata regione dello Schleswig-Holstein, di cui Kiel è capitale, nel 1858 apparteneva alla corona danese; la prima guerra della sua vita Planck la incontra quando aveva solo sei anni, e continuerà a ricordarla sempre. A quel tempo la Germania non esiste ancora, ma non ci vorrà molto che, grazie a un paio di altre guerricciole, la Prussia riesca a unificare la nazione. Attraverserà poi entrambe le due guerre maggiori del Ventesimo Secolo, quelle ancora insuperate per numero di disastri prodotti, ed entrambe gli chiederanno prezzi altissimi da pagare: forse sono gelose perché Max, anziché la guerra, è stato l'iniziatore di una Rivoluzione.

Planck nasce in una famiglia della buona borghesia: suo padre insegna Diritto Costituzionale all'università di Kiel, cosa che peraltro avevano anche fatto – ma insegnando Teologia – sia il nonno che il bisnonno. La famiglia è numerosa, e quando Max ha nove anni è per ragioni accademiche che attraversa tutta la Germania, da nord a sud: suo padre Julius vince una cattedra a Monaco, e tutta la famiglia si trasferisce in Baviera. A differenza di molti altri scienziati famosi, il giovane Planck non mostra una particolare brillantezza scolastica: il suo rendimento è sempre buono, lui è disciplinato, e i genitori non hanno di che lamentarsi, ma non è mai tra i primissimi della classe; l'unica disciplina in cui eccelle è la musica, e si pensa che, da giovane, abbia anche pensato di intraprenderla come professione. Al momento dell'ingresso all'università, era indeciso: aveva una certa attrazione per i grandi principi di conservazione, come quello dell'energia, forse causati da un certo fascino verso l'Assoluto che doveva permeare una famiglia di grandi tradizioni teologiche, ma chiedendo a Philipp von Jolly, professore di fisica all'università di Monaco, se il suo campo di ricerche prometteva bene, il docente rispose che ormai, nel 1874, la fisica era un campo di studi essenzialmente completato, in cui non restava molto da indagare. Non si può legittimamente (e retroattivamente) prendere in giro von Jolly: le Equazioni di

Maxwell erano state pubblicate appena nove anni prima, e sembrava davvero che esse, nella loro suprema eleganza, fossero anche una sorta di pietra tombale della ricerca in fisica, a quei tempi. Certo, il povero docente non poteva immaginare che stesse dando quel consiglio – che certo aveva già ripetuto a decine di aspiranti studenti – proprio a colui che, quasi senza volere, quella pietra tombale era destinato a polverizzarla.

Sembra quasi strano a dirsi, specialmente in questi nostri tempi in cui l'aggettivo "quantistico" si è trasformato in una specie di parola magica buona anche per vendere l'acqua minerale, ma Max Planck è un fisico classico a tutto tondo, persino quando l'aggettivo "classico" è usato proprio in contrapposizione a "quantistico". Come abbiamo già accennato, era davvero affascinato dai grandi principi di conservazione, ed era anche assai preso dalla generalità del Secondo Principio della Termodinamica, che in quanto a vicinanza al concetto di "assoluto" non aveva niente da invidiare ai principi di conservazione. Così alla fine sceglie proprio Fisica e si laurea, bene e in fretta: così bene e in fretta che prima del trentesimo compleanno ha già avuto la preziosa "Habilitation" a Monaco, è diventato professore straordinario di fisica teorica a Kiel e infine docente di ruolo nella prestigiosa Università di Berlino, prendendo la cattedra che, morendo, aveva lasciato libera Kirchhoff.

5 *Planck da giovane (e molto classico)*

Da quel momento in poi, Planck si specializza in Termodinamica e produce una mole impressionante di lavori sull'argomento. Sono tutti lavori memorabili ed eccellenti ma, inutile negarlo, non del tipo che danno fama imperitura al proprio autore. Sono ammirati per lo stile e per l'approccio da tutti i colleghi, e palesano che chi li scrive ha conoscenze vaste e profonde; ma non sono rivoluzionarie. La Rivoluzione arriva quando Planck ha quarantadue anni, nel 1900, e arriva quasi in sordina, quasi controvoglia.

La storia è stranota: la distribuzione dell'energia secondo le lunghezze d'onda è uno dei pochissimi problemi ancora irrisolti della fisica classica. La cosiddetta "radiazione del corpo nero" non si comporta come previsto, e tutto sommato è meglio così, perché se lo facesse si arriverebbe al paradosso che i fisici di allora chiamavano "catastrofe ultravioletta". Planck si mette a studiare la questione: prende le formule consolidate di Wilhelm Wien e di Lord Rayleigh, conscio del fatto che, come lui stesso ebbe a dire in seguito, "*tutta la procedura era un atto di disperazione, perché una interpretazione teorica di quel comportamento doveva essere trovata a ogni costo*". Per farla breve (cosa davvero indegna perché il processo del pensiero dev'essere stato tutt'altro che breve), a un certo punto Planck nota che negli eventi studiati rimane costante il prodotto dell'energia moltiplicato per il tempo; dal punto di vista dimensionale, l'energia moltiplicata per il tempo è ciò che i fisici chiamano "azione", e Planck ipotizza che possano esistere i "quanti di azione" ovvero una sorta di pacchetti indivisibili di azione che non possono essere ulteriormente ridotti. Questo, sembra – e forse per lo stesso Planck nient'altro era che – una specie di escamotage per evitare la catastrofe ultravioletta, ovvero l'innalzarsi senza fine delle frequenze di radiazione che la fisica classica prevedeva ma che gli esperimenti si rifiutavano di rilevare. Metteva d'accordo le aule teoriche con i laboratori, anche se era in netto contrasto con i principi della fisica classica.

Come si è già detto, Planck era uno splendido esempio di fisico classico, e tentò a lungo di risolvere su basi classiche la teoria che lui stesso aveva introdotto. Questo fu, a suo stesso dire, il suo più grande errore; mentre lui dubitava della sua formula e della celeberrima costante h che da lui prende il nome, uno stuolo di giovani fisici leggono la sua memoria rivoluzionaria come la chiave di accesso a un nuovo universo. Einstein e Poincaré prima, Bohr, Schrödinger, Heisenberg, Dirac e molti altri dopo ritengono che quello trovato da Planck sia molto più che un artificio per far tornare i conti, e quando finalmente Planck si renderà conto della cosa, la fisica quantistica ha già fatto passi da gigante.

Da un certo punto di vista, la figura di Max Planck è una delle più tragiche della storia della scienza, pure essendo uno degli scienziati più ricordati e celebrati. Attraversò un gran numero di guerre, perdendo un figlio nella Prima Guerra Mondiale un altro durante la Seconda, messo a morte dagli stessi tedeschi perché giudicato colpevole di aver attentato alla vita di Hitler; durante i difficili anni tra le due guerre mondiali perse anche altre due figlie, gemelle; in tutto ciò c'è anche stato chi lo ha accusato di essersi mostrato troppo accondiscendente con i Nazisti, nonostante avesse fatto molto per proteggere Einstein, e nonostante avesse lasciato la presidenza della Società Kaiser Wilhelm, il maggior centro di ricerca di base della Germania, che teneva da otto anni, perché fortemente contrario alla riorganizzazione della Società che i nazisti stavano imponendo.

Quella Società esiste ancora: è in assoluto l'organizzazione che ha ottenuto di gran lunga più Premi Nobel, in tutte le categorie. Dal 1948, però, ha cambiato nome: da allora si chiama Associazione Max Planck, o per dirlo meglio *Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften,* e non c'è organizzazione scientifica al mondo che possa stargli alla pari. Quando sentite che il tal scienziato è del "Max Planck Institute", non fate l'errore di immaginare un grosso edificio grigio nel centro storico di Berlino: gli Istituti che portano quel nome sono un centinaio, tutti indipendenti, tutti specializzati in un campo ben preciso della ricerca di base, e sparsi per tutta la Germania, oltre che qualcuno anche all'estero: ad esempio, in Italia abbiamo l'onore di ospitarne ben due, uno a Roma e uno a Firenze.

È abbastanza consolante sapere che sui libri di scienza e, soprattutto, su ogni foglio di articoli di ricerca che escono dalla maggiore organizzazione scientifica mondiale, il nome di Max Planck viene sempre scritto con la massima esattezza[2].

[2] Anche se… anche se, pur non rinnegando il senso generale di queste affermazioni conclusive, non possiamo lasciar passare sotto silenzio che solo sedici anni fa si è scoperto che il suo nome di battesimo era in realtà Marx, e non Max. La cosa non avrebbe troppa importanza, visto che è accertato che Planck non usò mai il nome Marx (in tedesco è un'abbreviazione di Markus) e che certamente i genitori del fisico non avevano intenzione di omaggiare Karl Marx, viste le loro opinioni politiche e religiose: ma in quest'articolo non possiamo non notare che questa altro non è che l'ennesima "caduta libera" di una consonante, che ci permette, tra l'altro, di chiudere l'articolo in un cerchio, visto che era iniziato con un frase di Marx.

2. Problemi

2.1 Un problema per Nero Wolfe

...in realtà, è "Un problema per Archie Goodwin"...

Siamo ragionevolmente sicuri di avervelo già detto, ma ve lo ripetiamo: a Rudy piacciono i "gialli", in particolare[3] quelli dove l'investigatore si sposta poco o niente. Quindi nello scaffale dedicato Nero Wolfe la fa abbastanza da padrone, anche se i suoi (di NW) incontri con la matematica sono tutt'altro che memorabili. Forse sarà per questo che qui il conto viene rifilato a Archie.

L'investigazione in corso è affollata; infatti, sono coinvolte 80 persone, tra le quali vi sono il colpevole e un testimone, entrambi ignoti.

Quello che il nostro amabile ciccione sa è che il testimone, se convocato in assenza del colpevole, dirà tutto quello che sa; se invece il colpevole sarà presente, se ne starà zitto senza rivelare il suo ruolo.

Archie ha ricevuto il non troppo piacevole incarico di organizzare una serie di riunioni (una al giorno: le orchidee non possono aspettare!) durante almeno una delle quali sia presente il testimone ma non l'assassino, in modo tale che questo, spontaneamente, dica tutto.

Date una mano ad Archie: spiegategli come organizzare gli incontri in modo da soddisfare il capo, risolvendo il caso in *dodici* giorni.

"Rudy, come mai "dodici" è in corsivo?"

Beh, per estetica. Nel senso che abbiamo trovato una bellissima (secondo noi) soluzione che permette di risolvere il problema in al più 12 giorni, ma a quanto ci dicono esiste una generalizzazione (quindi, n persone, ma sempre un colpevole e un testimone) che, se applicata al caso corrente, dà una soluzione più veloce (nel caso specifico, nove giorni); vedete voi quale preferite trovare.

...cosa c'è per pranzo?

2.2 Nanoscacchiera

...e da dama, per di più!

"Nano" nel senso che è solo 4×4, ma vi servono sedici pedine truccate, nere da una parte e bianche dall'altra.

All'inizio, tutte le vostre pedine, ben ordinate una per casella sulla scacchiera, mostrano la faccia nera; il vostro compito è di averle a colori alternati sia per righe che per colonne (insomma, "a scacchiera"), con la prima in alto a sinistra nera.

Detto così, sembra facile, ma non vi abbiamo ancora spiegato in cosa consiste la "mossa". In pratica, voi dovete:

1. scegliere un quadrato 2×2 e capovolgere tutte le pedine contenute nel quadrato
2. correre una maratona in meno di due ore.

"Rudy, a cosa serve la seconda parte della mossa, a farci dimenticare la strategia?" No, a minimizzare il numero delle mosse.

Generalizzazione? Come, "Generalizzazione"? Ma pensate in grande, no? Allargate la scacchiera! Anche se... Qualcuno ha una sedicina di pedine *poliedriche*? No, no, stiamo scherzando. Quasi.

[3] Ma, come dicono gli avvocati americani, "*not limited to...*": anche Maigret, per evidenti motivi, ha una buona presenza. E anche... ma non divaghiamo.

3. Bungee Jumpers

Calcolate il prodotto tra il *Metanumero della Bestia* (66...66, formato da 666 repliche della cifra "6") e il *Numero della Metàbestia* (33...33, formato da 666 repliche della cifra "3").

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Aprile!

Forza e coraggio, che il mese scorso vi abbiamo lasciati a stecchetto di soluzioni.

4.1 [301]

4.1.1 Random Carnival

Partiamo subito dal testo del primo problema di febbraio:

> *Alice e Doc preparano 500 coriandoli ciascuno, con altezza e larghezza casuali comprese tra zero e uno. Doc genera due numeri casuali, e taglia un coriandolo con altezza pari al primo valore generato e larghezza uguale al secondo per poi e passare al coriandolo successivo con lo stesso metodo. Alice invece genera un numero casuale e ritaglia un quadratino della dimensione richiesta. Qual è il rapporto delle aree tra i "coriandoli medi" di Doc e Alice?*

Come facilmente potete immaginare, non commenterò troppo le soluzioni arrivate, ma complimenti in anticipo a tutti quelli che hanno risposto o hanno pensata a questo problema, che rovina il carnevale sporcandolo di probabilità.

Partiamo da ***Valter***:

> "A naso" direi che è superiore l'area media coperta dai coriandoli di Alice (dei quadrilateri con stesso perimetro, il quadrato è quello con area maggiore).
>
> Per calcolare l'area dei "coriandoli medi" di Alice e Doc mi servo dell'integrale:
> Alice:
>
> $$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \approx 0.33333$$
>
> Questa è anche la loro area media in quanto dovrei dividerla la 1 (in quanto l'integrale è definito tra zero e uno, x è il suo lato).
>
> Come controprova ho utilizzato, come incognita, la sua diagonale:
>
> $$\frac{\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{2}\,dx}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3} \approx 0.33333$$
>
> Qui ho dovuto dividere per √2 in quanto è definito da 0 a √2 (mi conforta che i due calcoli diano lo stesso risultato).
>
> Doc:
>
> $$\frac{1}{2}\int_0^2 \int_x^0 \frac{1}{2}\,y\left(\frac{x}{2} - 1 - \frac{y}{2}\right) dy\,dx = \frac{1}{4}$$
>
> Qui ho dovuto usare il doppio integrale per coprire tutte le aree (come prima ho diviso per il range cui è definito l'integrale).
>
> Il loro rapporto dovrebbe valere 4/3 ≈ 1.333 a favore di Alice. Come controprova ho scritto due righe di codice per verificare.

Al solito le righe di codice sono rimaste con noi. Non solo quelle di ***Valter***, ma anche quelle di ***Salvatore***, che scrive:

> Premesso che non ho la più pallida idea di come approcciare un problema del genere, lo trovo tuttavia molto interessante e sono impaziente di leggere le soluzioni proposte

dagli altri lettori. Nel frattempo propongo una soluzione di tipo empirico al quesito, con un programmino scritto in LISP (un linguaggio di programmazione antico, datato 1958(!), ma ancora potente e molto affascinante). D'altro canto non viene richiesta esplicitamente alcuna dimostrazione, ma solo una risposta numerica, per cui ho scelto di affrontare il problema in maniera alternativa ed originale.

Il programma fa esattamente quello che dice il testo del problema: genera due numeri casuali tra 0 e 1 e ne calcola il prodotto, poi un altro numero casuale tra 0 e 1 e ne calcola il quadrato. Il programma ripete questi calcoli numerose volte (500, nello specifico), ogni volta sommando in maniera incrementale i prodotti e i quadrati calcolati e calcolando infine il loro rapporto. Ecco il codice:

(…)

Ho simulato la generazione di 500 coriandoli per un numero di volte via via crescente, calcolando ogni volta il valore medio dei rapporti delle aree:

***** Valore medio rapporti aree *****

***** coriandoli Doc rispetto Alice *****

500 coriandoli x 10 volte: 0.76381874

500 coriandoli x 20 volte: 0.75152075

500 coriandoli x 30 volte: 0.7408901

500 coriandoli x 50 volte: 0.74647844

500 coriandoli x 100 volte: 0.7484633

500 coriandoli x 500 volte: 0.7517394

500 coriandoli x 1000 volte: 0.7515489

500 coriandoli x 2000 volte: 0.7502195

A quanto sembra, i coriandoli di Doc coprono mediamente una superficie che è tre quarti di quella dei coriandoli di Alice.

Il codice, lo sapete, basta chiederlo. Vediamo ora la versione di ***Alberto R.***:

Non è detto (dimenticanza?), ma diamo per sottinteso che i numeri scelti random nell'intervallo 0-1 lo siano con densità di probabilità uniforme su tutto l'intervallo.

Che il coriandolo quadrato sia mediamente più grande di quello rettangolare lo si vede subito osservando che le due figure hanno mediamente lo stesso perimetro ed è noto che, a parità di perimetro, il quadrato è il rettangolo con l'area massima.

Un po' più difficile trovare quanto più grande.

Siano X, Y i due lati del coriandolo rettangolare di area A =X ·Y. Qui A è una variabile aleatoria dipendente espressa in funzione delle variabili aleatorie indipendenti X, Y. Ma la funzione è **lineare** sia rispetto a X che rispetto a Y quindi risulta

Amedia = Xmedio · Ymedio = (1/2) · (1/2) = 1/4

Invece nel coriandolo quadrato abbiamo A = X^2 e siamo fregati perché A non dipende linearmente da X per cui non possiamo calcolare Amedia semplicemente sostituendo X con Xmedio. Non ci resta che integrare e dividere per l'ampiezza dell'intervallo di integrazione (che però è 1)

Amedia = (Integrale di X^2 da 0 a 1) / 1 = 1/3

In conclusione l'area del coriandolo di Doc è, in media, 3/4 dell'area di quello di Alice.

Incredibile, i risultati sono tutti uguali. Anche ***Galluto***:

Il coriandolo rettangolare medio di Doc ha sia altezza che base pari a: $\int_0^1 x$ / 1 = 1/2 e quindi la sua area è $\int_0^1 x$ / 1 $\int_0^1 x$ / 1 = (1/2)² = 1/4.

Il coriandolo quadrato medio di Alice ha area uguale a: $\int_0^1 x^2$/ 1 = 1/3.

Quindi i coriandoli di Alice sono più grandi (e quindi dovrà pulire una superficie maggiore) e il rapporto è 4:3.

Non ci spaventiamo e andiamo avanti.

4.1.2 Taglia e cuci

Un bel problema geometrico rovinato dalla domanda finale, accidenti:

> *Dato un nastro di 4 metri, lo tagliamo in un certo punto e la parte sinistra del nastro andrà a formare un cerchio, mente quella destra andrà a formare un quadrato. Dove tagliate, per avere l'area totale (cerchio più quadrato) massima? Dove tagliate, per ottenere l'area totale minima? Se il taglio è casuale, che area totale vi aspettate?*

Bene, cominciamo, come sempre, da ***Valter***:

> Indico con x la lunghezza, da sinistra, dove si effettua il taglio. La formula delle due aree dovrebbe valere:
>
> - area cerchio: $\pi(x/2\pi)^2 = x^2/4\pi$ (con $x/2\pi$ ottengo il suo raggio)
> - area quadrato: $\{[(4–x)]/4\}^2$ (con $4–x)]/4$ ottengo il suo lato).
>
> La loro somma, quindi, dovrebbe valere: $x^2/4\pi + \{[(4–x)]/4\}^2$
>
> La sua derivata è: $x/2\pi + x/8 – 1/2$, che vale 0 per: $x = 4\pi/(4+\pi)$.
>
> Questo è il suo punto di minimo e, quindi, l'area minima è: ≈0.5601.
>
> L'area massima si ha con tutto il nastro per il cerchio: $4/\pi$=1.27324.
>
> L'area, se taglio casuale, si dovrebbe calcolare usando l'integrale:
>
> $$\int_0^4 \left(\frac{x^2}{4\pi} + \left(\frac{4-x}{4} \right)^2 \right) dx = \frac{4\,(4+\pi)}{3\pi} \approx 3.0310$$
>
> Siccome è definito tra 0 e 4 penso di doverlo dividere per 4: ≈0.7577.

E continuiamo ancora con ***Alberto R.***, da me spesso soprannominato "il grande fustigatore":

> Sia x la parte di nastro destinata al cerchio che, quindi, avrà area $(x^2)/4\pi$ e $4–x$ quella destinata al quadrato di area $(1–x/4)$^2.
>
> La somma dei due valori suddetti è l'area totale A(x) la cui derivata si annulla per $x=4\pi/(4+\pi)$ = 1,7596… dove c'è un minimo di 0,2608…mq
>
> Il metodo di annullare la derivata non ci fornisce anche il massimo (la derivata ha un solo zero in corrispondenza del minimo) per il semplice motivo che il massimo si verifica all'estremità destra dell'intervallo, per x=4, cioè quando tutto il nastro è usato per il cerchio. Ciò accade perché, come sa anche un pastore analfabeta, il recinto tondo è quello che, a parità di lunghezza, contiene più pecore.
>
> Se la lunghezza x è scelta a caso con densità di probabilità uniforme (vedi nota) nell'intervallo 0 – 4 allora l'area "attesa" non è altro che il valor medio della funzione A(x) cioè l'integrale della A(x) da 0 a 4, diviso per 4 che è l'ampiezza dell'intervallo di integrazione.
>
> L'area attesa così calcolata risulta di 0,75775 mq
>
> Nota:
>
> Come nell'altro problema di questo numero, "Random Carnival" anche qui avete supposto che quando si parla di un numero scelto a caso in un dato intervallo si debba **sottintendere** che la scelta va fatto con distribuzione uniforme di probabilità. Non sono molto d'accordo: in matematica è meglio evitare i sottintesi. Anni fa ebbi scrivervi (cito a memoria): Chiunque dice "un numero scelto a caso" senza precisare come, andrebbe punito con N frustate sul sedere (dove N è … un numero scelto a caso!).

Ecco, qui sono talmente d'accordo con ***Alberto***, (e si capisce bene il motivo del soprannome) anche senza la sua premessa… se uno dice "a caso", vai di frustate sul sedere e vediamo se gli passa la voglia di probabilità. Ma abbiamo ancora la versione di ***Galluto***, che non arriva a nuove conclusioni:

> La formula che mi dà l'area totale è la seguente:

$A_T = A_C + A_Q = (X/2\pi)^2 * \pi + ((4–X)/4)^2$ ossia $A_T = (4+\pi)/16\pi * X^2 – 1/2 * X +1$

dove X è la parte di nastro usata per il cerchio e (4–X) quella usata per il quadrato

Prima domanda: Area totale massima; uso tutto il nastro per il cerchio (quindi X = 4) e niente per il quadrato; risultato 1,2732 mq

Seconda domanda: Area totale minima; faccio la derivata della funzione più sopra e uguaglio a zero per trovare il minimo; risultato:

$X = 4\ \pi/(4+\pi) = 1,7596$ m e $A_T = 0,5601$ mq

Terza domanda: Area totale con X casuale; faccio l'integrale della funzione per X compreso tra 0 e 4, e divido per 4 il risultato:

$A_T = 1/4 * 4/3 * (4+\pi)/\pi = 0,7577$ mq

Passiamo avanti, il numero di febbraio aveva un problema bonus.

4.1.3 PREMIUM!

Il problema, stranoto soprattutto in questa rivista perché lo citiamo spesso, andava risolto "nel modo difficile":

Due treni sono a 60 chilometri uno dall'altro e stanno andando uno incontro all'altro, alla velocità di 30 chilometri all'ora.

Una mosca in grado di viaggiare indefinitamente a 60 chilometri all'ora parte da un treno e vola verso l'altro treno; quando lo raggiunge, gira in tempo zero e vola verso il primo treno, e avanti così sin quando i due treni si incrociano: in quel momento, la mosca si ferma. Quanta strada percorre la mosca?

Arriva sempre per prima, la soluzione di ***Valter***:

Ho un vago ricordo di aver affrontato, in passato, un problema simile.
La soluzione "classica" potrei averla "recuperata" da tale memoria:
- assumendo uno dei treni fermo, l'altro gli va incontro a 30+30=60Km/h
- essendo distanti 60Km, si incontrano, quindi, esattamente dopo un'ora
- la mosca vola a 60Km/h e si ferma solo quando i treni si incontrano
- di conseguenza vola per un'ora a 60Km/h, percorrendo, quindi, 60 Km.

Per risolverlo alla von Neumann, sommo una serie infinita di tempi $t_1\ t_2 \dots$
- i t_x sono i tempi tra quando raggiunge un treno e il successivo (per t_1 dalla partenza al momento in cui incontra il primo treno)
- t_0 è il momento della partenza che, quindi, nella serie, vale 0
- sapendo già la soluzione: 60 Km, la somma dovrebbe, quindi fare 1.

I tempi li calcolo, ottenendoli man mano, risolvendo l'equazione (cioè ottenuto t_1, risolvo per t_2 e così di seguito per tutti i t_x):
- (A–B) = C, con:
-- A distanza dei treni all'*x*-esimo incontro della mosca con un treno (conosco la distanza iniziale di 60 Km, le successive grazie ai t_x)
-- B Km di volo della mosca da un incontro con un treno al successivo
-- C = distanza percorsa dal treno cui va incontro durante il suo volo
- B e C li ottengo con l'incognita t_{x+1} moltiplicata per le due velocità
- quindi partendo da t_0 man mano riesco ad ottenere i $t_1\ t_2 \dots$ della serie.

La cosa dovrebbe funzionare così:
- $t_0 = 0$ (tempo alla partenza)
- t_1 (tempo necessario alla mosca per incontrare la prima volta un treno)
- 60 (km distanza due treni)
- $60t_1$ (km percorsi dalla mosca)
- $30t_1$ (km percorsi dal treno cui va incontro)
- quindi: $t_1 = 60/90$
- t_2 (tempo necessario alla mosca ad incontrare la seconda volta un treno)
- $60 – 60t_1$ (distanza due treni)
- $60t_2$ (km percorsi dalla mosca)
- $30t_2$ (km percorsi dal treno cui va incontro)

- quindi: $t_2 = (60–60t_1)/90 = [60–60(60/90)]/90$
- ….

La serie si può semplificare scalando:
- le velocità (mosca/treni) da 60 e 30 Km/h a 2 e 1 Km/h
- la distanza iniziale tra i due treni da: 60 Km a: 2 Km.

La serie dei tempi di volo tra i treni dovrebbe essere:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(2-\frac{2\times 2}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(\left(2-\frac{2\times 2}{3}\right)-\frac{2}{3}\left(2-\frac{2\times 2}{3}\right)\right)+$$
$$\frac{1}{3}\left(\left(\left(2-\frac{2\times 2}{3}\right)-\frac{2}{3}\left(2-\frac{2\times 2}{3}\right)\right)-\frac{2}{3}\left(\left(2-\frac{2\times 2}{3}\right)-\frac{2}{3}\left(2-\frac{2\times 2}{3}\right)\right)\right)+\cdots$$

che si dovrebbe, quindi, semplificare a (me la sono fatta calcolare da un tool):

$$2\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n}$$

Infatti, il valore della formula si ottiene calcolando:
- due volte la serie dei reciproci delle potenze di *n*=3
- e sottraendo il primo termine della serie: $(1/3)^0 = 1$ (perché manca il primo termine della serie geometrica)
- le serie geometriche, nel caso di *n*>1, valgono *n*/(*n*–1)
- quindi ottengo: 2*[3/(3–1) – 1] = 1, come desiderato.

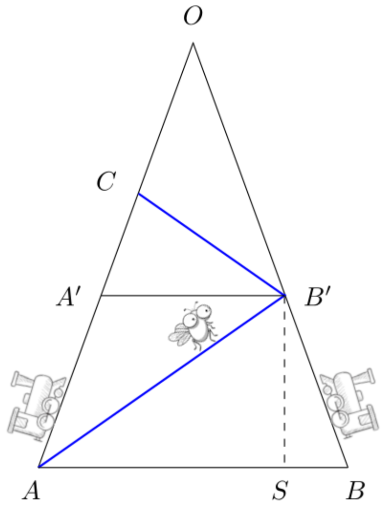
Mi sono confrontato sull'argomento, tramite scambio di mail, con un amico. Lui ha trovato una serie geometrica che fornisce direttamente la distanza. Grazie ad essa ho ripensato la mia per la somma dei tempi, semplificandola:
- pensando fermi i due treni la mosca viaggia incontro ad un treno a 90Km/h (90 Km/h si ha sommando la sua velocità di 60 Km/h e del treno di 30 Km/h)
- impiega quindi ad incontrare prima volta un treno: (1/90)*60 = 2/3 di ora (cioè (1/velocità] per distanza = [tempo/spazio]*spazio = tempo impiegato)
- dei 60 Km cui distano i treni quindi ne ha ora percorsi: (2/3)*60 = 40 Km
- nel secondo viaggio, perciò, viaggerà per 1/3 dei 2/3 di ora del suo primo
- iterando il ragionamento la serie diventerebbe: (2/3)*[sommatoria$(1/3)^x$] (con x che va da 0 a infinito, la serie di potenze di 1/3 converge a 3/2)
- risolvendo, si ha il tempo, totale, di volo della mosca: (2/3)*(3/2) = 1 h
- con tale tempo, ottengo i Km percorsi dalla mosca: 1 h * 60 Km/h = 60 Km.

L'amico ha notato che ho "barato" usando 60 sia come velocità che distanza. In pratica ne ho approfittato per ottenere i 2/3 che servivano al mio scopo. Mi ha invitato, quindi, a ricalcolare il tutto col la velocità espressa in m/s (in questo modo non posso servirmi della coincidenza fra distanza e velocità):
- i due treni si vanno incontro alla velocità di (30'000+30'000)/3'600 = 50/3 m/s
- la mosca viaggia verso ad uno dei treni, alternativamente, alla velocità 25 m/s
- si ottiene sommano la sua velocità e quella del treno e dividendo per 3'600 s (che tradotto in valori numerici vale: [30'000 m+60'000 m] / 3'600 s = 25 m/s)
- nel primo tratto verso un treno impiega quindi (1/25 s/m) * 60'000 m = 2'400 s (che tradotto vale: [1/velocità] per distanza = [tempo/spazio]*spazio = tempo)
- dei 60'000 m, quindi, ne ha ora percorsi 2'400 s*(60'000/3'600 m/s) = 40'000 m
- ha viaggiato, quindi, per 40'000 m invece dei 60'000 cui distavano i due treni
- pure i treni, cumulativamente, dopo 2'400 s hanno percorso, in tutto, 40'000 m (si ha moltiplicano la loro velocità cumulativa per il tempo: [50/3 m/s]*2'400)
- in quel momento la loro distanza reciproca è di 60'000 m – 40'000 m = 20'000 m (questo significa che sono a: 20'000 m/60'000 m = 1/3 della distanza iniziale)
- nel suo secondo viaggio quindi, la mosca viaggia per 1/3 dei 2'400 s del primo (2'400 s è il tempo che ha impiegato nel primo tragitto, che era di: 60'000 m)
- questo perché, prima ci aveva messo 2'400 s e ora fa 1/3 del tragitto iniziale
- iterando il ragionamento, si ha la serie geometrica: 2'400*[sommatoria $(1/3)^x$] (con l'esponente x che va da 0 a infinito, è la serie geometrica da risolvere)
- le serie geometriche, quando *n* è > di 1, nel nostro caso n=3, valgono *n*/(*n*–1)

- usando tale formula, la serie geometrica delle potenze di 1/3, converge a 3/2 (si ha in questo modo il tempo complessivo dei tragitti [3/2]*2'400 = 3'600 s).

Bene, complimenti a tutti quelli che hanno seguito il ragionamento. Adesso vediamo la versione del trio ***AAL***:

Rappresentiamo lo spazio orizzontalmente e il tempo verticalmente, per cui la situazione dei due treni con la mosca può essere rappresentata come in figura (la mosca è rappresentata in blu, e sono rappresentati solo due degli infiniti segmenti che percorre).



I treni si trovano in A e B e si muovono a velocità costante e opposta, e la mosca vola da un treno all'altro, cambiando direzione istantaneamente. I triangoli OAB e OA'B' sono simili per costruzione, e di conseguenza anche OAB' e OB'C lo sono. Questo è facilmente verificabile ricordando che gli angoli BAB' e A'B'C sono entrambi uguali ad arctan(1/V) dove V è la velocità della mosca rispetto al terreno.

Per definizione di velocità si ha

$$\frac{AS}{SB} = \frac{V}{v}$$

Dove v è la velocità dei treni rispetto al terreno. Di conseguenza, si ha

$$AB = AS + SB = AS\left(1 + \frac{v}{V}\right) \quad \Longrightarrow \quad AS = \frac{AB}{\left(1 + \frac{v}{V}\right)}$$

Dove AS è la distanza percorsa dalla mosca nel primo tragitto. Il tragitto successivo della mosca è dato dalla stessa formula, con A'B' sostituito al posto di AB nell'espressione precedente. Dal momento che OAB e OA'B' sono simili, avremo $A'B' = \alpha AB$ per qualche α. Si ricava facilmente che

$$A'B' = AB - 2 \times SB = AS - SB = AS\left(1 - \frac{v}{V}\right) = AB\frac{\left(1 - \frac{v}{V}\right)}{\left(1 + \frac{v}{V}\right)}$$

da cui

$$\alpha = \frac{\left(1 - \frac{v}{V}\right)}{\left(1 + \frac{v}{V}\right)}.$$

Iterando il ragionamento, la distanza totale D percorsa dalla mosca sarà AS moltiplicata per una serie geometrica di ragione α. Si ottiene dunque

$$D = AS\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n = \frac{AB}{\left(1+\frac{v}{V}\right)}\frac{1}{1-\frac{\left(1-\frac{v}{V}\right)}{\left(1+\frac{v}{V}\right)}} = AB\frac{V}{2v}$$

Nel problema abbiamo V=2v per cui D=AB.

Bellissima l'idea del triangolo, vero? Il nostro trio non cessa mai di stupire. Abbiamo ancora la versione di ***Galluto***, aiutato da ***Salvatore*** (non lo stesso di prima però):

Per questo, ho coinvolto ***Salvatore***, che è un grande esperto di serie (numeriche, non TV) e che ha fatto quasi tutto il lavoro, soprattutto per le estensioni.

1) Caso Base: La velocità della mosca è doppia della velocità dei treni, che hanno la stessa velocità. D è la distanza iniziale tra i due treni.

Il primo incontro avviene a 2/3 della distanza D.

Il treno percorre 1/2 della distanza percorsa dalla mosca. 1/3+2/3=1

Per il secondo tratto vale il ragionamento del primo. Ma la distanza ora è 1/3 D

Infatti, quando la mosca inverte la direzione il primo treno si troverà a 1/3 dal suo punto di partenza, e la mosca a 2/3. (2/3–1/3=1/3)

Quindi dopo il secondo tratto la mosca ha percorso 2/3+ 2/3 * 1/3 della distanza D

Al terzo incontro avremo D* 2/3 (1+1/3+(1/3)^2+ (1/3)^3). Lo stesso per i successivi incontri.

Abbiamo quindi la serie

$$d = D\ 2/3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}$$

Dato che:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x}\ ;\ \ 0 \le x < 1$$

$$d = D\ \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} = D\ \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = D\ \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right) = D$$

Estensioni!

2) I due treni viaggiano ancora alla stessa velocità, ma la velocità della mosca non è doppia, bensì "a" volte quella dei treni (con a maggiore di 1, altrimenti la mosca si appiccica ad un treno, e non necessariamente intero)

Il primo incontro avviene a $a/(a+1)$ della distanza D. Il treno percorre $1/a$ della distanza percorsa dalla mosca. Per il secondo tratto vale il ragionamento del primo. Ma la distanza ora è $(a–1)/(a+1)$

Infatti, quando la mosca inverte la direzione il primo treno si troverà a $1/(a+1)$ della distanza iniziale, e la mosca ad $a/(a+1)$; $(a/(a+1)–1/(a+1)=(a–1)/(a+1)$

Quindi dopo il secondo tratto la mosca avrà percorso $a/(a+1)$ (1+ $(a–1)/(a+1)$

Iteriamo come nel caso base…

$$d = D\frac{a}{a+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n = D\ \frac{a}{a+1}\left(\frac{1}{1-\frac{a-1}{a+1}}\right) = D\ \frac{a}{a+1}\frac{a+1}{2} = D\ \frac{a}{2}$$

3) I due treni hanno velocità diverse, e la velocità della mosca è a_1 volte quella del primo treno (quello che parte dallo stesso punto della mosca), e a_2 volte quella del secondo (quello verso il quale la mosca vola nel primo tratto)

Poniamo D1 = D la distanza tra i due treni all'inizio del processo

Tratto 1; La mosca si muove verso il treno 2. L'incontro avviene a distanza

$$d_1 = D_1 \frac{a_2}{1+a_2}$$

Infatti, la velocità relativa tra i due treni in modulo è pari alla somma delle velocità dei due treni. Il primo incontro avviene al tempo *t* pari a $D_1/(V_m+Vt_2)$. Il primo percorso $d_1=V_m * D_1/(Vm+Vt_2) = D_1 * 1/(1+1/a_2)$.

Tratto 2; La mosca si muove verso il treno1. Quando inizia il percorso verso T_1, il treno T_1 ha già percorso una distanza una parte del percorso. La distanza che indichiamo con D_2 tra la mosca e il treno T_1 è pari a:

$$D_2 = d_1 - D_1 \frac{a_2}{a_1(1+a_2)} = D_1\left(\frac{a_2}{1+a_2} - \frac{a_2}{a_1(1+a_2)}\right) = D_1 \frac{a_2(a_1-1)}{a_1(a_2+1)}$$

Infatti, $t= D_1/(Vm+Vt_2)$ del primo incontro, T_1 ha percorso $Vt_1 * D_1/(Vm+Vt_2)= D_1/(a_1+a_1/a_2)=D_1\, a_2/(a_1(1+a_2))$

Per calcolare il secondo percorso usiamo la stessa formula di prima. La distanza è D2 e dobbiamo usare a1 perché stiamo andando verso T1.

$$d_2 = D_2 \frac{a_1}{1+a_1} = D_1 \frac{a_2(a_1-1)}{a_1(a_2+1)} \frac{a_1}{1+a_1} = D_1 \frac{a_2}{(a_2+1)} \frac{(a_1-1)}{(a_1+1)}$$

Tratto 3; Applichiamo lo stesso procedimento del tratto 1. La distanza D_3 si calcola come per il tratto 2 per tenere conto che il T_2 si è avvicinato. Ovviamente bisogna invertire a1 con a2

$$D_3 = D_2 \frac{a_1(a_2-1)}{a_2(1+a_1)} = D_1 \frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}$$

Per calcolare il terzo percorso usiamo la stessa formula di prima. La distanza è D_3 e dobbiamo usare a_2 perché stiamo andando verso T_2.

$$d_3 = D_3 \frac{a_2}{1+a_2} = D_1 \frac{a_2}{(a_2+1)} \frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}$$

Tratto 4; La mosca si muove verso il treno1. Usiamo lo stesso procedimento (tratto 2)

$$D_4 = D_3 \frac{a_2(a_1-1)}{a_1(a_2+1)} = D_1 \frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)} \frac{a_2(a_1-1)}{a_1(a_2+1)} = D_1 \frac{a_2}{a_1} \frac{(a_1-1)^2\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)^2}$$

$$d_4 = D_4 \frac{a_1}{1+a_1} = D_1 \frac{a_2}{(a_2+1)} \frac{(a_1-1)^2\,(a_2-1)}{(a_1+1)^2\,(a_2+1)}$$

Tratto 5; La mosca si muove verso il treno 2. Usiamo lo stesso procedimento (tratto 3)

$$D_5 = D_4 \frac{a_1(a_2-1)}{a_2(1+a_1)} = D_1 \frac{a_2}{a_1} \frac{(a_1-1)^2\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)^2} \frac{a_1(a_2-1)}{a_2(1+a_1)} = D_1 \frac{(a_1-1)^2\,(a_2-1)^2}{(a_1+1)^2\,(a_2+1)^2}$$

$$d_5 = D_5 \frac{a_2}{1+a_2} = D_1 \frac{a_2}{1+a_2} \frac{(a_1-1)^2\,(a_2-1)^2}{(a_1+1)^2\,(a_2+1)^2}$$

Tratto 6; La mosca si muove verso il treno 1. Usiamo lo stesso procedimento (tratto 2)

$$D_6 = D_5 \frac{a_2(a_1-1)}{a_1(a_2+1)} = D_1 \frac{a_2}{a_1(a_2+1)} \frac{(a_1-1)^3\,(a_2-1)^2}{(a_1+1)^2\,(a_2+1)^2}$$

$$d_6 = D_6 \frac{a_1}{1+a_1} = D_1 \frac{a_2}{(a_2+1)} \frac{(a_1-1)^3\,(a_2-1)^2}{(a_1+1)^3\,(a_2+1)^2}$$

I vari tratti sono necessari per trovare una formula recursiva. Completiamo con i tratti 7 e 8

Tratto 7; La mosca si muove verso il treno 2. Usiamo lo stesso procedimento (tratto 3)

$$D_7 = D_6 \frac{a_1(a_2-1)}{a_2(1+a_1)} = D_1 \frac{(a_1-1)^3\,(a_2-1)^3}{(a_1+1)^3\,(a_2+1)^3}$$

$$d_7 = D_7 \frac{a_2}{1+a_2} = D_1 \, \frac{a_2}{1+a_2} \, \frac{(a_1-1)^3 \, (a_2-1)^3}{(a_1+1)^3 \, (a_2+1)^3}$$

Tratto 8; La mosca si muove verso il treno 1. Usiamo lo stesso procedimento (tratto 2)

$$D_8 = D_7 \frac{a_2(a_1-1)}{a_1(a_2+1)} = D_1 \, \frac{a_2}{a_1(a_2+1)} \, \frac{(a_1-1)^4 \, (a_2-1)^3}{(a_1+1)^3 \, (a_2+1)^3}$$

$$d_8 = D_8 \frac{a_1}{1+a_1} = D_1 \, \frac{a_2}{(a_2+1)} \, \frac{(a_1-1)^4 \, (a_2-1)^3}{(a_1+1)^4 \, (a_2+1)^3}$$

I tratti dispari (pari) hanno in comune la direzione del moto e la possibilità di trovare una iterazione

Riepiloghiamo i tratti dispari e quelli pari

Elenco percorsi d dispari

$$d_1 = D_1 \frac{a_2}{1+a_2}$$

$$d_3 = D_1 \, \frac{a_2}{(a_2+1)} \frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}$$

Possiamo scrivere

$$d_3 = d_1 \frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}$$

$$d_5 = D_1 \, \frac{a_2}{1+a_2} \, \frac{(a_1-1)^2 \, (a_2-1)^2}{(a_1+1)^2 \, (a_2+1)^2}$$

Possiamo scrivere

$$d_5 = d_1 \left[\frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}\right]^2$$

$$d_7 = D_1 \, \frac{a_2}{1+a_2} \, \frac{(a_1-1)^3 \, (a_2-1)^3}{(a_1+1)^3 \, (a_2+1)^3}$$

Possiamo scrivere

$$d_7 = d_1 \left[\frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}\right]^3$$

Percorso dei termini dispari

$$d_d = d_1 + d_3 + d_5 + d_6 + \cdots = d_1 \, \sum_0^{\infty} \left[\frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}\right]^n$$

n=0 corrisponde a d_1, n=1 corrisponde d_3, n=2 d_5, ……

Elenco percorsi d pari

$$d_2 = D_1 \frac{a_2}{(a_2+1)} \frac{(a_1-1)}{(a_1+1)}$$

$$d_4 = D_1 \frac{a_2}{(a_2+1)} \, \frac{(a_1-1)^2 \, (a_2-1)}{(a_1+1)^2 \, (a_2+1)}$$

Possiamo scrivere

$$d_4 = d_2 \, \frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}$$

$$d_6 = D_1 \, \frac{a_2}{(a_2+1)} \frac{(a_1-1)^3 \, (a_2-1)^2}{(a_1+1)^3 \, (a_2+1)^2}$$

Possiamo scrivere

$$d_6 = d_4 \; \frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}$$

$$d_6 = d_2 \; \left[\frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}\right]^2$$

$$d_8 = D_1 \; \frac{a_2}{(a_2+1)} \; \frac{(a_1-1)^4\,(a_2-1)^3}{(a_1+1)^4\,(a_2+1)^3}$$

Ovvero

$$d_8 = d_6 \; \frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}$$

$$d_8 = d_2 \; \left[\frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}\right]^3$$

Percorso dei termini pari

$$d_p = d_2 + d_4 + d_6 + d_8 + \cdots = d_2 \; \sum_0^\infty \left[\frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}\right]^n$$

n=0 corrisponde a d_2, n=1 corrisponde d_4, n=2 d_6, ……

Somma dei percorsi pari e dispari

$$d_d = d_1 + d_3 + d_5 + d_6 + \cdots = d_1 \; \sum_0^\infty \left[\frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}\right]^n$$

$$d_p = d_2 + d_4 + d_6 + d_8 + \cdots = d_2 \; \sum_0^\infty \left[\frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}\right]^n$$

La sommatoria è uguale per le due serie

$$d_T = \sum_0^\infty \left[\frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}\right]^n \; (d_1 + d_2)$$

La sommatoria è la serie geometrica con il termine x <1. Quindi

$$d_T = \frac{1}{1 - \frac{(a_1-1)\,(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}} \; (d_1 + d_2)$$

$$d_T = \frac{1}{1 - \frac{(a_1-1)(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}} \; D_1 \frac{a_2}{a_2+1}\left(1 + \frac{(a_1-1)}{(a_1+1)}\right)$$

$$d_T = \; D_1 \; \frac{1}{1 - \frac{(a_1-1)(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}} \; \frac{a_2}{a_2+1}\left(\frac{(a_1+1)+(a_1-1)}{(a_1+1)}\right)$$

$$d_T = \; D_1 \; \frac{1}{1 - \frac{(a_1-1)(a_2-1)}{(a_1+1)\,(a_2+1)}} \; \frac{2\,a_1 a_2}{(a_2+1)(a_1+1)}$$

Se $a_1 = a_2$, la formula torna ad essere quella del caso 2.

Se $a_1 = a_2 = 2$, torniamo al caso base.

Complimenti a questo dinamico duo! Ci fermiamo qui, è tempo di dare spazio alle soluzioni dei problemi di marzo.

4.2 [302]

4.2.1 Texas Hold'em

Giochiamo a carte, e già si sente un certo profumo di probabilità… e per confermare il lezzo la domanda contiene già la benedetta parola:

> *Per decidere il primo mazziere il padrone di casa distribuisce le carte scoperte a partire dalla persona alla sua sinistra e si ferma al primo asso: la persona che l'ha ricevuto è il primo mazziere. Questo sistema, è onesto o avvantaggia qualcuno? E, nel secondo caso, in funzione del numero dei giocatori (massimo nove), in che posizione preferireste sedervi, per avere maggiori probabilità di essere il primo mazziere?*

Cominciamo con… ma certo, con ***Valter***:

> Preferirei sedermi alla sinistra del padrone di casa (per avere più probabilità di essere primo mazziere).
> In tutti i giri di distribuzione delle carte il primo ne ha, mi pare, più degli altri (quanto dico, mi pare, si possa dimostrare algebricamente, ma non entro nei dettagli).
> La somma delle sue probabilità di ricevere l'asso dovrebbe essere quindi, la più alta.
> Provo mostrarlo per un mazzo di 52 carte con 4 semi, quindi 4 assi e pure 4 giocatori.
> Il ragionamento dovrebbe comunque valere per ogni combinazione di carte/semi/giocatori.
> Probabilità del giocatore in posizione iniziale nei giri di distribuzione delle carte:
> - 1° giro: (4/52)
> - 2° giro: (4/48)*[1–(somma probabilità 1° giro dei quattro giocatori: calcolo sotto)]
> - …
> - 13° giro: …è l'ultima carta che possiede una probabilità di uscita del primo asso (alla 49° distribuita, se non è uscito prima, compare, sicuramente, un asso).
>
> Somma probabilità di ricevere l'asso dei quattro giocatori al 1° giro distribuzione (cioè appena prima che il giocatore alla sinistra del mazziere ricevere la seconda):
> - 1° giocatore: (4/52) +
> - 2° giocatore: (4/51)*(1–4/52) +
> - 3° giocatore: (4/50)*(1–((4/52)+(4/51)(1–4/52))) +
> - 4° giocatore: (4/49)*(1–((4/52)+(4/51)(1–4/52)+(4/50)(1–((4/52)+(4/51)(1–4/52))))).
>
> Probabilità del giocatore in seconda posizione nei giri di distribuzione delle carte:
> - 1° giro: (4/48)*(
>   1–(
>   (4/52) +
>   (4/51)*(1–4/52) +
>   (4/50)*(1–((4/52)+(4/51)(1–4/52))) +
>   (4/49)*(1–((4/52)+(4/51)(1–4/52)+(4/50)(1–((4/52)+(4/51)(1–4/52))))))
> - … (evito formule perché diventano troppo lunghe; penso si capisca come procedere)
> - - 13° giro: 0% in quanto il primo asso è uscito sicuramente in un turno precedente.
>
> Ho scritto un programma che esegue il calcolo delle probabilità che hanno i giocatori.

Il programma, al solito, ce lo teniamo, e vediamo come ha risolto ***Alberto R.***:

> Mi conviene sedermi alla sinistra del padrone di casa. Così facendo, al primo giro, la probabilità di ricevere un asso è P=4/52. Se invece mi sedessi – per esempio – al quarto posto non mi basta che nel mazzo ci sia un asso in quarta posizione (stessa prob P=4/52), ma occorre anche che non ce ne siano nelle tre posizioni precedenti, il che accadrà con probabilità Q.
>
> In definitiva, al primo giro, il giocatore in posizione 1 diventa mazziere con prob P mentre il giocatore in posizione 3 lo diventa con prob PQ.
>
> E' ovvio che il ragionamento si estende a qualunque posizione diversa dalla 3 che abbiamo assunto come esempio.
>
> Se al primo giro nessun giocatore riceve un asso si prosegue con un secondo giro, dove l'unica novità è che i 4 assi sono distribuiti in un mazzo residuo con meno di 52 carte, il che non cambia il ragionamento, e così via per i giri successivi.

Stesso ragionamento ha fatto ***Galluto***:

> È meglio essere il primo giocatore dopo il padrone di casa, poi il secondo e così via. E questo è valido qualsiasi sia il numero di giocatori (da due fino ai nove del full ring, ma anche oltre).

La prima carta (che spetta al primo giocatore) ha 4/52 probabilità di essere uno dei 4 Assi, cioè il 7,69%.

La seconda carta, se non è già uscito un'A (48/52), ha 4/51 probabilità di essere un Asso, e quindi la sua probabilità composta è 48/52 * 4/51 = 7,24%.

Man mano che andiamo avanti, e non escono Assi, la probabilità che la ennesima carta sia un Asso sale, ma la probabilità composta scende.

Se l'Asso continua a latitare, e si comincia un secondo giro (ecc., …) la probabilità composta continua a scendere, ma gli addendi del primo giocatore sono sempre superiori a quelli del secondo e così via.

A questo si aggiunge che, se gli Assi sono tutti alla fine del mazzo, i primi giocatori ricevono una carta in più degli ultimi.

Direi che sono tutti d'accordo su dove sedersi. E adesso le soluzioni dell'ultimo problema.

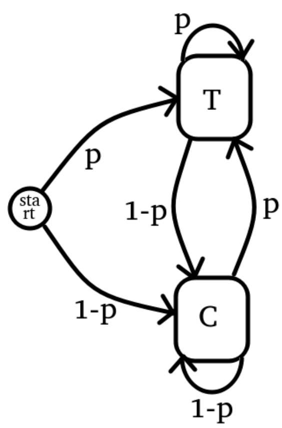
4.2.2 VenghinoVenghinoSempreSiVince!

Ancora probabilità, accidenti:

Ho una moneta truccata che ha una probabilità p di dare Testa (T), p<1. Se al primo tiro esce T, la si tira finché esce un'altra testa (viceversa con C). Il banco paga un numero di euro pari al numero di croci uscite, e si comincia un'altra partita. Per giocare una partita bisogna spendere 75 centesimi. Conviene giocare?

La prima soluzione è quella del nostro caro ***GaS***:

Disegniamo il grafo con le possibili uscite T/C e le diverse probabilità di transizione p e $(1-p)$:



Utilizzando tale schema si dimostra agevolmente che la probabilità $V(n)$ di vincere "n" euro è data da:

$$V(0)=p^2+(1-p)^2$$
$$V(1)=p^2(1-p)+(1-p)^2p$$
$$V(2)=p^2(1-p)^2+(1-p)^2p^2$$
$$V(3)=p^2(1-p)^3+(1-p)^2p^3$$
$$\dots$$
$$V(n)=p^2(1-p)^n+(1-p)^2p^n$$
$$\dots$$

Il valore della vincita attesa $VA(p)$ per ogni possibile valore p, con $0<p<1$, è quindi dato da:

$$VA=\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot V(n)=\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot[p^2(1-p)^n+(1-p)^2p^n]=$$

$$p^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (1-p)^n + (1-p)^2$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p^n = p^2 \cdot \frac{1-p}{p^2} + (1-p)^2 \cdot \frac{p}{(1-p)^2} = 1 - p + p = 1$$

In cui si è fatto uso della somma infinita di una serie di potenze:

$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p^n = \frac{p}{(1-p)^2}$ che è valida per 0<p<1

Si ricava quindi che il valore di vincita atteso VA = 1 € indipendentemente dal valore p…

Se il prezzo d'ingresso è di 0,75 centesimi sembra quindi conveniente giocare!

Andiamo avanti con la soluzione di ***Franco57***:

Ho trovato due procedimenti diversi di soluzione.

Primo procedimento.

Partendo dalla nota formula $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q}$ valida per $0 < q < 1$che comunque possiamo ricavare da $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q}$per $k \to \infty$, scopriamo che $1 + 2 \cdot q + 3 \cdot q^2 + 4 \cdot q^3 + \cdots = \frac{1}{(1-q)^2}$.

Infatti posto$s = \frac{1}{(1-q)^2} = (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots) \cdot \left(\frac{1}{1-q}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{1-q}\right) + q \cdot \left(\frac{1}{1-q}\right) + q^2 \cdot \left(\frac{1}{1-q}\right) + \cdots$

$$s = 1 \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots) + q \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots) + q^2 \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots) + \cdots$$

$$s = (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots) + (q + q^2 + q^3 + \cdots) + (q^2 + q^3 + q^4 \cdots) + \cdots = 1 + 2 \cdot q + 3 \cdot q^2 + 4 \cdot q^3 + \cdots$$

Per ogni intero $k \geq 0$possono uscire per prima una testa T, poi k croci C e infine ancora testa T, sul modello $TC \cdots CT$, oppure viceversa secondo modello analogo $CT \cdots TC$sempre con $k \geq 0$ teste.

Ponendo $q = 1 - p$ la probabilità che esca C, nel primo caso ho probabilità $p \cdot q^k \cdot p = p^2 \cdot q^k$e guadagno k, quindi il contributo di guadagno medio proveniente dal primo caso vale

$$p^2 \cdot q^0 \cdot 0 + p^2 \cdot q^1 \cdot 1 + \cdots + p^2 \cdot q^k \cdot k + \cdots = p^2 \cdot q(1 + 2 \cdot q + 3 \cdot q^2 + \cdots) = p^2 \cdot q \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = q$$

Analogamente il contributo di guadagno medio medio proveniente dal secondo caso vale p.

Il guadagno medio vale quindi $p + q = 1$e siccome 1 euro vale più di 75 centesimi conviene giocare.

Secondo procedimento.

Sia T quanto guadagno in media se esce per prima una testa e C se esce per prima una croce.

Possiamo affermare che $T = p \cdot 0 + q \cdot (1 + T)$ dove il primo addendo è il caso che subito dopo venga ancora testa e quindi il guadagno sia nullo, mentre il secondo che esca una croce e quindi si guadagni 1 euro di sicuro più ancora quanto può produrre T dall'inizio perché *la probabilità non ha memoria*. Da questa equazione si ricava $T = \frac{q}{p}$. Analogamente sarà $C = \frac{p}{q}$ e quindi il guadagno medio vale $p \cdot T + q \cdot C = p \cdot \frac{q}{p} + q \cdot \frac{p}{q} = 1$ che conferma il risultato del primo procedimento.

Questa volta ***Valter*** arriva un po' più tardi:

> Per come è stato esposto il problema pare che non debba convenire giocare.
> Facendo i calcoli, però, a me risulta che conviene; … probabile mi sbagli.
> Un'altra possibilità è che ho capito male quello che richiede il problema.
> Procedo comunque ad esporre le mie considerazioni e le conclusioni finali.
> Se p è la probabilità di uscita di T la probabilità di uscita di C è: $1-p$.
> La somma delle probabilità che hanno tutti i numeri di uscite è la vincita.
> Spiego: se esce T, poi una sola C la probabilità di questo evento è $p(1-p)$.
> Se non vi fossero altri eventi favorevoli vincerei mediamente $p(1-p)$ …euri.
> Gli altri eventi favorevoli si sommano …e danno la vincita media del gioco.
> I casi iniziali sono due: esce T con probabilità p o C con probabilità $1-p$.
> La somma di tutti i casi favorevoli per i due iniziali è quindi la seguente (intendo per favorevoli il numero uscite consecutive che mi fanno vincere):
> - con prima uscita T: $p[(1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + (1-p)^4 + (1-p)^5 + \ldots]$
> - con prima uscita C: $(1-p)[\, p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 + \ldots]$.
>
> Risolvendo le serie geometriche e quindi sommando per i due casi iniziali:
> - $p[(1-p)/p] + (1-p)[p/(1-p)] = (1-p) + p = 1$.
>
> Ho scritto un programma per verificare i calcoli che, però, me li conferma (tenta in vari modi di variare la probabilità ma il risultato è lo stesso).

Chiedete se vi interessano i programmi, noi cerchiamo di mantenere la trattazione leggibile. Passiamo alla versione di Alberto R.:

> Sia P la prob che esca testa.
>
> **1° caso**: al primo lancio è uscita testa. La prob che testa si ripresenti ancora dopo N croci è P ·(1–P)^N. In questo caso il banco paga N euro. Quindi in questo primo caso il valore medio della vincita è la sommatoria di tutte le possibili vincite (N da 1 a infinito) ciascuna moltiplicata per la sua probabilità
>
> Vincita Media 1°caso = Σ per N =1…∞ di N ·P ·(1–P)^N = 1/P –1
>
> **2°caso**: al primo lancio è uscita croce. Valgono la stesse considerazioni del 1° caso sostituendo "testa" con "croce" e P con (1–P)
>
> Vincita Media 2° caso = Σ per N =1…∞ di N ·(1–P) ·P^N = 1/(1–P) –1
>
> In definitiva la vincita attesa è la vincita media del primo caso moltiplicata per la probabilità (P) che si verifichi il primo caso, più la vincita media del secondo caso moltiplicata per la probabilità (1–P) che si verifichi il secondo caso, cioè
>
> Vincita attesa = P ·[1/P –1] + (1–P) ·[1/(1–P) –1] = 1
>
> **Indipendente da P**. Ottimo pour épater les bourgeois! (E per far fallire il banco che, ad ogni partita, paga, mediamente, 1 euro, avendo incassato una posta di 75 centesimi)

Contento anche ***Alberto***, niente fustigate. ***Galluto*** concorda con il risultato:

> Gioco, gioco, e mi aspetto anche di vincere circa 25 centesimi di euro a partita.
>
> Mi spiace per Alice, ma stavolta un metodo per ottenere una risposta deterministica non lo vedo proprio; inoltre, vista la mia scarsa capacità nell'elaborare formule, mi sono affidato ad un estensivo uso di simulazioni.
>
> Per cominciare, ho tirato 100.000 volte una moneta "onesta", cioè con $p = 0{,}5$ (ovviamente la fatica la ha fatta tutta excel), e ho contato il numero di partite e la quantità di euro che vincevo quando la partita durava più di due lanci uguali; sia il numero delle partite, che quello degli euro vinti sono stati *intorno* a 33.333, cioè a un terzo dei lanci; in altre parole, la lunghezza media di una partita è stata di tre lanci, con una vincita media di 1 euro. (NdR: lo so che al 100.000-imo lancio potrebbe rimanere una partita incompleta, ma direi che è marginale).
>
> Dopo di che, ho ripetuto la simulazione con monete variamente truccate, e il risultato è stato lo stesso: numero di partite e somma vinta sempre pari a *circa* 1/3 dei lanci; il motivo è che più la moneta è truccata (ossia se p è molto vicino ad 1, o a 0), più sono

le partite che finiscono in due lanci con due volte di seguito la faccia più probabile, ma più sono lunghe, e fruttifere, quelle che cominciano con la faccia meno probabile.

Per finire, ho iterato 1.000 volte la simulazione (ciascuna di 100.000 lanci della moneta), con p casuale e quindi diverso ogni volta; il risultato è stato ancora più vicino ad 1/3.

Morale: pago 75 centesimi di iscrizione ogni partita, mediamente vinco un euro e il mio utile è di 25 centesimi.

Alice è stupita dei risultati uguali, ma non basta questo a convincerla che la probabilità sia una scienza accettabile. E con questo ci fermiamo. Complimenti a tutti i solutori e alla prossima!

5. Quick & Dirty

Un esagono avente tre lati di lunghezza 1 e tre di lunghezza 3 è iscritto in un cerchio. Trovate l'area dell'esagono.

6. Pagina 46

Se procediamo per tentativi su alcuni valori semplici:

$$6 \times 3 = 18$$
$$66 \times 33 = 2178$$
$$666 \times 333 = 221778$$
$$6666 \times 3333 = 22217778$$
$$66666 \times 33333 = 2222177778$$
$$666666 \times 333333 = 222221777778$$

questo suggerisce uno schema del tipo:

$$\overbrace{66 \dots 66}^{n\text{sei}} \times \overbrace{33 \dots 33}^{n\text{tre}} = \overbrace{22 \dots 22}^{n-1\text{due}} 1 \overbrace{77 \dots 77}^{n-1\text{sette}} 8$$

Si tratta di provare che è vera.

Per semplificare le notazioni, definiamo l'insieme dei numeri a ripetizione di unità (*rep-unit*):

$$\{U_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1{,}11{,}111{,}1111, \dots\}$$

Ci viene chiesto di provare che:

$$(6U_n)(3U_n) = 10^n(2U_n - 1) + 7U_n + 1$$

Sia questa proposizione P_n.

Ricordiamo due proprietà dei numeri rep-unit:

$$10 \times U_n + 1 = U_{n+1}$$
$$U_a + 10^a \times U_b = U_{a+b}$$

e dimostriamo la formula per induzione.

La verifica per P_1 è immediata:

$$(6U_1)(3U_1) = 6 \times 3 = 18$$

Supponiamo P_n sia vera per un qualche $n = k \in \mathbb{N}$, ossia:

$$(6U_k)(3U_k) = 10^k(2U_k - 1) + 7U_k + 1$$

Utilizzando la prima delle proprietà delle rep-unit otteniamo:

$$(6U_{k+1})(3U_{k+1}) = \big(6(10^k U_k + 1)\big)\big(3(10U_k + 1)\big) = 100\big((6U_k)(3U_k)\big) + 360U_k + 18$$

Combinando queste due ultime espressioni otteniamo:

$$\begin{aligned}(6U_{k+1})(3U_{k+1}) &= 100(10^k[2U_k - 1] + 7U_k + 1) + 360U_k + 18 \\ &= 10^{k+2}2[U_k - 1] + 1060U_k + 118\end{aligned}$$

Dividendo la parte destra di questa equazione in due parti e utilizzando le proprietà dei numeri rep-unit:

$$\begin{aligned}
10^{k+2}[2U_k - 1] &= 10^{k+1}[2(10U_k + 1 - 1) - 10] \\
&= 10^{k+1}[2(U_{k+1} - 1) - 10] \\
&= 10^{k+1}[2U_{k+1} - 12] \\
&= 10^{k+1}[2U_{k+1} - 1 - 11] \\
&= 10^{k+1}[2U_{k+1} - 1] - 11 \times 10^{k+1}
\end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}
1060U_k + 118 &= 1000U_k + 60U_k + 118 \\
&= 1000(U_{k-2} + 10^{k-2}U_2) + 60(U_2 + 10^2U_{k-2}) \\
&= 7000U_{k-2} + 11 \times 10^{k+1} + 778 \\
&= 7000U_{k-2} + 777 + 1 + 11 \times 10^{k+1} \\
&= 7U_{k+1} + 1 + 11 \times 10^{k+1}
\end{aligned}$$

Reinserendo questi valori nell'espressione vista sopra, otteniamo:

$$\begin{aligned}
(6U_{k+1})(3U_{k+1}) &= 10^{k+1}[2U_{k+1} - 1] - 11 \times 10^{k+1} + 7U_{k+1} + 1 + 11 \times 10^{k+1} \\
&= 10^{k+1}[2U_{k+1}] + 7U_{k+1} + 1
\end{aligned}$$

Che mostra la consistenza di P_{n+1}, che è la tesi.

Un modo più semplice per dimostrare la tesi può essere:

$$\begin{aligned}
\overbrace{666\ldots66}^{666\text{sei}} \times \overbrace{333\ldots33}^{666\text{tre}} &= 6 \times 3 \times \overbrace{111\ldots11}^{666\text{uno}} \times \overbrace{111\ldots11}^{666\text{uno}} \\
&= 9 \times 2 \times \overbrace{111\ldots11}^{666\text{uno}} \times \overbrace{111\ldots11}^{666\text{uno}} \\
&= \overbrace{999\ldots99}^{666\text{nove}} \times \overbrace{222\ldots22}^{666\text{due}} \\
&= (10^{666} - 1) \times \overbrace{222\ldots22}^{666\text{due}} \\
&= \overbrace{222\ldots22}^{666\text{due}}\overbrace{000\ldots00}^{666\text{zero}} - \overbrace{222\ldots22}^{666\text{due}} \\
&= \overbrace{222\ldots22}^{665\text{due}}1\overbrace{777\ldots77}^{665\text{sette}}8
\end{aligned}$$

che è quanto richiesto nel caso particolare.

7. Paraphernalia Mathematica

Non ci ricordiamo se lo abbiamo presentato come Quick&Dirty, ma ci pare proprio di no; a memoria, l'ultima persona che c'è cascata è stato il nostro prof di Filosofia, quasi esattamente cinquant'anni fa.

Ma ci pare un buon esempio di cosa potrebbe succedere a *non* prendere sottogamba i Q&D.

7.1 Prendiamola calma

> Al *muro è attaccato un elastico lungo un metro infinitamente estensibile (preso in prestito dal laboratorio di Fisica); nel punto di aggancio, mettiamo un baco (preso a prestito dal laboratorio di Informatica*[4]*). Quando il baco comincia a camminare sull'elastico alla folle velocità di un millimetro al secondo, l'elastico comincia ad allungarsi uniformemente alla velocità di un metro al secondo. Il baco arriverà mai alla fine dell'elastico? E, se sì, in quanto tempo*?

O, generalizzando:

> *Un elastico di lunghezza L è attaccato al muro del laboratorio; il suo estremo libero comincia a muoversi a velocità v, allungandolo. Simultaneamente, un baco inizia a camminare dal muro del laboratorio lungo l'elastico con velocità u<v. L'elastico è supposto infinitamente estensibile. Il baco arriverà mai alla fine dell'elastico? E, se sì, in quanto tempo?*

Il primo pensiero in merito è, di solito, che il baco non ce la faccia, ma quando un problema di matematica dopo aver chiesto "se sì o no" chiede anche "se sì, in quanto tempo", il dubbio che ci sia la fregatura è forte. E quindi, prima di rispondere meglio fare i conti.

Già a prima vista, il problema sembra risolubile più facilmente supponendo un sistema di coordinate (monodimensionale) associato al muro; la distanza del baco dal muro $x(t)$ aumenta nel tempo come $x(t)=ut$, mentre la lunghezza dell'elastico $y(t)$ cambia nello stesso intervallo di tempo come $y(t)=L+vt$; siccome $v>u$, dovrebbe essere $y(t)>x(t)$, e quindi il problema non sembra avere soluzione, giusto?

Calma; non stiamo tenendo conto del fatto che l'elastico si allunga *anche dietro al baco*; questo risulta in un contributo addizionale dx/dt alla velocità del bruco, e questo contributo va calcolato.

Se l'elastico si allunga in modo lineare e uniforme, la velocità del punto dove si trova il baco è direttamente proporzionale a x e inversamente proporzionale a y, e la velocità totale del baco risulta essere:

$$\frac{dx}{dt} = u + x \cdot \frac{v}{y}$$

Questa è un'equazione differenziale la cui soluzione $x(t)$ determina il grafico del cammino del baco: se riusciamo a trovare la soluzione, confrontandola con la funzione $y(t)$ che ci fornisce la posizione dell'estremità libera, abbiamo risolto il problema.

Possiamo ristatuire l'equazione (esplicitando y) come:

$$\frac{dx}{dt} = u + \frac{v}{L + vt} x$$

Cerchiamo di semplificarci la vita; per il momento, poniamo $u=0$ e cerchiamo di risolvere l'equazione:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v}{L + vt} x$$

Questa risulta ragionevolmente immediata:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{vdt}{L + vt}$$

ossia:

[4] Sì, il testo originale diceva "bug".

$$lnx = ln(L + vt) + C$$
$$\Rightarrow x = C(L + vt)$$

E, seguendo il metodo canonico della soluzione attraverso separazione delle variabili, dovremmo definire la costante C in funzione delle condizioni iniziali, ma questa volta la cosa non funziona[5]. Proviamo attraverso la sostituzione delle variabili, ossia cerchiamo una soluzione del tipo $x(t) = C(t)(L + vt)$, dove $C(t)$ è una funzione incognita.

Sostituendo nell'equazione semplificata, otteniamo per $C(t)$ l'equazione:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{u}{L + vt}$$

che si risolve come:

$$\int dC = \int \frac{udt}{L + vt}$$
$$\Rightarrow C = \frac{u}{v} ln(L + vt) + c$$

e, con la condizione iniziale $x(0)=0$, otteniamo il risultato:

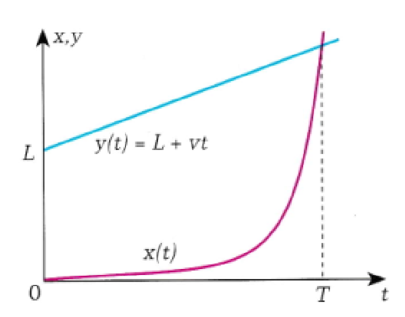
$$x(t) = \frac{u}{v}(L + vt) ln\left(1 + \frac{vt}{L}\right)$$

Torniamo al baco?

Si vede che, per $t \to \infty$, $x(t)$ cresce più rapidamente di t (più esattamente, cresce più rapidamente della *prima potenza* di t); questo significa che il baco raggiunge la fine dell'elastico per qualsiasi valore della sua velocità, anche se $u \ll v$. Questo avverrà al momento T per cui $x(T)=y(T)$, ossia quando (per chi preferisce una soluzione grafica, si veda la figura):

$$T = \frac{L}{v}\left(e^{\frac{v}{u}} - 1\right)$$

Non bisogna mai fidarsi del senso comune, ma questo risultato ci lascia comunque un certo disagio. Siamo sicuri di non aver messo qualcosa nell'equazione che sballa i conti? Forse è il caso di fare qualche verifica...



6 *Preso!*

Se u=0, il baco non si muove e resta per l'eternità attaccato al muro; secondo logica, $T \sim e^{\infty} \sim \infty$. D'altra parte, se v=0, l'elastico non si allunga e T=L/u, e il baco arriva a fine elastico con una tranquilla passeggiata. E l'equazione che abbiamo ricavato soddisfa pienamente queste due condizioni al contorno. Tutto bene, quindi?

Beh, un dubbio rimane. Non c'era una strada più breve?

Consideriamo il rapporto $z(t)=x(t)/y(t)$: all'allungarsi della banda (e a baco fermo), questa frazione rimane costante, e quindi z è una funzione additiva; quindi, l'incremento della frazione è pari alla frazione dell'incremento. Possiamo esprimere la sua variazione come:

$$dz = \frac{udt}{y(t)}$$

Questa equazione è più semplice da risolvere della precedente. Assumendo come condizione iniziale $z(0)=0$, si ottiene:

$$\begin{aligned} z(t) &= u\int \frac{dt}{L + vt} + C \\ &= \frac{u}{v} ln\left(1 + \frac{vt}{L}\right) \end{aligned}$$

[5] In quanto non risponde alla domanda: "ma ci arriva o no?". Se ricordate, ad almeno uno di noi Cauchy è sempre stato antipatico.

Il baco arriverà all'estremo dell'elastico quando $z(T)$=1, il che ci riporta all'equazione precedentemente ottenuta[6]. Questa soluzione è particolarmente comoda anche per alcune variazioni sul tema.

Supponiamo, ad esempio, che L=1 *km*, che u=1 *cm/s* e che l'allungamento dell'elastico sia *discreto*, ossia che dopo un secondo sia allungata di un chilometro, dopo un altro secondo di un altro chilometro, eccetera. In questo modo, il baco dopo il primo secondo ha percorso $1/10^5$ del percorso; dopo il successivo secondo $1/(2\cdot 10^5)$, e avanti in questo modo; il baco arriverà all'altra estremità dell'elastico all'n-esimo secondo, quando:

$$\frac{1}{10^5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=1$$

Ma quella tra parentesi è la serie armonica, che sappiamo divergere.

Possiamo valutare la serie attraverso l'approssimazione (la cui precisione aumenta all'aumentare di n):

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\approx\int_1^n\frac{dn}{n}=lnn$$

Questo significa che il baco percorrerà l'intero elastico in un tempo pari a e^{10^5} secondi, che è lo stesso risultato che ci hanno dato le precedenti espressioni.

Sempre alla ricerca di generalizzazioni, potremmo chiederci cosa succede se la lunghezza dell'elastico *raddoppia* ad ogni secondo; in questo caso, all'n-esimo secondo il baco avrà percorso una frazione:

$$\frac{1}{10^5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

della lunghezza dell'elastico. Ma la serie tra parentesi è una serie geometrica convergente a 2, quindi al tendere di n a infinito il nostro baco tenderà a raggiungere il punto $2/10^5$ (di distanza dall'origine), e non raggiungerà mai la fine.

...e se l'estremo dell'elastico si allontana di moto uniformemente accelerato, con $u(t)=u$ ma $v(t)=at$? Beh, tornando alle nostre equazioni, si vede che le condizioni diventano:

$$arctan\left(\frac{aT^2}{2L}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{aL}{2u^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e quindi il baco arriverà all'obiettivo solo se $aL/u^2<\pi^2/2$ (...ecco, pigreco ci mancava proprio...), impiegando un tempo:

$$T=\sqrt{\frac{2L}{a}}tan\sqrt{\frac{aL}{2u^2}}$$

Adesso basta. Se volete cercare qualche altro caso strano, fate pure. Ma mandatecelo solo se vince il baco, che qui tifiamo tutti per lui.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[6] Questa soluzione è (ufficiosamente) attribuita a ***Andrey Sacharov***.