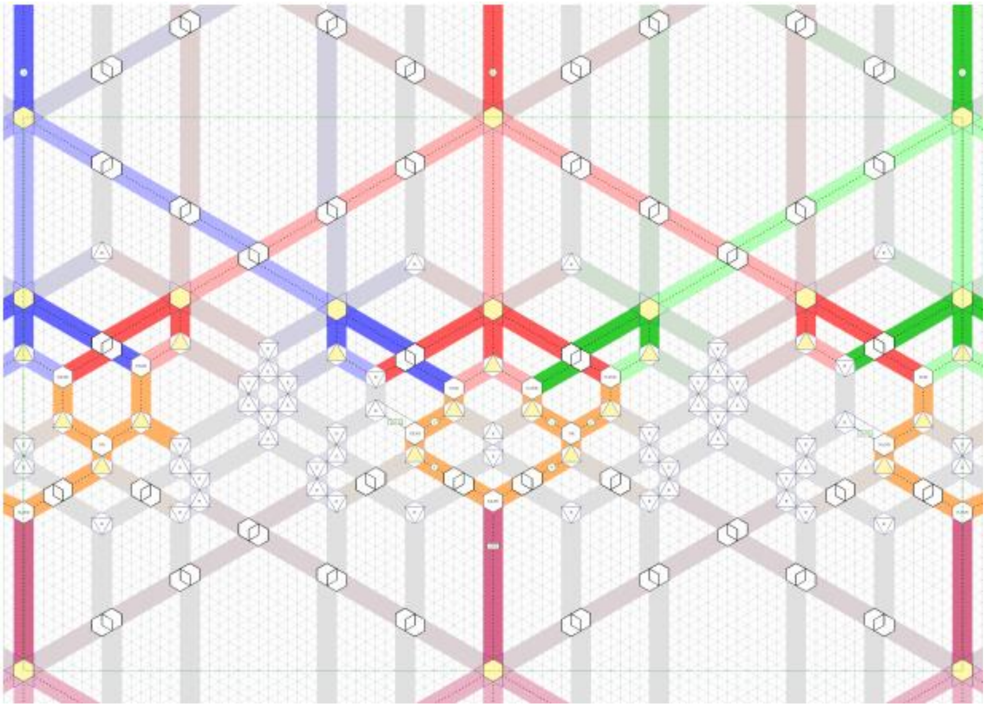
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 302 – Marzo 2024 – Anno Ventiseiesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com
www.rudimathematici.com

RM300 ha diffuso 3'389 copie e il 28/01/2024 per Google eravamo in 11'900 pagine.

La Regola 110 degli automi cellulari è in grado di emulare una macchina di Turing (https://wpmedia.wolfram.com/uploads/sites/13/2018/02/15-1-1.pdf). L'origami in copertina è in grado di emulare la Regola 110 (https://arxiv.org/abs/2309.07932v1).

Traetene le dovute conseguenze.

1. Un bianco inverno, in ginocchio

"Un enorme passo sott'acqua
Conduce al regno di Nettuno -
la Scandinavia gela come un'ombra, laggiù, e tutto è come una sola apparizione splendente
Tace la canzone, la musica è muta,
eppure l'aria brucia del loro profumo.
E un bianco inverno, in ginocchio,
Osserva tutto con riverente attenzione"

(Anna Achmatova, "*A Vyborg*", con dedica "*per A.O.L.*", 1964)

L'Unža è un fiume non particolarmente significativo: è lungo poco più di quattrocento chilometri[1], che sarebbe una lunghezza del tutto notevole in quasi tutti i paesi europei, con la sola eccezione del paese dove l'Unža effettivamente scorre, la Russia. Il più vasto paese del mondo sembra quasi considerare degni del termine "fiume" solo quelli misurabili in migliaia di chilometri; la Lena, l'Ob, lo Jenisej, il Volga, l'Amur, il Don, per citare solo i più famosi, fanno sembrare quattrocento chilometri poco più di niente.

Fosse in Italia, sarebbe il secondo fiume della nazione perché supererebbe, anche se di poco, perfino l'Adige[2]. Ma di certo un fiume non è solo un corso d'acqua da misurare con un metro a nastro o con dei calcoli trigonometrici su mappa: un fiume è elemento di paesaggio, strada da percorrere, tratto d'unione di città e villaggi, e lo era soprattutto nel passato, quando le strade non esistevano neppure. I fiumi sembrano stare ai paesaggi come i nervi stanno al corpo. I paesaggi non sono mai davvero fermi: il vento scuote erba, fiori e alberi; il cielo cambia continuamente aspetto, luce e colore; gli animali lo percorrono, e quando è immortalato in un quadro, sembra sempre che ce ne siano sia di visibili che di invisibili, alcuni catturati dalla tela, altri che paiono esserne appena usciti, altri ancora che stiano lì lì per entrarci. Però i fiumi, in questo catalogo, hanno una peculiarità del tutto loro: sono la mobilità continua e ferma, quasi contraddittoria, con l'acqua che scorre – e quindi si muove – senza però cambiare il paesaggio, senza avere l'eccezionalità transitoria del salto di un leprotto, e della picchiata di un falco, del rabbuiarsi di un temporale. Il fiume scorre sempre, e non lo dà mai a vedere.

Così, è impossibile e ingiusto confrontare l'Unža con l'Adige: un conto è nascere quasi esattamente dove si incontrano Svizzera, Austria e Italia, discendere giovanilmente attraverso la meraviglia delle Dolomiti, bagnare le rive di città come Bolzano, Trento, Verona, fino a salutare Rovigo prima di gettarsi in mare guardando in lontananza i tetti di Venezia; tutto un altro conto è nascere sfiorando il circolo polare artico, alternare con regolarità stagionale lo stato solido del ghiaccio a quello liquido dell'acqua, attraversare e caratterizzare luoghi in cui gli esseri umani non sono poi così presenti e protagonisti, e salutare solo di tanto in tanto città piccole come avamposti nella steppa: Kologriv, Manturovo, Makaryev.

Anche gli uomini sono diversi, è inevitabile: un conto è convivere con una terra calda, piccola e fertile, un conto è estrarre di che vivere da una landa sterminata, ghiacciata per metà dell'anno e molto avara di doni, anche se generosa di bellezza. Non solo i ritmi che scandiscono la giornata e le stagioni, anche i rapporti umani, le regole di convivenza, le strutture sociali sono diverse. Così, può capitare che Kologriv sia un centro importante di quelle terre bagnate dall'Unža, pur non raggiungendo neanche i tremila abitanti. E anche se la sua storia è densa e complessa, anche se nel periodo del suo massimo splendore fosse

[1] Per la precisione, 426. Nel vastissimo bacino idrografico del Volga figura come uno degli affluenti di sinistra più settentrionali, con un corso che scende da nord verso sud e sfocia nel "bacino di Gorky", un enorme invaso artificiale non troppo distante (su scala russa) da Nizhny Novgorod, che è il nuovo nome della storica città di Gorky.

[2] L'Adige, secondo fiume italiano per lunghezza, scorre per 410 chilometri, dice Wikipedia.

stata popolata dal doppio, o magari anche dal decuplo dei suoi abitanti attuali, a occhi occidentali è complicato capire come debbano leggersi, a quelle latitudini e su quella scala, termini come nobiltà, prestigio, arte, vita.

Prendete Gennady, ad esempio. Se ne va quasi sempre sulle rive dell'Unža, portandosi dietro tutto quanto gli serve per dipingere. A lui piace dipingere acquerelli, piace dipingere paesaggi, quei paesaggi gravidi della sua terra natale; ed è bravo, bravo davvero. Ma è povero: un suo compagno di studi racconta di lui che entrambi dormivano nella "culatta della fonderia", insomma in un rifugio di fortuna ricavato nell'angolo più remoto d'una fabbrica, e che Gennady dormiva sul pavimento ghiacciato insieme a Dianka, la sua cagnetta, per scaldarsi l'un l'altra. Sembra il ritratto di un povero giovane, un contadino senza mezzi e senza lavoro, niente più di un servo della gleba ma dotato di talento, che si sacrifica nella speranza di poter vivere con la sua arte.

Le cose, in realtà, sono diverse.

1 *L'Unža nei pressi di Kologriv, dipinto da Gennady.*

Gennady è nato nel 1853, e al tempo della sua nascita i servi della gleba davvero esistevano ancora, in Russia: solo otto anni dopo, nel 1861, saranno aboliti dallo zar Alessandro II, che proprio per questa sua decisione si meriterà il titolo di "Liberatore"[3]. Fin dal tempo del medioevo più oscuro il concetto di "servitù della gleba" assimilava in tutto e per tutto i contadini alla terra; non potevano possederla, né allontanarsi da essa, e con essa erano venduti, se la terra cambiava padrone. Ma tutto questo non impatta sul destino di Gennady, perché lui è tutt'altro che un contadino o un servo: lui è addirittura un nobile. La sua famiglia ha quarti di nobiltà che risalgono al XIV secolo, quando il capostipite, il nobile svedese Oblashni, arrivò in Russia per mettersi al servizio di Demetrio di Russia, principe di Mosca e santo della chiesa ortodossa, che contribuì a liberare la Russia dalla dominazione mongola.

È curiosa, l'idea di nobiltà. È curiosa e sciocca l'idea che possa esserci qualcosa che rende gli uomini differenti da altri uomini per una linea di sangue, quasi si trattasse di animali di specie diverse. Mezzo millennio dopo il fondatore della dinastia, Gennady è ancora considerato nobile, anche se suo padre, alla fin fine, vive solo con uno stipendio da impiegato statale, come di fatto era; aveva sposato una popolana, e non con una donna che potesse vantare qualche goccia di sangue blu, e forse questo ha ridotto di fatto il suo rango nobiliare. Ma è ancora nobile abbastanza da poter mandare suo figlio Gennady a studiare all'università di San Pietroburgo; solo che Gennady decide di lasciare la facoltà di Architettura per passare all'Accademia di Belle Arti. Il padre si arrabbia, gli taglia i fondi, e Gennady si ritrova a dormire per terra, abbracciato alla sua cagnetta, a chiedere la carità di una ciotola di zuppa, e soprattutto a supplicare il senato accademico di essere esonerato dal pagamento della retta universitaria.

Per il nobile Gennady, diseredato e abituato alla fame, c'è il lieto fine: riesce a laurearsi all'Accademia, e il suo talento viene sempre più riconosciuto e apprezzato. Diventerà una sorte di pittore di corte, potrà tornare nella natia Kologriv con il titolo di "Artista di Seconda

[3] Nonostante l'importante riforma e il titolo lusinghiero, Alessandro II non si dimostrò uno zar dalle idee particolarmente liberali: varò molte importanti riforme, ma sempre senza mai mettere in discussione l'assolutismo zarista. Fu fatto oggetto di numerosi attentati, e uno alla fine riuscì nell'intento di ucciderlo, nel marzo 1881. Sul luogo dell'attentato, a San Pietroburgo, si eresse una grandiosa cattedrale, ancora nota – almeno in via ufficiosa – con il nome di "Cattedrale sul Sangue Versato".

Classe[4]", e vivere della sua arte, dei suoi acquarelli. Morirà a Kologriv nel 1916; ha vissuto gran parte della sua vita sulle rive dell'Unža, nella casa di suo fratello Ivan che, ovviamente, era anch'egli di "sangue nobile"; ma a lui, e soprattutto ai suoi figli, la nobiltà porterà ancor meno fortuna.

Ivan, il fratello di colui che ormai veniva chiamato il "Re degli Acquerelli", aveva un figlio: Aleksandr Ivanovic. Aleksandr fa l'insegnante di matematica, ha una casa piena di libri, mette su famiglia con Anna, una ragazza estone senza quarti di nobiltà, e con lei genera tre bambine: la più piccola, Olga, nasce nel 1922. Olga non ha mai potuto incontrare Gennady, e probabilmente neanche le due sorelle maggiori hanno potuto conoscerlo, ma tutte e tre lo chiamano "nonno", quando in famiglia si parla di lui; e se ne parla spesso, perché la casa è piena dei suoi quadri. Durante tutta la sua non facile vita, Olga conserverà e difenderà gli acquerelli di quello che tecnicamente non era il nonno paterno[5], ma che per lei rimarrà sempre "*dedushka*", il "nonnino".

2 *La famiglia di Ivan: Olga in braccio al papà, le sorelline ritte in piedi vicino a mamma Anna.*

Anche se vive in un piccolo borgo dimenticato e freddo, anche se il suo mestiere è solo quello di insegnare matematica (cosa che faceva non solo nella scuola locale, ma anche a domicilio, e senza farsi pagare) Aleksandr Ivanovic è un nobile. A dirla tutta, è persino sia nobile che intellettuale, come dimostrano i quadri e i libri che ha in casa; e arriva il momento in cui essere nobili intellettuali equivale a una condanna a morte.

Le generalizzazioni sono tanto utili in matematica quanto sono devastanti nella vita reale e una guerra è quasi per definizione un'assurdità logica: per quale ragione dovrebbe essere lecito – senza scomodare il più impegnativo aggettivo "giusto" – uccidere una persona perché rientra nella opinabile, variabile e assai soggettiva definizione di "nemico"? Le generalizzazioni consentono semplificazioni, e le semplificazioni, nella vita reale, sono quasi sempre tragiche, se usate nell'etichettare gli esseri umani. Nell'ultima settimana di Ottobre del 1937, Aleksandr Ivanovic viene arrestato, torturato e ucciso senza processo da agenti del NVKD[6] di Stalin, perché è considerato "nemico del popolo". Olga, in quel giorno, ha solo quindici anni.

[4] Denominazione che, fuori contesto, può quasi sembrare più offensiva che lusinghiera, ma che in realtà era un titolo di grande prestigio nella corte zarista e, di conseguenza, in tutte le Russie.

[5] Siamo tutt'altro che ferrati in terminologia delle parentele, ma ci sembra di aver capito che il "fratello del nonno" sia tecnicamente un "prozio"; peraltro, ci sembra anche che, in quasi tutte le famiglie italiane, i bambini che convivono con persone che li precedono di un paio di generazioni attribuiscono loro, con fanciullesca generosità, l'appellativo di "nonno".

[6] *Narodnyj Komissariat Vnutrennich Del*, traducibile come "Commissariato del popolo per gli affari interni". Era il braccio armato di Stalin contro l'opposizione interna: è verosimile che le uccisioni perpetrate dal NVKD siano numerabili in milioni di vittime. Dopo la caduta dello stalinismo, molte delle sue funzioni sono state trasferite al KGB. Nel caso specifico di Aleksandr Ivanovic, Aleksandr Solzenicyn nel suo libro "Arcipelago Gulag" racconta che il professore era stato avvertito del prossimo arresto, ma che rifiutò di fuggire e nascondersi per non abbandonare i suoi studenti.

3 *Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya*

Il cognome di Gennady Aleksandrovic, di Aleksandr Ivanovic e di Olga Alexandrovna è Ladyzhensky.

Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya[7] nasce a Kologriv il 7 marzo 1922, nella famiglia di cui abbiamo già parlato fin dall'inizio di questo articolo.

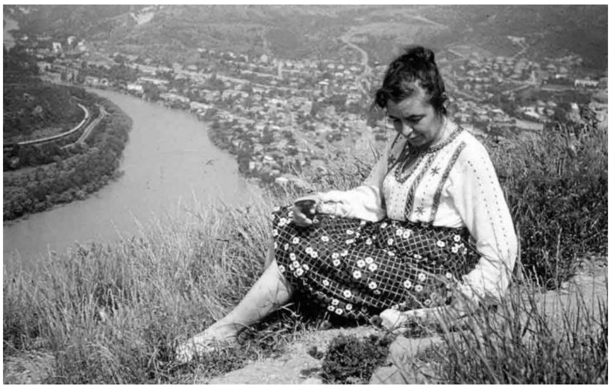
La scomparsa del padre, oltre al clima generale che ormai aleggiava sul resto della famiglia, rende la vita della moglie Anna e delle tre figlie assai complicata. Alle due sorelle maggiori viene impedito di proseguire gli studi, e anche la quindicenne Olga rischia di dover chiudere di colpo la sua carriera scolastica; ma il suo rendimento in matematica è particolarmente brillante, lo si nota subito. Era evidente sin dall'infanzia che Olga era la figlia che più aveva preso dal padre la predisposizione al ragionamento e alla matematica. Forse per questo, forse perché è la più piccola della famiglia, fatto sta che Olga Aleksandrovna ottiene il permesso di poter continuare gli studi liceali.

È una buona cosa, certo: ma la disperazione della famiglia, senza più il reddito del capofamiglia, continua a crescere. Anna, la madre, e le due sorelle di Olga si arrangiano come possono per riuscire a sopravvivere: confezionano abiti, scarpe, sapone, tutto in casa; e gli anni che seguiranno saranno ancora i peggiori, perché si avvicina il cataclisma della guerra. Nel 1939 Olga va a Leningrado dove prova ad iscriversi all'Università di Stato, ma gli viene negato l'accesso: non certo per demerito di profitto, visto che le sue valutazioni liceali sono tutte eccellenti, ma è pur sempre la figlia di un nemico del popolo, e questo ostacolo è insormontabile.

Si arrangia come può: resta a Leningrado, trova comunque una sistemazione in un collegio per insegnanti, insegna negli orfanotrofi, spesso a domicilio e, certo memore di quanto faceva suo padre, lo fa spesso anche senza essere retribuita, pur trovandosi in una situazione finanziaria prossima alla disperazione. Le condizioni peggiorano con l'avanzare della guerra, e alla fine si trova costretta a lasciare Leningrado per tornare verso casa: con il senno di poi, ricordando cosa sia diventata Leningrado durante l'interminabile assedio tedesco che inizierà pochi mesi dopo, essersi diretta nuovamente verso est è cosa che con ogni probabilità le ha salvato la vita.

[7] Ci è già capitato di parlare, in altri compleanni, di quanto sia stressante orizzontarsi nella traslitterazione dei nomi di lingue che usano un alfabeto diverso dal nostro. Il russo è probabilmente quello più difficile da gestire, perché a prima vista è abbastanza simile al nostro caro vecchio alfabeto latino, e perché molti nomi russi sono stranoti anche da noi. Il guaio principale è forse proprio nel fatto che la maggior parte delle lingue occidentali ha un suo proprio modo di traslitterare il cirillico e – trattandosi di traslitterazione – non è che sia un vero modo giusto e un modo sbagliato di farlo. Ad esempio, il grande autore dello *Schiaccianoci* è riportato dalla Wikipedia italiana come Čajkovskij, ma con l'avvertenza che il musicista è spesso traslitterato come Ciajkovskij, Ciaikovski o Tchaikovsky. L'ultima opzione suggerita è quella che usa la Wiki inglese, mentre la Wiki tedesca opta per Tschaikowski, che è simile ma non identica. A Madrid leggono quella voce enciclopedica come quella dedicata a Chaikovski, mentre i francesi – che di russo se ne intendono – procedono spediti con Tchaïkovski. Nel nostro piccolo, confessiamo di essere abbastanza vecchi da aver intercettato, nella lontana infanzia, italiche traslitterazioni che si permettevano pianamente di scrivere Ciaicoschi, e anche di dire che la capitale del Giappone era Tochio. Noi ci scusiamo perché le fonti che usiamo sono di lingue diverse, e talvolta facciamo confusione: ad esempio, la "zeta" che abbiamo usato nel nome del fiume Unža è spesso traslitterata in inglese con la coppia "zh", come in Ladyzhensky; per essere coerenti, dovremmo probabilmente scrivere i due nomi con lo stesso carattere (o "ž" o "zh") in maniera magari imprecisa, ma almeno coerente. Beh, coerenti noi non lo siamo mai stati…

Nuovamente a Kologriv, a prendere di fatto il posto di suo padre; insegna matematica nella scuola locale, e finisce che un suo allievo, tramite le conoscenze che aveva la madre, riesce a convincerla ad andare a Mosca per provare l'ingresso all'università della capitale. È il 1943, uno degli anni più complicati del secolo; per Olga, comunque, diventa il primo anno da studentessa universitaria. Olga entra nel mondo accademico, e non ne uscirà mai più.


4 *Anche se lo scorcio ricorda molto gli acquerelli di "nonno" Gennady, qui Olga Ladyzhenskaya non è sulle rive dell'Unža, ma su quelle del Dnepr, in Ucraina, durante una pausa in un convegno di matematica.*

Non che gli inizi siano facili: alla fin fine, a Kologriv riusciva a guadagnare quel poco che serviva a sopravvivere, ma da studentessa a Mosca non ha davvero nessun reddito; per fortuna le concedono una sorta di tessera annonaria per i pasti e un minimo di stipendio di sopravvivenza.

Ma Olga è brava, e soprattutto adora la matematica: entra all'Università di Mosca come studente, anzi come matricola accettata quasi solo per compassione, ma il suo talento sboccia immediatamente. Anche se è la prima volta che affronta intere sezioni della matematica superiore, si mette subito in evidenza: ancora molto prima di ottenere la laurea, che otterrà nel 1947, si ritrova a seguire un gran numero di seminari, poi ad organizzarne e a tenerli. È straordinariamente attratta dalle equazioni differenziali, e mostra approcci assai originali, al punto che verso il quarto anno di università ai suoi seminari – teoricamente dedicati ai suoi colleghi studenti – assistono anche i professori e gli stessi mostri sacri dell'università, come Petrovsky, Stepanov, Tikhonov.


5 *Olga e Andrei*

Ma il 1947 non è solo l'anno della laurea: è anche l'anno in cui si sposa. Andrei Alekseevich Kiselev è di Leningrado; i due si innamorano e decidono di sposarsi e di trasferirsi sulle rive della Neva. Olga Aleksandrovna si ripresenta all'Università che l'aveva rifiutata da matricola, ma stavolta porta con sé la laurea ottenuta all'Università di Stato di Mosca, e una quantità impressionante di raccomandazioni da parte dei maggiori matematici sovietici. Viene accolta e iscritta a un corso di post-dottorato; fin dai primi giorni si lega a un altro grande vecchio della matematica sovietica, Vladimir Ivanovic Smirnov[8]. Smirnov le affida subito il compito di organizzare seminari sulle equazioni differenziali, e questi ebbero un successo tale che molti matematici di altre università venivano a Leningrado per assistervi.

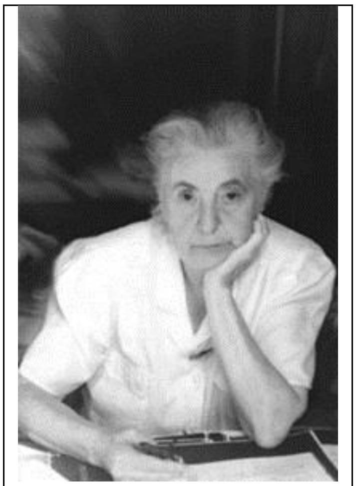
E il matrimonio? Il matrimonio inizia nel migliore dei modi: Mark Vishik[9], uno dei pochi compagni di studio di Olga all'Università di Mosca, racconta che Andrei Alekseevich, il marito di Olga, somigliava moltissimo a Pierre Bezuchov, il protagonista di "Guerra e Pace" di Lev Tolstoj, e aggiunge che "Olga era letteralmente tutto per lui". Ciò nonostante, l'unione ebbe vita breve, e per una ragione tanto stringente quanto razionale: Andrei voleva

[8] Di Smirnov abbiamo parlato in "La compagnia del Ginnasio", RM101. Giugno 2007. Di Smirnov, peraltro, parlavano spesso – e forse parlano ancora – torme di studenti di matematica e di fisica, perché il suo "Corso di Matematica Superiore" è un'opera monumentale, resa disponibile dalla Editori Riuniti.

[9] Vishik è stato a sua volta un grande matematico; è anche uno degli autori dell'articolo dell'AMS citato nell'ultima nota a piè di pagina di questo pezzo.

avere dei figli, Olga era di parere opposto. Al marito (e a chiunque le chiedesse ragione di questa scelta, benché non si capisca, con il senno di poi, per quale diamine di motivo dovesse davvero giustificarla a qualcuno) spiegava che voleva dedicare tutto il tempo possibile alla matematica, e che non le sarebbe stato possibile farlo se avesse avuto dei bambini.

E alla matematica Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaya dedicherà davvero ogni giorno della sua vita. Continuerà a indagare le equazioni differenziali, si specializzerà soprattutto nella ricerca dell'esistenza di soluzioni uniche di equazioni differenziali alle derivate parziali ellittiche, paraboliche e iperboliche lineari e quasilineari. È un campo di ricerca immenso, e nell'esplorarlo studierà e analizzerà tra le altre le equazioni di Maxwell, l'equazione di Schrödinger e le equazioni di Navier-Stokes: la soluzione di queste ultime è uno dei celebri sette "Problemi del Millennio"[10], e Olga Aleksandrovna ha compiuto un passo avanti cruciale verso la (ancora non trovata) soluzione completa, ha sostanzialmente risolto il problema in due dimensioni. I Problemi del Millennio sono una sorta di replica, un secolo dopo, degli ancor più celebri ventitré problemi che Hilbert elenco all'inizio del XX secolo; è abbastanza notevole che il diciannovesimo dei problemi di Hilbert fu risolto, indipendentemente, da John Nash e Ennio De Giorgi. Altrettanto notevole, anche se meno noto, è che la risoluzione completa del problema si deve a Ladyzhenskaya e al suo gruppo di lavoro.


6 *Olga.*[11]

Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaya, prima di andarsene nel sonno nel 2004, ha collezionata una quantità di premi e riconoscimenti, frutto di tutta una vita dedicata alla matematica. È sempre rimasta in quella Russia che pure è stata la terra dove suo padre è stato messo a morte, in maniera tanto ingiusta da apparire grottesca. Non ha mai ceduto alle lusinghe del regime: ha pubblicato la sua tesi di dottorato, pronta già da due anni, solo dopo la morte di Stalin; non ha avuto mai paura di mostrare le sue opinioni politiche, non ha mai nascosto la sua forte amicizia con Aleksandr Solzenicyn, che è stato per lungo tempo forse il più famoso dei dissidenti russi. Partecipava intensamente alla vita culturale della sua città, San Pietroburgo, dove la Neva si allarga nel Golfo di Finlandia, così come aveva vissuto appieno la sua infanzia a Kologriv, dove l'Unža non immagina neppure quanto sia ancora lontano il mare a cui è destinato. Era amica di quella che è forse la maggiore poetessa russa dei nostri tempi, Anna Achmatova: dopo una giornata di vacanza passata insieme a Vyborg, sulle sponde del Baltico prossime al confine russo-finlandese, Achmatova scrisse per lei la poesia messa in testa a quest'articolo.

[10] Il Clay Mathematics Institute di Cambridge (USA), nel maggio del 2000, ha elencato i sette problemi matematici ancora irrisolti all'alba del terzo millennio, e messo in palio un premio di un milione di dollari per la risoluzione di ognuno di essi (Millennium Prize Problems). A oggi, l'unico risolto è quello sulla Congettura di Poincaré, ad opera del matematico russo Grigori Perelman, che comunque non ha ritirato né il premio, né il milione di dollari.

[11] Le nostre fonti tradizionali per i compleanni sono Wikipedia e il sito MacTutor (https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/) della Saint Andrews University, la più antica università scozzese (https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/). In questo caso, però, abbiamo saccheggiato selvaggiamente (soprattutto per quanto riguarda il corredo fotografico) anche il sito della AMS (American Mathematical Society), e per la precisione il lungo articolo pubblicato nel 2004 per commemorare la scomparsa della matematica russa. L'articolo, scritto a più mani da importanti matematici, è sul numero di Dicembre 2004 del "*Notices of the AMS*" da pagina 1320 a 1331. Merita una lettura assai più di quanto possa mai meritarlo questo, e si trova facilmente in rete: http://www.ams.org/notices/200411/fea-olga.pdf.

2. Problemi

2.1 Texas Hold'em

No, non intendiamo farvi fare una partita: vogliamo solo prepararla, e farvi fare qualche conto sopra. Anche perché la cosa più divertente, secondo chi scrive, è leggere le descrizioni delle giocate; con tutti quei termini in americano, sembra un documento del Dipartimento di Information Technology di qualche anno fa. Ma torniamo al problema, con qualche riga di spiegazione.

Il gioco è sostanzialmente un poker, ma la cosa ci interessa piuttosto poco: quello che ci interessa è il fatto che chi dà le carte scommette per ultimo, e quindi ha qualche informazione in più su come sono distribuite le carte.

Per distribuire equamente questo vantaggio, la posizione del mazziere (volete l'americano?, OK guys. *Dealer*) ruota attorno al tavolo, e questo dovrebbe risolvere il problema per i giri successivi al primo.

Avrete già capito che stiamo parlando della prima smazzata: nei tornei di lusso il primo dealer viene deciso casualmente (con generatori di numeri casuali che "funzionano bene"), ma per la "partitella tra amici" di solito si usa un altro metodo: il padrone di casa distribuisce le carte scoperte a partire dalla persona alla sua sinistra (dopo averle mescolate, chiaro) e si ferma al primo asso: la persona che l'ha ricevuto è il primo mazziere, e poi si procederà da lui.

A questo punto, avete già capito la domanda: questo sistema, è onesto o avvantaggia qualcuno? E, nel secondo caso, in funzione del numero dei giocatori (vi ricordiamo che se siete in nove attorno al tavolo, è un *full ring*), in che posizione preferireste sedervi, per avere maggiori probabilità di essere il primo mazziere?

2.2 VenghinoVenghinoSempreSiVince!

E, con Rudy di mezzo, una frase del genere suscita sempre ampie risate.

Comunque, questa volta voglio essere generoso: a questo gioco non si può perdere! Ci credete subito, vero?

Ho qui con me una bellissima moneta che, come potete vedere, ha da una parte una Testa (T) e dall'altra una Croce (C); visto che non vi fidate di me, la tirate voi. Siccome siamo nel mondo reale, verrà T o C: supponiamo, per semplicità, sia uscita T.

Bene, adesso continuate a tirarla: e tiratela *sin quando non esce di nuovo T*; tra il primo e l'ultimo tiro, avremo un certo numero (zero o più) di uscite C, e io vi pagherò un numero di euro pari al numero delle C, e possiamo cominciare un'altra partita; se, al primo tiro, aveste ottenuto C, avremmo giocato tutto a ruoli di T e C invertiti, evidentemente.

Pronti? Ah, no, un attimo. C'è una cosa che non vi ho detto.

La moneta è truccata, ma non mi ricordo come. Nel senso che ha una probabilità p di dare T, ma non mi ricordo il valore di p; so solo che $p<1$, strettamente.

"E quando si perde, a questo gioco?"

"Beh, mai... Ma per giocare devi pagare 75 centesimi per ogni partita."

Che fate, giocate?

3. Bungee Jumpers

Sia M un insieme sul reticolo cartesiano con area maggiore di 1. Mostrate che M contiene due punti distinti (x_1,y_1) e (x_2,y_2) tali che x_2-x_1 e y_2-y_1 sono interi (*Lemma di Blichfeldt*).

La soluzione, a "Pagina 46"

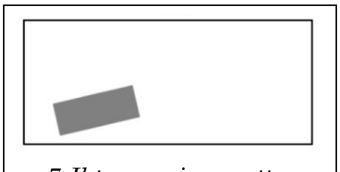
4. Soluzioni e Note

Marzo.

Anzi no. Aprile. Va beh, sospendiamo, e vi promettiamo S&N per RM303.

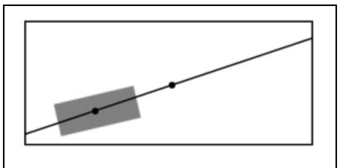
5. Quick & Dirty

Voi e vostro fratello, per ragioni che non staremo ad esplorare, dovete dividere in parti uguali un terreno rettangolare. C'è però un piccolo problema: all'interno del terreno esiste un'area, anch'essa rettangolare, che non è di vostra proprietà (è un terreno comunale, di libera fruizione da parte della popolazione: è indicato in grigio nel disegno qui a fianco). Senza stare a discutere di diritti di passaggio (supponiamo il terreno uniforme, da questo punto di vista), come fate a dividere equamente l'appezzamento?



7 *Il terreno in oggetto.*

Per risolvere il problema, basta ricordarsi che ogni retta passante per il centro di un rettangolo lo divide in due parti di ugual area. Trovati i centri dei due rettangoli, la retta passante per entrambi i punti dividerà in parti equivalenti entrambi i terreni, lasciando a voi e a vostro fratello proprietà delle stesse dimensioni.

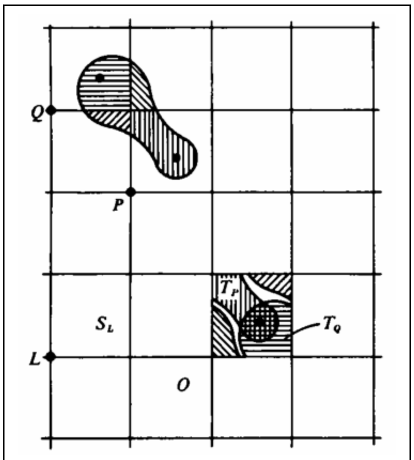


8 *Et voila!*

6. Pagina 46

Per ogni punto L del reticolo, sia S_L il quadrato (del reticolo) per cui l'angolo in basso a sinistra è L[12].

Ora, l'insieme M è decomposto in sottoinsiemi $M \cap S_L$ dai quadrati S_L, e possiamo traslare ogni quadrato S_L lungo il segmento LO in modo tale che tutti i quadrati vengano sovrapposti tra loro sul quadrato S_0. Essendo l'area totale delle parti di M, per ipotesi, maggiore di 1, all'interno della sovrapposizione almeno due parti di M dovranno essere sovrapposte.



9 *Il reticolo.*

Supponiamo quindi che il punto (x, y) appartenga (nella sovrapposizione) sia a TP che a TQ, dove $P \neq Q$: se $P=(a,b)$ e $Q=(c, d)$, allora il punto $(x_1, y_1)=(x+a, y+b)$ appartiene a $M \cap SP$, mentre $(x_2, y_2)=(x+c, y+d)$ appartiene a $M \cap SQ$. Quindi, i punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono in M. Ma questo implica che $x_2–x_1$ e $y_2–y_1$ siano interi, visto che $x_2–x_1=c–a$ e che $y_2–y_1=d–b$, e questa è la tesi.

[12] Più esattamente, sia S_L l'insieme di tutti i punti (x, y) per cui $m \leq x < m+1$ e $n \leq y < n+1$, dove $L=(m, n)$. Lo scopo ultimo di questa definizione formale è fare in modo che i diversi quadrati S_L non si sovrappongano tra loro.

7. Paraphernalia Mathematica

Rudy si è sempre trovato a disagio con due concetti: il modulo di un numero e la radice quadrata. Il primo perché da un concetto così semplice si riescono ad estrarre una pletora di teoremi che hanno l'aspetto a tutta prima completamente inutile (e quindi si tende ad ignorarli), mentre per quanto riguarda il secondo lo infastidiva il fatto che un concetto così utile avesse un metodo così complicato per essere calcolato a mano. Figuratevi come si è sentito quando ha scoperto che tra i due c'è una connessione.

7.1 Avanzi tetrangoli

Categorizzare degli oggetti selvaggi come i numeri primi può sembrare, a tutta prima, una perdita di tempo: anche pensandoci, da una parte avete il 2 (che è l'unico primo pari) e dall'altra tutti gli altri, e la cosa sembra finita lì.

In realtà, è possibile dividere i primi restanti in altre due categorie. Infatti i primi (tranne il 2) possono essere espressi in una di due forme: o sono uguali (per un qualche valore di n) a $4n+1$, o a $4n+3$. Visto che $4n$ e $4n+2$ non possono essere primi, allora deve essere possibile esprimere un primo in uno dei due modi sopraindicati: e, se siamo fortunati, lo stesso valore di n ci permetterà di generarne due, come ad esempio 5 e 7 (per $n=1$). Ma arrivati a questo punto, sembra che il gioco sia finito lì. Quindi potremmo cambiare discorso. Parlando di modulo.

L'aritmetica modulare è basata su un concetto ragionevolmente semplice: quanto vale il resto della divisione intera di un numero (intero) per un numero (intero) fissato? Il grosso vantaggio del porsi una domanda del genere è che, contrariamente agli interi (tutti), in questo caso ci ritroviamo a lavorare con pochi oggetti: infatti, il resto della divisione per n può assumere unicamente i valori da 0 (quando il dividendo è un multiplo del divisore) a $n-1$; questo semplifica, per certi versi, i calcoli, riducendo il tutto a "pochi"[13] elementi sui quali lavorare. E su questo piccolo insieme, siete in grado di sommare, sottrarre, dividere e moltiplicare, sempre con le dovute precauzioni: se vi ritrovate a "sforare dall'insieme", dovete riaggiustare i conti calcolando il resto dell'opportuna divisione per il modulo.

Così come l'insieme degli interi, anche i sistemi numerici dell'aritmetica modulare hanno i quadrati; prendendo, ad esempio[14] l'aritmetica *modulo* 7; possiamo calcolare piuttosto alla svelta quali siano i quadrati perfetti, visto che:

$$0\times0=0=0_{\text{mod }7}$$
$$1\times1=1=1_{\text{mod }7}$$
$$2\times2=4=4_{\text{mod }7}$$
$$3\times3=9=2_{\text{mod }7}$$
$$4\times4=16=2_{\text{mod }7}\ \text{(o anche: }(4)^2=(-3)^2=9=2_{\text{mod }7})$$
$$5\times5=25=4_{\text{mod }7}\ \text{(o anche: }(5)^2=(-2)^2=4=4_{\text{mod }7})$$
$$6\times6=36=1_{\text{mod }7}\ \text{(o anche: }(6)^2=(-1)^2=1=1_{\text{mod }7})$$

Insomma, solo 0, 1, 2 e 4 sono quadrati perfetti modulo 7. Notate che, per la seconda parte dei calcoli, abbiamo preso una comoda scorciatoia: come dicevamo prima, il bello dell'aritmetica modulare è che ci sono pochi casi e si possono verificare le cose per forza (ma neanche tanta) bruta.

"Carino, ma di questo, cosa ce ne cale?" Ve ne cale che qualsiasi quadrato, modulo 7, deve essere uguale a uno di quelli elencati (attenti: non è evidentemente vero il contrario). Notiamo inoltre che, siccome i sistemi modulari sono *finiti*, i quadrati perfetti sono decisamente più comuni.

Come sempre quando ci sono di mezzo dei matematici, appena si trova qualcosa di semplice si prova a complicarsi la vita; supponiamo di aver trovato due *numeri primi* p e q; grazie a

[13] Virgolette d'obbligo: non abbiamo stabilito quanto possa essere grande il divisore.

[14] Non so se e l'abbiamo già detto, ma è un numero che ci è particolarmente antipatico: per quello che Rudy chiama "Effetto Verne", un buon modo per non averlo tra i piedi è sceglierlo come modulo...

qualche calcolo, abbiamo appurato che p è un quadrato perfetto modulo q; quello che ci interesserebbe sapere, adesso, è come si comporta da questo punto di vista q modulo p[15] (è una nota, non un elevamento a potenza). Ma proviamo a prenderla in un altro modo.

Se p è un primo dispari, si dice che a è un ***residuo quadratico*** modulo p se è congruente ad un quadrato perfetto modulo p; altrimenti, si dice che è un nonresiduo (quadratico); si definisce ***simbolo di Legendre*** la funzione:

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases} 1 & \text{se a è un residuo quadratico modulo p e non è } a\equiv 0 \pmod p \\ -1 & \text{se a è un nonresiduo quadratico modulo p} \\ 0 & \text{se } a\equiv 0 \pmod p \end{cases}$$

Un modo più veloce ed elegante (ma più complicato: lo ha trovato Eulero, quindi *non può* essere semplice) per esprimere la stessa cosa è basarsi sul ***criterio di Eulero***:

$$a^{\frac{p-1}{2}}\equiv\begin{cases} 1 \pmod p & \text{se esiste un intero } x \text{ tale che } x^2\equiv a \pmod p \\ -1 \pmod p & \text{se non esiste un intero di questo tipo} \end{cases}$$

e applicarlo utilizzando il simbolo di Legendre:

$$\left(\frac{a}{p}\right)\equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$$

...e qui, potrebbe cominciare a nascervi un sospetto... tornando ai nostri p e q, il simbolo di Legendre diventa:

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\begin{cases} 1 & \text{se } n^2\equiv q \pmod p \text{ per un qualche intero } n \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

Affinché questa moltiplicazione dia risultato 1, l'esponente a secondo membro deve essere pari; il che significa che nell'esponente o è pari il primo fattore, o è pari il secondo, o lo sono tutti e due: se ne esaminiamo (per comodità) uno solo, si ricava che:

$$\begin{aligned} &\frac{p-1}{2}=2n \\ &\Rightarrow p-1=4n \\ &\Rightarrow p=4n+1 \end{aligned}$$

Insomma, ***se p e q sono primi, p è un quadrato perfetto modulo q e q è un quadrato perfetto modulo p se e solo se almeno uno dei due primi è esprimibile nella forma 4n+1***. Se sono tutti e due del tipo "4*n*+3", non funziona. Il che, a noi, sembra una dimostrazione in più di quanto siano matti i numeri primi.

Se vi state chiedendo a cosa serva tutto questo, non siete un Vero Matematico (©Zar), il quale si chiede invece: "Carino, funziona solo per i quadrati?". Bella domanda.

Storicamente, il primo tentativo in merito lo ha fatto Gauss, "suggerendo" (e quando uno che si chiama Gauss vi "suggerisce" qualcosa, l'unica risposta ammessa è: "Sì, Capo!") di esplorare alte tipologie di numeri interi, tra cui i cosiddetti ***interi di Gauss***: questi non sono altro che numeri complessi le cui parti reale e immaginaria sono numeri interi; qui la faccenda si fa complicata, visto che succedono un paio di cose strane.

[15] Attenzione, piccola nota per chi adesso avesse qualche dubbio. In uno dei due casi, dovete evidentemente fare il conto del modulo: uno dei due numeri sarà maggiore dell'altro, e quindi dovrete calcolare il maggiore modulo il minore.

Tanto per cominciare, questi numeri (come in genere i complessi) non hanno un ***ordinamento totale***: non potete decidere quale sia il maggiore tra, ad esempio, $1+2i$ e $2+i$. Inoltre, il concetto di "numero primo" si complica, visto che, sempre per restare negli esempi:

$$5=(2+i)\times(2-i)$$

...e quindi "5", qui, smette di essere primo.

Comunque, Gauss ce l'ha fatta, e ha dimostrato che esiste una legge di ***reciprocità quartica per gli interi di Gauss***. Successivamente, ***Eisenstein*** e ***Jacobi*** sono riusciti a dimostrare una legge di reciprocità ***cubica*** e finalmente ***Artin*** è riuscito a mostrare che tutte queste reciprocità non sono altro che casi particolari di una legge più complessa. Ma torniamo alla reciprocità quadratica.

Adesso, forse, è il caso di citare almeno un'applicazione. Quella dal punto di vista pratico più grave è relativa alla cifratura a chiave pubblica: se p e q sono due primi (molto grandi), calcoliamo il loro prodotto N e lo utilizziamo congiuntamente a un numero x per effettuare la cifratura. Se x è un residuo quadratico modulo N siamo nei guai: il nostro messaggio diventa "facilmente" decifrabile. Quindi, meglio verificare.

La nostra preferita, comunque, è una regola che ha l'aria decisamente strana: ***un intero maggiore di*** **1** ***può essere espresso come somma di due quadrati se e solo se la sua decomposizione in fattori primi non contiene fattori p^k, dove p è un primo congruo a*** **3** ***(mod*** **4*****) e k è dispari***: i numeri esprimibili in questo modo sono detti ***rappresentabili*** e sono gli unici valori possibili per la norma degli interi di Gauss che abbiamo visto poco sopra; se volete andare nel complicato, il ***teorema dei due quadrati di Jacobi*** statuisce che ***il numero delle rappresentazioni di n come somma di due quadrati è*** **4** ***volte la differenza tra il numero dei divisori di n congrui a*** **1** ***modulo*** **4** ***e il numero dei divisori congrui a*** **3** ***modulo*** **4**.

...quel "$4n+1$ o $4n+3$" aveva l'aria innocua, invece...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms