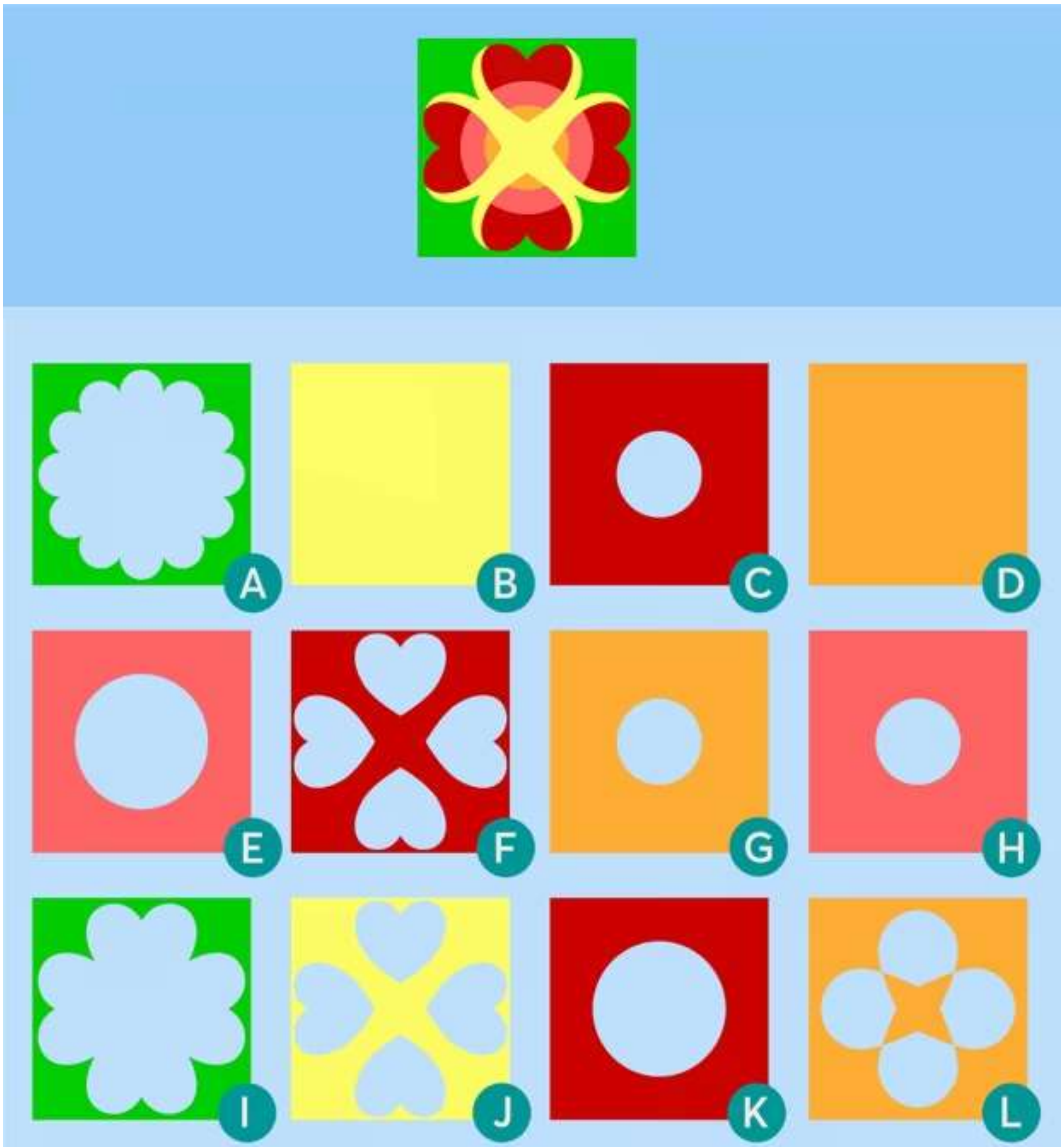
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 300 – Gennaio 2024 – Anno Ventiseiesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM300 ha diffuso 3'389 copie e il 28/01/2024 per Google eravamo in 11'900 pagine.

L'intero Universo conosce la smisurata inettitudine di Rudy nel disegno e la sua conseguente necessità di ricorrere nel campo a supporti di svariato tipo. Uno di questi (poco usato, in realtà) è lo *stencil*, e per Natale gli hanno regalato alcuni problemi da risolvere, appunto, con questo metodo. La logica è che, sovrapponendo opportunamente alcune delle figure A-L (non tutte, e al più una volta ciascuna) fornite, dovete ottenere il disegno in alto, fermo restando che le parti in azzurro chiaro sono "i buchi". Fateci sapere se la cosa vi diverte, ne abbiamo altri quattro o cinque...

1. L'era dell'Acquario

"When the Moon is in the seventh house
And Jupiter aligns with Mars
Then peace will guide the planets
And love will steer the stars.
This is the dawning of the age of Aquarius."[1]
(Rado, Ragni e MacDermot)

Quando nel 1979 Renn Woods arriva sugli schermi delle sale cinematografiche, lanciando nel panorama del Central Park di New York le note di "Aquarius" e agitando la riccia chioma nera tempestata da piccoli fiori bianchi, il musical "Hair" è già vecchio di dodici anni. È infatti il 1967 il suo vero anno di nascita; nascita celebrata nei teatri alternativi off-Broadway, ovvero quei teatri più piccoli e meno prestigiosi di quelli che caratterizzano la grande arteria newyorkese. Che Broadway sia grande non può esserci davvero dubbio: già il nome dichiara che, in quanto a larghezza, non teme rivali; ma forse è la sua lunghezza la dimensione che colpisce di più: una cinquantina di chilometri, di cui 23 in piena New York City. Ciò non di meno, di solito quando di nomina "Broadway" come riferimento topico della città, si intende solo una parte relativamente piccola di quella lunghissima strada: e precisamente quella più vicina a Times Square, dove pullulano i più famosi teatri della città e dove si può serenamente affermare che è nato e diventato grande il genere del musical.

1 *Renn Woods canta "Aquarius" nelle prime scene di "Hair"*

Ma "Hair" nasce come musical figlio di una generazione diversa da quella delle commedie musicali per cui è diventata famosa Broadway: gli autori dei testi, Jams Rado e Gerome Ragni, sono ragazzi di 25 e 22 anni, quando il musical debutta il 17 ottobre 1967 e, ovviamente, oltre che autori, registi e sceneggiatori recitano anche come attori protagonisti. Alle musiche ci pensa Galt MacDermot, decisamente più anziano, visto che la prima del musical si tiene qualche giorno prima del suo ventinovesimo compleanno. Con queste premesse, è evidente che "Hair" non può essere altro che un manifesto generazionale: il 1967 è forse l'anno peggiore, per gli USA, del conflitto nel Vietnam; e il 1968 che bussa alle porte recherà con sé uno dei più terribili anni di crisi, con gli assassinii di Bob Kennedy e di Martin Luther King oltre che, sul fronte militare, l'imprevista e devastante Offensiva del Têt, che fece capire al mondo che gli USA avrebbero perso la guerra.

"Hair" è uno spettacolo totalmente centrato sui giovani degli anni Sessanta: i personaggi di età superiore ai trent'anni sono quasi assenti, e i pochi presenti sono relegati a poco più che figure di colore. In compenso, i tipi giovanili sono abbastanza variegati; se tutto ruota attorno a un gruppo di hippies che vivono nel Central Park (e che si qualificano subito nella storia, non solo perché cantano, ballano e sono vestiti come i "figli dei fiori", ma anche perché la prima scena li ritrae mentre bruciano le cartoline precetto che li chiamavano sotto le armi), il vero protagonista è un ragazzo di campagna del Midwest che si ritrova in mezzo a loro per caso, e che è attratto da una fanciulla tutt'altro che rivoluzionaria, una

[1] "Quando la Luna è nella settima casa e Giove si allinea con Marte, allora la pace guiderà i pianeti e l'amore governerà le stelle. Questa è l'alba dell'era dell'Acquario".

rampolla dell'alta borghesia newyorkese che al Central Park ci va a cavalcare. Tipologie giovanili assai diverse, che il musical unisce nella trama in una sorta di alleanza essenzialmente solo generazionale: e in fondo, le proteste giovanili contro la guerra del Vietnam ebbero davvero un peso tutt'altro che trascurabile nella risoluzione del conflitto.

Quando arriva il film, nel 1979, gran parte delle cause per cui il musical era nato erano diventate assai più tiepide. Quello che si rappresentava nei teatri off-Broadway era uno spettacolo che scandalizzava la maggior parte dell'opinione pubblica statunitense: si bruciavano bandiere, c'erano scene in cui tutto il cast era nudo in scena, si vedevano fumatori di hashish e consumatori di LSD. E poi il cast era ampiamente multirazziale, e gli anni Sessanta degli Stati Uniti d'America erano un periodo tutt'altro che facile, dal punto di vista dei diritti dei non-bianchi. Il film, diretto da Miloš Forman, non tradisce più di tanto lo spirito del musical – anche tenendo conto che un film è destinato a sale cinematografiche di tutto il mondo, e subisce necessariamente vincoli di censura assai più stretti di quelli di un teatro – ma è proprio lo spirito dell'epoca che è cambiato. Anche se è passato solo poco più di un decennio, lo spettatore medio ha l'impressione di vedere una specie di documentario del tempo che fu: non si scandalizza, non è meravigliato, ai giornali non arriveranno lettere infuocate di protesta. Più probabilmente, anzi, si ritroverà a riconoscere delle canzoni ormai famose, magari senza sapere che venivano proprio da quel musical scandaloso: e anche oggi, una sessantina di anni dopo, se non tutti riusciranno a ricordare brani come *Black boys/White boys* o *Ain't got no*, è assai difficile che non si riconoscano *Let the sunshine in* o, appunto, l'iniziale *Aquarius*.

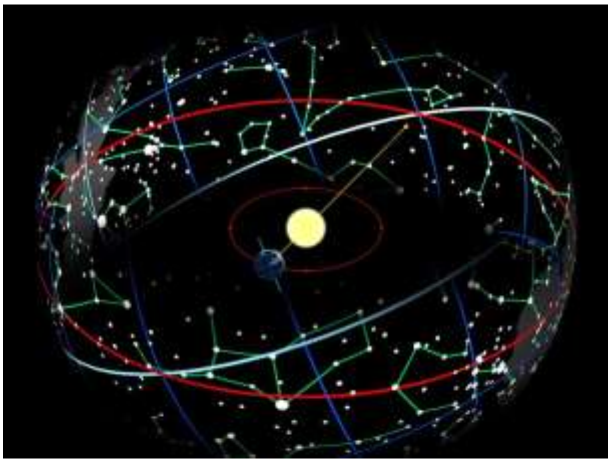
2 *Altra coniugazione di "Aquarius"*

Era un periodo impegnativo, per i ventenni americani e anche per quelli di buona parte del resto del mondo: e bisogna riconoscere che gran parte delle battaglie che si sono trovati a combattere le hanno combattute dalla parte giusta: la loro era la parte contro la guerra, contro le discriminazioni di razza e di genere, contro la centralità del potere e del denaro, e continuamente alla ricerca di nuovi modelli di vita e di valori. C'erano anche le esaltazioni proprie dell'entusiasmo giovanile, come la liberazione sessuale, l'uso e l'abuso di sostanze stupefacenti, che peraltro non sono mai mancate, in una forma o nell'altra, in ogni generazione che si è conquistata una certa libertà di scelta.

Con il senno di poi, è però notevole che il lato più debole di quella grande spinta innovativa è stato forse il cattivo rapporto con il pensiero razionale e con la scienza in particolare. Probabilmente la scienza era vista come uno strumento asservito ai detentori del potere politico, e rinnegarla – e rinnegarne anche i principi – era un'altra forma di ribellione. È un periodo in cui si cercano disperatamente paradigmi alternativi, per quanto improbabili: si accentua l'interesse per le culture esotiche e meno tecnologiche; cresce l'interesse per religioni esotiche, per le culture mistiche, abbondano i viaggi in India, e soprattutto l'astrologia gode di un successo strepitoso.

Come fa sempre, l'astrologia parte da qualche idea più o meno scientifica e poi la coniuga in maniera diretta, attraverso meccanismi fantasiosi, verso le relazioni umane. È vero che il sole e i pianeti, nel loro errare apparente nella volta celeste, sembrano entrare e uscire da alcune costellazioni che invece restano ragionevolmente fisse, come se fossero inchiodate al cielo (e fatto salvo che il cielo, comunque, fa un giro di giostra esattamente ogni giorno[2]), ma aggiungere significati specifici a questi moti apparenti[3], associandoli a caratteristiche ed eventi della vita degli esseri umani, è un passaggio logico assai debole (per non dire nullo) che pure ha riscosso da sempre uno straordinario successo. Persino l'idea di una "nuova era" – quella che nel parlare comune è diventata la non troppo positivamente decantata "New Age", e che negli anni Sessanta era più esplicitamente chiamata "Era dell'Acquario" – si rifà, almeno inizialmente, a una constatazione scientifica: la precessione degli equinozi.

Per spiegarla si usa spesso una consolidata metafora, quella della trottola: di solito, per visualizzare mentalmente i moti di rotazione e rivoluzione della Terra attorno al Sole, si immagina una piccola pallina (la Terra) che ruota su sé stessa mentre gira attorno ad una palla più grande (il Sole). Bene, è sufficiente immaginare che quella pallina, invece che una sfera (che pure è, quasi perfetta, solo un po' schiacciata ai poli) sia una trottola. I fortunati che hanno avuto occasione di vedere una trottola mentre gira su sé stessa avranno anche notato che, mentre ruota, il suo asse di rotazione può cambiare inclinazione, dando alla trottola l'effetto di una sorta di movimento danzante: ecco, quello è il movimento che causa la precessione degli equinozi: una lenta rotazione dell'asse terrestre (o della trottola, se preferite) che, nel caso del nostro pianeta-madre, ha un periodo di circa 25800 anni.



3 *I due punti di incrocio tra la linea rossa (eclittica) e l'equatore celeste (linea celeste) sono i punti equinoziali. Il moto di precessione della Terra li sposta nella volta celeste.*

Ma che cosa c'entrano gli equinozi? Beh, gli equinozi sono punti notevoli, nella meccanica celeste classica: sono quei momenti in cui la trottola – pardon, la Terra – se ne sta dritta come un soldatino lungo il proprio asse, nel suo moto attorno al Sole: tutto il contrario dei solstizi, che invece sono i momenti in cui la Terra è più inclinata, una volta mostrando al Sole soprattutto l'emisfero sud, e sei mesi dopo facendo il contrario con l'emisfero nord. Ma forse è ancora più chiara una visione squisitamente geometrica: ci sono due grandi cerchi immaginari che, pur se immaginari, sono fondamentali nell'astronomia classica: l'equatore celeste, che è essenzialmente la proiezione in cielo dell'equatore terrestre, e l'eclittica, che è il piano fondamentale in cui si muovono i pianeti attorno al sole, e che si chiama così proprio perché è qui che avvengono le eclissi. Bene, gli equinozi sono proprio i punti in cui questi cerchi si toccano.

Si può allora facilmente immaginare una linea celeste che unisca i due punti equinoziali, che, come tutti i punti notevoli dell'astronomia, uno si può immaginare stampati all'infinito sulla volta celeste. Ebbene, anche se quel movimento di precessione della Terra/trottola non cambia nulla per quanto riguarda l'andamento delle nostre tradizionali stagioni dell'anno, sposta comunque questa "linea equinoziale", così che l'apparente "punto equinoziale" si sposta nel cielo attraverso le costellazioni dello Zodiaco, che per propria natura sono quelle in cui avvengono tutti gli eventi astronomici che gli astrologi ritengono notevoli.

[2] Qualche critico osservò sarcasticamente che i versi iniziali di "Aquarius" sembrano annunciare un evento epocale e raro – e in effetti è proprio quella l'intenzione – ma "l'allineamento tra Marte e Giove" tanto raro non è, e "la Luna sta nella settima casa" per due ore ogni giorno.

[3] "Apparenti" nel senso che pianeti, sole e luna non "entrano" ed "escono" dai gruppi di stelle che fanno da sfondo nel cielo: per il resto, il moto lungo la loro orbita è assai reale.

TROPICAL ZODIAC	
ARIES	MAR. 21 - APR. 21
TAURUS	APR. 20 - MAY 20
GEMINI	MAY 21 - JUN. 20
CANCER	JUN. 21 - JUL. 22
LEO	JUL. 23 - AUG. 22
VIRGO	AUG. 23 - SEP. 22
LIBRA	SEP. 23 - OCT. 22
SCORPIO	OCT. 23 - NOV. 21
SAGITTARIUS	NOV. 22 - DEC. 21
CAPRICORN	DEC. 22 - JAN. 19
AQUARIUS	JAN. 20 - FEB. 18
PISCES	FEB. 19 - MAR. 20

ACTUAL ZODIAC (AS OF 2000 AD)	
ARIES	APR. 19 - MAY 13
TAURUS	MAY 14 - JUN. 19
GEMINI	JUN. 20 - JUL. 20
CANCER	JUL. 21 - AUG. 9
LEO	AUG. 10 - SEP. 15
VIRGO	SEP. 16 - OCT. 30
LIBRA	OCT. 31 - NOV. 22
SCORPIO	NOV. 23 - NOV. 29
OPHIUCHUS	NOV. 30 - DEC. 17
SAGITTARIUS	DEC. 18 - JAN. 18
CAPRICORN	JAN. 19 - FEB. 15
AQUARIUS	FEB. 16 - MAR. 11
PISCES	MAR. 12 - APR. 18

4 *Zodiaci a confronto*

Già, lo Zodiaco: astronomi e astrologi, tutto sommato, concordano nel continuare a chiamare così quella fascia di costellazioni in prossimità dell'eclittica, da nove gradi a sud della stessa fino a nove gradi a nord. Oddio, gli astronomi ne fanno davvero poco uso, e non si lamentano neppure troppo del nome: in fondo, se "zodiaco" significa, stringi-stringi, qualcosa tipo "giardino zoologico", riconoscono che le costellazioni che tradizionalmente ci finiscono dentro sono davvero quasi tutte bestiali. Il guaio è che astronomi e astrologi non sono però tanto d'accordo proprio sul concetto di "costellazione": concordano – almeno a grandi linee – che per "costellazione" si debba intendere un'area, una porzione di volta celeste (e non, come molti pensano, un generico gruppetto di stelle unite da linee immaginarie) solo che gli astronomi nel 1930 hanno fatto un gran congresso e si sono messi lì con calma a definire una convenzione che, con ottima precisione, definisce i confini di tutte le ottantotto costellazioni in cui è convenzionalmente divisa la volta celeste. In quella famosa striscia che giace sopra e sotto l'eclittica, lo Zodiaco, ce ne finiscono (parzialmente) tredici, e ovviamente con estensioni diverse tra loro, cosa che comporta che, astronomicamente parlando, il Sole appare transitare sulle costellazioni dello Zodiaco per tempi assai diversi dall'una all'altra. Ad esempio, nel povero Scorpione la nostra stella ci resta a malapena una settimana, dal 23 al 29 Novembre, mentre invece in Ofiuco – bellamente ignorato dagli astrologi – prende casa per ben 18 dì. Ovviamente, per gli astronomi i "segni" (anche se assai difficilmente sentirete un astronomo parlare di "segni") più duraturi sono quelli delle costellazioni più estese, che quindi occupano maggiori pezzi di Zodiaco: Toro e Leone sono "segni" che durano cinque settimane abbondanti, ma cedono il passo alla Vergine, che con fanciullesca innocenza si pappa quasi due mesi su dodici.

Gli astrologi sono assai più tradizionalisti e democratici: per loro i "segni" (che corrispondano realmente o meno alle costellazioni conta poco) sono sempre stati dodici e dodici restano, quelli che conosciamo tutti perché ripetuti fino alla nausea in tutti gli oroscopi pubblicati da tutti i giornali e ricordati anche negli altri media. Sono tutti uguali per dimensione e per durata; insomma, se per fare il giro completo dell'eclittica bisogna percorrere i matematici 360 gradi dell'angolo giro, a ogni segno/costellazione ne spettano 30 esatti, e amen.

Così, ci siamo finalmente avvicinati al punto focale, grazie a un paio di numeri. Il ciclo di precessione, come detto, dura circa 25800 anni[4]; secondo gli astrologi le costellazioni sono 12 e tutte uguali; quindi, i punti equinoziali restano nei segni corrispondenti per 25800/12=2150 anni. Ovviamente, ogni periodo così lungo non può essere altro che una "Era", ben caratterizzata dalla costellazione che ospita il punto equinoziale[5], e infatti si merita l'appellativo di "era astrologica". Se la costellazione in questione fosse il segno dei Pesci, beh, si sarebbe nell'"Era dei Pesci"; e quando questa finisce, visto che i punti equinoziali si muovono in senso retrogrado rispetto al Sole, si entrerebbe nella fatidica "Era dell'Acquario". O nella "New Age", se preferite.

[4] In realtà 25772, secondo i calcoli e misure più recenti e precise.

[5] I lettori più attenti si saranno accorti che di punti equinoziali ce ne sono due, uno "di primavera" e uno "d'autunno", e che sono diametralmente opposti. La definizione di "era astrologica", invece, ne considera solo uno, che la precessione fa vagare tra i segni, scordandosi del gemello opposto e speculare. Quale dei due sarà il prescelto? Beh, un cambio di era è sempre indice di rinascita, e non c'è nulla che ricordi la rinascita più della primavera, ovviamente.

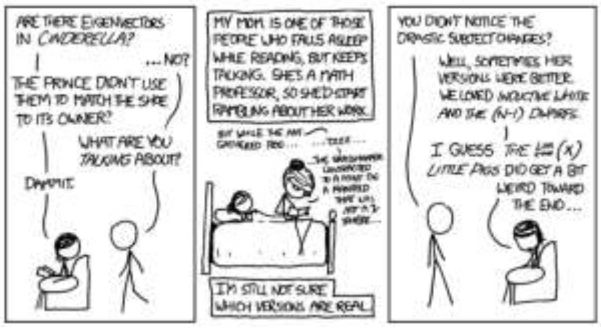

5 *Mitra (o Mithra) uccide il Toro (statuetta romana, adesso al Louvre di Parigi).*

Sembrerebbe che ci siano, una volta tanto, tutte le condizioni al contorno per sapere con certezza in quale era astrologica ci troviamo, visto che abbiamo contezza della posizione dei punti equinoziali e della durata di ogni era, i famosi 2150 anni. Purtroppo, non è proprio così: gli astrologi hanno le loro logiche abbastanza impermeabili alle osservazioni scientifiche, e la domanda "quando inizia l'era dell'Acquario?" è astrologicamente ancora presente e valida. A loro difesa, bisogna riconoscere che il concetto di "era astrologica" è davvero molto antico: alcuni studiosi ipotizzano che la conclusione dell'"Era del Toro" sia in qualche modo in connessione con il culto di Mitra, spesso rappresentato mentre viene sacrificato quell'animale; alcuni famosi esoteristi dicono che in realtà un'era astrologica non inizia quando il punto equinoziale entra nel segno, ma quando raggiunge il centro dello stesso, e così via. Soprattutto, quello che conta è, come capita spesso in questioni astrologiche, non tanto quel che dicono i dati, ma quello che ci si aspetta dagli eventi futuri: le varie "ere" devono portare con sé le caratteristiche del segno, e dopo quella violenta dell'Ariete (quando dominavano popoli guerrieri come Greci e Romani) seguita da quella dei Pesci (con il passaggio del controllo del mondo ai popoli anglosassoni) quella dell'Acquario sarà caratterizzata non dalla volontà di potere di nazioni guidate da uomini, ma dalle virtù e dalle connotazioni più femminili; quindi pace, serenità, armonia, fiducia, eccetera: a ben vedere, proprio quello che raccontano Rado e Ragni nel testo della canzone d'apertura di "Hair". E se questo cambiamento non si nota ancora, dicono alcuni, è solo perché l'era dell'Acquario non è ancora cominciata.

In realtà, gli argomenti trattati finora sono tutti troppo vasti per stare insieme in un solo articolo: conflitti generazionali, razionalità contro misticismo, astronomia a confronto con l'astrologia. Non solo non è possibile aggiungere nulla che non sia stato già detto milioni di volte, è che proprio manca quasi il linguaggio per poter arrivare non a una soluzione, ma anche soltanto a una regolamentazione di massima della dialettica. Alcune piccole cose però sono chiare, anche se minori, e forse vale la pena prenderle in considerazione. Ad esempio, non ha senso tentare di confrontare astrologia e astronomia cercando di convincere chi la segue che l'astrologia è basata su presupposti errati o semplicemente fantasiosi: con ogni probabilità, chi si diletta di astrologia queste cose le sa già. La reale e profondissima differenza tra le due non sta nella maniera diversa di "leggere le stelle", anzi: quella dell'osservazione del cielo è l'unica, tenue caratteristica in comune tra le due materie. Il punto cruciale è che l'astronomia è una scienza, e ha al suo centro i fenomeni, le osservazioni, i dati; insomma parla di come è fatto l'universo. L'astrologia invece usa le stelle quasi solo per accidente, e quindi parla di persone: e alle persone, quasi senza eccezione, interessano più le storie che parlano di loro stesse che le dissertazioni scientifiche. Normalmente, il lettore quadratico medio degli oroscopi non è interessato alle premesse che pure l'astrologo professionista gli propina "*il trigono tra Saturno e Venere fa sì che…*" ma solo alla conclusione divinatoria *"…potresti avere qualche attrito con il tuo partner*", perché, salvo pochi che sono realmente convinti che il tolemaico universo degli oroscopi si preoccupi seriamente dei destini di uomini e donne, quasi tutti sono solo curiosi di sentir parlare di qualcosa che li riguarda direttamente, e il fatto che lo si faccia prendendo spunto dalle stelle è quasi accidentale, tant'è che altre discipline usano al posto delle stelle il volo degli uccelli, la lettura delle viscere di pollo o il modo in cui cadono le foglie.

Resta però l'indiscutibile fatto che quasi ogni giornale ha la rubrica quotidiana di astrologia, non di astronomia; resta il fatto che quasi tutti hanno sentito nominare almeno un paio di volte la parola “ascendente” mentre pochissimi riconoscono la parola “nutazione”, e gli esempi di questo genere potrebbero continuare a lungo. Da bravi seguaci del pensiero scientifico, bisognerebbe quindi limitarsi a constatare questo, che la gente è interessata molto di più a cose che la riguardano direttamente (o che crede che la riguardino direttamente), o quantomeno che la divertono e le generano piacere, di quanto è interessata a conoscenze scientifiche. Anche se le conoscenze scientifiche sono vere, utili, e spesso interessanti quanto e più delle storie inventate di sana pianta.

Una volta che si è fatta pace con questa evidente realtà, si può provare a trarne una lezione, e anche questa è una lezione che molti scienziati e divulgatori hanno già imparato da tempo: le cose di scienza è meglio presentarle rivestendole con delle storie, rendendole affascinanti e umane, insomma solleticando, se non l’esperienza diretta di chi legge, almeno la storia di qualcuno in cui ci si possa identificare. È anche questa una buona scoperta dell’acqua calda, in verità: il metodo viene applicato ormai assai di frequente, quasi come un mantra, tant’è che va di moda chiamarlo all’inglese – *storytelling* – piuttosto che con il tradizionale “narrazione”. La narrazione funziona: è buona e giusta, e riesce ad attrarre anche nuovi lettori che, una volta agganciati dalla storia più o meno curiosa, non di rado rimangono poi affascinati anche dai contenuti scientifici che emergono dal racconto; quindi, lungi da noi l’idea di criticare la narrazione, lo storytelling o comunque la si voglia chiamare[6]. Ma, proprio come succede agli scienziati, aver fatto un progresso non significa quasi mai aver trovato la soluzione definitiva: anche la narrazione ha i suoi difetti ineliminabili e, quel che è peggio, almeno in parte sono ineliminabili persino da quella dottrina più importante e nobile: la didattica.



6 *Lo storytelling visto dal grande xkcd.*

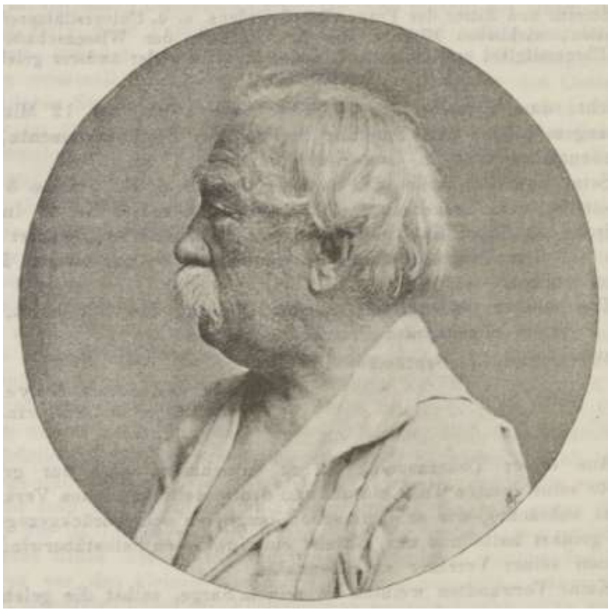
Una delle cose più perniciose degli ultimi tempi, forse anche a causa del proliferare sui social, sembra essere il rifiuto della complessità. Insomma, una certa ritrosia ad accettare il fatto che, fatti salvi pochi e preziosissimi principi, quasi ogni aspetto della vita è complesso in maniera straordinaria, se si prova a guardarlo da vicino. Vale per le cosiddette “scienze dure”, che pure hanno il diritto (razionalmente parlando) di rivendicare un livello di “approssimazione alla verità” maggiore di altre discipline, essenzialmente solo perché di solito trascurano il marasma delle relazioni umane e anche la strabiliante fantasmagoria dei millanta stupefacenti meccanismi degli organismi viventi. E già questo è significativo: insomma, non c’è forse un evidente paradosso nel fatto che siano comunemente considerate “più difficili” quelle scienze che, se hanno fatto storicamente i primi e più significativi progressi, lo hanno fatto perché affrontavano, di fatto, gli eventi più facili da indagare?

L’universo è complesso, e la complessità è faticosa. Così faticosa che molti rinunciano a capire assai presto, rifugiandosi in risposte pronte e facili, pur se niente affatto consolidate dal pensiero logico. La narrazione scientifica usa l’artificio di attirare verso nozioni scientifiche con l’esca degli aspetti umani e curiosi, perché scoprire che un genio della logica che ha partorito un importante teorema è morto in manicomio è più interessante del contenuto del teorema che ha scoperto: e questo approccio semplifica tutto. Passando ad aspetti più seri, anche chi insegna ai bambini è costretto a semplificare, per ragioni più dirette e stringenti: non si può arrivare a padroneggiare la complessità se prima non si costruiscono gli strumenti che ne rendano possibile la comprensione. Questo implica però che tutta la formazione dei giovani deve essere ciclica, più che lineare: dare delle informazioni iniziali, far maturare il senso critico, ritornare sugli stessi concetti e farli

[6] Anche perché saremmo istantaneamente accusati di incoerenza: chi ci conosce sa bene che di “narrazioni” facciamo sempre largo uso. E poi, in fondo, basta leggere quest’articolo…

analizzare con strumenti logici e critici più potenti. E questi cicli andrebbero ripetuti più e più volte, cosa estremamente difficile da fare, non fosse altro che per banale mancanza del tempo a disposizione. Ma non bisognerebbe mai, in ogni caso, dare l'impressione agli studenti che quanto hanno imparato sui manuali, magari a memoria, sia una comprensione vera e totale del soggetto di studio. Sapere che la pioggia cade dalle nuvole non basta affatto a capire come funziona il clima o la meteorologia.

Gli oggetti familiari non sono "semplici" solo perché sono familiari. Non c'è studente che non abbia in tasca un telefono cellulare, che con ogni probabilità è presto diventato anche l'oggetto fisico che meglio conosce al mondo: può usarlo con facilità, perfino con maestria, pur non avendo un'idea chiara di come riescano a funzionare le decine di componenti che occupano quel piccolo parallelepipedo. Se venisse istituita, nella scuola primaria e secondaria, l'ora di "Funzionamento dei Cellulari", probabilmente gli studenti sarebbero inizialmente entusiasti di vedere in palinsesto una materia finalmente utile e sicuramente "facile", salvo poi scoprire che il programma dovrebbe essere un concentrato di teoria e tecnologia da spaventare anche i secchioni della classe. Matematica, fisica, informatica, chimica, elettronica, acustica, ottica e cento altre materie: si potrebbe iniziare la lezione chiedendo a tutti di farsi un selfie, e approfittarne subito dopo per cominciare a dare qualche nozione di ottica geometrica, e raccontare anche dei pionieri della fotografia come Talbot, Daguerre, Niepce. E forse si potrebbe anche leggere in alcune facce la condiscendenza dei più informati, che magari hanno riconosciuto qualcuno dei nomi pronunciati: ma alla fine della lezione bisognerebbe anche far presente alla classe che non basta conoscere pochi nomi e pochi principi per pensare di padroneggiare tutta una nuova branca dell'umano sapere; ad esempio, si potrebbe ricordargli che quei pionieri non sapevano come fare i selfie, anzi: non sapevano neanche come riuscire a fare un semplice ritratto fotografico, nonostante tutta la teoria e tutta la loro ingegnosa pratica. Perché per fare dei ritratti decenti, infatti, si è dovuto aspettare l'arrivo di Petzval.


7 *Józeph Miksa Petzval*

Józeph Miksa Petzval nasce il 6 Gennaio 1807 a Spisská Belá, in quella che al tempo era terra d'Ungheria e oggi invece è Slovacchia. La sua non è una famiglia ricca: per quanto suo padre Ján sia un personaggio notevole nel suo quartiere (maestro di scuola, direttore del coro, appassionato e valente musicista) questo non basta a risolvere i problemi economici di una famiglia abbastanza numerosa – anche se tutto sommato non troppo, per quei tempi e luoghi – in cui Ján e sua moglie Zuzana fanno nascere sette figli: sei di questi sopravvivono alla mortalità infantile, tre sorelle e tre fratelli. Abbastanza curiosamente i tre fratelli nascono tutti e tre nel giorno dell'Epifania, o quasi: Józeph e Otto nascono entrambi il 6 gennaio, l'altro fratello Ján il 7, tanto che in famiglia si riferisce a loro tre come "i Re Magi", e per buon peso all'ultimo nato, Otto, viene aggiunto anche il nome di Baldassarre. Sembra proprio Otto il più dotato per la matematica, e infatti finirà per diventare un professore e autore di importanti libri di testo di matematica; Józeph, invece, apprezzava parecchio il latino e la teologia, e inizialmente vedeva la matematica come fumo negli occhi.


8 *Il Ponte delle Catene di Budapest*

Sembra sia stata tutta colpa di un "*Trattato analitico dei principi della matematica*"[7] se Józeph cambia radicalmente opinione: lo legge quasi per caso durante le vacanze estive, e quando ritorna a scuola è diventato il primo della classe in matematica. Resta il fatto che, dal punto di vista finanziario, la situazione resta non troppo allegra, così, una volta uscito dal ginnasio, Petzval comincia a lavorare come insegnante privato (quel che oggi si direbbe "dando ripetizioni").

Nel 1828 il celebre Ponte delle Catene non esisteva ancora, e Buda e Pest erano ancora a tutti gli effetti due città diverse e separate: Petzval riesce ad ottenere in quell'anno un incarico dall'università di Pest come esperto di prevenzione delle alluvioni e drenaggio, forte della laurea in ingegneria che aveva ottenuto studiando nella stessa accademia (dove, peraltro, era diventato famoso soprattutto per la sua attività di schermidore). Incomincia a tenere corsi fissi all'università nel 1832, fino ad essere nominato professore nel 1835; ma, appena due anni dopo, lascia Pest per Vienna. Probabilmente agli artigiani incaricati di incidere le targhette sulle porte degli uffici fu risparmiato del lavoro, visto che il suo posto all'università di Pest venne affidato a suo fratello Otto, che se lo tenne caro per quasi mezzo secolo. Non accadde qualcosa di troppo diverso neanche a Józeph, che una volta arrivato all'università di Vienna non la lasciò più.

Come matematico, Petzval si interessa quasi esclusivamente di Trasformate di Laplace, diventandone probabilmente il maggior esperto dei suoi tempi, e lo fa senza essere a conoscenza dei lavori del francese dal quale le trasformate hanno preso il nome. Eppure, se si fa una ricerca in rete con chiave "Petzval", è abbastanza difficile che vengano intercettati siti che trattino le trasformate di Laplace. A dire il vero, se si specializza la ricerca restringendola alle sole immagini, il risultato non sarà, come accade spesso, quello di trovarsi lo schermo inondato da ritratti ottocenteschi del soggetto ricercato, ma da una sfilza di immagini di obiettivi fotografici.

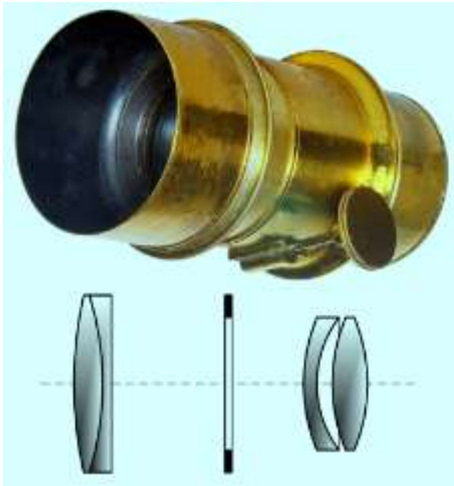
È curiosa, la storia della fotografia: viene naturale pensare che tutta la magia delle immagini catturate e fissate su carta, pellicola o supporti magnetici sia dovuta all'occhio magico, inquietante e trasparente dell'obiettivo, mentre invece nasce essenzialmente come una questione di chimica, e l'obiettivo non è neppure strettamente necessario: ridotta all'osso, tutto scaturisce dal fatto che l'argento si scurisce quando viene colpito dalla luce. Certo, detta così è tutto vergognosamente ipersemplificato, ma è vero che si riescono a fare fotografie anche senza obiettivo, con appena una scatola di cartone, un pezzettino di allumino da forno bucato con un forellino piccolo piccolo, un cartoncino spalmato di sali d'argento e tanta, tanta pazienza[8]. Senza neppure l'ombra di una lente.

Però le lenti aiutano, e aiutano molto: e già i primi pionieri come Daguerre le utilizzano per raccogliere meglio la luce, focalizzare l'immagine, insomma per "fotografare". Ma la rifrazione della luce è cosa meno semplice di quel che sembra a prima vista: l'aberrazione cromatica disturba in maniera devastante, soprattutto quando il soggetto è a breve distanza dall'obiettivo; i tempi di esposizione sono lunghissimi, e che vuole farsi fotografare deve restare fermo per interi minuti, appoggiato a sostegni, e risultando comunque

[7] «Analytische Abhandlung der Anfangsgründe der Mathematik», di Mathias Hauser.

[8] Ando Gilardi, grande fotografo e storico della fotografia, girava per le scuole armato di scatole di scarpe, carta fotografica e rotoli di allumino per cucina, insegnando ai ragazzini cosa sia davvero la fotografia.

immancabilmente un po' sfocato. Poi arriva Józeph, e inventa quella che ancora oggi si chiama "lente di Petzval".


9 *Lente di Petzval*

L'obiettivo che progetta Petzval è il primo ad essere progetto su basi matematiche: la stessa università è interessata al progetto, perché è facile intuirne le applicazioni, e vede il contributo anche dell'esercito austriaco, soprattutto da parte dell'artiglieria, per ragioni non certo nobili ma certo importanti, in un secolo pieno di guerre come l'Ottocento. Petzval si ritrova così a coordinare un gruppo di persone, tra le quali spiccano anche una dozzina di artiglieri. Non ci mette poi troppo tempo a trovare la soluzione ai due problemi più significativi: nel 1840 il suo obiettivo è pronto e quasi totalmente acromatico, cioè privo di aberrazione. In più, è estremamente luminoso, per i suoi tempi: chi si diletta di fotografia probabilmente capisce bene che salto di qualità ci sia stato tra gli obiettivi che usava Daguerre (obiettivo Chevalier Wollaston, f/16) e la luminosità dalla lente di Petzval (f/3). Tra le altre cose, l'alta luminosità è anche la caratteristica che consente una drastica riduzione dei tempi di esposizione: dalla mezz'ora di posa necessaria per fare un ritratto riconoscibile su dagherrotipo si passa a qualche secondo di esposizione. Dopo l'introduzione della lente di Petzval, la fotografia non è più la stessa: il salto di qualità è enorme, lo sviluppo delle tecniche fotografiche di gran lunga accelerato, ed è evidente che, anche se le ottiche con cui milioni di persone si fanno i selfie sono assai diverse dal disegno originale di Petzval, assai difficilmente si può immaginare che sarebbero mai esistite, senza il salto qualitativo generato dal vecchio Józeph. Salto qualitativo davvero impressionante non solo per i miglioramenti tecnici già raccontati, ma anche per un'insita qualità artistica propria di quegli obiettivi, al punto che le maggiori case di macchine fotografiche hanno deciso di tornare a produrre "lenti di Petzval" per le ultratecnologiche macchine reflex digitali di loro produzione.


10 *Lente di Petzval, ancora in pista.*

Nonostante la spinta propulsiva data allo sviluppo della fotografia, il nome di Petzval non è frequentemente ricordato dai non addetti ai lavori: è certo noto agli appassionati, se non altro perché è rimasto legato indissolubilmente alla sua creazione, ma rimane fuori dalle prime sintesi, dai "primi cicli", per così dire, di informazione. Se si dovesse riassumere cosa sia la fotografia in poche battute, si racconterebbero velocemente i principi teorici e un po' di tecnica di base, si citerebbero i primi pionieri, per poi saltare magari agli ultimi stupefacenti sviluppi. Si fa sempre così, per ogni argomento, ed è in fondo giusto che si faccia così: e solo importante garantirsi che questo primo ciclo informativo è molto, molto, meno della proverbiale punta dell'iceberg, e non deve dare l'illusione, a chi lo acquisisce, di aver raggiunto la comprensione piena della materia.

Petzval era un esperto di Trasformate di Laplace, i suoi progressi nello studio di queste avevano superato gli sviluppi di Riemann e quelli di Poincaré, senza contare che, per quanto ne sapeva inizialmente lo stesso Petzval, quelle trasformate avevano tutto il diritto di essere chiamate "trasformate di Petzval", visto che le aveva (ri)scoperte da solo. Eppure, il suo nome non è certo tra i primi che vengano in mente quando si elencano i grandi matematici dell'Ottocento. E forse si meritava di più, visto che perfino la sua creazione migliore, la sua lente, gli provocò malanimo e depressione: firmò inizialmente un accordo con il grande produttore di lenti Voigtländer[9] che però non lo arricchì, perché non ottenne nessun diritto d'autore sulle vendite – straordinariamente ricche – degli obiettivi, che ebbero un successo mondiale. Provò a rifarsi disegnando obiettivi specializzati per i paesaggi, firmando un solido contratto con l'ottico Carl Dietzler, ma nonostante questi riscossero un grande successo e apprezzamento tra scienziati ed esperti, non ebbero un grande successo di vendita, al punto che Dietzler fu costretto a dichiarare bancarotta. Oltre al danno, la beffa: Voigtländer, pur senza aver definito alcun accordo con Petzval, cominciò a produrre e a vendere anche questo tipo di obiettivi, con buon successo.

E tutto questo potrebbe facilmente portarci a concludere che Petzval sia stato un uomo troppo docile, buono e sfortunato, ma anche in questo caso la tendenza alla semplificazione potrebbe tradirci, e costringerci a ricrederci: più ancora della diatriba con Voigtländer, Petzval è ricordato per quella che ebbe con Christian Doppler[10], nella quale non si comportò affatto da gentiluomo. Erano entrambi membri dell'Austriaca Accademia delle Scienze, e Doppler espose all'Accademia le sue convinzioni sulla natura della luce, la somiglianza di comportamento con il suono, fino a concludere che l'effetto che da lui stesso prendeva il nome potesse essere osservato anche su fenomeni astronomici. Petzval si oppose strenuamente a questa ipotesi, e combatté ferocemente, anche in modo palesemente sleale, contro Doppler; e si arrivò al punto che l'Accademia viennese si schierò infine a favore di Petzval, nonostante l'ipotesi di Doppler fosse stata più volte già dimostrata sperimentalmente.

Allora forse non era così buono, si potrebbe concludere: ma ci sarebbe anche da ricordare che era molto apprezzato come insegnante da tutti i suoi studenti. E poi… e poi basta, no? Il mondo è complesso, gli esseri umani sono complessi, l'universo è complesso e non sappiamo neppure se sia conoscibile. L'importante, forse, è provare a continuare a conoscere, ma con la socratica consapevolezza che non conosceremo mai pienamente nulla.

[9] Marchio storico tedesco e tuttora in vita, pur essendo passato di proprietà dalla originale famiglia austriaca a multinazionali quali la Carl Zeiss prima e la giapponese Cosina poi.

[10] "*Il suono del sale*", RM250, Novembre 2019.

2. Problemi

2.1 Pentagoni pentagonati

Abbiamo, negli anni, posto svariati problemi ambientati nel nostro lussureggiante giardino; possiamo finalmente spiegarvene il motivo.

Tanto per cominciare, l'unico di noi tre che ha qualcosa assimilabile ad un giardino è Doc; in realtà è più assimilabile ad un boschetto non manutenuto, ma a lui (e anche a noi) piace così, e la "radura" nel mezzo è stata a lungo usata per tirare con l'arco; quindi, il fatto che vi poniamo dei problemi in giardino nasce dal fatto che vogliamo suscitare la vostra invidia in merito al fatto che in questo c'è molto meno da lavorare rispetto al vostro.

Secondariamente, Rudy è sempre stato affascinato dal confronto tra la delicatezza degli strumenti di precisione necessari per risolvere i problemi di geometria "sul foglio" e la spartana e robusta costruzione di quelli utilizzati per tracciare disegni in giardino: già anche solo riga e compasso (sì, va bene, basta uno spago abbastanza lungo, un peso e un po' di gesso in polvere...) riescono *quasi* a suscitare in Rudy l'intenzione di disegnare qualcosa.

L'ultimo lavoro che i vostri Diserbanti Dilettanti (chiamarli "Giardinieri" è considerato offensivo dalla categoria) si sono ritrovati ad affrontare, riguardava un'aiuola pentagonale convessa ma notevolmente irregolare $A_1A_2A_3A_4A_5$; lo scopo finale, deciso dai nostri coniugi (con l'appoggio di Alice, il che fa maggioranza), era di avere un pentagono (anch'esso irregolare e convesso) $M_1M_2M_3M_4M_5$ tale che i punti M fossero i punti medi dei lati del primo pentagono; questo avrebbe definito un'aiuola pentagonale (quella delle M) con appiccicati sui lati cinque triangoli (i cui lati liberi, due a due, avrebbero formato il pentagono delle A) che sarebbero poi stati coltivati ad essenze varie.

Problema facile, con i raffinati strumenti a vostra disposizione (lo spago di cui sopra); state giustappunto apprestandovi al compito quando dal Reparto Progetti (i coniugi) arriva la voce: "Un momento! State sbagliando tutto!"

Sgomenti, scoprite che in realtà non vi hanno dato il pentagono A, ma il pentagono M: in pratica, voi stavate costruendo un pentagono *dentro* il pentagono dato, ma la richiesta era di costruire (con le regole viste sopra) il pentagono *all'esterno*!

La domanda uno è: si riesce? Cui segue la domanda due, che è: come si fa?

Il vicino curioso, poi, avrebbe un'ulteriore domanda (della quale non ci sogniamo neanche di cercare la soluzione): se anziché un pentagono ho un generico (ma sempre convesso e irregolare) n-agono, per quali valori di n esiste soluzione?

Tranquilli, tanto adesso è tutto gelato e avete tempo per pensarci...

2.2 Somigliano a un paio di cose...

...ma non fidatevi.

Sapete bene che a noi i problemi che si risolvono per tentativi non sono mai piaciuti particolarmente; in alcuni casi, voi avete dato prova della vostra genialità (e, una volta tanto, qui siamo seri nel riconoscerla) trovando dei metodi decisamente interessanti per risolverli in modo ragionevolmente "diretto". Bene, qui a noi la cosa pare quasi impossibile: infatti, abbiamo le soluzioni ma non abbiamo nessuna idea del metodo. "Rudy, stai sospettosamente usando troppi plurali, per i nostri gusti..." Sì, sono due, completamente diversi l'uno dall'altro: siccome non vorremmo deludervi con un problema "brutto" (ossia risolubile solo per tentativi), ve ne diamo due, nella speranza che la quantità sopperisca alla qualità.

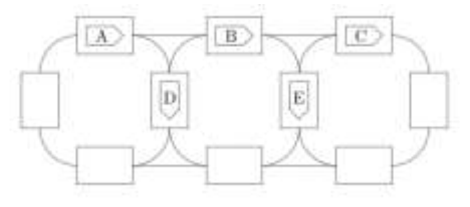
Il ***primo gioco*** ci ricorda vagamente il vecchio problema della ***cassaforte piena di maniglie*** e il gioco del ***Kayles*** (ma, come dicevamo, non fidatevi).

Avete una scacchiera 1×6 (una striscia di sei caselle), e su ogni casella c'è una pedina. Queste pedine sono un po' strane, nel senso che sono bianche da una parte e nere dall'altra; all'inizio del gioco, tutte le pedine sono con il lato nero visibile.

Voi potete fare un solo tipo di mossa: scelta una pedina X, spostarla tra le pedine Y e Z, *shiftando* opportunamente le pedine per liberare lo spazio; nel fare questo, capovolgete le pedine Y e Z in modo tale che mostrino l'altro colore (ma non la X, che resta del colore originale, anche se cambia posto). Scopo del gioco è ottenere una fila di sei pedine bianche. Come fate?

Mentre stavamo per andare in macchina (no, non in stampa: Rudy stava uscendo) ci è venuta in mente una variazione su questo giochino: questa volta sulle pedine ci sono scritti dei numeri, e al momento la disposizione è 043210 (sì, lo zero è ripetuto, e i due zeri sono indistinguibili tra di loro); vostro scopo è ottenere la disposizione 012340; qui non capovolgete le pedine (ma fate lo shift esattamente come sopra), ma avete la limitazione che la pedina con il valore k può spostarsi "saltando" esattamente k altre pedine (e spingendo la k-esima per farsi spazio). ...e se ho più pedine, sempre con lo stesso schema? È possibile?

Vi avevamo promesso un secondo gioco (sì, quello con i numeri era "gratis") che, questa volta, ci ricorda l'altrettanto famoso problema dei due treni che si incontrano su un binario unico ma con a disposizione un binario morto e devono poter proseguire ciascuno la sua corsa: se siete degli archeologi della matematica, lo trovate alla voce "Problemi curiosi e bizzarri – problemi ferroviari" (problema numero 1) del GHERSI – "Matematica dilettevole e curiosa": nella nostra edizione (IV) è a pagina 42. Qui, comunque, ci vuole un disegno.



11 *Meglio sviluppare la teoria, prima.*

Vi trovate all'interno di un centro logistico con le strade molto strette, e i vostri camion (che non sono dotati di retromarcia: e se avete mai provato a fare retromarcia con un autoarticolato, a questo punto tirate un grosso sospiro di sollievo) sono nelle posizioni indicate, con il "muso" dalla parte indicata dalla freccia. Anche se strettissime (ci sta un camion solo per volta), le strade possono essere percorse in entrambi i sensi; il vostro scopo è quello di avere i camion nelle stesse posizioni (attenzione *non necessariamente lo **stesso** camion nella stessa posizione*: possono scambiarsi di posto tra loro, ma devono comunque essere occupate le stesse posizioni di "adesso") ma ***girati dall'altra parte***. I camion possono muoversi solo da una piazzola di sosta (i rettangoli) all'altra, e non possono saltarsi. Come fate? E quanta strada fanno i camion? Se volete generalizzare, potreste provare a "allargare" il centro logistico, sempre con le vie centrali e tutta la via in alto occupate, le due vie ai lati e tutta la riga in basso libere...

Svelti, che i camionisti sono gente notoriamente nervosa.

3. Bungee Jumpers

Un bastone di lunghezza l è rotto in due punti scelti casualmente. Qual è la probabilità che nessuno dei tre pezzi abbia una lunghezza maggiore di un dato numero a?

La soluzione, a "Pagina 46"

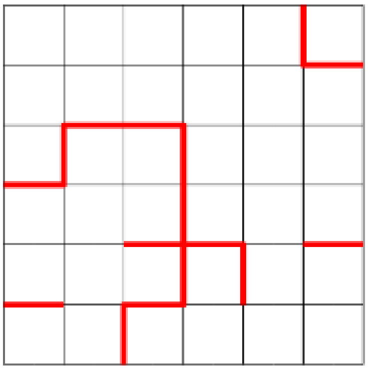
4. Soluzioni e Note

Trecento!

4.1 [297]

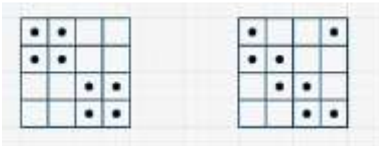
4.1.1 Non soppianterà il Sudoku...

Continuano i contributi per questo problema:



> *Nella figura un "Tower Square": un Tower Square di ordine n è un quadrato nel quale, in ogni riga e ogni colonna, il valore k (con $1 \leq k \leq n$) compare esattamente k volte. Quando due celle hanno in comune un bordo rosso, nelle due celle va scritta la stessa cifra.*

In RM299 abbiamo presentato la soluzione di ***Camillo***, ***Emanuele*** e ***Galluto***. Ma è la soluzione di Emanuele, che ha risvegliato ***Alessandro***, che a dicembre ci scrive:

> (…) Ho però subito un problema con le classi di equivalenza di Emanuele, perché all'inizio c'ero cascato anch'io.
>
> Per affrontare il Tower Square bisognava contare un sacco, e sto ancora contando. Così ho cominciato col problema delle torri: in quanti modi si possono disporre delle torri in una scacchiera in modo che ce siano N in ogni riga e in ogni colonna?
>
> Beh, già a partire da scacchiere 4×4 ci sono soluzioni che non possono essere ottenute con permutazioni di righe e colonne.
>
> Comunque permuti, nel primo diagramma le torri che definiscono un quadrato resteranno ai vertici di un rettangolo. Nel secondo diagramma non c'è nessun rettangolo.
>
> 
>
> E naturalmente il numero di classi aumenta con la dimensione della scacchiera.

Ci ha poi scritto a gennaio con i risultati dei suoi calcoli:

> (…)

Bene, andiamo avanti.

4.2 [298]

4.2.1 Salti "lunghi"

Con la scusa del ritardo abbiamo fatto pasticci anche il mese scorso. Per questo problema:

> *Abbiamo una serie di sassi in linea retta, indicati con P_1, P_2, …, P_n, ma non necessariamente in quest'ordine. Inoltre, abbiamo un punto O da qualche parte sulla linea, nel quale posizioniamo una ranocchia. Seguendo le vostre istruzioni, la rana salta dal punto O al punto Q_1, tale che $OP_1=P_1Q_1$; poi salta oltre il sasso P_2 atterrando nel punto Q_2, tale che $Q_1P_2=P_2Q_2$. E così via sino a saltare il sasso P_n in modo tale che $Q_{n-1}P_n=P_nQ_n$; arrivata a questo punto, si accorge che $Q_n \neq O$. Da qui salta nei punti R_1, R_2, …, R_n con, al primo salto, $Q_nP_1=P_1R_1$, e avanti in questo modo: in pratica, dal punto nel quale si trova salta di nuovo il primo sasso con la stessa regola già applicata, per tutti i sassi della linea, e scopre che $R_n=O$. Per quali valori di n la rana si ferma dopo il "giro delle R" nel punto O di partenza?*

abbiamo pubblicato la soluzione di ***Valter***, ***Galluto*** e ***AAL***, ma ci siamo persi quella di ***Franco57***! Ve la passiamo ora:

> La rana torna sempre al punto di partenza per n dispari e mai per n pari. Una soluzione carina c'è ed è valida non solo su una linea retta ma in generale in uno spazio euclideo di qualsiasi dimensione, anzi uscire dalla dimensione 1 secondo me aiuta nel ragionamento. Ci sono due proprietà elementari alla base della prova della affermazione da dimostrare:
>
> 1) la composizione di due simmetrie puntuali equivale a una traslazione;

2) una traslazione seguita da una simmetria puntale equivale a una simmetria puntuale.

La prima proprietà ci dice che la rana dopo i primi due salti ha subito una traslazione che dipende solo da dove sono posizionati i primi due sassi che salta. Lo stesso per la seconda coppia di sassi da saltare e così via finché c'è almeno ancora una coppia di sassi da saltare.

Se n è pari, saltati tutti i sassi, la rana si troverà traslata della somma vettoriale di tutte queste traslazioni, che dipende solo dalla posizione dei sassi ma non dalla sua posizione di partenza. Siccome per ipotesi del problema non è ritornata al punto di partenza, la traslazione complessiva T non è nulla, perciò se reitera il procedimento k volte si troverà traslata di kT che non sarà mai la trasformazione identica, perciò non tornerà mai al punto di partenza ($T \neq 0 \Rightarrow kT \neq 0$).

Se n è dispari, esaurito il salto di tutte le coppie di sassi – e ciò come si è detto corrisponde ad applicare una traslazione – la rana dovrà ancora saltare l'ultimo, cioè eseguire una simmetria puntuale. Ma la seconda proprietà ci dice che in totale è come se avesse subito una sola riflessione puntuale rispetto ad un punto P che dipende solo dalla posizione dei sassi e non da dove si trovava all'inizio. Beh a questo punto se ripete tutti salti da capo l'effetto finale sarà come subire la stessa simmetria puntuale rispetto a P e si ritroverà perciò al punto di partenza.

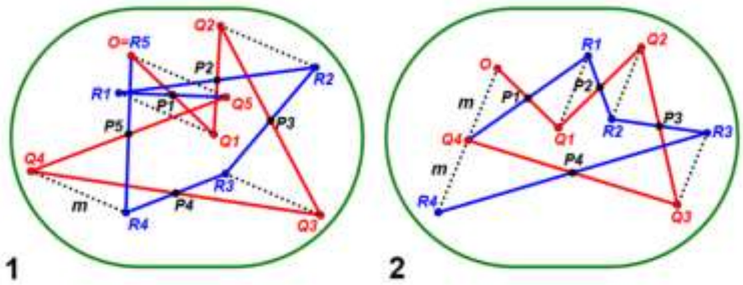
Non rimane che dimostrare le due proprietà.

La prima: una simmetria rispetto a P_1 porta X in $Y = 2P_1 - X$ poiché P_1 deve essere il punto di mezzo tra X e Y, vale a dire $P_1 = (X+Y)/2$. Una seconda simmetria rispetto a P_2 porta Y in $Z = 2P_2 - Y$. Risulta così $Z = 2P_2 - (2P_1 - X) = X + 2(P_1+P_2)$, quindi Z è traslato rispetto a X di $T = 2(P_1+P_2)$.

La seconda: una traslazione T seguita da una simmetria rispetto a P porta un punto X in $Y = 2P - (X+T) = 2(P - T/2) - X$, cioè equivale a una simmetria puntuale rispetto al punto $2(P - T/2)$.

A noi piace tantissimo, è solo finita nel posto sbagliato della mail. Sul problema ci scrive ancora ***trentatre***:

Aggiungo qualche osservazione ai risultati di ***Valter***, ***Galluto*** e ***AAL***, che risolvono il problema per via algebrica in modi sostanzialmente simili.



Il gioco si può estendere ad altre dimensioni.

In fig. 1 un caso con $n = 5$ e i punti <u>posti nel piano</u> (la rana saltella nello stagno). I due cicli di 5 salti sono distinti dal colore. I punti iniziale O e finale $R5$ coincidono, quindi il percorso $O, Q1, \dots Q5, R1, \dots R5$ è chiuso, si ripete identico con altri cicli, e la soluzione è unica.

In fig. 2 un caso con $n = 4$ senza soluzione perché $R4$ non cade in O.

Visto nel piano, l'insieme dei salti risulta più naturale e immediato, e consente inoltre una dimostrazione geometrica più evidente di quella algebrica

- seguendo il tracciato ogni P è centro di due salti che creano dei triangoli uguali, con i lati opposti a P (punteggiati nel disegno) paralleli e di lunghezza uguale che indico con m

- in ogni figura ci sono n lati m che collegano le coppie (Qk, Rk) $k = 1,2,\ldots n$, ma in fig. 2 è aggiunta un m per la coppia $(Q4, O)$; quindi la soluzione esiste per n dispari dove $Rn = O$, ma non per n pari dove Rn è separato da O da un "salto" centrato su Qn di lunghezza $2m$
- inoltre in fig. 1 i punti P, Q, R sono in tutto $3n = 15$ punti, mentre in fig. 2 sono invece $3n + 1 = 13$ perché O è separato dagli altri.

La distanza m costante fra le coppie (Qk, Rk) si può trovare anche nelle dimostrazioni algebriche; in ***Galluto,*** con $n = 3$, è scritta nella forma

$$\boldsymbol{m} = Q1 - R1 = -(Q2 - R2) = Q3 - R3 = 2(P3 - P2 + P1)$$

- applicando agli $\boldsymbol{m}$ in figura il verso $Q \to R$, abbiamo dei vettori con verso alternato ad ogni P, che equivalgono ai segni della formula; ma per risolvere il problema basta verificare la nullità di $\boldsymbol{m} = (Qn, O)$, quindi dei vettori occorre solo il modulo
- la dimostrazione grafica è quindi del tutto equivalente a quella algebrica.

Per passare dal piano al problema originale basta collocare i punti iniziali O e P su una retta, ma i salti si sovrappongono, si perde la visione di insieme e il ricorso all'algebra è obbligato.

L'estensione vale per ogni spazio euclideo a N dimensioni – dati il punto O e un numero dispari n di punti P, con i salti dati da segmenti di retta nel solito modo, dopo due cicli di n salti si torna sempre in O. Per valori finiti di n e N ho verificato la cosa con un programma dove i punti sono definiti in un sistema di N coordinate cartesiane e i salti sono vettori.

E anche qui, complimenti a ***trentatre***, che fa una di quelle cose che al Capo piacciono tantissimo, aumenta il numero di dimensioni per… semplificare! Andiamo ai problemi del mese scorso.

4.3 [299]

4.3.1 Per fortuna, sono onesti...

Un problema di logica! Quanto tempo! Vediamo il testo:

Siamo su una via che ha otto numeri civici, i pari da una parte e i dispari dall'altra e sapete che l'uno è davanti al due, il tre è davanti al quattro, il cinque è davanti al sei e il sette è davanti all'otto, che è anche l'unica casa non abitata della via. Gli altri cottage sono abitati, non nell'ordine, dalle famiglie Aldi, Bruni, Carli, Danieli, Ernesti, Franchi e Giacomi; i nostri – che dicono sempre la verità – fanno le seguenti affermazioni:

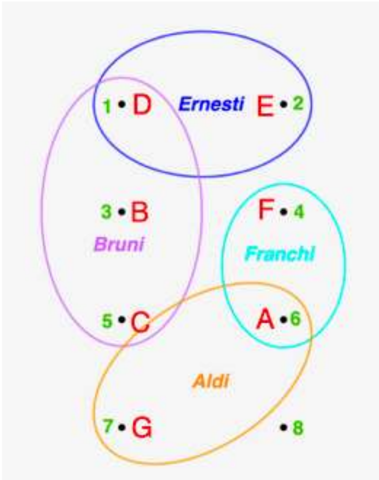
Aldi: "I Giacomi vivono nella casa a fianco a quella opposta alla mia"

Bruni: "I miei vicini sono i Carli e i Danieli"

Ernesti: "I Danieli vivono nella casa di fronte alla mia"

Franchi: "Vivo nella casa di fianco a quella degli Aldi"

Cominciamo con la soluzione di ***Valter***, praticamente senza parole:



Per contrasto vediamo che cosa ha scritto ***Trekker***, che invece ha solo parole:

Dati di partenza:

1. La via ha otto numerici civici, i quattro civici pari da una parte e i quattro civici dispari dall'altra.
2. Il civico 8 non è abitato.
3. Aldi: "I Giacomi vivono nella casa a fianco a quella opposta alla mia".
4. Bruni: "I miei vicini sono i Carli e i Danieli".
5. Ernesti: "I Danieli vivono nella casa di fronte alla mia".
6. Franchi: "Vivo nella casa di fianco a quella degli Aldi".

Per semplicità indico con A la famiglia Aldi, con B la famiglia Bruni, etc. e con V (come vuoto) la famiglia non esistente al civico non abitato:

7. Dalla 4. si deduce che B, C e D abitano sullo stesso lato della strada, diciamo che sia il sinistro.
8. Dalla 6. si deduce che F ed A abitano sullo stesso lato della strada.
9. Dalle 1., 6. e 7. si deduce che A e F abitano sul lato destro della strada.
10. Dalla 3. si deduce che G è sul lato opposto di A
11. Dalle 7. e 10. si deduce che B, C, D e G abitano sul lato sinistro.
12. Dalle 11. e 9. si deduce che A, E, F e V sono sul lato destro.
13. Dalla 4. si deduce che B non abita all'inizio o alla fine della strada.
14. Dalle 4. e 13. si deduce che sul lato sinistro sono quindi possibili solo queste due situazioni:
    a. C B D G (lato sinistro) - ? ? ? ? (lato destro)
    b. D B C G (lato sinistro) - ? ? ? ? (lato destro)
15. Dalla 3. si deduce che A e G "vivono in diagonale". Perciò deve essere:
    c. C B D G (lato sinistro) - ? ? A ? (lato destro)
    d. D B C G (lato sinistro) - ? ? A ? (lato destro)
16. Dalle 5. e 15. si deduce che l'unica scelta possibile è 15.d. Perciò deve essere:
    e. D B C G (lato sinistro) - E ? A ? (lato destro)
17. Dalla 2. deve essere necessariamente:
    f. D B C G (lato sinistro) - E F A V (lato destro).

In altre parole: **Danieli:1; Bruni:3; Carli:5; Giacomi:7; Ernesti:2; Franchi:4; Aldi:6; non abitato:8.**

Ci sembra che la situazione sia abbastanza chiara, ma le spiegazioni migliori le da ***Franco57***:

Schematizzo le case con quadratini all'interno dei quali metto la prima lettera del cognome; i vicini di casa li rappresento in verticale e una casa di fronte all'altra in orizzontale.

Dalla seconda frase – *Bruni: "I miei vicini sono i Carli e i Danieli"* – deduco una situazione del tipo della figura 1 (a parte isometrie).

Mettendo insieme anche la terza affermazione – *Ernesti: "I Danieli vivono nella casa di fronte alla mia"* – lo schema diventa come nella figura 2, sempre a meno di isometrie.

Con la prima affermazione – *Aldi: "I Giacomi vivono nella casa a fianco a quella opposta alla mia"* – le cose si complicano lievemente. Occorre osservare che A non può essere in nessun altra posizione relativa a parte quella indicata dalla figura 3. Infatti se fosse sopra E o sopra D, G dovrebbe coincidere con E o D rispettivamente oppure si creerebbero più di 4 case affiancate, sotto E impossibile perché G coinciderebbe con D o C, sotto C nemmeno perché incompatibile con l'ultima affermazione che vede A e F affiancati, di fronte al posto sotto C no perché G colliderebbe con C.

Infine con l'ultima affermazione – *Franchi: "Vivo nella casa di fianco a quella degli Aldi"* – completo le relazioni reciproche tra le case, che sono mostrate nella figura 4, poiché F non può essere di fronte a G, altrimenti la casa non abitata non potrebbe essere al numero 8.

Fig.1

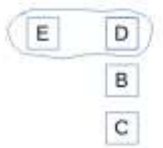


Fig.2

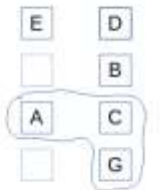


Fig.3

Fig.4

La casa vuota è al numero 8 perciò abbiamo tutti gli abbinamenti per produrre il nostro elenco:

1-D, 2-E, 3-B, 4-F, 5-C, 6-A, 7-G.

Abbiamo ancora tante soluzioni: ***Salvatore***, ***Camillo***, ***trentatre***, ***Galluto***, ma siamo un po' in ritardo, così glissiamo per questa volta e passiamo al secondo problema di dicembre.

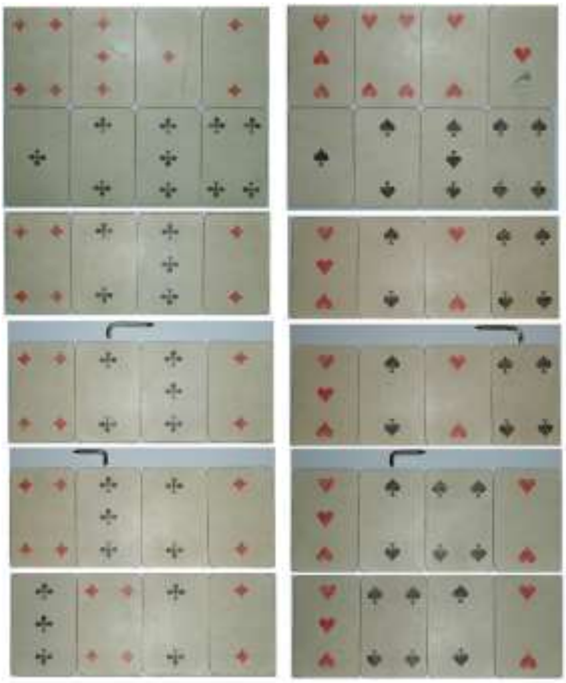
4.3.2 Un gioco di carte

Con la scusa del ritardo abbiamo fatto pasticci anche il mese scorso. Per questo problema:

Avete, in linea sul tavolo, tre carte che da sinistra a destra riportano ben visibili i numeri 1, 2, 3 e 4; sapete, inoltre, che sul retro di queste carte ci sono i numeri 1, 2, 3 e 4, ma i due numeri sono diversi tra loro. Mentre non guardate, due delle carte vengono girate, quindi un'altra (diversa dalle due appena girate) è spostata in una posizione differente e quindi anche la carta restante viene spostata in una posizione differente. A questo punto, le carte mostrano i valori 3, 4, 2 e 2 da sinistra a destra. Che numeri ci sono su ogni carta?

Non resistiamo a darvi per prima la soluzione di ***Camillo***, che è praticamente senza parole:

Vi sono 2 soluzioni di cui vi allego le fotografie (Ibsen docet).



A noi sembrava già un buon inizio, poi ci ha scritto ***Valter***:

Partenza:

Fronte: 1 2 3 4

Retro : 4 3 1 2

Giro l'1 e il 4:

Fronte: 4 2 3 2

Retro : 1 3 1 4

Sposto il 2 dalla seconda alla terza posizione:

Fronte: 4 3 2 2

Retro : 1 1 3 4

Sposto il 3 in prima posizione:

Fronte: 3 4 2 2

Retro : 1 1 3 4

Beh, tutte possibili soluzioni, sembrerebbe. Vediamo la versione di ***Trekker***:

Indico con 1' il numero sul retro della carta che riporta 1 in fronte (naturalmente 1' può essere solo 2 o 3 o 4), con 2' il numero sul retro della carta che riporta 2 in fronte, etc.

La carta con il numero 1 è stata sicuramente girata, visto che non ci sono carte con il numero 1 alla fine.

La carta con il numero 2 è stata sicuramente spostata, visto che ci sono due carte con il numero 2 alla fine.

Ci sono quindi due casi:

girata la coppia (1,3) e spostate le carte della coppia (2,4)

oppure

girata la coppia (1,4) e spostate le carte della coppia (2,3)

Se fosse stata girata la coppia (1,3) avremmo:

(1,2,3,4) → (1',2,3',4). Dalla quaterna finale (3,4,2,2) deduciamo che (1', 3') può solo essere (3,2). Quindi (1',2,3',4)=(3,2,2,4) e la quaterna finale (3,4,2,2) si ottiene spostando il 4 in seconda posizione a sinistra e il 2-fronte in coda.

Ricordando che sul retro non ci può essere lo stesso numero della fronte e che vanno usati tutti i numeri ne segue **(1', 2', 3', 4') = (3, 4, 2, 1).**

Se fosse stata girata la coppia (1,4) avremmo:

(1,2,3,4) → (1',2,3,4'). Dalla quaterna finale (3,4,2,2) deduciamo che (1', 4') può solo essere (4, 2).

Quindi (1',2,3,4')=(4,2,3,2) e la quaterna finale (3,4,2,2) si ottiene spostando il 3 in testa e il 2-fronte in coda.

Ricordando che sul retro non ci può essere lo stesso numero della fronte e che vanno usati tutti i numeri ne segue **(1', 2', 3', 4') = (4, 3, 1, 2).**

Forse avrete notato che le soluzioni tendono a convergere, che è una cosa che non sempre ci fa piacere, visto che risultati diversi di solito provengono da diversi approcci. Vediamo adesso la versione di ***Franco57***:

Si possono fare alcune deduzioni:

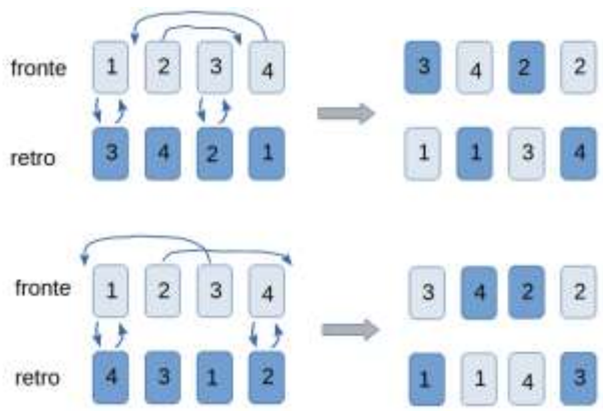
a) la seconda carta non viene girata altrimenti sparirebbe il 2 e rimarrebbe da girare una sola carta, quindi sarebbe impossibile produrre alla fine due volte il 2;

b) la prima carta viene girata, altrimenti alla fine comparirebbe il numero 1

c) dietro la prima carta non ci può essere il 2 altrimenti una volta girata ci sarebbero già gli elementi della situazione finale, cioè due 2 un 3 e un 4, ma poi occorre girare o la terza o la quarta. Dietro la terza non ci può essere lo 1 altrimenti comparirebbe alla fine, né il 2 che è già sotto la prima, né il 3, ma col 4, ultima possibilità, girandola si formerebbero due 4. Del tutto analogo il ragionamento se si girasse la quarta.

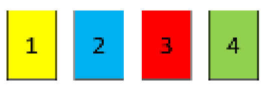
A questo punto si aprono due strade a seconda che dietro la prima carta ci sia un 3 o un 4. Il problema è che possono portare a soluzioni finali differenti, quindi nessuna soluzione unica!

Eccole illustrate graficamente:



Vediamo ancora la soluzione di ***Galluto***:

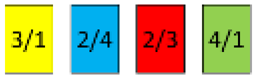
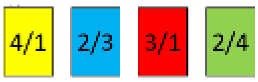
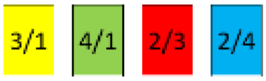
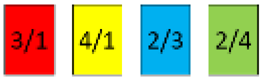
Per essere chiaro (si fa per dire…) nell'esposizione, identifico le QUATTRO carte con colori differenti; la situazione iniziale è la seguente:



Poiché nella situazione finale non c'è l'1 e ci sono due 2, la carta gialla è una delle due che vengono girate, e quella blu una di quelle che vengono spostate.

Nell'altra faccia della carta gialla non può esserci il secondo 2, altrimenti, dovendo girare una sola tra la carta rossa e quella verde, alla fine avrei o due 3 o due 4, oppure ricomparirebbe un 1.

E quindi l'altra faccia della carta gialla contiene o il secondo 3 o il secondo 4; l'altra carta che viene girata è rispettivamente quella con il primo 3 o il primo 4 (in modo da non averne due), e la sua seconda faccia deve contenere il secondo 2.

> A questo punto sarebbe anche chiaro cosa ci sarebbe nella seconda faccia delle due carte non girate: sotto la blu ci sarebbe rispettivamente il secondo 4 o il secondo 3, e sotto la rossa/verde ci sarebbe il secondo 1.
>
> Questa sarebbe la situazione, nei due casi, dopo la “girata” delle due carte (il primo numero indica la faccia in vista della carta):
>
> 
>
>
> oppure:
>
> 
>
>
> E questa sarebbe la situazione finale nei due casi, dopo gli spostamenti:
>
> 
>
>
> oppure:
>
> 
>
>
> Insomma, il risultato sarebbe lo stesso: la prima carta da sinistra avrebbe 3/1, la seconda 4/1, … ma le carte non sarebbero le stesse nei due casi; per cui la domanda è: questo confuta il teorema di unicità di Alberto R.???

I teoremi di ***Alberto R***. sui problemi di RM sono notoriamente generati per ogni problema, quindi non si possono confutare usando altri problemi… però è bello vedere che qualcuno lo cita. E ci fermiamo qui. Il nuovo anno comincia con i soliti ritardi, ma gli anni cominciano a sentirsi. In trecento numeri il Capo ha proposto 637 problemi (compresi i due che trovate in questo numero), di questi solo sette sono rimasti senza soluzione:

> RM157 p12, Tre per due
>
> RM172 p12, Fred si sta montando la testa
>
> RM184 p11, Tiro di campagna
>
> RM193 p12, Si gioca con il robottino!
>
> RM196 p11, Mezzo e un problema di fisica
>
> RM198 p16, Niente arco, questa volta
>
> RM214 p9, Numeri Esteticamente Validi

Quindi se siete solutori affezionati, è tempo di far felice il Capo e risolvere i poveri problemi dimenticati. Per il resto continuiamo come al solito, venticinque anni non sono niente. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

A lettera diversa corrisponde cifra diversa, ma nulla è dato sapere sui punti (tranne il fatto che quelli più alla sinistra di ogni numero non sono degli zeri: insomma, non stiamo barando). Trovate quanto vale DUE.

```
      D U E x
      D U E
    ---------
    • • • E
    • • U
• • • D
-------------
• • • • • •
```

> *L’ultima cifra del numero in questione, E, è tale che* E^2 *termina in E. Quindi E può valere solo* 0, 1, 5 *o* 6*. Non può essere zero visto che DUE×E è diverso da zero (e per lo stesso motivo non potranno essere zero né U né D). Non può neppure essere* 1*, visto che moltiplicato per DUE dà un numero di quattro cifre. E non può essere neppure* 5*, visto che DUE×E, DUE×U e DUE×D terminano in tre cifre diverse tra loro, come si vede*

dallo sviluppo dei prodotti e i multipli di cinque terminano per zero o per cinque. Quindi, E=6.

Allora, 6×*U termina in U e* 6×*D termina in D, e quindi U e D possono essere solo* 2, 4 *o* 8 *(nessuno di loro può essere* 6 *visto che devono assumere valori diversi da E). Siccome DUE×U e DUE×D sono numeri rispettivamente di tre e quattro cifre, deve essere D*=4 *e U*=2.

E il numero cercato è 426.

6. Zugzwang!

Sapete tutti che a Rudy non piace "giocare i giochi": preferisce ampiamente studiarne le regole e (se riesce a trovarle) le strategie, e per lui un gioco perde di interesse nel momento stesso nel quale sia completamente analizzato. Certo, ogni tanto saltano fuori delle piacevoli quanto interessanti sorprese.

Ma prima di cominciare, un paio di premesse:

1. Usiamo il nome "americano": poi, se lo chiamate filetto, tria, tris o come vi pare, fate pure l'opportuna sostituzione; anche perché...
2. ...il nome non ci piace: proponiamo di usare sempre quello dell'espansione. Che è l'ultima parola dell'ultima frase del pezzo che segue.

6.1 Ultimate TicTacToe

Conoscete tutti il gioco originale; è quello fatto su una griglia tre per tre, a crocine e cerchietti, è completamente analizzato e l'unica cosa interessante da farci era discutere su come effettivamente si chiamasse. Questo, almeno sin quando un gruppo di studentelli non si è ritrovato, nel 2013, ad un allenamento per le Olimpiadi di Matematica.

Per prima cosa, dovete disegnare la scacchiera: vi consigliamo un foglio (almeno) A5, e dovete dotarvi di matita: disegnate uno schema per il TicTacToe "grande".

"...problemi di vista, Rudy?" Sì, ma non c'entrano niente: all'interno di ogni casella del gioco grande, disegnate uno schema per il TicTacToe più piccolo. Totale, nove schemi piccoli.

E poi cominciate a giocare: nel senso che il primo giocatore sceglie uno schema piccolo e fa la sua mossa.

Poi tocca all'altro giocatore, e qui arriva la regola importante: *deve giocare nel gioco piccolo posizionato, nel gioco grande, nella cella corrispondente alla giocata nel gioco piccolo del giocatore precedente*. La cosa sembra complicata, ma se ci pensate un attimo non è difficile (la regola prosegue dopo il prossimo paragrafo).

Quando un giocatore vince un gioco piccolo, la cella corrispondente del gioco grande viene marcata con il suo simbolo; scopo del gioco è vincere il gioco grande.

(Prosegue dal paragrafo sopra) Se siete costretti a giocare in una cella del gioco grande già vinta da qualcuno, potete giocare dove vi pare.

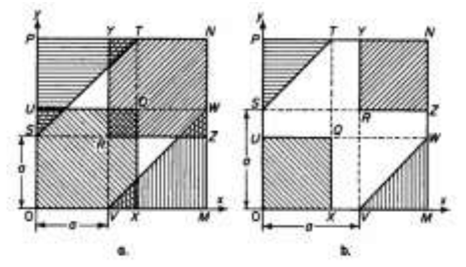
Carino, vero? E adesso state pensando tutti alla stessa cosa.

"Ma Rudy, perché fermarsi al secondo livello? Potremmo mettere altri giochi piccolissimi nelle celle piccole, e..." Certo. Ma in questo caso, vi consiglio di usare un foglio A3 e di chiamarlo ***MongeSponge***...

7. Pagina 46

Siano A l'estremo sinistro del bastone, K e L i due punti di rottura; definiamo $AK=x$ e $AL=y$. In un sistema di assi cartesiani con origine in O, l'insieme di tutti i risultati possibili è l'insieme dei punti all'interno o sul bordo di un quadrato $OMNP$ di lato l; la probabilità che (x,y) giaccia in una certa regione R di questo quadrato è data dal rapporto tra l'area della regione R e l'area dell'intero quadrato. Determiniamo quali parti del quadrato formano l'insieme dei risultati sfavorevoli dell'esperimento.

Per prima cosa, è evidente che per tutti i valori $a<l/3$ tutti i risultati sono sfavorevoli: almeno uno dei pezzi risultanti deve avere lunghezza maggiore o uguale a $l/3$. Consideriamo separatamente i casi (a) $l/3 \leq a \leq l/2$ e (b) $a \geq l/2$.



12 *I due casi possibili.*

Per soddisfare la condizione che il pezzo più a sinistra ottenuto dal bastone abbia lunghezza maggiore di a è necessario e sufficiente che sia $x>a$, $y>a$; i punti che soddisfano queste condizioni sono, nelle due figure, i quadrati *YRZN*, di lato $l–a$. Nello stesso modo, affinché il pezzo più alla destra abbia una lunghezza maggiore di a, è necessario e sufficiente che $x<1–a$, $y<1–a$; i punti che soddisfano queste condizioni sono quelli del quadrato *XQUO* di lato $l–a$. Infine, la parte intermedia del bastone avrà una lunghezza maggiore di a se e solo se è $x–y>a$ oppure $y–x>a$; la prima condizione è soddisfatta dai punti del triangolo *VMW* e la seconda dai punti del triangolo *SPT*.

Ora non ci resta che calcolare la superficie delle aree non ombreggiate dei quadrati. Nel caso (a), quest'area consiste di due triangoli isosceli rettangoli i cui cateti hanno lunghezza $PS–US–YT=l–a–2(l–2a)=3a–l$; questo significa che le due aree non tratteggiate hanno area $2 \cdot (1/2)(3a–l)^2=(3a–l)^2$. Nel caso (b), dobbiamo sottrarre dall'area del quadrato le aree dei due quadrati di larghezza $l–a$ e dei due triangoli isosceli rettangoli di cateti $l–a$, e quindi l'area della parte non tratteggiata del caso (b) vale $l^2–3(l–a)^2$.

Ricordando che l'area dell'intero quadrato è l^2, la soluzione è rappresentata dai tre casi:

$$
\begin{array}{ccc}
0 & \text{se} & 0 \leq a < l/3 \\
\left(\frac{3a}{l}-1\right)^2 & \text{se} & l/3 \leq a \leq l/2 \\
1-3\left(1-\frac{a}{l}\right)^2 & \text{se} & l/2 \leq a \leq l
\end{array}
$$

8. Paraphernalia Mathematica

Ad alcuni di voi è probabilmente capitato di sentire Doc elogiare la (citiamo a memoria) "incredibile efficacia della matematica"; a noi, quello che pare incredibile è che anche quando viene presa a schiaffi da fisici e ingegneri con le loro abituali approssimazioni mantiene intatta tutta la sua efficienza.

8.1 ...tanto, prima o poi cade...

Convenzionalmente, lo "spazio" comincia a cento chilometri dalla superficie terrestre, ma l'atmosfera si estende ben oltre questa distanza, e tende a rallentare per attrito qualunque cosa venga messa in orbita: anche la Stazione Spaziale Internazionale[11], con un raggio dell'orbita tra i 413 e i 422 chilometri sul livello (medio) del mare, deve, ogni tanto, "accendere i motori" per compensare la quota persa per attrito. Nostro scopo, questa volta, è fare qualche calcolo in merito e vedere se c'è qualcosa di strano. (Spoiler: sì.)

La forza di attrito ha direzione opposta al vettore velocità del satellite, e possiamo scriverla come:

$$F = -kv$$

dove il fattore k è positivo e dipende dalla velocità v del satellite, dalla sezione trasversale S (perpendicolare alla direzione del moto) e dalla densità ρ dell'aria; con buona approssimazione, possiamo prendere $k=vS\rho$ e fare qualche conto.

Supponiamo ad esempio un satellite di massa $m=100\ kg$, sferico con sezione $S=1\ m^2$ orbitante a $h=160\ km$ di altezza, dove la densità dell'aria è $\rho=10^{-9}\ kg/m^3$; l'accelerazione causata dalla resistenza dell'aria vale:

$$a=\frac{kv}{m}\approx\frac{S\rho v^2}{m}\approx 6.4\cdot 10^{-4}\,m/s^2$$

La forza attrattiva della Terra sul satellite vale:

$$F=G\frac{Mm}{(R+h)^2}$$

che, sostituendo gli opportuni valori ($G=6.673\cdot 10^{-11}\ N\cdot m^2/kg^2$, $M=5.976\cdot 10^{24}\ kg$ e $R=6371\ km$) ci fornisce un valore per l'attrazione di gravità a quella quota di:

$$a_T=G\frac{M}{(R+h)^2}\approx 9.35\,m/s^2$$

Ossia, l'attrito è approssimativamente un quindicimillesimo dell'attrazione gravitazionale.

Tempo fa, un amico d'infanzia di Rudy è stato lanciato in orbita[12] sotto forma di una palla del diametro di 58 *cm* e una massa di 83.6 *kg*; il razzo che lo ha portato su (il satellite non aveva sistemi di spinta o di manovra) era più grosso; sembra quindi ovvio che il vettore debba cominciare a rallentare, trovarsi sempre "dietro" al satellite e cadere sulla Terra molto prima di lui, visto che il suo S è maggiore; le osservazioni post-lancio, invece, hanno mostrato che dopo lo sgancio il vettore proseguiva e si posizionava *davanti* al satellite.

Se volete fare il conto basandovi sulle leggi di Newton, il nostro consiglio è di usare almeno un foglio di calcolo, se non un programma dedicato, visto che la resistenza dell'aria dipende dalla velocità dell'oggetto; lavorare però sulle *energie* semplifica notevolmente il lavoro.

In assenza di resistenza dell'aria, l'energia totale del satellite E è *costante*, e vale:

$$E=\frac{mv^2}{2}+\left(-G\frac{Mm}{r}\right)$$

---

[11] È incredibile la quantità di cose interessanti ma assolutamente inutili che si scoprono cercando un dato; mentre cercavamo di recuperare i parametri orbitali, abbiamo scoperto che il *Call ID* della ISS è "*Alpha Station*". Sapevatelo, se doveste telefonarle.

[12] Tranquilli: si chiamava *Sputnik*. Sei mesi più giovane di Rudy.

dove l'espressione tra parentesi è l'energia potenziale del satellite alla distanza r dal centro della Terra; quando è presente una resistenza dell'aria, l'energia totale non è più costante, ma funzione del tempo, ossia $E=E(t)$, e la variazione dell'energia (cinetica) ΔE durante un piccolo spostamento Δs è pari al lavoro di resistenza svolto dall'aria, ossia $\Delta E=W=F\Delta s$, dove $\Delta s=v\cdot\Delta t$; sostituendo l'espressione della forza ottenuta precedentemente, otteniamo:

$$\frac{\Delta E}{\Delta t}=-kv^2$$

Se il nostro satellite è stato posto in un'orbita di raggio r, in assenza di resistenza dell'aria la velocità del satellite può essere ottenuta eguagliando la forza centripeta (necessaria per avere un moto circolare) alla forza gravitazionale, ossia:

$$m\frac{v^2}{r}=G\frac{Mm}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v^2=G\frac{M}{r}$$

Ma l'influenza dell'atmosfera porta a una distorsione della traiettoria circolare, trasformandola in una spirale; se la traiettoria non differisce molto da un cerchio, la relazione tra $v(t)$ e $r(t)$ resta valida, anche se v e r adesso sono funzioni del tempo.

Sostituendo l'espressione dell'energia in quest'ultima relazione, possiamo scrivere l'energia potenziale del satellite nella forma:

$$U=-G\frac{Mm}{r}=-mv^2$$

e quindi possiamo scrivere l'energia totale del sistema nella forma:

$$E=\frac{mv^2}{2}+\left(-mv^2\right)=-\frac{mv^2}{2}$$

Calcoliamo ora la variazione dell'energia totale a fronte di una piccola variazione della velocità;

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{-m(v+\Delta v)^2}{2}-\left(-\frac{mv^2}{2}\right)\\ &= \frac{-2mv\Delta v}{2}-\frac{m\Delta v^2}{2}\\ &\approx -mv\Delta v\end{aligned}$$

Dove abbiamo ignorato il termine incrementale di secondo grado, essendo molto piccolo già il termine di primo grado. Dividendo entrambi i termini per un intervallo temporale (piccolo) Δt,

$$\frac{\Delta E}{\Delta t}=-mv\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Ma avevamo già trovato un'espressione per la variazione dell'energia nell'intervallo di tempo; uguagliandole, otteniamo la variazione della velocità del satellite:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{k}{m}v$$

Quindi, tra satellite e vettore, "va più svelto" quello che ha il k maggiore (e quindi maggiore attrito con la poca aria restante), e il vettore ne ha uno *decisamente* grosso. Quindi, "sorpassa" il satellite.

"Rudy, ma il vettore ha anche una massa più grande, che è a denominatore..." Vero, ma non poi così tanto: considerate che il satellite è pieno di ferraglia elettronica, quindi molto pesante, mentre il vettore ormai è vuoto, avendo bruciato l'intera dotazione di carburante e comburente...

E questo era il primo fatto strano. Il secondo è quasi una conseguenza.

Dicevamo che la resistenza dell'aria fa cadere il satellite; la sua velocità (e, di conseguenza, la sua energia cinetica) aumentano, e diminuisce la sua energia potenziale; ma da quanto abbiamo visto sopra, anche la sua energia totale diminuisce, e quindi la diminuzione dell'energia potenziale avviene più rapidamente dell'aumento dell'energia cinetica dovuta alla caduta.

Quindi, per quanto strano possa sembrare, l'interazione con l'atmosfera causa un'accelerazione ulteriore rispetto alla caduta; per questo motivo le velocità di rientro dei satelliti sono sempre molto più alte di quanto ci si aspetti.

Ora, al prossimo lancio di satellite "non motorizzato", potreste anche scommettere qualche caffè...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms