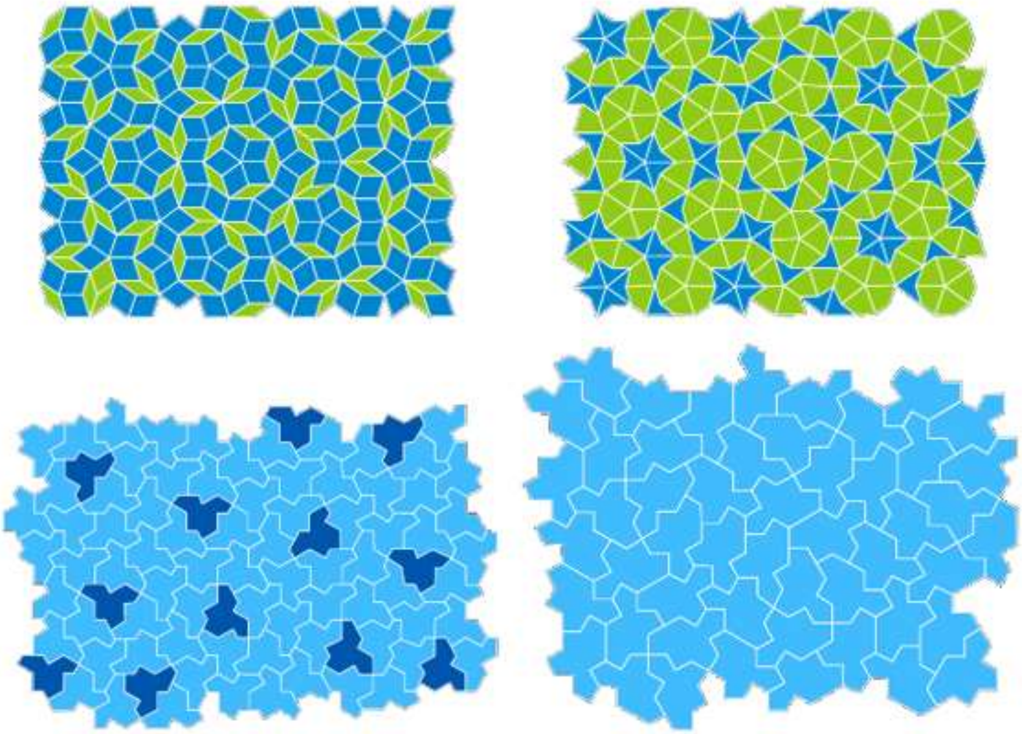
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 301 – Febbraio 2024 – Anno Ventiseiesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com
www.rudimathematici.com

RM300 ha diffuso 3'389 copie e il 28/01/2024 per Google eravamo in 11'900 pagine.

Nel 1970, Roger Penrose ha suscitato un discreto interesse con ***rhombuses***, una tassellatura non periodica a due elementi (la prima in alto a sinistra), composta di due diversi tipi di rombi, e il secondo tentativo (in alto a destra), ***kites&darts***. A lungo si è cercata una qualche figura che tassellasse il piano da sola: ci è arrivato David Smith, con la tassellatura nota come ***hats*** (in basso a sinistra). Per chi si lamentava dei cappelli rivoltati (in blu scuro) Smith ha presentato ***spectre***, che tassella il piano in modo aperiodico senza riflessioni. Questi oggetti si chiamano ***ein stein*** ("una pietra", in tedesco). ...qualcuno vuole calcolare lunghezze e angoli di cappelli e spettri?

1. Grandi opere di matematica

"Non l'ignoranza, ma l'ignoranza dell'ignoranza è la morte della conoscenza."

"Serve una mente davvero originale per affrontare l'analisi dell'ovvio."

"La sola semplicità che merita di essere creduta è la semplicità che scaturisce dalla complessità più profonda."

"Nella logica formale, una contraddizione è il segnale della sconfitta, ma nell'evolversi della vera conoscenza segna il primo passo verso la vittoria."

"Con ogni probabilità, la Natura non si preoccupa affatto delle preferenze estetiche dei matematici."

"Il problema con lo zero è che non viene usato nella vita quotidiana. Nessuno esce al mattino per andare a comprare zero pesci."

"Noi pensiamo in termini generali, ma viviamo nei dettagli."

"L'errore è il prezzo che paghiamo per progredire."

"Ogni idea davvero nuova all'inizio sembra follia."

"Non esistono verità assolute: tutte le verità sono solo mezze verità. È proprio il trattarle come verità assolute che fa il gioco del diavolo."

È tempo di cambiare qualcosa.

Questo numero di Rudi Mathematici inaugura il ventiseiesimo anno di indefessa attività ludico-matematica, o se preferite il quarto centinaio di numeri della rivista. O, se preferite ancora, il sesto lustro, il secondo quarto di secolo, e chissà quanti altri numeri potremmo tirare in ballo, se ne avessimo voglia e pazienza. Per vostra fortuna, non abbiamo né una né l'altra: siamo contenti di essere ancora qui – in molti sensi – e ci rendiamo conto che la cosa migliore che possiamo fare è quella di continuare finché riusciremo a farlo.

Però, lo abbiamo già detto, forse possiamo prenderci il lusso di cambiare qualcosa: ma siccome i cambiamenti implicano immancabilmente cose nuove, e le cose nuove implicano lavoro, e il lavoro è il nemico naturale della pigrizia che tanto amiamo e che tanto ci ama, è quasi certo che non cambieremo granché: il massimo che possiamo fare – ma solo per una volta, proprio questa volta qui – sarà di cambiare un po' lo stile di questo "compleanno" iniziale. Del resto, ve ne sarete già accorti: stiamo parlando in prima persona plurale, e ci rivolgiamo a voi con la seconda persona plurale, e questa sorta di dialogo diretto è cosa davvero insolita per i compleanni. Lo stile dei compleanni è sempre stato un po' più formale e impersonale: si racconta qualcosa stando attenti ad evitare pronomi come "io" o "noi", per travestire un po' il pezzo da articolo serio; per farlo sembrare un po' più autorevole, insomma. Fin dall'inizio l'idea di fondo è stata un po' quella di scrivere articoli che potessero avere vita propria, non vincolata agli autori e neppure alla cronaca, sperando magari che (questo è stato a lungo il sogno dell'estensore abituale dei compleanni) potessero un giorno finire, inquadrati in una squadretta di una decina di elementi, stampati in un libro di carta; e in un libro di carta non è il caso di far sentire troppo la propria voce, se si ha l'intenzione di millantarsi da saggi e augusti critici di matematica e della sua storia.

Beh, il travestimento non ha funzionato: e per fortuna, tutto sommato. I compleanni hanno così potuto prendersi delle libertà, uscire ogni mese senza preoccuparsi troppo di chi li avrebbe davvero letti e di quanti invece li avrebbero saltati, e in questa placida terra di nessuno di una e-zine dispersa nella Rete hanno vissuto sereni come in una zona protetta.

Quando abbiamo cominciato a scriverli nutrivamo la segreta speranza di arrivare al vertiginoso numero di dodici articoli, uno per mese, e dubitavamo perfino di riuscire a trovare dodici personaggi notevoli di cui parlare che fossero nati in dodici mesi diversi. Alla fine, a questa idea balzana non abbiamo pensato più, e ci siamo limitati a scriverli. E, a proposito di celebrazioni e numeri notevoli: il 2023 si è concluso con l'uscita di RM299; il primo compleanno è uscito in RM048, e 299-47=252; sono però usciti anche due numeri "doppi" di RM che contenevano un solo compleanno, quindi, allo scoccare del 2024, i compleanni usciti erano esattamente un quarto di mille. Se vi incuriosiscono le statistiche, con questa tabellina compilata per l'occasione potrete vedere come è tappezzato "l'anno matematico" dei protagonisti dei compleanni di RM:

Compleanni	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
Gennaio	2	1		1	3			1	1		1	1		1	1		1	1		1	1	1	1		1		1	1		1	1	24
Febbraio		1	1	1		2	1	2	1	1	1		1	3	1			1	1	1		1	4			1		1	1			27
Marzo			1		2		1				1		1	3		1	1	1			1	1	1	1	1	1		1	2	1	1	23
Aprile	1	1		2					1	1	1	1	1	1	1			1			1	1		1	2		1	1	1	2		22
Maggio	3	1	2		2	1	1		1		1	1		1		2		2			1		1		1	1		2		1	1	26
Giugno				1	4	2		2	1	2		1	2	2			1	1	1		2		1			1		1	2			27
Luglio	2		1					1	2	1	1	2	1	1				3		2		1					4	1	1		1	25
Agosto			1	1	1	1		2	1	2	1	1	1		2		1			1	1			1	1		1	1		2	1	24
Settembre	1	1	1	1	1			1		1	1	2			1	1	2	1				1		4				1	2	1		24
Ottobre	1				1	2	1		4	1	1				1		1	1	1	1	4	1			1					1	3	26
Novembre	1	1		1		1	2	4	3					1		1	3		1				2			1			2	1		25
Dicembre	1	1			3		2	2	1	2	1	1	1		1		1	1	1	2		1		2	1	2	1	2			1	31
	12	7	7	8	17	9	8	13	16	11	10	10	8	13	8	5	11	13	5	8	12	8	10	9	8	7	8	12	11	10	9	304

1 *Persone celebrate nei "compleanni di RM" per giorno di nascita.*

Non è certo un gran campione statistico, ma quantomeno potete scoprire se condividete il compleanno con qualche personaggio che abbiamo avuto la ventura di celebrare[1], o togliervi la curiosità di scoprire quali siano le caselline più popolate e quelle ancora vuote. Dovessimo dare un significato statistico a questa tabella potremmo concludere che non c'è grande differenza nella natalità dei matematici per mese di nascita, ma una tale conclusione è evidentemente erronea (e se vi dovesse davvero sfuggire il perché, trasformiamolo in indovinello: la soluzione la trovate andando a leggervi questa nota[2]), e forse un briciolo di curiosità statistica può essere soddisfatto guardando invece i giorni di nascita: ma sarà poi vero che il quinto e il nono giorno del mese sono i più fecondi, mentre il 16° e il 19° quelli che lo sono di meno?

Quello che è certo è che se i compleanni usciti da febbraio 2003 a dicembre 2023 sono 250 e il numero dei protagonisti è 304, il rapporto personaggi/compleanni è 1,22, come a dire che mediamente ogni quattro o cinque articoli sparliamo di due matematici anziché di uno solo, e in quel caso ci prendiamo spesso la libertà di infilare un co-protagonista anche se non è nato nel mese "giusto". Ma, a dire la verità, di libertà ce ne prendiamo anche molte altre, soprattutto perché i vincoli sono dannatamente stringenti. Il vincolo più evidente è che per scrivere un compleanno occorre conoscere la data di nascita del festeggiato, e questa è cosa invero complicata, per i matematici dell'antichità: nel novero dei nostri protagonisti, il più lontano nel tempo di cui conoscevamo la data di nascita è Leon Battista Alberti, nato il 18 febbraio 1404 e festeggiato in RM157, ma questo non ci ha impedito di scrivere compleanni su Archimede, Pitagora, Ipazia e altri che purtroppo non riusciremo mai a infilare in una casellina dei nostri calendari[3].

In qualche rarissimo caso abbiamo ceduto la penna a persone migliori di noi, per parlare di personaggi che altri conoscevano meglio di quanto avremmo potuto mai fare, e in quel caso

[1] Inutile dire, per questo scopo, è decisamente più semplice e gratificante andare a sfogliare il "Calendario di RM", venticinquesima edizione, facilmente reperibile ovunque, all'esorbitante prezzo di zero centesimi.

[2] L'unica regola ferrea dei compleanni è che celebrano persone nate nel mese di uscita dei compleanni stessi, e quindi non può esserci oscillazione notevole nel rapporto compleanni/mese. Piuttosto è curioso che un po' ce ne sia ugualmente, perché se si celebrasse una sola persona per articolo, il rapporto dovrebbe essere uguale per tutti, alla fine di ogni ciclo annuale. Le oscillazioni dipendono dal fatto che qualche compleanno celebra più di una persona, e da questo punto di vista è piuttosto curiosa, quasi sorprendente, la differenza tra dicembre (31) e aprile (22).

[3] Cosa, questa, che ovviamente demolisce anche il testé citato rapporto tra personaggi e compleanni (1,22) che non può tenere conto del vero numero dei personaggi celebrati, visto che alcuni restano invisibili sia nel calendario che nella tabellina della pagina precedente.

non abbiamo ovviamente tramandato i vincoli, che comunque sono stati sostanzialmente rispettati. Ben presto abbiamo incluso alcuni grandi fisici, oltre ai matematici, che la parentela tra le due discipline è storicamente così stretta che certe volte si fa persino fatica a distinguerle all'interno di ciò che a lungo si chiamava semplicemente "filosofia naturale"; ma per lungo tempo abbiamo mantenuto l'idea di parlare solo di gente famosa e disciplinatamente trapassata tra i più. Poi, anche se raramente, sono caduti anche questi due vincoli: se riesci a scambiare delle mail con Gigliola Staffilani e Matilde Marcolli cosa vuoi fare, non scriverci un pezzo sopra solo perché le due signore sono – grazie al cielo – vive e vegete?

Anche il vincolo della "fama" è stato talvolta violato, e in quei rarissimi casi per ragioni in parte di ribellione (che noia, parlare solo di vecchi barbogi) o magari di contrappasso, che la fama è demone ballerino e dispettoso, e talvolta va troppo spesso dove non dovrebbe andare e troppo raramente dove invece dovrebbe mettere su casa. Ma in casi come questi c'è almeno l'evidenza che si sta parlando di persone magari eccezionali, ma quantomeno non matematici nel senso stretto del termine, insomma personaggi che amano la matematica ma che difficilmente si possono considerare davvero "matematici". E qui, immancabilmente, casca l'asino.

2 *Maurizio Codogno*[4] *e Roberto Natalini*[5]

Perché ci sono, come al solito, delle situazioni intermedie. Prendete Maurizio Codogno e Roberto Natalini, ad esempio: sono tutti e due matematici a tutto tondo – toh, ci pare già di sentire Maurizio che protesta dicendo "No, io sono solo laureato in matematica, ma non sono un matematico!" – che un compleanno se lo potrebbero meritare con tutti i crismi, o quasi. Con buona pace del Codogno che, pur non essendo un ricercatore affiliato a una università, è probabilmente il "matematico" con la maggiore carriera divulgativa in rete, e con altrettanta buona pace di Roberto che già vediamo sbuffare e invitarci bonariamente a non dire scemenze e che lui è un onesto manovale della ricerca e basta, sta di fatto che, con tutta oggettività, si potrebbero facilmente scrivere le solite venti-venticinquemila battute su ognuno di loro senza stonare di un ette lo standard dei compleanni di RM. Certo, a fare da guastafeste arrivano subito un certo numero di pensieri: ma cosa possiamo dire, dove troviamo le foto, possiamo o no raccontare di quella volta, non sarà infastidito se diciamo questo, non ci rimarrà male se non diciamo quest'altro, e così via. E poi tutte le questioni accessorie, che vanno da "si intimidirà a comparire in una schiera dove già sono presenti Gauss, Riemann, Newton e cento altri del genere?" fino a "e se si incavola come un procione perché ci permettiamo di parlare di lui sul nostro giornaletto?"

Insomma, finisce sempre che non ne facciamo niente (almeno, non ne abbiamo fatto niente fino a ora), ma da qualche anno è un mezzo tormento, ogni volta che si avvicina il momento tragico di ogni mese, quello in cui bisogna scegliere chi sarà il protagonista del prossimo compleanno: è sempre una sofferenza, perché un altro vincolo mai statuito ma sempre rispettato è quello di non scrivere mai due compleanni sul medesimo protagonista (anche

[4] Foto presa in Rete, quindi la riteniamo libera da diritti. Non fare storie, Maurizio.

[5] Foto presa in Rete, quindi la riteniamo libera da diritti. Non fare storie, Roberto.

se qualcuno se lo meriterebbe, dopo vent'anni) e i nomi cominciano a scarseggiare. Così, ogni volta che si avvicina la scelta del compleanno di Maggio o di Luglio, le dita restano per un po' sospese sulla tastiera, in attesa di superare l'ultimo dubbio e avere licenza di incominciare a battere i tasti. Finora, l'ultimo scoglio non è mai stato superato, almeno per quei due loschi figuri, e se continua così, non lo supereremo mai. E se volete davvero conoscere il perché, questo è… diamine, siamo esseri umani anche noi, quei due devono piantarla di farci morire di invidia.

3 *Il primo EuNBeT, aprile 2007*

E poi, diamine, questo giornalino – che è pur sempre la Prestigiosa Rivista Italiana di Matematica Ricreativa – si era già, da decenni, posto il problema di come poter parlare degli amici, famosi o meno che fossero, e togliersi il pensiero di come parlare degli amici meritevoli: la celeberrima rubrica di recensioni "Era una Notte Buia e Tempestosa" è comparsa su queste pagine già nel lontano 2007, con l'obiettivo palese e dichiarato di recensire le opere degli "amici di RM", quindi non si può certo dire che noi difettassimo di buona fede. Solo che poi, mentre noi continuavamo a sognare di sbarcare in libreria, gli amici continuavano a pubblicare e a girare l'Italia facendo i firmacopie. Noi, da persone oneste e corrette, abbiamo fatto ciò che ogni persona onesta e corretta avrebbe fatto al posto nostro: per non far trapelare l'invidia abbiamo via via ridotto il numero di recensioni (per statuto della rubrica ci è vietata la stroncatura dei libri che recensiamo, dannazione) ed è finita com'è finita, cioè con i nostri amici (non solo i due loschi figuri) che scrivono-pubblicano-vendono, e noi che per tigna li recensiamo su EuNBeT sempre più raramente.

Potrebbe essere abbastanza, no? No, non lo è. I due loschi figuri – proprio loro due, stavolta, non loro due più tutti gli altri – hanno deciso di fare il salto di livello. Scrivere un libro è troppo poco, robetta da fanciullini pascoliani; quelli davvero bravi non si limitano a mettere in cantiere un misero libro, ma pianificano, organizzano e dirigono un'intera collana di libri. È il colpo di grazia, no? Come diavolo si fa a recensire una collana intera? Come minimo, è un preciso tentato omicidio nei confronti della nostra rubrichetta di recensioni.

Di conseguenza, abbiamo deciso di vendicarci, attuando un piano criminale in tre atti. Atto primo, l'Organizzazione: a costo di snaturare un po' la natura di questo compleanno e le nostre consolidate buone intenzioni, resuscitiamo eccezionalmente la rubrica di recensioni "Era Una Notte e Tempestosa" solo per dar fastidio a Codogno e Natalini.

Atto secondo, l'Agguato: anche se i due si predisporranno all'idea di leggere una stroncatura delle loro malefatte editoriali, certamente non si aspetteranno la spietata sorpresa che riserviamo loro, recensendo nella stessa rubrica anche un'altra "grande opera di matematica", come certamente essi ritengono sia la loro propria.

Atto Terzo, la Vendetta: beh, è ovvio: parleremo poco e male delle loro collane ed esalteremo la terza, no?

Quindi, caro lettore, adesso avrai capito che la seconda e ultima puntata di questa triste storia densa di ripicche la troverai al di fuori di questo compleanno snaturato, ma sempre all'interno di questo giornalino: è appena poche pagine più avanti, nella rubrichetta di recensioni già più volte citata. Però, visto che questo compleanno è già stato snaturato e stravolto da basse beghe di cortile, e visto anche che la frase "grandi opere di matematica" non sempre è stata vilipesa come hanno di recente fatto quei due lì, ma talvolta, nel corso dei secoli, è stata usata assai propriamente da autori degni del massimo rispetto, questo compleanno procederà nella sua parte meno astiosa e più strettamente biografica parlando di una mente profonda e geniale, tanto matematica quanto filosofa, che è quella dell'autore di tutte le citazioni con cui abbiamo tappezzato la prima pagina di questo articolo, oltre che di un'opera matematica davvero grandiosa.

4 *Alfred North Whitehead*

Alfred North Whitehead nasce il 15 febbraio 1861 a Ramsgate, Isle of Thanet, nella più orientale punta del Kent, regione di confine come nessun'altra in Gran Bretagna, che pure di confini non ne ha nessuno. È sempre sbagliato forzare a posteriori delle coincidenze curiose, ma è difficile resistere alla tentazione di leggere segni premonitori già dal suo luogo di nascita: Ramsgate è forse il luogo d'Inghilterra più esposto alle invasioni dal continente europeo, e nel nome ha quel suffisso "gate" che rimarca l'idea stessa di porta, varco, ingresso. L'etimologia stessa del nome della regione, "Kent", si fa risalire a termini protobritannici nel significato di "confine", termine che è poi passato, anche se latinizzato, nel "Cantium" con cui chiamava quella terra Giulio Cesare. Niente male, per un uomo che ha passato tutta la vita sul confine tra matematica e filosofia.

E poi, forse ancora più curiosa, c'è la storia specifica di quella piccola parte di Kent dove Ramsgate si trova: l'Isle of Thanet, quindi isola, ma che in realtà è una penisola. Ma – ancora – che un tempo era davvero un'isola, fino al 1672, quando l'ultima nave risalì il canale che univa la sponda nord e la sponda sud di quel margine del Kent, e che rendeva coerente il luogo al nome di "isola": dopo quell'ultimo passaggio, il canale, disidratandosi piano piano, sparì del tutto, e l'isola si ridusse a penisola. E anche questo può leggersi come uno strano ammonimento del destino, se il luogo di nascita di una persona che ha costruito la sua vita professionale anche sulla attenta costruzione delle definizioni più precise cambia natura geografica, quasi a ricordare la caducità anche dei concetti di base. O ancora proprio quel nome, Thanet, la cui etimologia resta incerta, ma che alcuni pensano che possa addirittura provenire dall'antica dea punica Tanit, venerata da Fenici e Cartaginesi, che in lei assommavano le qualità che Greci e Romani sparivano tra Venere e Giunone, tra Afrodite e Hera; perché curioso registrare che qui Alfred Whitehead nacque da un pastore anglicano che portava il suo stesso nome e cognome, e che da anglicano crebbe il figlio; ma poi Alfred fu tentato dalla religione cattolica, e infine si risolse nell'agnosticismo che accoglie molti scienziati. Probabilmente, per i suoi genitori, la differenza tra un agnostico e un pagano seguace di Tanit era nulla, o quasi.

Alfred è il più piccolo di quattro fratelli, e da piccolo e fragile viene trattato in famiglia. Non che lo si coccoli troppo – la madre era particolarmente avara di attenzioni, rispetto a quello che si considera essere lo standard materno sia oggi che a quei tempi – ma in generale Alfred veniva considerato cagionevole di salute, insicuro, e perciò era gratificato da un'attenzione familiare particolare, anche se, tutto sommato, ingiustificata. Viene educato in casa fino ai quattordici anni di età, e non rivela una mente straordinariamente brillante: il padre lo istruisce in latino, greco e ovviamente anche un po' in matematica, e Alfred impara dignitosamente quel che c'è da imparare, ma senza mostrare doti eccezionali.

A dire il vero, cosa abbia acceso, in qualche momento della sua vita, il suo interesse verso la matematica, è cosa che resta ancora misteriosa. Però, a un certo punto accade: nella prima scuola che frequenta, la Sherbourne Indipendent School, ottiene di poter ridurre le ore di latino in cambio di studiare più matematica. Finisce che, ormai diciottenne, vince una borsa di studio per il prestigioso Trinity College di Cambridge, e qui la sua vita prende la svolta decisiva. Anche se non si sa quando sia nata, la sua predisposizione per la matematica diventa evidente, e continua a svilupparsi: vive all'interno del college, studia, le uniche lezioni che segue sono quelle di matematica, tenute da docenti quali George Stokes e Arthur Cayley, e si fa amici che diventeranno famosi, come D'arcy Thompson[6]. L'anno successivo vince un'altra borsa di studio, e continua ad eccellere: nei Tripos, nelle selezioni accademiche, nelle classifiche dei Wrangler, e infine entra nel corpo docente dell'università[7].

La sua carriera accademica è allo stesso tempo tranquilla e insolita. Whitehead assume diversi incarichi e tiene diversi corsi di matematica, e sembra destinato a diventare uno di quei professori che hanno intenzione di dedicarsi assai più alla didattica che alla ricerca. Scrive poche memorie, e il suo interesse verso la matematica non sembra diminuire, ma in qualche modo pare indirizzarsi agli aspetti più filosofici della disciplina, anche perché il suo pensiero sembra dedicarsi assai volentieri alla filosofia e alla metafisica. In parte, questi intenti si intravedono anche nella sua opera principale su cui cominciò a lavorare nel 1890, il *Trattato sull'Algebra Universale*, nella cui prefazione, oltre a presentare l'opera, spiega anche quale dovrebbe essere, a suo parere, il ruolo – appunto universale, e rigorosamente logico – della matematica in ogni aspetto delle attività intellettuali umane.

5 *Un venticinquenne Bertrand Russell*

È nel 1890 che incontra, ovviamente a Cambridge, un giovanotto di undici anni più giovane: uno studente appena diciottenne che però sembra avere il suo stesso approccio alla matematica, e al ruolo che la matematica dovrebbe avere. È Bertrand Russell[8], e il professor Whitehead non ci mette davvero molto a capire che lo studente promette assai bene: oltre all'università, all'amore per la matematica e per la filosofia, alla lingua e alla nazionalità, i due sono uniti da qualcosa di assai più specifico: l'eccezionale interesse per gli studi di un matematico italiano, Giuseppe Peano, che nel Congresso Internazionale di Matematica di Parigi nel 1900 – lo stesso in cui David Hilbert presentò i suoi celeberrimi 23 problemi del secolo – stava affrontando sui fondamenti della matematica. Ecco cosa interessa veramente a entrambi: i principi della matematica. E decidono di scrivere insieme, in merito, un'opera davvero monumentale.

È certamente riduttivo limitare la curiosità nei confronti di Alfred North Whitehead solo alla stesura, insieme a Bertrand Russell, dei "*Principia Mathematica*", eppure è quasi impossibile non farlo. Molto accadde, in seguito, sia nella vita di Russell che in quella di Whitehead, e persino nella vita dell'opera stessa: dopo l'uscita del primo volume, Russell scopre il problema delle antinomie che portano il suo nome e che minano seriamente le fondamenta stesse dei *Principia*. L'idea di base di tutto il lavoro è quello di fondare l'intera matematica sulla logica, ma è proprio la logica che sembra non voler collaborare. L'ultimo dei tre volumi esce nel 1913, e già stuoli di matematici e logici avevano cominciato a

[6] Ne parliamo in "Tre matematici alla corte del re", RM138, Luglio 2010.

[7] I meccanismi selettivi di Cambridge (e di altre università inglesi) sono sempre stati abbastanza più articolati di quelli a cui siamo abituati. Le borse di studio (*scholarship*) sono molto più diffuse – anche perché le rette universitarie sono assai costose – per consentire l'ingresso ai college agli studenti più meritevoli ma meno abbienti, e nei college gli studenti, di fatto, passano tutto il tempo e hanno vitto e alloggio. Si tengono poi periodicamente delle sorte di esami in forma di concorso (Tripos), con tanto di classifica, per gli studenti che sono candidati al baccalaureato (BA, Bachelor of Arts); non è da meno l'esame conclusivo, per il massimo grado di laurea, dove la classifica finale premia i migliori con il titolo di "Wrangler" (naturalmente distinti in ordine di merito: Primo Wrangler, Secondo Wrangler, etc,).

[8] Protagonista di uno dei primissimi compleanni di RM, il quinto, per la precisione: "*Nemesi*", RM052, maggio 2003.

dissezionare l'opera ancora incompleta, alla ricerca sia di conferme che di confutazioni. Il sogno di un'opera onnicomprensiva, fondativa e immutabile infine, si infrangerà contro i Teoremi di Incompletezza di Kurt Gödel, che mettono in crisi il rapporto che sembrava indissolubile tra logica e matematica, e inoculano anche il sospetto di inconsistenza sull'idea di verità.

6 *I "Principia Mathematica"*

Ma la grandezza dell'opera resiste, ed è indiscutibile: Russell vivrà ancora molto a lungo, e il nome sarà un faro per la cultura, la filosofia e la morale del Novecento, oltre che della matematica. Combatterà eroiche battaglie per i diritti civili, sull'etica, sulla religione; finirà in carcere per antimilitarismo, mentre continua a contribuire agli sviluppi della logica e della matematica. Nasceranno istituzioni libertarie in suo nome, come il famoso Tribunale Russell, e vincerà addirittura – lui matematico e filosofo – il premio Nobel per la Letteratura.

Alfred North Whitehead avrà una carriera meno luminosa, ma in fondo era proprio il suo carattere ciò che un po' gli impediva di proporsi come personaggio pubblico. Lasciò Cambridge nel 1910, anno di pubblicazione del primo volume dei Principia, e la lasciò a causa di tristi beghe accademiche che comprendevano la fin troppo strenua difesa di un amico che aveva avuto una storia adultera con la moglie di un altro professore, che si concluse con il meschino allontanamento di Whitehead dal consiglio accademico per aver preso le difese dell'accusato. Ma Whitehead era pur sempre Whitehead, e non ebbe difficoltà a trovare cattedre prima al Collegio Imperiale di Scienza e Tecnologia di Londra e poi oltreoceano, nella prestigiosissima Harvard. Ormai più filosofo che matematico, scrive libri che restano ancora dei classici importanti e assai citati, come *Processo e Realtà*, *Scienza e Mondo Moderno*, *Natura e Vita*, e molti altri. Furono molte le lauree ad honorem che ricevette da università di tutto il mondo e, come quella di Russell, la sua vita gli offrì molte gratificazioni, oltre a quella che gli arrivò con i *Principia Mathematica*.

Eppure, il suo nome è legato a doppio filo con quest'opera che è al tempo stesso eroica, ambiziosa, colossale, sbagliata, grandiosa e impossibile. Una vera grande opera di matematica.

2. Problemi

2.1 Random Carnival

Che ci pare un buon tema per una festa (non a Carnevale, chiaramente. Altrimenti è troppo facile). Aneddoto assolutamente insignificante: quando Rudy ha trovato questo problema, si è imbattuto anche in uno dei suoi "false friend" preferiti della lingua inglese: ha sempre un attimo di perplessità, quando vede scritto "confetti".

Alice e Doc hanno ricevuto da Rudy l'incarico di preparare 500 coriandoli (eccolo lì!) ciascuno per la festa di Carnevale, con altezza e larghezza casuali comprese tra zero e uno, ma hanno affrontato il problema in modo un po' diverso l'uno dall'altro.

Il metodo di Doc è stato quello di generare due numeri casuali, tagliare un coriandolo con altezza pari al primo valore generato e larghezza uguale al secondo e passare al coriandolo successivo con lo stesso metodo: calmo, metodico e fonte di gran divertimento.

Il metodo di Alice invece era basato sul fatto che, per quanto riguarda il calcolo delle probabilità, lei meno ne vede e più è contenta, e "numeri casuali" è una cosa pericolosamente vicina al CdP; quindi, per usarne il meno possibile, genera un numero casuale e ritaglia un quadratino della dimensione richiesta. Risponde alle richieste di Rudy e se la sbriga decisamente più alla svelta.

Voi sapete che un corollario della legge di Murphy è che "un coriandolo non cade mai sopra un altro coriandolo, in modo da sporcare il più possibile il pavimento"; quindi, la domanda è: alla fine della festa, da un punto di vista probabilistico, è maggiore la superficie di pavimento coperta dai coriandoli di Doc o quella coperta da quelli di Alice? O meglio, qual è il rapporto delle aree tra i "coriandoli medi" di Doc e Alice?

...logicamente, ciascuno dei due ha deciso che pulisce solo i "suoi" coriandoli...

2.2 Taglia e Cuci

...Questa volta siamo generosi: vi diamo un bel nastrino (4 metri di lunghezza), forbici, ago, filo e tre domande.

L'accordo tra noi è che la parte sinistra del nastro andrà a formare un cerchio, mente quella destra andrà a formare un quadrato.

Prima domanda (facile): dove tagliate, per avere l'area totale (cerchio più quadrato) massima?

Seconda domanda (un po' meno facile): dove tagliate, per ottenere l'area totale minima?

Terza domanda (quasi difficile): se il taglio è casuale, che area totale vi aspettate?

Tranquilli, le forbici hanno la punta arrotondata.

2.3 PREMIUM!

Ogni volta che da qualche parte c'è scritto "Versione FREE" / "Versione PREMIUM", Rudy si chiede dove sia la fregatura: di solito, o è nella versione "Free" (nel senso che non è in grado di fare nulla, all'atto pratico), o è nella versione "Premium" (nel senso che fa pochissimo in più rispetto alla "free"). Bene, qui ve lo diciamo subito: la fregatura è che la domanda non è nel problema (che conoscete benissimo, per questo lo mettiamo come "Premium"), quindi ve lo scriviamo indentato, essendo solo un riferimento.

> Due treni sono a 60 chilometri uno dall'altro e stanno andando uno incontro all'altro, alla velocità di 30 chilometri all'ora.
>
> Una mosca in grado di viaggiare indefinitamente a 60 chilometri all'ora parte da un treno e vola verso l'altro treno; quando lo raggiunge, gira in tempo zero e vola verso il primo treno, e avanti così sin quando i due treni si incrociano: in quel momento, la mosca si ferma. Quanta strada percorre la mosca?

Di solito, quando qualcuno trova la soluzione, gli si racconta che quando il problema fu posto a von Neumann questi dette immediatamente la risposta. Deluso, il propositore disse:

"Oh, conoscevi già il trucco!" al che, von Neumann rispose: "Quale trucco? Ho sommato la serie". E tutti giù a ridere.

Bene, per farvi smettere di ridere, la domanda è: ma voi l'avete mai risolto "alla von Neumann"? Primo (e, crediamo, unico) caso nel quale un Q&D diventa un BJ....

3. Bungee Jumpers

In una città con più di due linee tramviarie, queste hanno le seguenti caratteristiche:

1. Ogni linea ha almeno tre fermate.
2. Date due fermate qualsiasi, esiste almeno una linea che le congiunge.
3. Due qualsiasi linee distinte hanno una e una sola fermata in comune.

Mostrate che tutte le linee hanno lo stesso numero di fermate, e sia questo numero $n+1$; mostrate che ogni fermata è servita da $n+1$ linee.

Dimostrate che vi sono in totale n^2+n+1 fermate e n^2+n+1 linee nel sistema.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

Se siete arrivati a leggere queste righe direttamente dal compleanno, avrete già un'idea abbastanza chiara su quali siano le premesse che hanno generato questa imprevista puntata dell'irragionevole rubrica di recensioni di RM. Nel caso che, invece, siate arrivati qua direttamente, non vi preoccupate: la lettura delle farneticazioni introduttive presenti nel compleanno dedicato a Whitehead non è affatto indispensabile: avevano più che altro l'intenzione di scherzare a danno di un paio di amici ma, come sempre accade agli scherzi innocenti, lasciano il tempo che trovano.

Però – come sempre accade agli scherzi innocenti e come Pulcinella insegna – anche le frasi scherzose qualche briciolo di verità la contengono: ad esempio, è vero che questa rubrica nasce con l'idea di recensire (e recensire favorevolmente) le opere di persone che in qualche modo la redazione di Rudi Mathematici ritiene amiche, pur facendo rientrare nel termine anche amicizie che sono talvolta solo virtuali; è vero che una volta si riusciva a tenere abbastanza il passo, forse perché gli amici erano di meno o pubblicavano di meno (o magari era di meno la pigrizia, chissà), mentre da qualche tempo facciamo una fatica del diavolo anche solo a recensire un libro ogni tre o quattro; non è vero invece che siamo invidiosi, anzi. Siamo realmente contenti del successo degli amici che scrivono e pubblicano belle cose di matematica, riuscendo così a fare del bene a tutti noi e alla matematica stessa, oltre che al loro meritato orgoglio (poi, certo, se lasciano la macchina incustodita poco distante da noi potrebbero incappare in fastidiose disavventure, ma questo è un altro discorso).

La cosa più significativa è comunque un'altra, e cioè che questa non è una vera recensione: e non lo è perché oggettivamente non può esserlo, non per cattiva volontà di chi sta scrivendo. Parleremo – in maniera vergognosamente veloce – di due collane di libri di matematica: il totale comprenderà la bellezza di 55 titoli, molti dei quali (38, se non abbiamo sbagliato i conti) devono ancora uscire, e senza aver ancora letto gran parte di quelli già disponibili. Una recensione senza aver letto ciò che si recensisce è peccato mortale, ma in questo caso è proprio impossibile non finire diritti nell'ultimo cerchio dell'inferno dantesco, anche a volerci provare. Gli autori sono un po' meno di cinquanta, visto che qualcuno si avventura a firmare più di un volume e, in buona sostanza, non si può davvero giudicare il sudato lavoro di ognuno di loro alla cieca.

Quello che si può legittimamente fare è giudicare l'idea, e immaginate cosa ne possiamo pensare noi della pubblicazione di opere così significative per la divulgazione italiana della matematica. Si può forse raccontare lo stupore di scorrere – quando possibile – l'elenco degli autori, e ritrovare così tanti nomi conosciuti, quasi tutti davvero autorevoli, tutti (almeno quelli che conosciamo) davvero bravi.

Quindi, non aspettatevi dei giudizi di merito: aspettatevi piuttosto un po' di sensi di colpa perché, se una delle collane è appena all'inizio delle sue pubblicazioni, l'altra è già oltre la metà del piano d'opera, e noi abbiamo tardato davvero troppo a parlarne. Prendete le due paginette che seguono solo come un promemoria, come un invito ad andare a spulciare da soli i siti ufficiali (o anche solo i blog e le pagine dei social), e questo EuNBeT anche come basso escamotage per non far sbandare troppo il compleanno di questo numero dalla sua (peraltro flebilissima) linea narrativa.

Ah, dimenticavamo: la "vendetta" preannunciata nel compleanno non è una vendetta: anche questo è stato solo un mezzuccio, un basso espediente per raccontare un altro piccolo e immeritato evento che ci inorgoglisce. Anche se non si tratta di una terza collana di libri di matematica, anche se noi non capiamo ancora bene come abbiano deciso di farci entrare in cotanto consesso per scrivere due paginette di nostre sciocchezzuole, ne abbiamo abbastanza da poter lucidare tutte e tre le nostre fruste code di pavone e aprirle, spalancarle e mostrarle in tutta la loro alterigia. Come le due collane che hanno come eminenze grigie Maurizio Codogno e Roberto Natalini, anche questa terza pubblicazione è una "grande opera di matematica": la sola cosa strana è che dentro ci siano anche i nostri tre nomi.

4.1 Rivoluzioni Matematiche – I grandi teoremi da pitagora a Nash (MaddMaths! + Le Scienze)

L'idea è straordinariamente buona: una serie di venti (poi diventate venticinque, a dimostrazione che l'idea è davvero buona) monografie sui grandi teoremi della matematica, e che pertanto possono davvero considerarsi delle vere e proprie rivoluzioni. "Rivoluzioni Matematiche" è proprio il titolo di questa collana che già dal settembre 2022 viene pubblicata da "Le Scienze" ogni mese. Ogni volume è acquistabile al prezzo di 14,90 euro, prezzo che include anche la rivista. Per produrre i 25 volumi che costituiscono l'opera, Le Scienze si è affidata alla collaborazione di *MaddMaths!*, ed è per questa ragione che, per parlarne, abbiamo tirato in causa Roberto Natalini. Per noi è quasi un riflesso condizionato, ma ciò non toglie che sia un'azione illegittima: per quanto *MaddMaths!* sia legata a doppio filo alla passione divulgativa di Roberto, è altrettanto vero che *MaddMaths!* è qualcosa ormai troppo grande per consentire la sineddoche tramite una sola persona. *MaddMaths!* è un enorme contenitore di professionisti della matematica, tutti disposti a usare parte del loro tempo alla divulgazione. Una buona maniera per rendersene conto è proprio quella di andare a vedere chi siano i singoli autori dei volumi, cosa che – tra l'altro – ci consente anche di affrontare il forse unico punto che ci lascia perplessi di tutta la collana: l'assenza in copertina del nome degli autori. Certo, non facciamo fatica a immaginare le possibili ragioni: alla fin fine, possono esserci delle precise scelte editoriali; si può aver deciso che i nomi degli autori si sarebbero potuti comunque trovare in rete (ad esempio, proprio sul sito di MaddMaths!), senza contare che togliere visibilità ai singoli ha il pregio di rendere più compatta, dal punto di vista identitario, tutta la collana, un po'

PIANO DELL'OPERA	
1	Teorema dell'equilibrio di Nash
2	Teorema di Pitagora
3	Ultimo teorema di Fermat
4	Teoremi di Euclide e primo libro degli Elementi
5	Teorema Fondamentale del Calcolo
6	Teorema di Talete sul fascio di rette
7	Teorema egregium di Gauss
8	Teorema del limite centrale
9	Teorema di Noether
10	Teoremi dell'incompletezza di Gödel
11	Teorema dei quattro colori
12	Teorema di Eulero
13	Teorema del punto fisso di Banach-Caccioppoli
14	Teorema dell'impossibilità di Arrow
15	Teorema di Lagrange o del valor medio
16	Teorema di Bayes
17	Teorema fondamentale dell'algebra
18	Teorema di Abel-Ruffini
19	Teorema di Cauchy-Kovalevskaja per le equazioni differenziali
20	Teorema di Poincaré-Perelman
21	Teorema dei numeri primi
22	Teorema di Fourier
23	Teorema dell'Entropia di Shannon
24	Teorema della palla pelosa
25	Teorema di Cantor

come succede alle voci di un'enciclopedia. Ma gli autori sono davvero tutti notevoli, così abbiamo deciso di fare comunque un dispetto e di metterli in chiaro, anche non li abbiamo trovati tutti, e quindi ci limiteremo ad elencare in ordine alfabetico quelli che abbiamo scoperto: Carfora, Ciccoli, Galvan, Iacono, Li Calzi, Lucchetti, Milella, Montefusco, Natalini, Nitsch, Palladino, Provenzi, Saracco, Valentini, Zaccagnini, e ci perdonino gli altri.

Chiediamo scusa anche a Roberto Natalini se lo avessimo investito di troppa responsabilità, ma solo fino a un certo punto: lo sappiamo che almeno uno dei 25 è tutta roba sua.

4.2 Matematica (Maurizio Codogno + Corriere della Sera e Gazzetta dello Sport)

Se abbiamo chiuso il paragrafo precedente con delle scuse per aver presupposto una (forse) eccessiva responsabilità in Roberto, sappia subito Maurizio Codogno che non subirà il medesimo trattamento: nel suo caso la responsabilità è evidente e totale, ed è opportuno che se ne faccia pienamente carico. Di questa collana edita dal Corriere della Sera e dalla Gazzetta dello Sport e di cui ogni volume si può acquistare al prezzo di 6,99 euro (più il costo del giornale) egli è pienamente responsabile. È scritto chiaramente in ogni volume, e ogni volume – oltre ad avere una breve presentazione iniziale di suo pugno – contiene anche una sezione conclusiva di "Giochi Matematici" interamente a suo carico. Ce n'è già più che abbastanza, ma per togliere ogni dubbio Maurizio è anche autore tout court di cinque (se abbiamo contato bene) volumi. Dal punto di vista del recensore e soprattutto del lettore, la cosa più piacevole della contemporaneità in edicola di due collane di libri di matematica è la piena complementarità che manifestano: entrambe composte da monografie, ma una su teoremi, l'altra su temi; una mensile, l'altra settimanale; una con autori tutti ascrivibili al mondo accademico, questa con autori presi anche in gran copia dalla divulgazione indipendente. Era difficile immaginare di ritrovare in edicola ben due collane di pura matematica, è quasi incredibile che, di fatto, non siano affatto in concorrenza. La differenza più evidente (prezzo e cadenza di uscita a parte) è forse proprio quella degli autori, che in questa collana hanno il nome esposto in copertina: e, se ci è concessa una veloce deviazione sentimentale, ci commuove perfino un po' riconoscere diversi nomi che stavano già tra i primi lettori di questo giornaletto. Dei trenta volumi previsti ne sono arrivati in edicola già un paio: sono di piccole dimensioni – come del resto poteva suggerire il prezzo – ma tipograficamente ben curati, e seguono sempre la stessa struttura: un "corpo" che prende la maggior parte del libro e che illustra

PIANO DELL'OPERA		
1	I numeri	Maurizio Codogno
2	La logica matematica	Paolo Caressa
3	Funzioni ed equazioni	Roberto Zanasi
4	Gli insiemi	Paolo Caressa
5	L'algebra lineare	Andrea Mercuri
6	La geometria piana	Rocco Dedda
7	La teoria dei giochi	Maurizio Codogno
8	La probabilità	Davide Palmigiani
9	La statistica	Alessandro Viani
10	L'infinito	Maurizio Codogno
11	I numeri reali	Salvatore Fragapane
12	Le basi dell'analisi	Davide Calza e Riccardo Moschetti
13	Matematica e musica	Moreno Andreatta
14	La trigonometria	Maurizio Codogno
15	Catastrofi e caos	Luigi Amedeo Bianchi
16	La geometria analitica	Filippo Favale e Alessandro Cattaneo
17	La matematica della relatività	Christian Casalvieri
18	La matematica combinatoria	Roberto Zanasi
19	L'analisi matematica	Salvatore Fragapane
20	La teoria dell'informazione	Maurizio Codogno
21	Le trasformazioni geometriche	Bruno Cifra
22	L'algebra	Paolo Gangemi
23	I numeri complessi	Claudio Sutrini e Marco Erba
24	L'analisi complessa	Paolo Caressa
25	La teoria dei numeri	Francesco Zerman
26	Le equazioni differenziali	Marco Menale
27	La geometria algebrica	Ottavio Rizzo
28	La teoria dei grafi	Sonia Cannas e Ludovico Pernazza
29	L'analisi funzione	Pierluigi Vellucci
30	La geometria differenziale	Christian Casalvieri

la teoria del tema affrontato, una sezione storica che racconta la vita di un grande della matematica, un breve capitolo di giochi matematici e un altro destinato agli esercizi. Sarà opportuno prenotarli in edicola, trenta settimane volano via in un lampo.

4.3 Nuova Lettera Matematica (Scienza Express)

"La matematica non dev'essere nella mente come un peso portato dall'esterno, ma un'abitudine del pensiero". È con questa citazione di Pavel Florenskij[9] che Renato Betti apre l'editoriale del primo numero di una rivista che aveva comunque alle spalle venticinque anni di storia. Era la storia di "Lettera Matematica Pristem", che una folta schiera di redattori ha compilato fino al 2018, quando ha infine cessato le pubblicazioni.

I giornali muoiono, talvolta: anche i giornali belli, spessi, che danno soddisfazione anche solo a tenerli in mano e a sfogliarli; muoiono perché il mondo reale è sempre più complicato di quanto la passione possa immaginare, e segue regole tanto ferree quanto illogiche.

Però la passione riesce anche a fare miracoli, cosa che non riesce al mondo reale: e un giornale può resuscitare. Non c'è una ricetta chiara per farlo succedere, altrimenti non sarebbe un miracolo: ma nel caso specifico ci vuole un editore coraggioso, come ad esempio quel placido visionario di Daniele Gouthier che manda avanti Scienza Express; ci vogliono matematici testardi che si ricordano come fosse piacevole leggere – e magari scrivere – su una rivista che intendeva, come diceva Florenskij e come ricordava Betti, rendere la matematica un'abitudine del pensiero. Soprattutto, ci voleva una redazione che continuava a sentirsi orfana, non semplicemente disoccupata. Questi ingredienti hanno funzionato questa volta: nel maggio del 2023 è uscito il primo numero di "*Nuova Lettera Matematica*", una rivista che ha la forma di un libro, e che è vecchia e nuova al tempo stesso. Quel primo numero strilla i titoli e i nomi degli autori degli articoli principali in copertina, e sul fondo arancio del primo numero si leggono bene, tra gli altri, quelli di Ciro Ciliberto, Roberto Lucchetti, Andrea Capozucca, e naturalmente quello di Gian Italo Bischi, il direttore. Si sfoglia il colophon e si riconoscono tra gli altri quelli di Silvia Benvenuti, Sandra Lucente, Mauro Comoglio, Pino Rosolini, per citare solo quelli che conosciamo meglio. Della Nuova Lettera Matematica escono quattro numeri all'anno, al costo di 26 euro l'uno, e uno dei quattro è un numero monografico: l'abbonamento annuale costa 75 euro.

Nonostante l'alta levatura matematica della redazione e dei collaboratori, la missione resta chiara: non tanto quella di insegnare matematica, e perfino neanche quella di divulgarla, quanto quella di innestarla, in modo continuo e naturale, nei pensieri di ogni giorno. E quindi bisogna coltivare le connessioni, le interazioni tra la matematica e ciò che matematica non è, o che apparentemente non è. E quindi serve esplorare bene le relazioni tra matematica e letteratura, matematica e arte, matematica e vita. E forse anche tra matematica e gioco, scherzi, fantasie e mezze farneticazioni, altrimenti non riusciamo davvero a capire come sia possibile che là dentro, nel quarto numero fresco di stampa, ci siano perfino un paio di paginette scritte da noi.

[9] Nel caso che il nome faccia fatica a risalire i meandri della memoria, potete fare un salto a guardare "*Tenere fuori, tenere dentro, cancellare*" in RM252, gennaio 2020.

5. Soluzioni e Note

Febbraio!

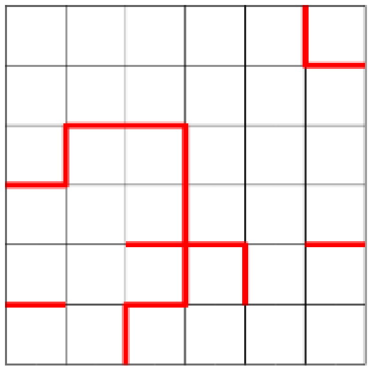
Torniamo alla vecchia formula per l'incipit di questa rubrica, anche se non siamo poi sicurissimi di farcela per la fine del mese.

5.1 [297]

5.1.1 Non soppianterà il Sudoku...

Vi ricordate questo problema?

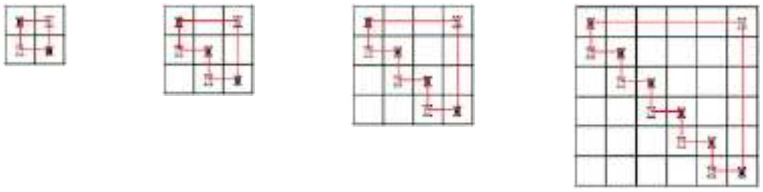
> *Nella figura un "Tower Square": un Tower Square di ordine n è un quadrato nel quale, in ogni riga e ogni colonna, il valore k (con $1 \le k \le n$) compare esattamente k volte. Quando due celle hanno in comune un bordo rosso, nelle due celle va scritta la stessa cifra.*



In RM299 abbiamo presentato la soluzione di ***Camillo***, ***Emanuele*** e ***Galluto***. ***Alessandro***, ci ha scritto a dicembre e a gennaio, ma non siamo poi riusciti a riportare i suoi conti per nostra ignoranza dei suoi mezzi informatici. Vediamo se ci riusciamo adesso:

> La mia reazione
>
> La prima cosa che ho pensato dopo aver letto il problema è stata "non ho la minima idea di come trovare una qualsiasi soluzione", poi ho cominciato a vedere una vaga analogia col problema di posizionamento di 8 torri che non si attaccano tra loro su una scacchiera. E poi torri, "Tower"... Non dovrebbe aver niente a che fare, in inglese la torre degli scacchi si chiama Rook, però non si sa mai, ci sono tanti sedicenti scacchisti in Italia che chiamano la Donna regina ed il Pedone pedina.
>
> Il secondo passo è stato di cercare un po' di letteratura al riguardo. E a parte il problema banale di trovare il numero di soluzioni del problema originale, ho scoperto un nuovo mondo: i polinomi della torre (rook polynomial), il lemma di Burnside, le dismutazioni! Ma sul problema generalizzato - come posizionare kN torri, con $k < N$, su una scacchiera di lato N in modo che ce ne siano k in ogni traversa e ogni colonna - non ho trovato niente di interessante. E quindi ho deciso di cominciare da lì... e mi sono lasciato trascinare.
>
> Nel resto del testo quando cito il Tower Square chiamerò n (minuscolo) l'ordine, cioè il numero più grande da posizionare e $N = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ la dimensione del lato del quadrato.
>
> Il problema delle torri
>
> *2 torri in ogni riga e colonna in una scacchiera 6x6*
>
> L'operazione di conteggio per $k = 2$ può essere tentata in parecchi modi (io ne ho provati almeno 4). Quella che propongo per prima è basata sulla divisione delle soluzioni in insiemi che siano gruppi rispetto all'operazione di permutazione delle righe (usando il termine matriciale invece di quello scacchistico) e delle colonne.
>
> È immediato vedere nei diagrammi che seguono che il numero di torri collegato dalle linee rosse rimane costante dopo una qualsiasi permutazione di righe e colonne, anche quando il diagramma raffigura un sottoinsieme di una scacchiera di dimensioni maggiori. I diagrammi sono quelli che sono necessari per coprire una scacchiera 6x6, ma ovviamente una struttura a scala simile che collega 2N torri esiste per ogni scacchiera di lato N.

[2] [3] [4] [6]



Indicherò i sottoinsiemi nei diagrammi con la notazione $[k]$. A questo punto enumero le partizioni di $[N]$ con il vincolo che ogni termine sia ≥ [2] - mi limito alla dimensione scelta per la scacchiera, $[6]$:

$$[2]+[2]+[2]$$
$$[2]+[4]$$
$$[3]+[3]$$
$$[6]$$

Per il conteggio bisogna fare attenzione al fatto che la cardinalità dei gruppi $[2]$ e $[3]$ in posizioni differenti non è la stessa, e i valori che troveremo dovranno essere moltiplicate tra loro. Riscrivo le partizioni così:

$$[2,T6]\cdot[2,T4]\cdot[2,T2]$$

$[2,A6]\cdot[4,T4]$ (oppure $[2,T6]\cdot[4,A4]$)

$$[3,T6]\cdot[3,T3]$$
$$[6,T6]$$

Il secondo indice, Tn, indica che ci sono sicuramente torri nella prima riga (Top), e che posso disporle in 2 qualsiasi delle n case. Questo è vero per tutte le partizioni che hanno termini con lo stesso primo indice, perché sicuramente uno di loro avrà delle torri sulla prima riga.

Per la partizione con termini aventi il primo indice diverso, il secondo indice An, indica che le torri più "in alto" possono essere su qualsiasi riga (All) - tranne evidentemente l'ultima. Uno dei termini dovrà avere il prefisso A, e posso scegliere quale. Una volta eliminate le k righe e colonne del termine scelto, il secondo avrà sicuramente le torri sulla prima riga (T).

Le formule per il conteggio sono relativamente semplici da calcolare. Prendiamo $[k,Tn]$: ci sono $\binom{n}{2}$ possibilità di disporre due torri nelle n case della prima riga. Fissando la colonna della prima torre, ci sono $n-1$ possibilità di scegliere la riga e $n-2$ di scegliere la colonna (tranne per l'ultima riga, in cui la colonna da scegliere è quella che completa la linea rossa), e così di seguito per le righe successive, per un fattore totale $(n-1)!\,(n-2)!$ se $k=n$. Se invece $k<n$, i due fattori per righe e colonne saranno rispettivamente $\frac{(n-1)!}{n-k!}$ e $\frac{(n-2)!}{n-k!}$. Da cui:

$$[k,Tn]=\binom{n}{2}\frac{(n-1)!\,(n-2)!}{[(n-k)!]^2}=\frac{n!}{2!\,(n-2)!}\frac{(n-1)!\,(n-2)!}{[(n-k)!]^2}=\frac{n!\,(n-1)!}{2[(n-k)!]^2}$$

Per $[2,An]$ il problema è equivalente a contare il numero di rettangoli che hanno come angoli opposti due case situate su righe e colonne differenti. Facendo qualche conto di ottiene:

$$[2,Tn]=\sum_{j=0}^{n-1}j^3=\left(\sum_{j=0}^{n-1}j\right)^2=\frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

Riassumendo:

Termine	Formula	Valore
$[2, T6]$	$\frac{6!\,5!}{2(4!)^2}$	75
$[2, T4]$	$\frac{4!\,3!}{2(2!)^2}$	18
$[2, T2]$	$\frac{2!\,1!}{2(0!)^2}$	1
$[2, A6]$	$\frac{6^2 5^2}{4}$	225
$[4, T4]$	$\frac{4!\,3!}{2(0!)^2}$	72
$[3, T6]$	$\frac{6!\,5!}{2(3!)^2}$	1200
$[3, T3]$	$\frac{3!\,2!}{2(0!)^2}$	6
$[6, T6]$	$\frac{6!\,5!}{2(0!)^2}$	43200

Partizione	Valore
$[2, T6] \cdot [2, T4] \cdot [2, T2]$	1350
$[2, A6] \cdot [4, T4]$	16200
$[3, T6] \cdot [3, T3]$	7200
$[6, T6]$	43200
Totale	67950

Quindi il numero di posizioni possibili con 2 torri per riga e per colonna in una scacchiera di dimensioni 6×6 è 67950!

E che ci azzecca con il Tower Square? In realtà abbiamo quasi tutte le informazioni per trovare il numero di posizioni per il Tower Square di ordine 3. Ma prima bisogna introdurre le dismutazioni...

Digressione sulle dismutazioni

Ho scritto di aver provato più modi per contare le torri, e prima di quello mostrato sopra ne avevo tentato un altro, partendo da molto lontano.

Consideriamo nella scacchiera 6×6 la posizione con 6 torri bianche nella diagonale principale dalla prima casa in alto a sinistra, e da questa posizione consideriamo tutte le 6! posizioni ottenute aggiungendo una soluzione con 6 torri nere. Evidentemente un certo numero di posizioni avranno due torri che occupano la stessa casa, e si otterranno anche delle posizioni in cui la sola differenza é il colore delle torri nelle case occupate. Se eliminiamo questi casi dal numero totale di posizioni $(6!)^2$ dovremo ottenere il totale trovato prima.

Cominciamo con le sovrapposizioni di una torre bianca e una nera. Consideriamo quelle in cui la casa occupata è quella in alto a sinistra: ci saranno:

1 posizione con sovrapposizioni in tutte le N case della diagonale.

0 posizioni con sovrapposizioni in $N-1$ case, perché l'unica scelta possibile della casa rimanente fa ricadere nel caso precedente.

$\binom{N-1}{N-2}$ posizioni con sovrapposizioni in 4 case (la prima casa della diagonale ha una sovrapposizione fissata, da cui il termine $N-1$). Le ultime due case libere possono essere scelte in una sola maniera senza ricadere nel primo caso.

Per i casi successivi biogna contare non solo le combinazioni possibili delle case occupate $\binom{N-1}{N-k}$, ma anche le soluzioni lecite per le rimanenti k torri, senza che queste occupino le case della diagonale. Questo è chiamato il numero di dismutazioni, e viene indicato con $!k$. Per i casi esaminati finora, $!0 = 1$, $!1 = 0$ e $!2 = 1$.

Ho usato la notazione con N invece di 6 perché una volta terminato il conto con una sovrapposizione nella prima casa della diagonale, bisogna continuare con quelle non ancora considerate in cui la prima casa della diagonale è libera, e ripetere il conto con $N = 5$, e cosÌ via.

Mettendo insieme il tutto per il numero totale di sovrapposizioni si ottiene la formula:

$$N_{sov} = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{j} !\left(N-1-j+k\right) \binom{j}{k}$$

E poiché $!N = N! - N_{sov}$, la formula risultante non somiglia per niente alle formule di dismutazione su Wikipedia ma l'importante è che funzioni.

Per $N = 6$, $N_{sov} = 455$, e il numero totale di posizioni al lordo delle ripetizioni a colori invertiti è:

$$6! * (6! - 455) = 190800$$

Arrivato a questo punto mi sono reso conto che senza avere la distribuzione delle soluzioni per ogni partizione non sarebbe stato possibile rimuovere le posizioni con inversioni dei colori delle torri. Ogni termine nelle partizioni trovate sopra aggiunge un fattore 2 di ripetizioni, per cui il numero appena trovato à uguale a

$$190800 = 1350 * 2^3 + 16200 * 2^2 + 7200 * 2^2 + 43200 * 2$$

Il numero di soluzioni uniche contando le simmetrie è

$$190800 - (1350 * 7 + 16200 * 3 + 7200 * 3 + 43200) = 67950$$

e il conto torna.

<u>Dalle torri al Tower Square</u>

Abbiamo appena trovato in quante maniere possiamo piazzare dei "2" in un diagramma Tower Square di ordine 3. Una volta trovati in quanti modi possiamo scrivere gli "1" siamo a cavallo, perché i "3" andranno automaticamente nelle case rimanenti.

Come si fa? Per ogni partizione si crea una matrice 6x6 e si rimpiazzano le posizioni delle torri in un qualsiais elemento del gruppo con il valore 0 e le posizioni vuote con il valore 1. Poi si usa una libreria matematica per calcolare il valore del permanente della matrice. Non mi addentro nei dettagli perché ho scoperto il tutto per la prima volta solo qualche settimana fa, ma nel caso di una matrice quadrata di tutti "1" con gli elementi della diagonale principale uguali a 0, il permanente corrisponde al numero di dismutazioni.

Una posizione qualsiasi va bene perché il permanente è invariante per permutazioni di righe e colonne.

$$[2]+[2]+[2] \to M_{222} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[2]+[4] \to M_{24} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[3]+[3] \to M_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[6] \to M_{6} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se il valore del permanente fosse lo stesso per le quattro matrici basterebbe moltiplicare questo valore per il numero totale di soluzioni, ma sarebbe troppo facile. Per trovare il numero di soluzioni del Tower Square di ordine 3, bisogna quindi sommare i prodotti del numero di soluzioni di ogni partizione per il corrispondente permanente.

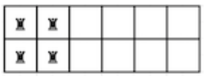
Matrice	Valore del permanente	Cardinalità della partizione	Totale
M_{222}	80	1350	108000
M_{24}	80	16200	1296000
M_{33}	82	7200	590400
M_{66}	80	43200	3456000
			5450400

Il numero di soluzioni cercato al lordo di simmetrie di rotazione e riflessione è quindi 5450400.

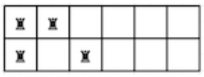
<u>Ancora torri</u>

Il risultato trovato chiaramente non è soddisfacente. Innanzitutto non è immediato estendere il concetto di gruppi di soluzioni e di partizioni al caso di 3 e più torri, ma anche se fosse fattibile resterebbe comunque la difficoltà del calcolo della cardinalità di ogni partizione. Ma esiste un altro metodo che risulta essere facilmente applicabile ad una scacchiera di qualsiasi dimensione N e ad ogni numero di torri $k \leq N$. E qui sento le orecchie fischiare per commenti del tipo "e perché ci ha propinato questa pippa invece di venire subito al dunque"?

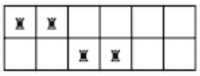
Prendiamo una scacchiera vuota, e scriviamo un vettore con il numero di torri ancora da posizionare su ogni colonna. Sarà un vettore contenente N volte il numero k. Aggiungiamo sulla prima riga una qualsiasi permutazione delle k torri, e ordiniamo il vettore corrispondente con i valori in ordine decrescente: otterremo sempre k volte il numero $k-1$ e $N-k$ volte il numero k. Ora aggiungiamo una seconda riga, e contiamo quanto vettori ordinati differenti possiamo ottenere - ma questa volta per semplicità usiamo come esempio $N=6$ e $k=2$.



Vettore ordinato $(2,2,2,2,0,0)$



Vettore ordinato $(2,2,2,1,1,0)$



Vettore ordinato $(2,2,1,1,1,1)$

Comunuque scegliamo le permutazioni sulle prime due righe, otteniamo solo tre vettori differenti.

Il passo successivo è di semplificare questa notazione. Associamo alla posizione un secondo vettore di dimensione $k+1$, in cui assegnamo alla posizione i il peso $w_i = k+1-i$. Detto altrimenti, questo vettore contiene nella prima posizione il numero di colonne senza alcuna torre, nella seconda il numero di colonne con una sola torre, e così via fino all'ultima in cui ci sarà il numero di colonne già completate.

Questo è equivalente a descrivere un nuovo "gioco" composto da $k+1$ caselle disposte orizzontalmente, con inizialmente N gettoni sula prima casella. Ogni mossa consiste nello spostare k gettoni da una casella alla successiva, senza vincolo di provenienza dei gettoni dalla stessa casella. Uno stesso gettone non può essere spostato due volte durante la stessa mossa. Lo scopo è portare tutti i gettoni nella casella finale, ed il problema diventa contare tutti i modi in cui questo è possibile.

Durante il gioco il vettore v corrispondente ha le seguenti proprietà:

Come valore iniziale $(N,0,\ldots,0)$.

Come valore finale $(0,0,\ldots,N)$.

La somma dei valori dei suoi elementi $\sum_{i=1}^{k+1} v_i$ è sempre N.

La somma "pesata" degli elementi $\sum_{i=1}^{k+1} v_i * w_i$ è sempre uguale al numero di gettoni N meno il numero di mosse già effettuate, moltiplicato per k.

Una mossa consiste nel sottrarre k volte 1 ad uno o più elementi $v_i > 0$, e addizionare 1 ai corrispondenti elementi v_{i+1}.

Ad ogni mossa corrisponde un coefficiente di molteplicità, che è $\prod_i \binom{n_i}{k_i}$ dove n_i è il valore dell'elemento v_i prima della mossa e k_i il valore sottratto e poi addizionato a v_{i+1}.

La somma delle classi (valori inferiori) dei coefficienti binomiali deve essere uguale a k, cioé i gettoni mossi.

Indicando con $r_{v1,v2,\ldots,vk}$ il numero di mosse in una posizione qualsiasi, possiamo usare le regole qui sopra per espandere in maniera simbolica la posizione.

Tornando all'esempio della scacchiera 6×6, la posizione iniziale è $r_{6,0,0}$, e lo sviluppo delle mosse possibili con i loro coefficienti diventa:

$$r_{6,0,0} = \binom{6}{2} r_{4,2,0}$$
$$r_{4,2,0} = \binom{2}{2} r_{4,0,2} + \binom{4}{1}\binom{2}{1} r_{3,2,1} + \binom{4}{2} r_{2,4,0}$$
$$r_{4,0,2} = \binom{4}{2} r_{2,2,2}$$
$$r_{3,2,1} = \binom{2}{2} r_{3,0,3} + \binom{3}{1}\binom{2}{1} r_{2,2,2} + \binom{3}{2} r_{1,4,1}$$
$$r_{2,4,0} = \binom{4}{2} r_{2,2,2} + \binom{2}{1}\binom{4}{1} r_{1,4,1} + \binom{2}{2} r_{0,6,0}$$
$$r_{3,0,3} = \binom{3}{2} r_{1,2,3}$$
$$r_{2,2,2} = \binom{2}{2} r_{2,0,4} + \binom{2}{1}\binom{2}{1} r_{1,2,3} + \binom{2}{2} r_{0,4,2}$$
$$r_{1,4,1} = \binom{4}{2} r_{1,2,3} + \binom{1}{1}\binom{4}{1} r_{0,4,2}$$
$$r_{0,6,0} = \binom{6}{2} r_{0,4,2}$$
$$r_{2,0,4} = \binom{2}{2} r_{0,2,4}$$
$$r_{1,2,3} = \binom{2}{2} r_{1,0,5} + \binom{1}{1}\binom{2}{1} r_{0,2,4}$$
$$r_{0,4,2} = \binom{4}{2} r_{0,2,4}$$
$$r_{0,2,4} = \binom{2}{2} r_{0,0,6}$$
$$r_{1,0,5} = 0$$
$$r_{0,0,6} = 1$$

Siamo alla fine arrivati a due mosse che non sono ulteriormente sviluppabili: la posizione finale $r_{0,0,6}$ a cui viene assegnato il valore 1, e $r_{1,0,5}$ che corrisponde ad una posizione con un solo gettone sulla prima casella per cui non esistono mosse legali, ed al quale viene assegnato valore 0.

A questo punto si possono calcolare i valori a ritroso e trovare che $r_{6,0,0} = 67950$ come sapevamo già.

Se si vuol provare lo stesso esercizio con 6 gettoni su 4 caselle (= 3 torri su una scacchiera 6x6) i termini da calcolare sono 25, per ognuno ci sono fino a 7 mosse possisbili, e il risultato è 297200.

Il gioco si può estendere a un rettangolo 3x2, e i gettoni da muovere ad ogni mossa diventano 3, di cui uno in verticale e due in orizzontale. Alla fine del gioco tutti i gettoni sono nella casella in basso a destra, e guarda un po' il numero di mosse possibili è lo stesso del Tower Square a 3 cifre: 5450400.

Le prime due mosse sono:

$$r_{6,0,0;0,0,0} = \binom{6}{1}\binom{5}{2} r_{3,2,0;1,0,0}$$

$$r_{3,2,0;1,0,0} = \binom{3}{1}\binom{2}{2} r_{0,4,0;2,0,0} + \binom{3}{1}\binom{2}{2} r_{2,0,2,2,0,0} + \binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1} r_{1,2,1;2,0,0} + \binom{3}{1}\binom{1}{1}\binom{2}{1} r_{1,3,0;1,1,0} + \binom{3}{1}\binom{1}{1}\binom{2}{1} r_{2,1,1;1,1,0} + \binom{2}{1}\binom{3}{2} r_{1,3,0;1,1,0} + \binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{3}{1} r_{2,1,1;1,1,0} + \binom{2}{1}\binom{1}{1}\binom{3}{1} r_{2,2,0;0,2,0} + \binom{2}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1} r_{3,0,1;0,2,0}$$

Gli indici corrispondono al numero di gettoni nella prima e nella seconda riga.

Se qualcuno volesse provare a continuare il calcolo manualmente, sappia che i termini sono una sessantina (di cui 13 corrispondono a posizioni che non hanno mosse legali e il cui coefficiente è 0), e il numero massimo di mosse possibili in un singolo termine arriva a 17. Io ho preparato uno script ad hoc per generare i termini, ed il tempo impiegato é stato di gran lunga inferiore allo sviluppo manuale.

Per calcolare le soluzioni dei Tower Square a 4 e più cifre, si può continuare a estendere il piano di gioco a dimensioni superiori in cui si parte con tutti i gettoni da un angolo per arrivare a quello opposto. La cardinalità del set di permutazioni, che corrisponde al coefficiente del primo termine è

$$\frac{N!}{\prod_{i=1}^{n} i\,!}$$

n	N	Cardinalità	Coefficiente 1° termine
2	3	$\frac{3!}{1!\,2!}$	3
3	6	$\frac{6!}{1!\,2!\,3!}$	60
4	10	$\frac{10!}{1!\,2!\,3!\,4!}$	12600
5	15	$\frac{15!}{1!\,2!\,3!\,4!\,5!}$	37837800

<u>Al netto delle simmetrie</u>

Non ho ancora finito di contare, perché è arrivato il momento di applicare lemma di Burnside. Per un certo particolare ricorda l'equazione di Pell... ma non mi pare il caso di cominciare un'altra digressione.

In sè l'enunciato è abbastanza semplice una volta tradotto dal gergo matematico: applico a tutte le posizioni trovate ciascuno degli elementi del gruppo di simmetria e per ognuno conto solo quelle che rimangono immutate. Faccio la somma, divido per il numero degli elementi del gruppo e voilà, trovo il risultato cercato.

Il gruppo in questione è il gruppo diedrale D_8, che consiste in 8 elementi: l'identità I, le rotazione di 90°, 180° e 270°, 2 riflessioni rispetto agli assi orizzontale e verticale e 2 rispetto alle due diagonali del quadrato.

Il primo conto è banale: ogni posizione resta immutata quando si applica l'identità, per cui il primo valore è il totale delle posizioni possibili.

Continuando con le cose semplici, l'immutabilità di una qualsiasi posizione rispetto alla riflessione sugli assi orizzontale e verticale richiede che un "1" sia presente due volte nella stessa riga o colonna, che è contro le regole. Quindi, indipendentemente dall'ordine, il conto per questi elementi è 0.

Per quanto riguarda le rotazioni, separiamo il trattamento in base alla parità del lato del quadrato. Se il lato é di dimensione dispari, l'immutabilità per rotazione di ±90° richiede che, a parte il numero posizionato nella casa centrale, tutti gli altri numeri siano presenti in multipli di 4. L'ordine 2 non ha soluzioni perchè troppo piccolo, e

> tutti gli altri non hanno soluzioni perché hanno almeno due numeri dispari (che sono in quantità dispari). Per la rotazione di 180° il ragionamento è simile: a parte il numero posizionato nella casa centrale, tutti gli altri numeri devono essere presenti in multipli di 2, e questo esclude tutti i quadrati di lato dispari maggiori di 3.
>
> Anche con lato pari e rotazioni di ±90° ogni numero è presente in multipli di 4, il che implica che anche il lato dovrà essere multiplo di 4. La dimensione del lato è $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, per cui o n o $(n+1)$ devono essere divisibili per 8. Il primo Tower Square con una eventuale simmetria di rotazione ±90° potrebbe essere quello di ordine 7 e lato 28.
>
> Per la rotazione di 180° non ci sono vincoli che impediscano l'esistenza di posizioni immutabili.
>
> Anche la riflessione rispetto ad una diagonale non impone vincoli, se non il numero di elementi dispari sulle diagonali di simmetria quando N è dispari.
>
> I risultati per Tower Square di ordine 2 e 3, calcolati tramite script, sono:
>
> | n | N | e | +90° | 180° | -90° | \| | — | / | \ | $\frac{\Sigma}{8}$ |
> |---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
> | 2 | 3 | 6 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 | 2 |
> | 3 | 6 | 5450400 | 0 | 8544 | 0 | 0 | 0 | 12160 | 12160 | 685408 |
>
> <u>Disclaimer</u>
>
> Il motivo per cui ho calcolato gli stessi risultati più volte è stato per essere ragionevolmente sicuro di non avere introdotto errori da qualche parte. Per risultati trovati in un solo modo le possibilità di eventuali errori aumentano.

Se pensate che ci siamo evoluti ed abbiamo imparato a leggere i suoi file avete un'opinione troppo buona di noi: è stato proprio ***Alessandro*** a mandarci la versione Word che sapevamo trattare. In allegato ha anche incluso tutto il programma che ha usato per verificare i conti, che noi – come al solito – ci teniamo per noi. Scrivete se vi interessa, anche il seguito delle informazioni che ci ha mandato a febbraio:

> Avevo detto che mi sarei fatto vivo con altri numeri, ed è arrivato il momento di arrendersi: non ci sarà un numero per il Tower Square di ordine 4.
>
> Il nuovo script funziona, ed è teoricamente in grado – dato un numero di righe e colonne N ed un insieme $\{n(k)\}$ la cui somma è minore o uguale a N, che indica il numero di oggetti differenti da piazzare in ogni riga e colonna – di espandere le equazioni necessarie e risolverle. L'affidabilità dei risultati è testabile, visto che dato per ogni $m < N$ la cardinalità di $(N, \{m\}$ è la stessa di $(N, \{N\text{-}m\})$ anche se l'espansione dei termini è completamente differente.
>
> Inoltre se la somma degli $n(k)$ è proprio N, la cardinalità rimane la stessa per ogni permutazione di $\{n(k)\}$, e anche quando si toglie uno qualsiasi degli elementi all'insieme visto che l'ultimo oggetto va nelle posizioni rimaste libere e contribuisce con molteplicità 1 al risultato finale.

Anche se lo scrive, non si è proprio arreso, e noi siamo impressionati. Ma adesso procediamo.

5.2 [288]

5.2.1 La serie dei numeri trentenni

Il protagonista di queste S&N è senz'altro ***Alessandro***, che ha ripreso questo bel problemino numerico:

Dati i numeri tra uno e un miliardo scritti in base dieci, in quanti di questi la somma delle cifre dà trenta?

Con l'estensione:

Dati i numeri tra uno e N, scritti in base k, quanti di questi hanno somma s?

Abbiamo già pubblicato soluzioni in RM289 da parte di ***Valter***, ***Gas***, ***Galluto*** e ***Heaviside***. Qui le considerazioni di ***Alessandro***:

(…) Nel testo originale c'era [(*cdA*) *per la base che lui chiama b*] la lettera k, che è troppo preziosa come indice di sommatoria per essere usata come variabile.

Ragionamento

Se al posto di numeri pensiamo a dadi a 10 facce, il primo problema equivale a trovare la probabilità che lanciare 9 dadi dia 39 come somma delle cifre (visto che i numeri sui dadi partono da 1). E con i dadi il problema viene risolto tramite una funzione generatrice: un dado normale viene rappresentato dal polinomio.

$$\sum_{k=1}^{6} x^k$$

Il lancio di più dadi viene rappresentato come il prodotto dei polinomi rappresentativi, ed il numero di volte con cui si può ottenere k come somma delle facce dei dadi è indicato dal coefficiente del monomio con esponente k. Ovviamente l'idea si può generalizzare a un numero qualsiasi di dadi con un numero qualsiasi di facce (quelli che non hanno mai visto un dado a 13 facce in gioventù hanno studiato troppo Platone).

La ragione per cui i dadi sono più interessanti dei numeri è che il metodo di soluzione si applica anche quando i numeri sulle facce dei dadi non sono tutti uguali. Infatti, posso rappresentare un dado non standard di 6 facce con il polinomio

$$\sum_{k=0}^{n_s} c_k\, x^k, \text{ con il vincolo} \sum_{k=0}^{n_s} c_k = 6$$

dove n_s è il numero più alto sul dado, e c_k il numero di volte in cui il numero appare sulle facce

Così se qualcuno ponesse mai il problema di sapere se esiste una disposizione di numeri sulle facce di due dadi che abbia la stessa distribuzione di probabilità della somma che due dadi normali, si può pensare di risolverlo tramite un sistema di equazioni sui coefficienti c_k. Ah, è già stato posto?

Tornando a Bomba, per il problema numerico userò il metodo appena descritto. Ricordo la notazione:

b la base del sistema numerico

n il numero di cifre

s la somma delle cifre. I numeri di una singola cifra saranno rappresentati da $\sum_{k=0}^{b-1} x^k$ ed i numeri di n cifre da $\left(\sum_{k=0}^{b-1} x^k\right)^n$.

Questa ultima espressione si può espandere in $\sum_{s=0}^{n(b-1)} C_s\, x^s$, dove il coefficiente C_s è il numero di volte in cui si ottiene s come somma delle cifre.

Usando la scomposizione in fattori di $1 - x^n$, si può scrivere:

$$\left(\sum_{k=0}^{b-1} x^k\right)^n = \frac{(1-x^b)^n}{(1-x)^n}$$

Il termine al numeratore si espande con lo sviluppo binomiale:

$$(1-x^b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{k} x^{kb}$$

mentre il denominatore si può sviluppare in serie di Taylor. Dopo qualche conto, i fattoriali risultanti si possono scrivere in una forma più utile per poi calcolare il prodotto dei due termini:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\frac{(n-1+j)!}{(n-1)!} x^j = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n-1+j}{j} x^j$$

Dopo la costernazione dovuta all'aver generato una serie infinita, ci ricordiamo che alla fine interessa solo il coefficiente C_s del termine di grado s, e questo si ottiene sommando un numero finito di termini.

Raccogliendo i termini in x^k, il prodotto delle due sommatorie è:

$$\sum_{s=0}^{\infty} x^s \sum_{kb+j=s} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-1+j}{j} = \sum_{s=0}^{\infty} x^s \sum_{k=0}^{\lfloor s/b \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-1+(s-kb)}{s-kb}$$

ed il famoso coefficiente cercato, che oltre al grado s dipende anche da b e n, è

$$C_{s,n,b} = \sum_{k=0}^{\lfloor s/b \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-1+(s-kb)}{s-kb}$$

Ma questo è già stato ottenuto in altra maniera da Gas in RM289. Mancava invece la risposta alla seconda domanda, che non ha un equivalente con i dadi.

È richiesto solo un passo supplementare il cui meccanismo è semplice, ma non altrettanto da spiegare. Cominciamo dal fatto che un numero N di n cifre si può scrivere come

$$N = \sum_{k=0}^{n-1} d_k\, b^k = \sum_{k=l+1}^{n-1} d_k\, b^k + \sum_{j=0}^{m-1} b^l + b^l + \sum_{j=m+1}^{d_l} b^l + \sum_{k=1}^{l-1} d_k\, b^k + d_0$$

Scelti due indici l e m abbiamo isolato un singolo termine b^l che rappresenta un intervallo di numeri per il quale possiamo calcolare il coefficiente $C_{s,n,b}$, dati opportuni valori di s ed n. Il secondo indice, n, non è altro che l'esponente l. Per valutare il primo indice osserviamo che i termini che precedono b^l nell'equazione qui sopra rappresentano delle cifre fisse dell'espansione in base b, la cui somma va sottratta da s. I termini a desta di b^l sono gli intervalli ancora da valutare.

Ok, è molto più facile da capire usando un esempio: il numero 12345 in base 10 con s=10. Il primo intervallo va da 0 a 9999, n vale 4 e da s va sottratto il coefficiente di 10^4 dell'intervallo che è 0. Il secondo intervallo va da 10000 a 10999, $n \to 3$ ed $s \to 10-(1+0)$. Il terzo intervallo va da 11000 a 11999, $n \to 3$ ed $s \to 10-(1+1)$, e così via.

Per finire, i numeri con esponente 0 sono di una singola cifra e il coefficiente $C_{s,n,b}$ non si può calcolare. Bisogna quindi prevedere un termine correttivo cha vale 1 o 0, a seconda che s dopo la correzione sia o no compreso tra la somma delle $n-1$ cifre più significative di N e la somma di tutte le cifre.

In definitiva la doppia sommatoria si può scrivere in maniera condensata come

$$D_{s,N,b} = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{d_k-1} C_{s-m_{k+1}-j,k,b} + \frac{\operatorname{sgn}(s-m_1) - \operatorname{sgn}(s-m_0-1)}{2}$$

dove

$C_{s,n,b}$ è il coefficiente calcolato precedentemente.

m_i è uguale alla somma delle $n-i$ cifre più signicative di N.

$$m_i = \sum_{k=i}^{n-1} d_k$$

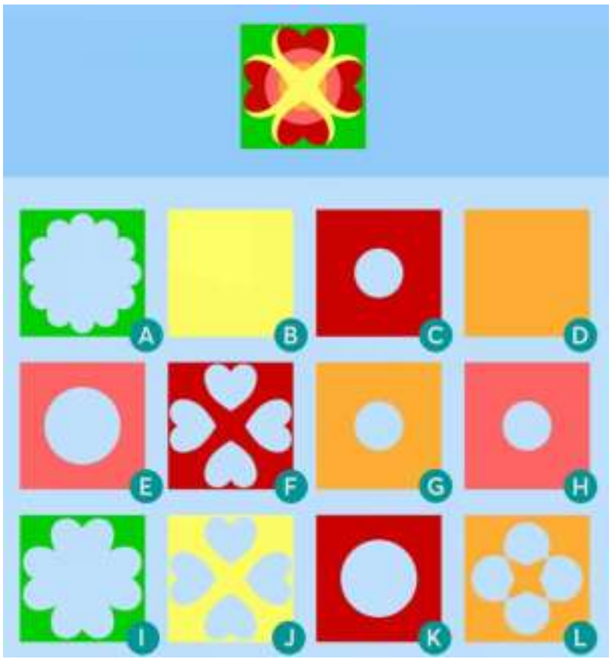
> sgn è l'operatore che restituisce il valore 1 col segno del suo parametro (con la convenzione che zero è positivo).

Bell'approccio, vero? Come da sua abitudine ***Alessandro*** ci fornisce anche un programma, che noi ci teniamo. E adesso le soluzioni dell'ultimo numero.

5.3 [300]

5.3.1 La copertina

Ebbene sì, c'era un problema in copertina il mese scorso! E se ne è accorto solo ***Valter***. Ma cominciamo con il testo:



> *sovrapponendo opportunamente alcune delle figure A-L (non tutte, e al più una volta ciascuna) fornite, dovete ottenere il disegno in alto, fermo restando che le parti in azzurro chiaro sono "i buchi".*

Ed ecco, appunto, la soluzione di ***Valter*** con classico incipit:

> Bello! Ci ho provato "a mente", senza verifica in pratica (quindi è molto probabile che mi stia sbagliando):
>
> - inizio dalla fine, con l'ultimo stencil sovrapposto
>
> - potrebbe essere il verde I, essendo "di cornice" (non dà problemi per il resto della costruzione)
>
> - appena prima direi di mettere il giallo coi cuori J (così resta solo da sistemare l'interno dei cuori)
>
> - visti i tre colori necessari e la loro ubicazione: KHD
>
> - invertendo per fornire l'ordine corretto: DHKJI

Andiamo avanti.

5.3.2 Pentagoni pentagonati

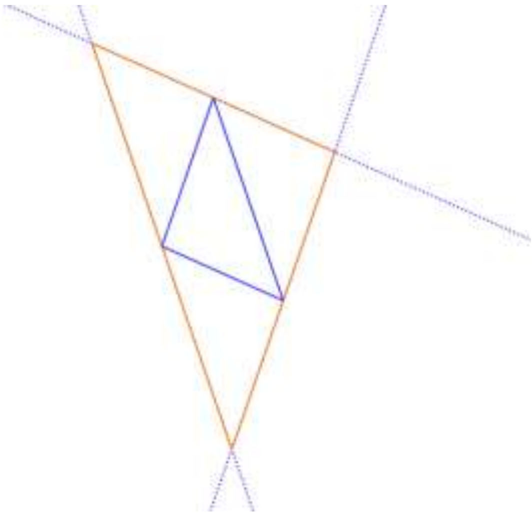
Secondo il modesto parere della redattrice di queste note, il problema era proprio posto in modo complicato, anche se la versione corta non semplifica per niente:

> *Data un'aiuola pentagonale convessa ma notevolmente irregolare $M_1M_2M_3M_4M_5$; definire un pentagono (anch'esso irregolare e convesso) $A_1A_2A_3A_4A_5$ tale che i punti M siano i punti medi dei lati del secondo pentagono. È possibile? Come?*

Estensione: se anziché un pentagono ho un generico (ma sempre convesso e irregolare) n-agono, per quali valori di n esiste soluzione?

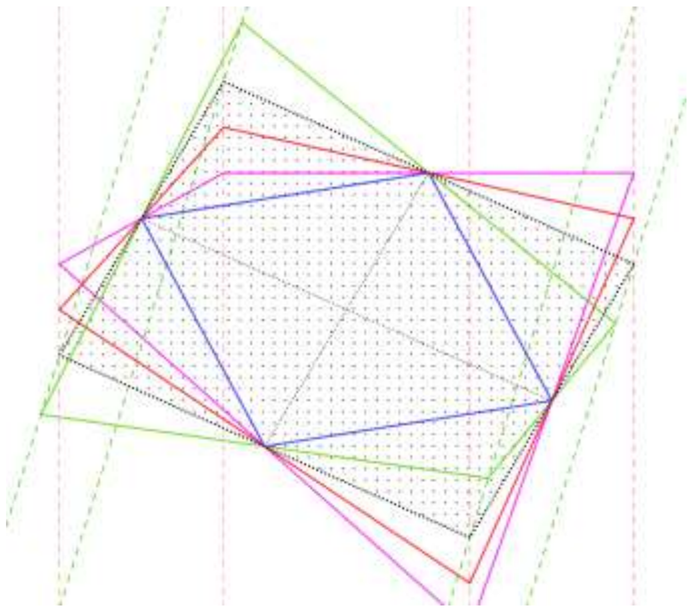
Torniamo alle tradizioni e pubblichiamo subito la soluzione di ***Valter***:

Devo confessare che il problema mi ha fatto "tribolare" …un po'.
Ho ottenuto qualcosa partendo con l'analisi di casi più semplici.
Non sono sicuro di quanto ricavato ma, almeno, posso contribuire.
Il caso del triangolo, mi pare, sia il più semplice da risolvere:



Basta costruire le rette parallele ai lati in blu del triangolo. Le si fanno passare dai tre vertici opposti ai rispettivi lati. Queste rette, a due a due, si incontrano in tre punti distinti. Tali punti sono i tre vertici del triangolo in arancio cercato. Non si possono avere altri triangoli che soddisfino il problema.

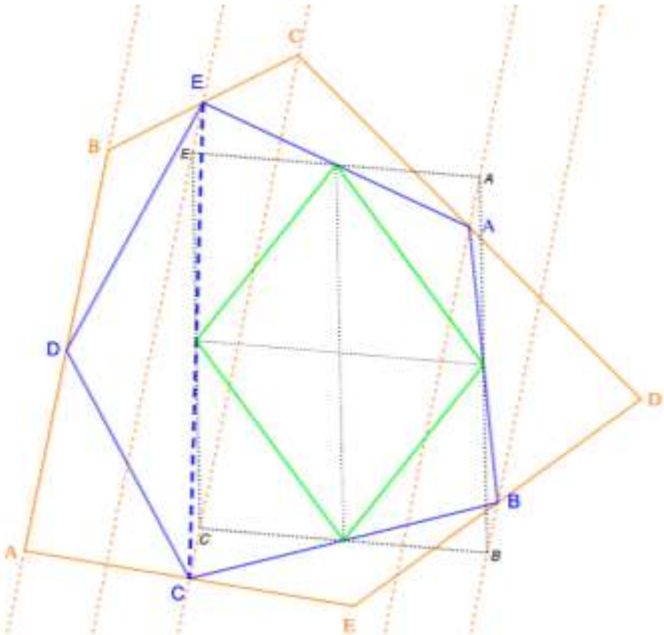
Per quanto riguarda quadrilateri sfrutto il teorema di Varignon: https://www.lorenzoroi.net/geometria/Varignon.html. Quindi, mi devo occupare soltanto di analizzare parallelogrammi:



In disegno parto da un parallelogrammo generico mostrato in blu.
Con rette parallele alle sue due diagonali ottengo uno esterno.
Tale parallelogrammo, in nero punteggiato, risolve il problema.
Poi dai vertici costruisco quattro rette parallele fra di loro.
La loro inclinazione è libera, ne posso avere quindi infinite.
Scelgo un punto qualsiasi su una delle quattro rette parallele.

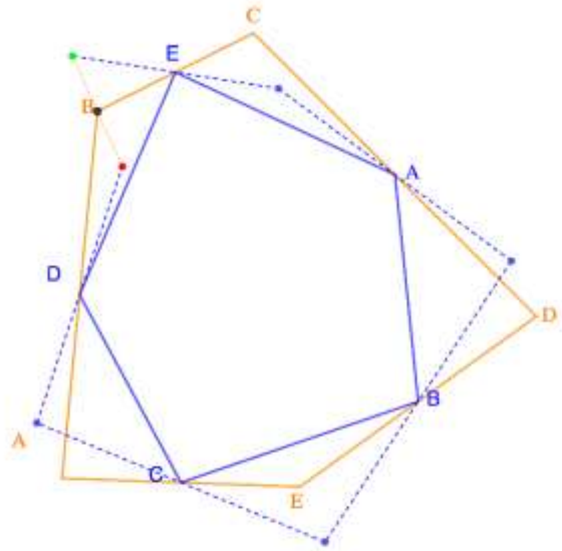
Dal punto disegno la retta per un vertice del parallelogramma.
Il vertice non deve fare “incrociare” retta e parallelogramma.
A questo punto ho quanto serve per avere un altro quadrilatero.
Il segmento fra punto e vertice permette di ottenerne un lato.
Infatti fornisce metà della sua lunghezza e la sua direzione.
Ottenuto il primo lato ho il punto/vertice per il successivo.
Proseguo, quindi, in questo modo, ed ottengo il quadrilatero.
Nel disegno ho costruito i quadrilateri arancio lilla e verde.
I primi due con parallele arancio e l’ultimo con quelle verdi.

Passo ora a mostrare con ho affrontato il caso del pentagono:



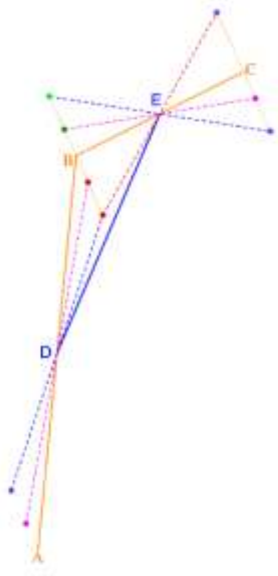
Il pentagono da cui partire è ABCDE di colore blu in disegno.
Il pentagono da ottenere quello con vertici ABCDE in arancio.
Disegno il quadrilatero ABCE e ottengo i punti medi dei lati.
Con questi, come detto, ricavo un parallelogrammo all’interno.
Costruisco poi il parallelogramma nero ABCE che lo circoscrive.
La sua costruzione procede come prima utilizzando le diagonali.
Dai vertici A dei due parallelogrammi ottengo la retta arancio.
Traccio poi, dai restanti vertici, le rette arancio parallele.
Ognuna di esse passa per i corrispondenti vertici blu e nero.
Disegno una ulteriore parallela passante per il vertice B blu.
Questa ultima retta fornisce la direzione del lato AB arancio.
Similmente dal quadrilatero blu ABCD ottengo la arancio per BC.
Dall’incrocio delle due rette in arancio ottengo il vertice B.
Come per il quadrilatero ricavo quindi il pentagono richiesto.
Ho, infatti, la direzione dei sui lati AB e BC e il vertice B.

Mi pare di aver trovato un altro modo per risolvere il problema (grazie alla soluzione a *Salti “lunghi”* di ***trentatre*** in RM300):



- parto dal punto esterno al pentagono che ho colorato in verde
- eseguo i salti "lunghi" transitando per i suoi cinque vertici
- essendo in numero dispari dopo due giri si torna a tale punto
- ho colorato in rosso il punto di arrivo dopo il quinto salto
- in quel punto sono a metà strada per ritornare a quello verde (partendo da tale punto con un altro giro ritorno poi al verde)
- uso questi due punti: rosso e verde per risolvere il problema
- è il punto sia di partenza che di arrivo dopo i cinque salti (ottenuto tale punto è sufficiente disegnare i cinque salti)
- tale punto è quello a metà strade nel segmento che li unisce (è a metà del segmento punteggiato, in arancione, tra i due)
- nel disegno è il punto B per conformità alla prima soluzione
- per conferma ho provato su più pentagoni che funzioni sempre.

Solo due parole per tentare almeno un accenno di dimostrazione (ne ho già spese troppe; …mi pare di aver annoiato abbastanza):



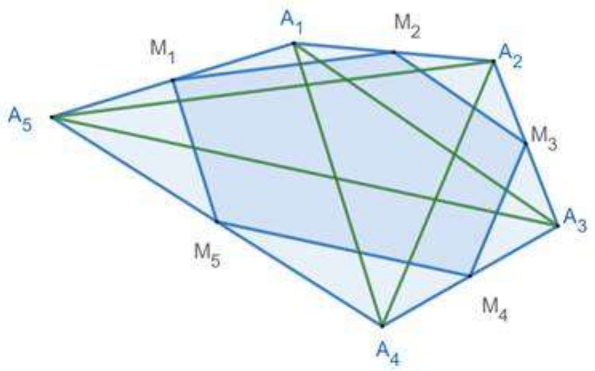
- del disegno precedente ho isolata e ingrandita una sua parte
- è la zona in corrispondenza dei punti verde e rosso presenti

- ho inserito un nuovo punto di partenza di colore verde scuro
- ho disegnato il segmento arancio punteggiato che passa per C
- si ottiene con i salti lunghi per E, dei punti verde e rosso
- qui non mi dilungo, ma un po' di geometria dovrebbe spiegare
- dico solo che posso ricavare il punto rosso scuro, di arrivo
- è il punto di arrivo partendo dal punto verde scuro di prima
- la costruzione è fattibile se il numero di vertici è dispari
- le partenze e arrivi si avvicinano "di conserva" al centro B
- partendo da B quindi non si può che ritornarvi dopo un giro.

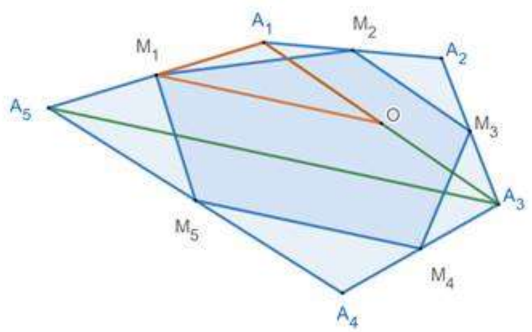
La soluzione dovrebbe valere per poligoni con vertici dispari. Per vertici pari penso si debba generalizzare dal quadrilatero (qui mi fermo e lascio a solutori più abili di me il compito).

Come sempre speriamo di aver preso l'ultima e più attuale versione. Passiamo ora alla versione di ***Galluto***:

La prima figura mostra i nostri due pentagoni e le diagonali del pentagono esterno; la cosa interessante è che ciascuna diagonale è parallela e di lunghezza doppia del corrispondente lato del pentagono interno; ad esempio, A_5A_2 è parallela e doppia rispetto ad M_1M_2; infatti i due triangoli $A_1A_2A_5$ e $A_1M_2M_1$ sono simili e, visto che M_1 è il punto medio di A_1A_5, il rapporto è appunto di 1:2.



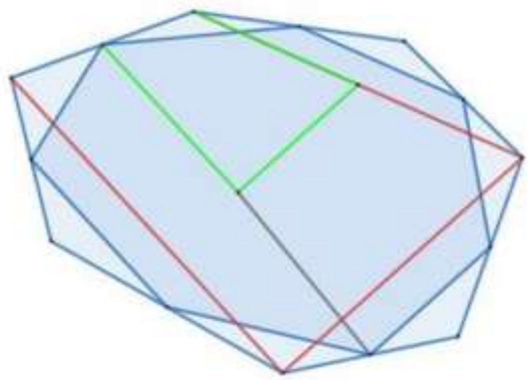
Forte di questa considerazione, traccio da M_1 un segmento parallelo e di lunghezza uguale a M_4M_5, che finirà nel punto O; poi, dal punto O traccio un segmento parallelo e uguale ad M_2M_3, che finirà in A_1!!!



Infatti i triangoli $A_1A_3A_5$ e A_1OM_1 sono simili (e anche in questo caso in rapporto 1:2).

Quindi questa costruzione, che non necessità di conoscere nulla del pentagono "A", mi permette di individuare un suo primo vertice; potrei ripeterla per trovare gli altri, ma più semplicemente basta “raddoppiare” A_1M_1 per trovare A_5, A_5M_5 per trovare M_4 e così via.

Il parallelismo ed il rapporto 1:2 tra lati del poligono interno e diagonali del poligono esterno vale solo per le diagonali “corte” che “saltano” un solo vertice; perciò, se il poligono ha un numero dispari di lati, posso creare un poligono di (n+1)/2 lati che mi permette di individuare un vertice del poligono esterno e da cui posso ricavare tutti gli altri; ad esempio, ecco il caso dell’eptagono:



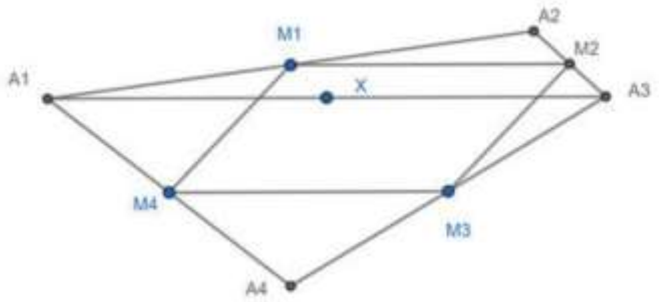
E quindi il giochino riesce per tutti i poligoni con numero dispari di lati.

Per il triangolo, che non ha diagonali, la costruzione è ancora più semplice: i lati del triangolo interno sono paralleli a quelli di quello esterno; quindi basta tracciare da ogni vertice M la parallela al lato opposto, unire i tre punti di intersezione e il gioco è fatto.

E se il numero di lati è pari?

Se i lati sono quattro, c’è un teorema che dice che il quadrilatero che ha come vertici i punti medi di un quadrilatero esterno è un parallelogramma; allo stesso parallelogramma interno possono corrispondere infiniti quadrilateri esterni e quindi il processo inverso non è possibile:

- prendo un punto qualsiasi X all’interno del parallelogramma e traccio un segmento parallelo ad una delle coppie di lati, di lunghezza doppia a tali lati e di cui X è il punto medio
- gli estremi A1 e A3 di questo segmento sono due dei vertici di un quadrilatero “esterno”; da uno di questi vertici (A1) trovo gli altri due col solito sistema di raddoppiare i segmenti A1M1 e A1M4 e traccio il quadrilatero esterno
- con la solita similitudine dei triangoli posso dimostrare che i vari M stanno sui lati del quadrilatero esterno, e specificamente nei punti di mezzo;



.

Dato che X è un punto qualsiasi, le soluzioni sono, come detto, infinite

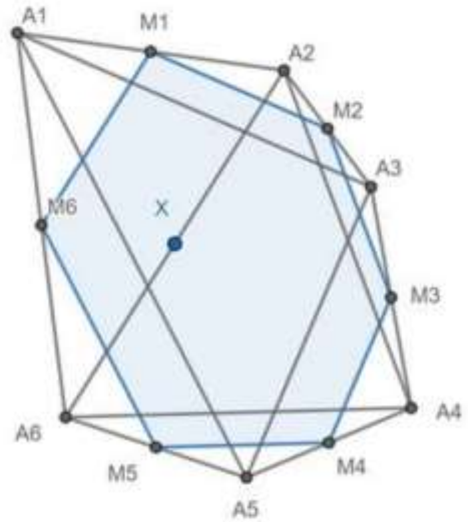
Per esagoni, ottagoni, ecc., il punto è che le diagonali "corte" si chiudono in due poligoni, ciascuno di n/2 lati (ad es., per l'esagono le diagonali formano due triangoli) tornando sul vertice da cui si è partiti e non, come quando n è dispari, su un vertice adiacente; questo mi impedisce di effettuare la costruzione valida per i dispari, ma mi sembra anche che si possa dimostrare che, come per i quadrilateri, ci sono infinite soluzioni, e che quindi il processo inverso non sia possibile.

Uso per spiegarmi il caso dell'esagono:

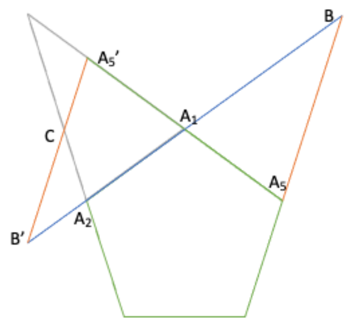
- da un punto *abbastanza qualsiasi* X interno all'esagono M, costruisco un triangolo i cui lati sono paralleli a tre lati non consecutivi dell'esagono, di lunghezza doppia a tali lati e dove X è il punto di mezzo di uno dei tre lati; i tre vertici A1, A3 e A5 di questo triangolo sono tre dei vertici dell'esagono esterno A
- collego uno di questi vertici (A1) con il vertice M1 dell'esagono M, e al solito raddoppio A1M1 fino ad A2
- da A2 costruisco il triangolo A2A4A6 delle altre tre diagonali, collego gli A fra di loro e come al solito usando la similitudine dei vari triangoli dimostro che gli M stanno sui lati dell'esagono A, e ciascuno nel punto medio del lato stesso

per *abbastanza qualsiasi* intendo dire che occorre che tutti i lati dei due triangoli siano interni all'esagono M, ciascun lato rispetto al corrispondente lato parallelo di M stesso.

E quindi per i poligoni con n pari ci sono *abbastanza* infinite soluzioni.



"Abbastanza infinite" è bellissimo!!! Ce lo mettiamo da parte con gli altri regali del venticinquennio. Vediamo ora la soluzione di ***Alessandro***:

> Per semplificare le figure partiamo da un pentagono regolare, ma quasi tutto il ragionamento si applica ad un n-agono convesso qualsiasi con n dispari.
>
> Innanzitutto, condizione necessaria perché i vertici M_n siano all'esterno del pentagono A_n, è che tutti i punti M_n devono giacere all'interno delle punte del pentagramma formato a partire dal pentagono A_n.
>
> 
>
>
> Figura 1
>
> Partiamo dalla punta con base A_1A_5 in Figura 1. Il vertice M_1 (se esiste) dovrà giacere all'interno del triangolo A_1A_5B, mentre il vertice M_2, punto simmetrico rispetto ad A_1, deve soddisfare a due condizioni: stare all'interno della punta con base A_1A_2 ma anche del triangolo $A_1A_5'B'$, ottenuto ruotando A_1A_5B di 180° rispetto al punto A (i punti simmetrici rispetto al punto di perno vengono contrassegnati aggiungendo un apice alla notazione del punto di partenza). L'intersezione delle due figure è il quadrilatero $A_1A_5'CA_2$.
>
> Ogni lato dei poligoni risultati dalle intersezioni è rappresentato da un colore differente e, per costruzione, tutti i segmenti dello stesso colore sono paralleli tra loro.
>
> Con questa costruzione abbiamo ottenuto una riduzione dell'area in cui è possibile collocare il punto M_2 (ed essendo il poligono regolare, di tutti i vertici M_n). Continuiamo a ripetere l'operazione sulla terza punta, ruotando il quadrilatero $A_1A_5'CA_2$ di 180° rispetto al punto A_2 (Figura 2).

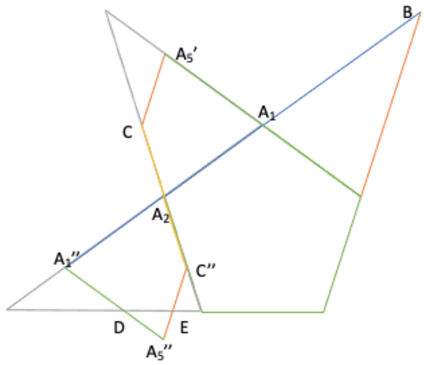


Figura 2

A_5'' cade al di fuori della punta, ed aggiungiamo i punti D e E per delimitare la nuova intersezione $A_2A_1''DEC''$, all'interno della quale dovrà trovarsi M_3.

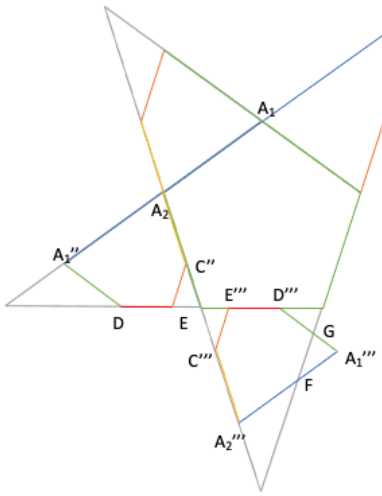


Figura 3

La successiva rotazione è rispetto ad A_3 (Figura 3), che però non fa più parte del poligono limitante l'area possibile per il punto M_4. A_1''' cade al di fuori dell'intersezione, ed il poligono risultante è ora $A_2'''FGD'''E'''C'''$.

Ripetiamo per la quarta volta e penultima volta l'operazione (Figura 4).

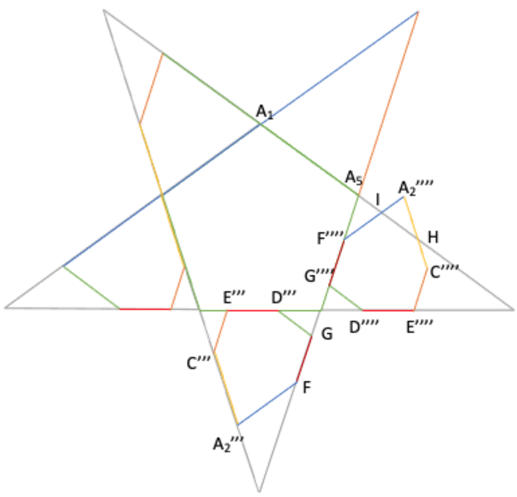


Figura 4

Tutta questa meticolosa costruzione è stata fatta essenzialmente per esibizionismo, ma anche per dare il tempo al lettore di porsi la domanda cruciale: partendo da un pentagono (o altro poligono) irregolare non potrebbe succedere che una delle intersezioni sia vuota? La risposta è sì, e questo implica che non esiste alcuna possibilità di piazzare uno dei punti M_n e quindi di trovare una soluzione.

Si possono sicuramente trovare dei criteri, basati sulla lunghezza di un lato del n-agono e sui lati ed angoli delle punte adiacenti, che danno condizioni necessarie perché l'intersezione non sia vuota. Me ne vengono in mente un paio che limitano assai la forma del "poligono notevolmente irregolare", ma questa dissertazione è puramente qualitativa e quindi non mi addentro nei dettagli.

Ma in pratica, quello che è stato fatto finora come aiuta a trovare i vertici M_n, quando esistono?

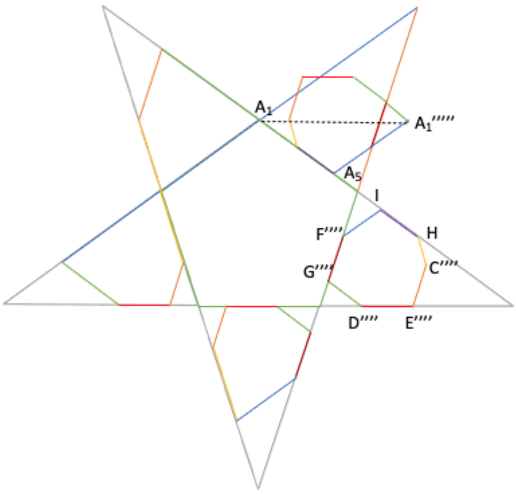


Figura 5

Tornando al caso del pentagono regolare, osserviamo che la punta A_1A_5B ed i successivi poligoni risultanti dalle intersezioni sono stati ruotati 5 volte di 180°, quindi i punti dell'ultimo poligono sono ruotati rispetto alla punta di partenza e non coincidono con i punti originali. Perché la costruzione del pentagono $M_1M_2M_3M_4M_5$ si chiuda, bisogna trovare un punto fisso rispetto alla rotazione risultante.

L'unico punto fisso della Figura 5 è il punto mediano dei segmenti che uniscono punti corrispondenti. Abbiamo lasciato l'immagine di A_1 per l'ultima volta nel terzo disegno, A_1'''. Dove si trova ora il punto corrispondente A_1'''''? Visto che ad ogni rotazione abbiamo preservato i colori, sarà all'intersezione dei prolungamenti delle linee verde e blu. Il punto M_1 è il punto mediano dell segmento A_1A_1'''''. Se il punto fosse stato all'esterno del poligono, bad luck, non ci sarebbe stata una soluzione.

Passando all'esagono regolare, ci si può accorgere immediatamente senza bisogno di una ulteriore figura che l'immagine ruotata di una delle punte è congruente alla punta successiva, e che dopo 6 rotazioni la punta ritorna nella stessa posizione originaria. In questo caso ogni punto interno alla punta può essere usato come vertice dell'esagono costruito all'esterno.

Nel caso generale di un n-agono regolare o irregolare con n pari, e l'immagine della punta di partenza dopo una sequenza di rotazione/intersezione su tutti i lati non è vuota, ci sono due possibilità:

C'è stata una traslazione dei punti, e quindi non c'è nessuna soluzione.

Non c'è stata traslazione, e allora qualsiasi punto interno dell'intersezione risultante può essere preso come vertice del n-agono esterno.

Finisce qui perché non ho alcuna intenzione di provare a dimostrare se per poligoni irregolari c'è o non c'è traslazione.

Le interpretazioni del testo sono secondo me diverse, ma ogni soluzione è interessante: concludiamo con quella di ***trentatre***:

Il problema riprende la logica del *salto della rana* in RM298 2.2 Salti "lunghi" e si può trattare per via geometrica, come nella mia nota sull'ultimo RM; proseguo nello stesso modo.

Indico con *M* e *A* i poligoni interno ed esterno con *n* vertici $M1,\dots Mn$ e $A1,\dots An$; con *Sn* una soluzione dove *M* e *A* di *n* vertici sono tutti e due convessi.

Inizio dai casi semplici $\boldsymbol{n} = 3,4$.

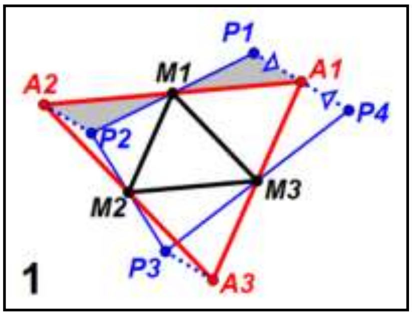


Fig. 1 - soluzione ***S3***

- dato un qualsiasi triangolo *M*, da un punto esterno *P*1 saltiamo a *P*2 con *M*1 a metà del salto e così di seguito fino a *P*4; ogni salto determina due triangoli uguali, con i vettori da *Pn* ad *An* <u>uguali come modulo e direzione ma con verso che si inverte ad ogni salto</u>; spostando *P*1 in *A*1 a metà del segmento *P*1_*P*4, tutti vettori si annullano e il poligono *A*, tracciato come sopra, si chiude.

Quindi *S*3 esiste ed è unica per ogni triangolo; *M* ed *A* hanno i lati paralleli e le mediane in comune.

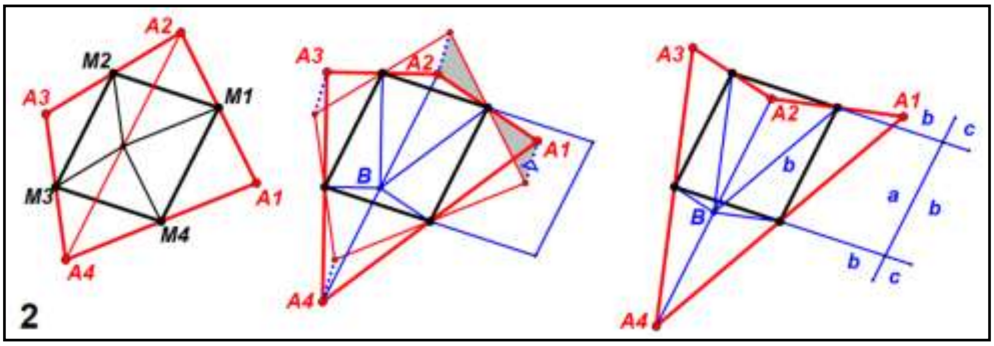
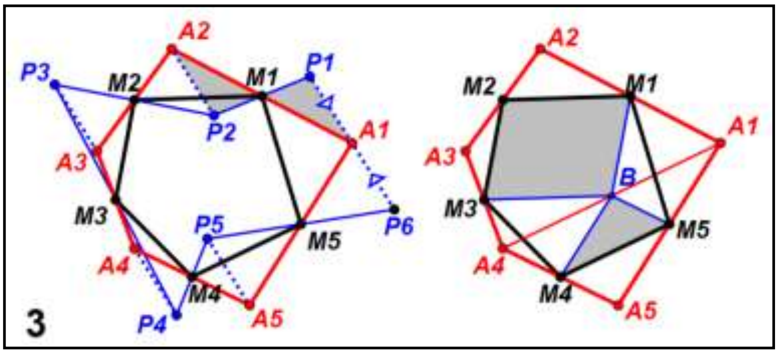


Fig. 2 - soluzione ***S4***

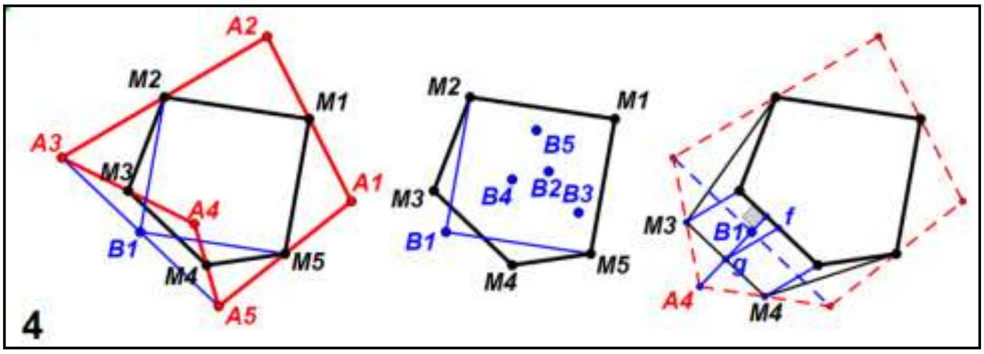
- dato il quadrilatero *A* la diagonale *A*2-*A*4 genera due triangoli che si risolvono come *S3*; i segmenti *M*1_*M*4, *M*2_*M*3 e la diagonale sono paralleli; lo stesso per l'altra diagonale *A*1_*A*3; <u>*M* è quindi sempre un parallelogramma</u>

- con lo stesso *M* (a destra) spostando *A*1 in un punto qualsiasi del piano costruiamo "per salti" *A* diverso dal precedente ma sempre chiuso (i vettori fra vertici vecchi e nuovi sono uguali); quindi abbiamo infinite *A* che possono essere (ultima figura) anche non convesse; queste si escludono tracciando, adiacente a uno qualsiasi dei lati di *M*, la zona blu della stessa forma; *A* è convesso se *A*1 è interno ad *a*, concavo se in *b*, intrecciato se in *c*.



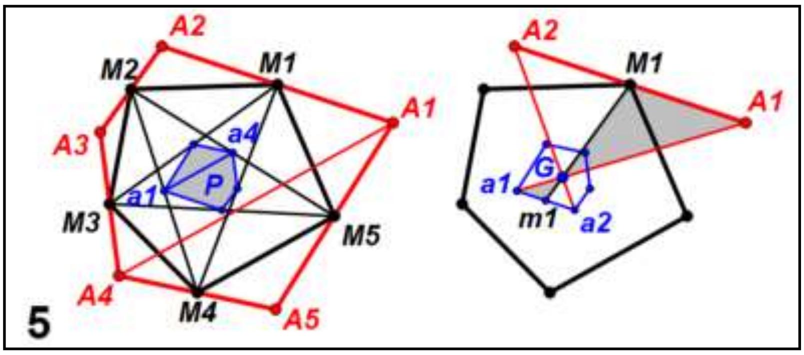
In fig. 3 la soluzione ***S5***

- per ogni *M* si ottiene, come In fig. 1 per *S3*, una *A* chiusa e unica
- a destra un modo più semplice: la diagonale *A*1_*A*4 divide *A* in due aree che completate come *S*3 e *S*4 hanno all'interno un triangolo e un parallelogramma; quest'ultimo si costruisce dal solo *M* e dal vertice comune *B* si completa *S*3 ottenendo tre vertici di *A*; ne basta uno, p.es. *A*1, per tracciare tutto *A*; scegliendo un'altra diagonale di *A* il risultato non cambia.



Ogni pentagono *M* genera un unico *A* che può essere non convesso; questo dipende solo dalla forma di *M* (in fig. 3 *A* è convesso per scelta); inversamente un *A* non convesso produce sempre un *M* convesso come in fig. 4; togliendo *A*4 e chiudendo *A* con *A*3_*A*4 si porta il problema a *S*4 da cui il parallelogramma con vertice in *B*1 esterno ad *M*; quindi costruendo dal solo *M* gli altri punti analoghi a *B*1 abbiamo una soluzione *S5* (con *A* convesso) solo se i *B* sono tutti interni a *M*.

Si può modificare *M* e rendere convesso *A* spostando il lato *M*3_*M*4; nel terzo disegno *g* è un qualsiasi punto esterno a *B*1 sulla retta per questo e ortogonale con il lato; *f* è la mezzeria del lato e questo viene spostato nella nuova posizione in parallelo a *f*_*g*; *M* così modificato genera *A* convesso (si sposta solo *A*4 che finisce nel punto simmetrico di *B*1 rispetto al nuovo lato; tutto si ricava dal triangolo *A*3,*A*4,*A*5 visto come *S*3).



In fig. 5 un altro modo di risolvere *S*5; i punti di mezzo delle diagonali di *M* formano il poligono *P* di vertici *a*1, *a*2, ...; per costruzione

> $(a1\_a4) = (M4\_M5)/2 = (A1\_A4)/4$; quindi le diagonali di A e di P sono parallele, nel rapporto 4/1 ma in senso inverso, per cui P e A sono simili e, come mostrato nei triangoli simili a destra, il centro G della trasformazione (una dilatazione di modulo -4) si può ricavare dal solo M; G si ricava da *m1* centro del lato $a1\_a2$ di P e $(m1\_G) = (G\_M1)/4$.
>
> Quindi basta tracciare P da M per verificare la forma (e la convessità) di A e anche per costruirlo.
>
> Il centro G è il baricentro comune dei gruppi di vertici di A e di M (ma non riporto la dimostrazione).
>
> Ho tentato di estendere i risultatati ad altri n; vale sempre, per n dispari, la costruzione "per salti"; tutto il resto va adattato ai singoli casi, con complicazione crescente; in particolare è difficile caratterizzare la forma di M che genera A non convesso, e per n pari la forma che chiude A. Non avendo trovato dei criteri generali (che forse qualcuno troverà per via algebrica) mi fermo qui.

E come al solito complimenti a ***trentatre***, che ispira anche gli altri lettori e solutori, un po' come il nostro ***Franco57***:

> Nel provare a risolvere il quesito ho visto subito che si basava sulle stesse proprietà matematiche necessarie per il precedente *Salti "lunghi"* dello scorso numero di novembre, infatti i punti medi di questo problema sono come i sassi da saltare di quel quesito. Comunque qui adotto un ragionamento leggermente diverso per la soluzione.
>
> Andiamo subito alla generalizzazione che non è complicata: dati i punti $M_1, M_2, \ldots, M_n$ che sono i vertici del poligono M, il poligono A con n vertici che ha questi come punti medi dei lati si costruisce sempre (a meno dei casi degeneri che vediamo poi) se n è dispari ed ha un'unica soluzione. Se invece n è pari in genere non è possibile farlo, ma in determinate condizioni sì e però in questo caso il primo vertice può essere un qualsiasi punto del piano perciò vi sono infinite soluzioni. Una precisazione: qui parliamo di poligoni in senso ampio includendo anche quelli intrecciati.
>
> Bisogna trovare dei vertici $X_1, X_2, \ldots, X_n$ di cui M_1 sia il punto medio di X_1X_2, M_2 sia il punto medio diX_2X_3 e così via fino a M_n che è il punto medio di X_nX_1.
>
> Risulta $X_2 = 2\cdot M_1 - X_1$, $X_3 = 2\cdot M_3 - X_2 = 2\cdot M_3 - (2\cdot M_1 - X_1) = 2\cdot M_3 - 2\cdot M_1 + X_1$ e così via fino ad arrivare:
>
> - **Per <u>*n*</u> dispari** a $X_1 = 2\cdot M_n - 2\cdot M_{n-1} + \cdots - 2\cdot M_1 + X_1$ cioè $Mn - M_{n-1} + \cdots + M_2 - M_1 = 0$, quindi o questa condizione è vera e allora X_1 può essere qualsiasi punto del piano, oppure è falsa e allora nessun punto iniziale va bene, perciò lo n-gono A non esiste. In quest'ultimo caso, posto $n=2\cdot k$, il poligono M risulta la "composizione" di due k-goni ottenuta prendendo alternativamente un lato dall'uno e dall'altro e opportunamente traslati (figura 1), infatti le seguenti somme vettoriali $\vec{M_1M_2} + \vec{M_3M_4} + \ldots + \vec{M_{n-1}M_n}$ e $\vec{M_2M_3} + \ldots + \vec{M_{n-2}M_{n-1}} + \vec{M_nM_1}$ risultano nulle.
> - **Per <u>*n*</u> pari** a $X_1 = M_n - M_{n-1} + \cdots - M_2 + M_1$, quindi X_1 esiste ed è unico e gli altri vertici sono ricavati di conseguenza, cioè $X_2 = 2\cdot M_1 - X_1 = M_{n-1} - \cdots + M_2 - M_1 + M_n$ ecc. Esiste quindi un unico n-gono A o meglio un insieme di punti $X_1, X_2, \ldots, X_n$ di cui gli Mi sono i punti medi dei lati.
>
> Ma quand'è che una sequenza di punti costituiscono i vertici di un poligono? Secondo me, volendo essere molto elastici e quindi comprendendo anche appunto poligoni intrecciati e altre figure più particolari, sempre, purché due vertici consecutivi con siano coincidenti (se lo sono lo chiamo poligono degenere), perché in questo caso non è definita una direzione per il segmento che li congiunge e quindi neanche gli angoli corrispondenti a quei vertici. Se ciò avviene, ad esempio quando $X_n = X_1$ abbiamo $M_n - M_1 + M_2 - \cdots + M_{n-1} = M_1 - M_2 + \cdots - M_{n-1} + M_n$ cioè $M_1 - M_2 + \cdots + M_{n-2} - M_{n-1} = 0$ che è la condizione già vista affinché per lo $(n-1)$-gono ci siano infinite soluzioni. Ad esempio nel caso di un pentagono M, quando quattro vertici consecutivi sono un parallelogramma (vedi figura 2).

Altre osservazioni che si possono fare è che il passaggio dal poligono *M* dei punti medi al poligono originale *A* non mantiene né la convessità (figura 3) né il fatto di essere semplice, cioè non intrecciato (figura 4).

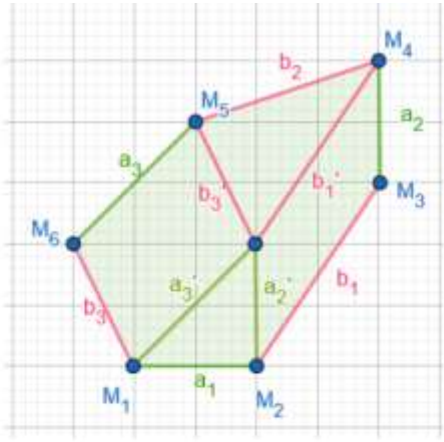


Figura 1: 2k-gono combinazione alternata di due k-goni

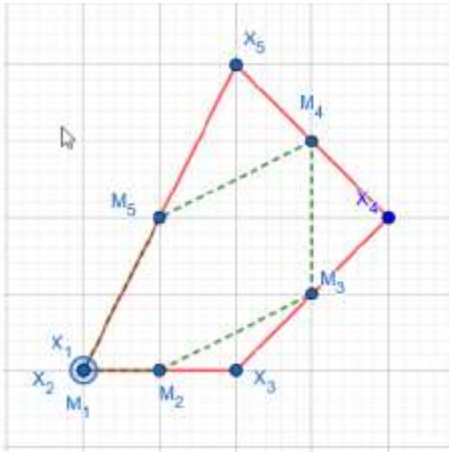


Figura 2: M non degenere non garantisce A non degenere

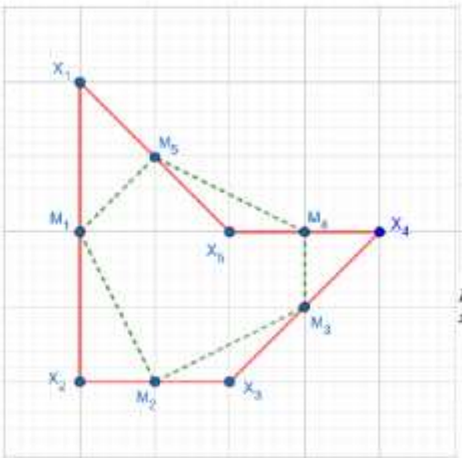


Figura 3: M convesso non garantisce A convesso

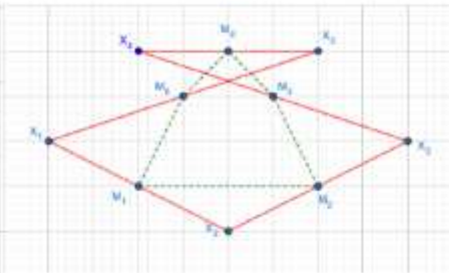


Figura 4: M semplice (non intrecciato) non garantisce A semplice

E adesso procediamo.

5.3.3 Somigliano a un paio di cose

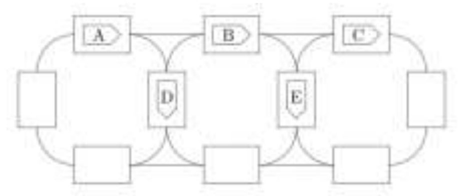
In realtà sono tre problemi, proviamo a riassumere (poco):

> Avete una scacchiera 1×6 (una striscia di sei caselle), e su ogni casella c'è una pedina. Le pedine sono bianche da una parte e nere dall'altra; all'inizio del gioco, tutte le pedine sono con il lato nero visibile. Potete fare un solo tipo di mossa: scelta una pedina *X*, spostarla tra le pedine *Y* e *Z*, *shiftando* opportunamente le pedine per liberare lo spazio; nel fare questo, capovolgete le pedine *Y* e *Z* in modo tale che mostrino l'altro colore (ma non la *X*, che resta del colore originale, anche se cambia posto). Scopo del gioco è ottenere una fila di sei pedine bianche. Come fate?

Variazione sul primo problema:

> Questa volta sulle pedine ci sono scritti dei numeri, e al momento la disposizione è 043210 (i due zeri sono indistinguibili tra di loro); vostro scopo è ottenere la disposizione 012340; qui non capovolgete le pedine (ma fate lo shift esattamente come sopra), ma avete la limitazione che la pedina con il valore *k* può spostarsi "saltando" esattamente *k* altre pedine (e spingendo la *k*-esima per farsi spazio). ...e se ho più pedine, sempre con lo stesso schema? È possibile?

Secondo gioco:



7 *Meglio sviluppare la teoria, prima.*

Vi trovate all'interno di un centro logistico con le strade molto strette, e i vostri camion (che vanno solo in avanti) sono nelle posizioni indicate, con il "muso" dalla parte indicata dalla freccia. Anche se strettissime (ci sta un camion solo per volta), le strade possono essere percorse in entrambi i sensi; il vostro scopo è quello di avere i camion nelle stesse posizioni ma ***girati dall'altra parte***. I camion possono muoversi solo da una piazzola di sosta (i rettangoli) all'altra, e non possono saltarsi. Come fate? E quanta strada fanno i camion? Se volete generalizzare, potreste provare a "allargare" il centro logistico, sempre con le vie centrali e tutta la via in alto occupate, le due vie ai lati e tutta la riga in basso libere...

Cominciamo subito con la soluzione di ***Valter***:

Una premessa:
- il problema dice di spostare le pedine tra due shiftando opportunamente
- assumo quindi che non si possano spostare ai lati della fila di caselle
- in tal caso la pedina si sposterebbe a fianco di una, non tra altre due.

Notazioni:
- in rosso è la pedina che sarà spostata
- in **grassetto** dove è stata poi spostata.

<u>Bianche/nere:</u>
- se fossero solo quattro: NNNN → B**N**BN → BB**N**N → BB**B**B
- con sei:
-- N[NNNN]N → N[B**N**BN]N → N[BB**N**N]N → N[BB**B**B]N (le parentesi per evidenziare che si muovono solo le centrali)
-- infine si termina con: B**N**NBBB → B**B**BBBB
- vale a dire:
-- sistemo le quattro centrali col metodo precedente
-- termino poi con le due mosse conclusive mostrate.

Le ultime due mosse valgono con qualsiasi numero pedine (…se si riesce a giungere con sole due nere affiancata).
L'ultima mossa può essere solo di una bianca tra due nere.
Iterando i due passaggi si riesce, quindi, a risolvere.
Un esempio con otto pedine per spiegare quanto ho detto:
NN[NNNN]NN→NNBBBBNN→NB**N**NBBBN→NB**B**BBBBN→B**N**NBBBBB→BB**B**BBBBB.
Il metodo, però, vale solo con un numero pari di pedine. Infatti esso prevede di:
- iniziare portando a nere le quattro pedine centrali
- iterare poi, man mano, con le due che le affiancano.

Perché sia possibile procedere in tal modo serve che:
- siano presenti, almeno, quattro pedine nella fila
- ai loro due lati vi sia lo stesso numero di pedine.

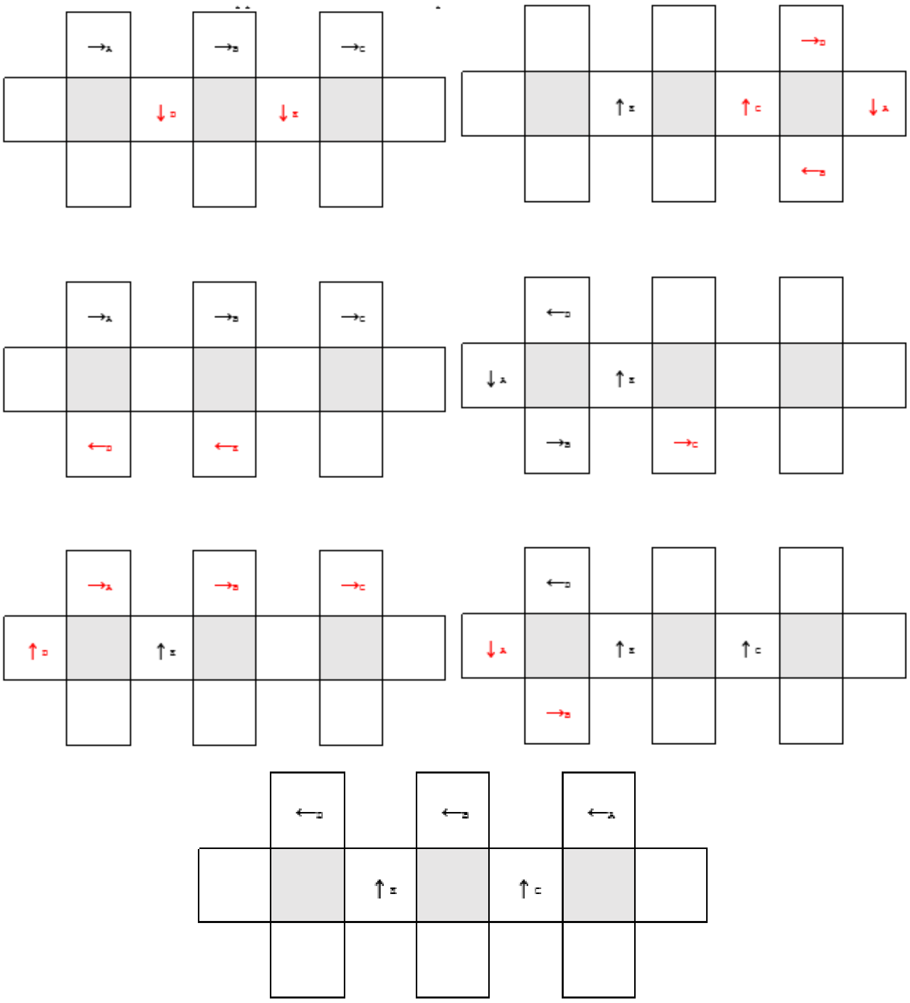
Con un numero di pedine dispari questo non è possibile.
Mi pare non lo sia, neppure, adottando un altro metodo.
Provo a mostrarlo analizzando i diversi tipi di mosse:
- nera tra due nere = il numero di nere scende di due
- bianca tra due nere = le nere scendono di due unità
- nera tra due bianche: le nere crescono di due unità
- bianca tra due bianche: le nere crescono di due unità
- nera tra bianca e nera: le nere non variano di numero
- bianca tra bianca e nera: stesso discoro di cui sopra.

Comunque sia, la parità del numero delle nere non varia.
Partendo con un numero dispari non si giunge mai a zero.

Zero infatti è pari e le nere non lo possono mai essere.
Con valori in ordine decrescente da portata a crescente (il colore blu indica che uso un ordinamento precedente):
- 0210 0**1**20
- 03210 03120 0**2**310 0**1**230
- 043210 04**123**0 034120 0**1**3420 01**2**340
- 0543210 05**1234**0 0**4**51230 0**1**45230 01**3**4520 0**2**13450 0**1**23450
- con sei pedine:
-- 06543210
-- 06**12345**0
-- 0**5**612340
-- 0**1**562340
-- 01**4**56230
-- 0**2**145630
-- 021**3**4560
-- 0**1**234560
Con sette pedine:
-- 076543210
-- 07**123456**0
-- 0**6**7123450
-- 0**1**6723450
-- 01**5**672340
-- 0**2**1567340
-- 021**4**56730
-- 0**3**2145670
-- 0**123**45670
Con otto pedine:
-- 0876543210
-- 08**1234567**0
-- 0**7**81234560
-- 0**1**78234560
-- 01**6**7823450
-- 0**2**16783450
-- 021**5**678340
-- 0**3**21567840
-- 0123456780
-- 0**123**456780.
Descrivo a grandi linee il metodo:
- il valore più alto non può muoversi dalla sua posizione
- data la regola del gioco dovrebbe saltare fra altre due
- questo non è possibile, data la lunghezza del suo salto
- si devono, quindi, usare le altre pedine alla sua destra
- il metodo esegue salti che spostano solo verso sinistra
- ciclo sistemando man mano le pedine con valore maggiore (perché sono quelle che hanno meno libertà di movimento)
- per ottenere ciò, sfrutto le pedine con valore più basso:
-- muovendole a sinistra ottengo la distanza per tale salto
-- la pedina 1, ripetendo il salto, può valere come 2,3,4,…
-- la pedina 2 come 4,6,…; …e di seguito per le successive
-- ovviamente la 3 vale come 6 da sette pedine in poi; ecc.
-- noto man mano se una fila di pedine è in ordine inverso
-- le considero se quella con il valore più basso è l'uno
-- devono essere inoltre state sistemate le altre pedine
-- se è così sfrutto quanto già ottenuto per tali pedine.

Centro logistico.
Notazioni:

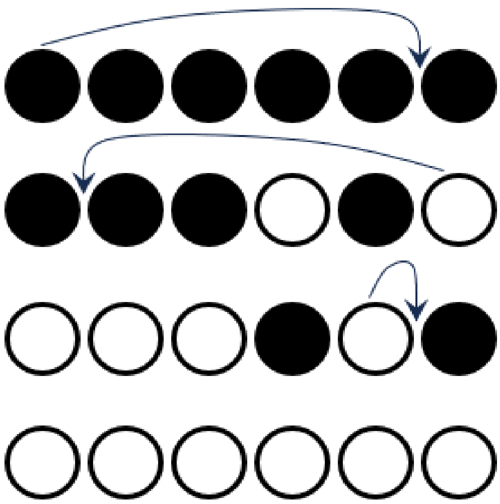
- la direzione delle frecce indica l'orientamento dei camion
- le frecce rosse evidenziamo i camion che verranno poi mossi
(ho accorpato più mosso per brevità; se immagino si capisca)
- a destra di ogni freccia c'è l'etichetta assegnata al camion
- le caselle bianche rappresentano le otto piazzole previste.



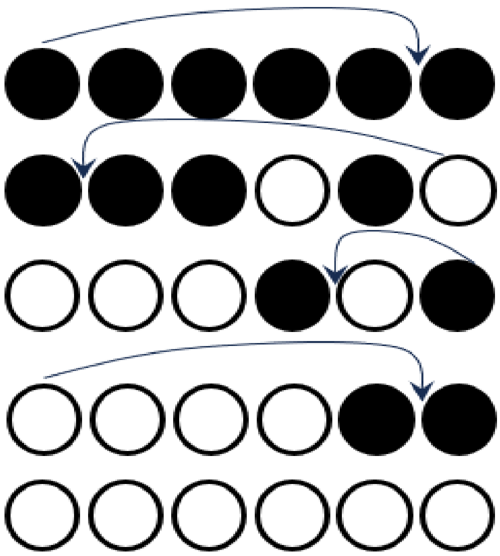
[*attenzione, a causa dell'inettitudine della linotype, sono da leggere da sopra a sotto i primi tre, poi i secondi tre sempre da sopra a sotto ed infine quello in mezzo sotto*]

Ci scrive ***Galluto***, anche lui risolve tutti i problemi:

Ripropongo la domanda che ho fatto un paio di numeri fa: è lecito prendere una pedina e rimetterla al suo posto, cioè tra le stesse due pedine tra cui stava prima? Se la risposta è sì, la soluzione è la seguente, in tre mosse:



Se invece la risposta è no, serve una mossa in più



Somigliano a un paio di cose... / 2

Le linee rosse indicano gli spostamenti.

Passo 1:

D si va a mettere dietro ad A ed E prende il posto di D (al contrario)

Strada percorsa: 2 “piazzole” D, e 2 piazzole E; totale 4 piazzole

Passo 2:

Tutto il “trenino” C-B-A-D (nell’ordine) fa il percorso disegnato, con B, A e D che al termine occupano, in senso opposto, tre delle piazzole iniziali

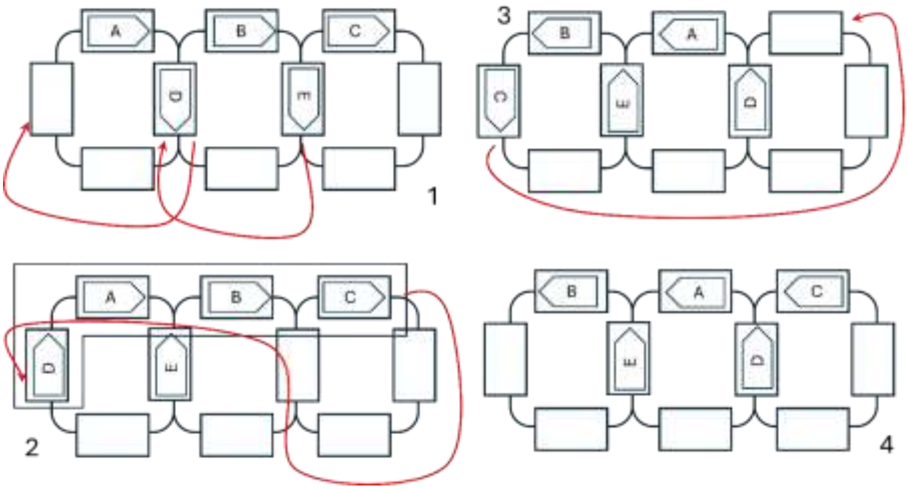
Strada percorsa: ciascuno dei quattro ha percorso 6 piazzole; totale 24 piazzole

Passo 3:

C rifà il giro e si va a mettere dietro A, occupando l’ultima piazzola iniziale

Strada percorsa da C: 5 piazzole

Strada totale: 4 + 24 + 5 = 33 piazzole



Somigliano a un paio di cose… / gioco gratis

Gli 0 non li posso spostare, perché saltando 0 posizioni rimangono dove stanno; se sposto il 4 se ne va oltre lo 0 e quindi non serve a niente; l'unica quindi è spostare l'1, il 2 e il 3 facendoli passare a sinistra del 4:

	0	4	3	2	1	0
sposto il 2 tra lo 0 e il 4	0	2	4	3	1	0
sposto 3 volte l'1 finchè non va a sinistra del 2	0	1	2	4	3	0
sposto il 3 a sinistra, tra lo 0 e l'1	0	3	1	2	4	0
sposto il 2 tra lo 0 e il 3	0	2	3	1	4	0
sposto 2 volte l'1 finchè non va a sinistra del 2	0	1	2	3	4	0

Concludiamo con la soluzione di ***Camillo***:

Il primo gioco.

Si prende la prima pedina nera più a sinistra e la si sposta verso destra. Iterando questo alla quinta mossa si hanno solo 2 pedine nere adiacenti per cui è sufficiente spostare una delle bianche ai loro lati per concludere il gioco. Naturalmente si può anche agire specularmente partendo da destra.

Gioco gratis.

Si può fare in 8 mosse spostando sempre verso sinistra le pedine coi numeri: 1, 2, 1, 3, 2, 1, 1, 1. Però così non vedo l'uso delle pedine con lo 0. Coinvolgendo gli 0 ho trovato una soluzione in 10 mosse.

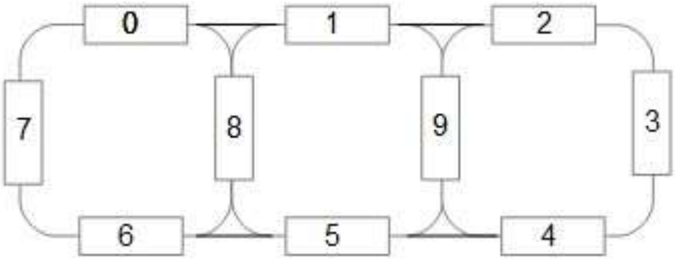
Verso destra 1, 2, 3 poi verso sinistra 2, 2, 3, 1, 1, 1 e l'ultima mossa il 2 verso destra.

Aumentando il numero delle pedine il gioco è sempre risolvibile sia con o senza gli zeri però non ho trovato uno schema algoritmico semplice che lo permetta.

Secondo gioco.

Ebbene sì, in gioventù ho provato parecchie volte a fare retromarcia (con trattore agricolo e rimorchio), confermo è un casino, il rimorchio va sempre dal lato opposto del voluto per cui occorre sterzare opportunamente.

"Qui, comunque, ci vuole un disegno." con numerate le piazzole di sosta del centro logistico.



I camion sono siglati con le lettere come da disegno originale.

Elenco dei movimenti: D87, E98, C29, B14, A03, D72, E86, C90, B41, A38, D29, E62. I tratti percorsi tre le piazzole sono 33.

Ora un altro percorso però con 39 tratti, i primi 7 percorsi sono uguali: D87, E98, C29, B14, A03, D72, E86, cambio percorso C97, B da 4 passando per 9, 1 e giungendo in 8, A30, B81, D28, E69, C72 così i camion sono disposti nelle piazzole originali.

È anche possibile con lo stesso centro logistico avere 7 camion e riuscire a "rovesciarli".

E con questo ci fermiamo. Complimenti a tutti i solutori e alla prossima!

6. Quick & Dirty

8 *Il terreno in oggetto.*

Voi e vostro fratello, per ragioni che non staremo ad esplorare, dovete dividere in parti uguali un terreno rettangolare. C'è però un piccolo problema: all'interno del terreno esiste un'area, anch'essa rettangolare, che non è di vostra proprietà (è un terreno comunale, di libera fruizione da parte della popolazione: è indicato in grigio nel disegno qui a fianco). Senza stare a discutere di diritti di passaggio (supponiamo il terreno uniforme, da questo punto di vista), come fate a dividere equamente l'appezzamento?

7. Pagina 46

Dalla proprietà (2), esiste almeno una linea che congiunge le fermate P e Q; ma se per queste fermate passasse una seconda linea, la proprietà (3) sarebbe violata; quindi, *date due fermate* P *e* Q, *esiste una e una sola linea che le congiunge*.

Sia ora $f(P)$ il numero delle linee serventi la fermata P e $g(l)$ il numero delle fermate Q_1, Q_2, ..., Q_g servite dalla linea l, con $g=g(l)$. Per quanto notato qui sopra, esiste una e una sola linea che unisca P alle diverse fermate Q_1, Q_2, ..., Q_g, ma dalla proprietà (3) *ogni* linea passante per P ha una fermata in comune con l, ossia ogni linea per P passa per una delle fermate Q_1, Q_2, ..., Q_g. Questo implica che passino esattamente g linee da P, e quindi deve essere $f(P)=g(l)$.

Consideriamo ora due linee distinte qualsiasi a e b; dimostreremo che esiste una fermata P che non è né su a né su b.

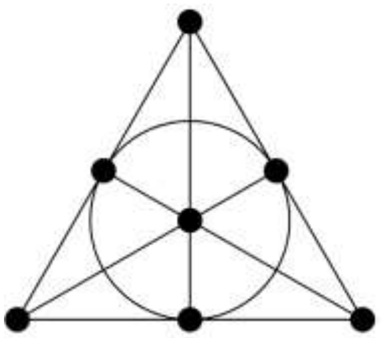
Per la proprietà (3), a e b hanno esattamente una fermata C in comune; per la proprietà (1) a ha almeno tre fermate, quindi esiste una fermata $A \neq C$ su a. Nello stesso modo, esiste una fermata $B \neq C$ su b. La linea che congiunge A e B deve avere almeno un'altra fermata P per la proprietà (1), ma se P fosse su entrambe le linee a e b sarebbe violata la proprietà (3).

Da quanto detto, risulta che $g(a)=f(P)$ e $g(b)=f(P)$, e quindi deve essere $g(a)=g(b)$; quindi tutte le linee hanno lo stesso numero di fermate, che indicheremo con $n+1$.

Resta da dimostrare che se P è una fermata qualsiasi, allora $f(P)=n+1$; per vedere questo è sufficiente dimostrare che esiste una linea l che non passa per P, e quindi abbiamo $f(P)=g(l)=n+1$; per definire questa linea, consideriamo una fermata $Q \neq P$; esiste una linea d che unisce Q a P. Per ipotesi, esiste più di una linea, quindi esiste una fermata R non su d, e la linea che unisce Q a R ha la proprietà richiesta.

Per quanto riguarda la seconda parte del problema, sia l una qualsiasi linea, e siano Q_1, Q_2, ..., Q_{n+1} le fermate su l. Ogni linea diversa da l ha in comune esattamente una fermata con l, ossia ha un incrocio in uno dei punti Q_1, Q_2, ..., Q_{n+1}. Ma sappiamo che per ogni Q_i passano $n+1$ linee, una delle quali è l stessa. Quindi, esistono $(n+1) \cdot n$ linee, oltre ad l stessa, e quindi il totale delle linee è n^2+n+1.

Nello stesso modo, sia P una qualsiasi fermata, e siano l_1, l_2, ..., l_{n+1} le linee che passano per P. Poiché ogni fermata è unita a P da una linea, ogni fermata è su una qualche linea l_i. Dalla prima parte, sappiamo che l_i ha $n+1$ fermate, una delle quali è P stessa. Quindi, ogni l_i ha n fermate oltre a P, e quindi in totale ci sono $(n+1) \cdot n$ fermate oltre a P. Contando anche P stessa, otteniamo che ci sono $(n+1) \cdot n+1=n^2+n+1$ fermate.



9 *Un piano proiettivo di ordine 7 (Piano di Fano), da Wikipedia.*

Nota: Un sistema di linee e di fermate soddisfacente le condizioni del problema è detto *piano proiettivo* (finito), e le fermate sono in genere chiamate *punti*. Il numero n è detto l'*ordine* del piano proiettivo; è stato dimostrato che se n è una *potenza di un numero primo*, esiste un piano proiettivo di ordine n (quindi esistono i piani proiettivi di ordine 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, ...). Non sono stati trovati piani proiettivi il cui ordine non sia la potenza di un primo; è stato dimostrato che non ne esistono di ordine 6, ma non è noto se esista o no un piano proiettivo di ordine 10.

8. Paraphernalia Mathematica

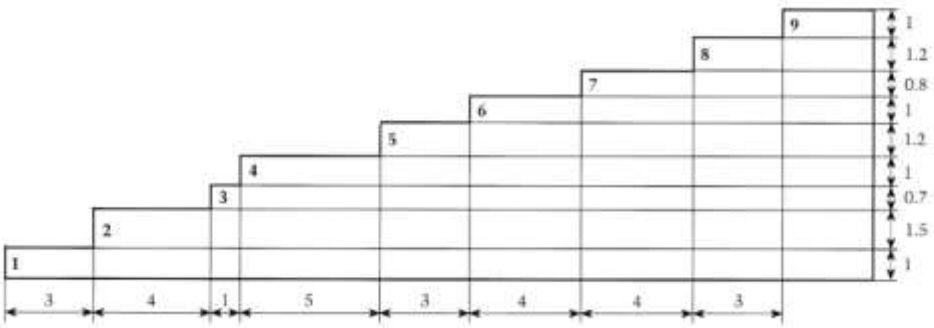
Come al solito, abbiamo un problema. Questa volta, però, "è un problema" in qualsiasi senso vogliate interpretare la parola.

Sapete che, quando ci capita di presentare RM in giro per il mondo, una delle parole preferite di Doc è "dematematizzazione", ossia il prendere un problema astratto e trasformarlo in un qualcosa vagamente correlato al mondo reale. Qui, il problema è esattamente l'opposto; si parte da un raccontino ambientato (male, secondo Rudy[10]) nell'antico Egitto e si procede alla sua matematizzazione. Quindi c'è un problema e abbiamo un problema; non solo, ma lo avete anche voi, nel caso vogliate verificare di aver capito bene il tutto: lo trovate alla fine.

A margine: una cosa che ci piace molto di questo raccontino è che tutti i conti sono fatti con una misura oggi ingiustamente sottoutilizzata: a Rudy i *decimetri* sono stati simpatici sin dalla più tenera età, visto che li trovava "a misura di bambino".

8.1 Scale in economia

Nel palazzo del Vecchio Faraone, la scala che portava al trono era completamente d'oro, larga 10 decimetri; siccome il Vecchio Faraone era vecchio e, per motivi di immagine pubblica, non poteva arrivare alla fine ansimante, i gradini erano piuttosto bassi: recentemente, era stata riprogettata per avere i gradini non più alti[11] di 1.5 dm; certo non in sua presenza, ma a corte circolavano alcune battute sul fatto che forse era ora che qualcuno inventasse l'ascensore. Trovate uno schema della sezione della scala originale qui di seguito (misure, come promesso, in decimetri).



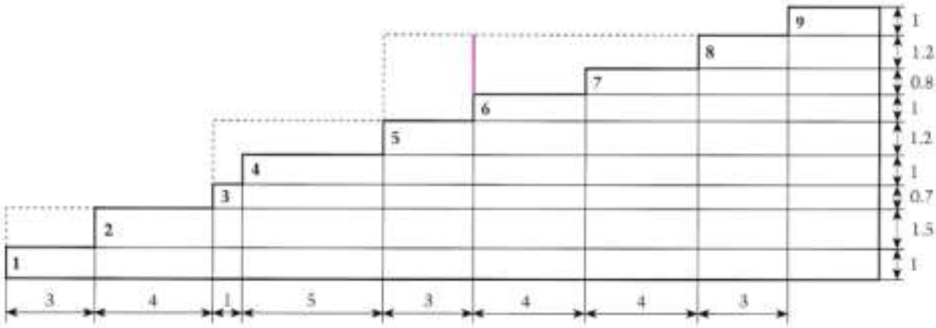
Quando il Vecchio Faraone lascia questa valle di lacrime, il Giovane Faraone, che aveva sentito tutte le battutacce fatte sul suo predecessore, decide che è ora di riprogettare la scala; il suo ordine è che raggiunga sì la stessa altezza, ma con ***non più di quattro gradini***.

Il Tesoriere, a questo punto, fa notare che costruire la piramide per il Vecchio Faraone era già costato un mucchio di soldi; per rifare la scala a quattro gradini (sempre larga un metro), sarebbero serviti $[3 \cdot 1.5+1 \cdot 1+1.2 \cdot (1+5)+1 \cdot 3+0.8 \cdot \cdot (3+4)+1.2 \cdot 11] \cdot 10 = 345\text{dm}^3$ d'oro, che non c'erano.

Il Giovane Faraone fa notare che una scala come quella che vedete qui sotto (sovrapposta alla vecchia) richiede meno oro, permettendo un risparmio di 90dm^3, riducendo la richiesta a $345–90 = 255\text{dm}^3$; il Tesoriere fa però notare che il risparmio è comunque insufficiente, e il Giovane Faraone, piuttosto seccato, gli dice di arrangiarsi, se non vuole essere trasformato in cibo da coccodrilli.

[10] Per limitarci al punto più evidente, non comprende la battuta preferita di Rudy in questi casi, quella del Faraone che promette, in caso di fallimento, un "...cappottino di coccodrillo. Vivo".

[11] Ci dicono che la parte verticale dei gradini si chiama *alzata*, mentre quella orizzontale è detta *pedata*.



Il Tesoriere, in ambasce, si rivolge allora ad un amico scriba (non esattamente disinteressato, come vedremo a breve), il quale per prima cosa si informa di quanto oro resti nelle casse reali: 200dm^3, il che non è molto; l'accordo che raggiungono è che l'amico ci proverà, e tutto l'oro del tesoro che riuscirà a risparmiare rappresenterà la sua parcella. Il giorno dopo, l'amico si presenta con un simpatico progettino che impiega 171dm^3 d'oro, garantendosi quindi una parcella di 29dm^3. Riconoscente e improvvisamente guarito dall'allergia ai coccodrilli, il Tesoriere vorrebbe però ora sapere come ha fatto l'amico a calcolare il tutto. E qui, cominciamo effettivamente il nostro calcolo; per prima cosa, decidiamo che lavoriamo sul piano, visto che la larghezza della scala è uniforme e vale 10dm.

Per prima cosa, inventiamoci una notazione: $f_a(b)$ è la quantità di oro necessaria per sostituire b vecchi gradini con l'*a-esimo* gradino della nuova scala.

Cominciamo dal primo gradino: qui non c'è niente da costruire, e la nostra formula si scrive $f_1(1)=0$.

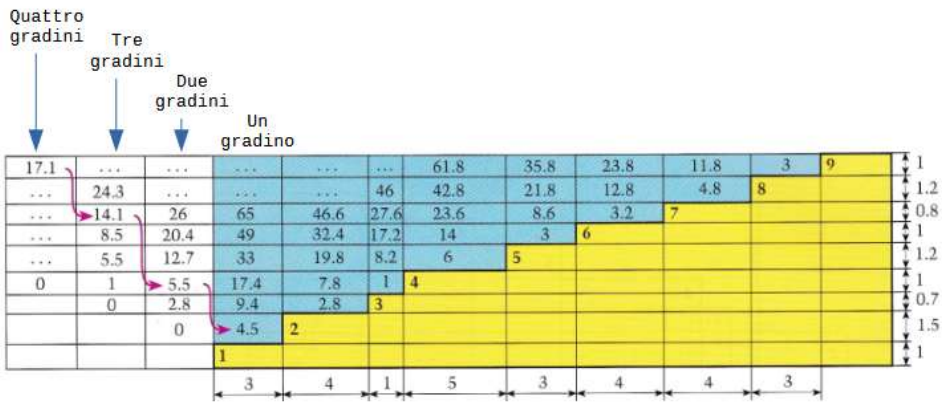
Già al secondo gradino, però, ci serve del materiale: infatti, la formula diventa $f_1(2) = 1.5 \cdot 3 = 4.5$, ossia mi servono 4.5dm^2 di materiale per sostituire i primi due gradini con un gradino (sì, decimetriquadrati: stiamo lavorando nel piano). E questo dovrebbe anche chiarire la notazione.

Nello stesso modo, si ricava che sostituire *i* primi *tre* gradini con un gradino costa $f_1(3) = 4.5 + 0.7 \cdot (3+4) = 9.4$dm^2 e, similmente, per sostituire 4 e 5 gradini (sempre con il primo gradino):

$$f_1(4) = 9.4+1 \cdot (3+4+1) = 17.4$$
$$f_1(5) = 17.4+1.2 \cdot (3+4+1+5) = 33$$

...e avanti in questo modo.

Cerchiamo ora di calcolare che area viene *aggiunta* per costruire un nuovo gradino a partire da un insieme di vecchi gradini; se i vecchi gradini (iniziale e finale) erano indicati con i e j, $g(i, j)$ sarà il nostro costo, dipendente da dove inizio e dove finisco; non è difficile calcolarli, e li trovate nella parte azzurra della tabella; sulla sinistra, trovate la funzione f tabulata per gli opportuni numeri di gradini, ossia quale sia il minimo quantitativo d'oro necessario per una scala di quattro, tre, due o un gradino che termini al *j-esimo* gradino della vecchia scala.



Un piccolo esempio per capirci: se volete costruire un singolo gradino tra il secondo e il quarto della vecchia scala, vi servono $g(2,\ 4)=2.8+1\cdot5=7.8\text{dm}^2$ d'oro. La "logica" del passaggio alla funzione f nasce dal fatto che $g(1, j) = f_1(j)$, e da questi si possono poi calcolare le versioni per due, tre... gradini.

Siamo adesso in grado di calcolare l'area minima per due gradini, ma procediamo per gradi: non abbiamo nessuna intenzione di mettere due gradini al posto di uno, quindi $f_2(1)$ è inutile; inoltre, è evidente che, se parliamo dei gradini più bassi, mettere due gradini al posto di due non impegna materiale, quindi $f_2(2)=0$. Ma per trovare $f_2(3)$ dobbiamo fare qualche conto, visto che ci sono due possibilità; o costruiamo il secondo gradino al livello del vecchio terzo, il che aggiunge un'area di $g(2, 3)$, oppure costruiamo il primo gradino al livello del secondo, ossia $g(1,\ 2)=f_1(2)$. La miglior soluzione è quella minima, quindi $f_2(3)=min\{g(2, 3), f_1(2)\}=min\{2.8, 4.5\}=2.8$.

Stesso discorso, anche se leggermente più complesso, per $f_2(4)$; qui dobbiamo trovare il minimo di tre valori: $f_2(4) = min\{g(2,4), f_1(2)+g(3, 4), f_1(3)\} = min\{7.8, 4.5+1, 9.4\} = 5.5$, e avanti in questo modo. Se non abbiamo sbagliato i conti, trovate il tutto nella tabellina qui di fianco.

$f_2(3)$	2.8
$f_2(4)$	5.5
$f_2(5)$	12.7
$f_2(6)$	20.4
$f_2(7)$	26
$f_3(4)$	1
$f_3(5)$	5.5
$f_3(6)$	8.5
$f_3(7)$	14.1
$f_3(8)$	25.2
$f_4(9)$	17.1

10 *I valori.*

Adesso, potrebbe sorgervi un dubbio: ma se dobbiamo fare tutti questi calcoli per solo due gradini, con tre gradini sarà ancora più complicato, e a noi ne servono quattro!

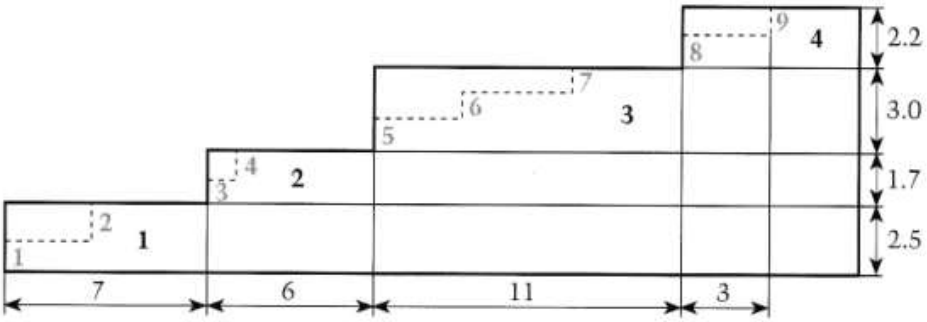
Fortunatamente, no: consideriamo, ad esempio, il caso di $f_3(4)$, ossia come costruire una scala a tre gradini che terminino a livello del quarto vecchio gradino e con area minima: vediamo dove finisce il secondo gradino.

Praticamente, in questo caso possiamo costruire un nuovo gradino tra i vecchi terzo e il quarto, ad un costo di $g(3,4)$, oppure possiamo sostituire i primi tre vecchi gradini con due nuovi: questa, ha un costo di $f_2(3)=2.8$, e quindi abbiamo che $f_3(4) = min\{g(3,4), f_2(3)\} = min\{1, 2.8\} = 1$.

Non siete convinti? Provate con $f_3(5)$. In questo caso, dei tre gradini che terminano al livello del quinto vecchio gradino, il secondo potrà terminare all'altezza del vecchio secondo, terzo o quarto.

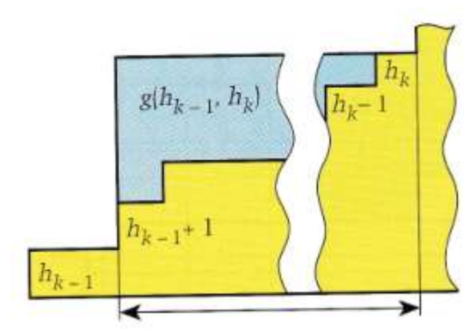
Quindi, $f_3(5) = min\{g(3,\ 5),\ f_2(3)+g(4,\ 5),\ f_2(4)\} = min\{8.2,\ 2.8+6,\ 5.5\} = 5.5$. Adesso è più chiaro?

In realtà, l'unico che ci interessa è $f_4(9)$, visto come minimo delle somme $f_3(j)+g(j, 9)$, dove j assume i valori da 3 a 8; questo minimo vale 17.1, ed è pari a $f_3(7)+g(8, 9)$ (ricordatevi, nel calcolare l'oro totale necessario, di moltiplicare per 10). Siccome però i valori "f" sono calcolati in funzione dei valori precedenti, dovete calcolarveli tutti; procedendo a ritroso, si vede che la nostra soluzione ottimale include il valore $f_3(7)=14.1$, quindi il terzo gradino deve terminare all'altezza del vecchio settimo gradino; ma quest'ultimo include $f_2(4)=5.5$, quindi il secondo gradino dovrà arrivare all'altezza del vecchio quarto gradino, e siccome questo termine include $f_1(2)=4.5$, abbiamo che il primo gradino terminerà all'altezza del vecchio secondo gradino. Praticamente, la nostra nuova scala, rispetto alla vecchia, avrà uno schema di questo genere:



...e tutti vissero felici e contenti, anche se al faraone ogni tanto veniva il fiatone.

Ma adesso, cerchiamo di capire come abbiamo fatto.



11 *È più chiaro?*

Supponiamo di avere una scalinata di N gradini e di volerla trasformare in una di n gradini ($N>n$); supponiamo di conoscere già la disposizione ottimale della scala per un numero di gradini inferiore a n; sia inoltre h_k il numero del vecchio scalino che raggiunge la medesima altezza del nuovo k-esimo scalino. Il k-esimo scalino inizia al $h_{k-1}+1$-esimo vecchio scalino. Indichiamo l'area aggiunta (quella indicata in azzurro nella figura) con $g(h_{k-1}+1, h_k)$. Il problema generale, quindi, consiste nel trovare i valori $h_1, h_2, \ldots, h_n$ che minimizzino la somma dei k valori $g(1, h_1) + g(h_1+1, h_2) + \ldots + g(h_{k-1}+1, h_k)$, per un dato $k=n$ e $h_k=h_n=N$, indicando questo valore come $f_n(h_n)$. Ma per trovare il valore minimo di $f_{n-1}(h_{n-1})$ dei primi $n-1$ termini (nei quali *non compare* h_n), dobbiamo risolvere lo stesso problema per il numero dei gradini meno uno. Questo porta alla *formula di Bellmann*[12], che recita:

$$f_k(h_k) = min\{f_{k-1}(h_{k-1})+g(h_{k-1}+1, h_k)\}$$

dove il minimo è preso su tutti i valori di h_{k-1} per cui $k-1 \leq h_{k-1} < h_k$.

Questa formula richiede un minimo di interpretazione; per trovare il minimo, dobbiamo assegnare tutti i valori possibili a k a partire da $k=1$ e, per ognuno di essi, determinare il valore h_{k-1} che minimizza $f_k(h_k)$; indi, quando arriviamo a $k=n$, procediamo a ritroso prendendo tutti i valori ottimali $h_{n-1}, h_{n-2}, \ldots, h_1$ che abbiamo calcolato precedentemente.

"...ottimo. E, a parte costruire il magnifico scalone del nostro *buen retiro* nella zona del Chianti, cosa ci facciamo?" Beh, potreste (ri)leggervi *The Phoenix Project*, di Gene KIM: anche se non è detto esplicitamente, la formula di Bellmann è applicata continuamente nel libro per minimizzare i downtime durante il processo produttivo. E quando rilasciano una nuova release, i DevOps ci vanno a nozze, con questo aggeggio, sempre per minimizzare i downtime. Anche se di solito lo tengono ben nascosto all'interno dei vari programmi di flow management...

Eh? Oh, giusto. Vi avevamo promesso un problemino, per vedere se avevate capito tutto.

La vostra azienda ha appena deciso di comprare nove diversi server al costo di 10, 20, 40, 60, 75, 100, 130, 160 e 190 K€. Un server è in grado di rimpiazzare qualsiasi modello di quelli più economici di lui, ma ogni tipo ha bisogno del suo software specifico. Per questo, il CEO propone di comprarne nove ma di soli quattro tipi, alla condizione che ognuno dei nove sia in grado di fare (almeno) il lavoro di un diverso server della base qui sopra (piccolo esempio: se ne comprate otto da 160 e uno da 190 va benissimo: quello da 190 fa il lavoro

[12] Richard E(rnest) Bellmann, 26/08/1920–19/03/1984. No, non è in calendario. L'anno prossimo, OK?

di quello originale da 190, gli altri fanno il lavoro dei rimanenti). Logicamente, hanno rifilato a voi la gatta da pelare dei soldi da risparmiare; in pratica, dovete comprare nove server, di quattro tipi, in grado di fare tutti i lavori, spendendo il meno possibile.

Auguri.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms