Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 299 – Dicembre 2023 – Anno Venticinquesimo

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell’altro millennio da

Rudy d’Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM289 ha diffuso 3’375 copie e il 26/04/2023 per Google eravamo in 7’920 pagine.

La ricerca di “Math Art” dà, tra le altre immagini, anche questa, alla voce “Fractl Art Contest” (sul sito Mental Floss), ma la pagina risulta irraggiungibile. Su, chi ha tolto il tappo a Internet?

1. Geometrie diverse

*"Stat rosa pristina nomine,
nomina nuda tenemus."*

(Bernardo di Cluny, "*De contemptu mundi*", XII secolo (ma ovviamente anche Umberto Eco, "*Il nome della rosa*", 1980.)).

Felice Casorati nasce a Novara il 4 Dicembre 1883. Non è davvero strano che sia nato nel capoluogo di provincia più orientale del Piemonte: volendo dare fiducia ai siti che forniscono le migliori informazioni sulla dislocazione geografica dei cognomi italiani[1], le famiglie che portano il cognome Casorati sono relativamente poche (meno di 140, sembrerebbe) e quasi tutte situate in quella zona a cavallo tra Piemonte e Lombardia che si adagia lungo le sponde del Ticino, tra Novara e Pavia; con una buona prevalenza, comunque, verso la cittadina lombarda.


1 *Felice Casorati*

Nonostante la precisa relazione tra il suo nome e la sua zona di nascita, Felice Casorati è fin dalla nascita destinato a continui trasferimenti: il padre, Francesco Casorati, è un militare di professione e come tale destinato a cambiare spesso indirizzo di residenza, portandosi ovviamente appresso la moglie Carolina, le figlie Giuseppina ed Elvira e il piccolo Felice. Si troverà infatti a guadagnarsi lo stipendio di ufficiale di carriera in diverse parti di Italia: Milano (tutto sommato non troppo lontana) ma poi anche Reggio Emilia, e poi addirittura Sassari, Napoli, Verona. La prima lunga permanenza è in quel di Padova, dove Felice frequenterà prima il liceo e poi l'università.

La leggenda vuole che sia proprio aiutando il padre Francesco che Felice scopre, poco più che bambino, quale sarà la passione della sua vita: un po' per gioco e un po' per seria intenzione di essere d'aiuto, lo assiste nell'affrescare un fabbricato destinato agli ufficiali della caserma dove il padre prestava servizio. Non è solo leggenda, invece, che nel 1901, appena diciottenne, è costretto a un periodo di ritiro sui Colli Euganei, per rimettersi da un esaurimento nervoso: è qui che la passione per la pittura comincia a prendere solida forma, grazie alla sua frequentazione dello studio del pittore Giovanni Vianello. Passione che continua a crescere insieme a lui, al punto che durante gli studi di giurisprudenza, intrapresi per dare soddisfazione alle ambizioni del genitore che lo voleva avvocato, sente farsi sempre più forte la sua pulsione verso l'arte.

Il 1907 è per Casorati un anno cruciale: è un giovanotto serio e ubbidiente, e la sua passione non arriva al punto di impedirgli di arrivare alla laurea in legge che suo padre auspicava per lui. Ma non c'è dubbio che Felice sa bene come fare a soddisfare, oltre ai desideri del genitore, anche i suoi propri: si laurea, ma ha già deciso che sarà un pittore. E infatti, con un coraggio notevole per un ragazzo di ventitré anni, invia un suo quadro alla più prestigiosa delle manifestazioni artistiche dell'epoca, la Biennale di Venezia.

[1] Come, ad esempio https://www.mappadeicognomi.it/, o anche https://www.cognomix.it/mappe-dei-cognomi-italiani.

2 *"Ritratto di signora", 1907.*

Si tratta del primo di diversi ritratti della sorella Elvira (citato spesso anche con il titolo "*Ritratto di signora*") che eseguirà durante la sua vita, e riscuote subito un ottimo successo di critica: viene accettato dalla Biennale ed esposto, e il mondo dell'arte italiano celebre l'arrivo sulla scena di un nuovo giovane pittore, sul quale si appuntano subito grandi speranze.

La famiglia Casorati si trasferisce a Napoli, e Felice continua il suo percorso di maturazione artistico: ha ormai optato per la pittura, preferita all'altra sua grande passione, la musica. Si ispira dapprima alle opere di Pieter Bruegel il Vecchio, ma poi a Venezia – dove la Biennale continuerà a presentare le sue opere negli anni successivi – incontra l'arte di Gustav Klimt, che lo influenzerà sensibilmente. Nel frattempo, si muove ancora, trasferendosi per tre anni a Verona.

Come sempre accade, le guerre sconvolgono la cronaca, la storia, la famiglia e la vita: Felice nel 1915 si arruola, e per qualche anno farà il soldato anziché il pittore; ma non sarà solo la sua produzione a risentirne, perché il padre Francesco muore nel 1917, l'anno più crudele per le sorti italiane nella Prima Guerra Mondiale. Tutta la famiglia Casorati, o per meglio dire quel che ne resta, si trasferisce a Torino, e anche per Felice questo trasferimento sarà quello definitivo. Torino sarà la sua sede operativa, la sua città d'adozione e il suo centro culturale fino alla sua morte, nel marzo 1963: il pittore diventa una stella di prima grandezza nell'élite culturale della città, e ricambierà l'affetto della metropoli torinese affaccendandosi in molti aspetti della sua vita culturale. Conosce Piero Gobetti, ed entra a far parte del suo gruppo "Rivoluzione Liberale", cosa che gli procurerà qualche giorno di carcere impostogli dal regime fascista; apre la "Scuola Casorati" per giovani artisti; fonda società di belle arti, contribuisce al recupero del Teatro di Torino: diventa insomma una figura centrale della cultura della capitale sabauda.

Nel contempo, cresce la sua notorietà nazionale e internazionale: Margherita Sarfatti, la musa protettrice delle arti italiane che era stata amante e mecenate del giovane Benito Mussolini, lo vuole nelle sue grandiose mostre dedicate al Novecento Italiano, nonostante la sua nota scarsa simpatia per il regime; vince il Gran Premio di Pittura alla Biennale del 1938, le sue opere sono richieste per essere esposte all'estero, in Francia, negli USA, ovunque. E forse proprio per questa sua fama internazionale si ritrova a pagare uno scotto professionale imprevisto. La sua vita privata sta attraversando un bel periodo: nel 1930 si è sposato con Daphne Maugham[2], sua allieva allo Studio Casorati, e nel 1934 le nozze saranno allietate dalla nascita di un figlio, al quale viene naturalmente imposto il nome di Francesco. Nel 1931 Monaco di Baviera ospita una grandiosa mostra d'arte nel suo Glaspalast, il "palazzo di vetro" costruito sull'esempio dell'ancor più famoso Crystal Palace di Londra: vi sono esposte quasi tremila opere dei maggiori artisti contemporanei. Felice Casorati è presente con cinque quadri, uno dei quali è una grande opera, "*Lo studio*", dipinto nel 1923, che l'artista ritiene il suo lavoro migliore. In realtà, lo considera tale perché la giudica particolarmente rappresentativa del suo schema mentale, della sua visione artistica che, non a caso, molti critici definiscono spesso con l'aggettivo

[2] Di quattro anni più giovane del marito, era anch'essa pittrice di un buon livello. Suo zio era William Somerset Maugham, il celebre scrittore.

"geometrica". Quel quadro oggi non esiste più: la grandiosa mostra del Glaspalast termina nel peggiore dei modi possibili, passando dalla qualifica "grande mostra d'arte" a "peggior disastro artistico di Germania".

3 *"Lo Studio", 1923.*

Il Glaspalast prende fuoco il 6 giugno 1931, e delle 2820 opere esposte se ne salveranno intatte meno di un centinaio: se molte saranno più o meno danneggiate, la maggior parte di esse andranno totalmente distrutte, senza nessuna possibilità di recupero. L'incendio è sicuramente doloso, come dimostreranno le indagini successive; ma i colpevoli del gesto non furono mai identificati: si pensò che l'incendiario potesse essere un artista escluso dalla mostra, ma non si trovarono mai prove decisive. Con le opere andò totalmente distrutto anche il Glaspalast, e subito si pensò a una sua ricostruzione, che però non avvenne mai: due anni dopo l'incendio salì al potere Adolf Hitler, e il nazismo non aveva particolarmente a cuore l'arte moderna.

4 *"Silvana Cenni"*[3]*, 1922.*

Felice Casorati è stato senza dubbio uno degli artisti italiani più importanti della prima metà del ventesimo secolo, dallo stile preciso, riconoscibilissimo. Se, come si è detto, i critici usavano spesso ricorrere al termine "geometria" per provare a descriverlo a parole, non gliene si può fare una colpa: alla fin fine, era lo stesso Casorati che indugiava su denominazioni matematiche, al punto che usava descrivere la sintesi della sua estetica con una triade di concetti che hanno davvero una matrice quasi totalmente matematica: "*Numerus, Mensura, Pondus*", ovvero Numero, Misura e Peso. Quasi a ribadire che le leggi del suo universo artistico erano molto vicine, se non proprio coincidenti, con quelle che regolano l'universo matematico.

[*Le relazioni tra l'arte di Felice Casorati e la matematica sono reali, anche evidenti, ma è indubbio che non sembrano sufficienti a giustificare un articolo su un giornalino che si occupa di matematica, per di più ricreativa. In primis, a una simile obiezione possiamo rispondere che abbiamo già dedicato articoli a personaggi ancora meno "matematici" di questo artista. In secundis, che l'obiezione ha comunque la sua ragione d'essere, e forse possiamo evitare di respingerla con sdegno. Solo che per farlo abbiamo una sola maniera: mettetevi comodi, che ricominciamo da capo.]*

[3] Silvana Cenni non esiste, è un nome di fantasia scelto da Casorati. Non è fantasia però il Monte dei Cappuccini, così noto e caro ai torinesi, che si intravede nel paesaggio dietro la finestra dello studio del pittore.

5 *Felice Casorati*

Felice Casorati nasce a Pavia il 17 Dicembre 1835. Non è davvero strano che sia nato nel capoluogo della provincia più occidentale della Lombardia[4]: volendo dare fiducia ai siti che forniscono le migliori informazioni sulla dislocazione geografica dei cognomi italiani[5], le famiglie che portano il cognome Casorati sono relativamente poche (meno di 140, sembrerebbe) e quasi tutte situate in quella zona a cavallo tra Piemonte e Lombardia che si adagia lungo le sponde del Ticino, tra Novara e Pavia; ed è proprio in questa cittadina lombarda che se ne registra il maggior numero.

È forse proprio grazie alla precisa relazione tra il suo nome e la sua zona di nascita che Felice Casorati non si allontanerà mai troppo a lungo dalla sua città natale: il padre, Francesco Casorati[6], è un medico che giungerà ad insegnare fisiologia e medicina nella antica e prestigiosa università pavese, oltre che in alcuni dei più prestigiosi collegi della città. Felice ancora non lo sa, ma seguirà le orme paterne, perlomeno nel senso che diventerà anche lui docente nella medesima università, anche se in una facoltà diversa; e, se si esclude Milano, che è davvero troppo vicina a Pavia per considerare il raggiungerla una sorta di trasferimento, i suoi viaggi saranno sempre di andata e ritorno verso la sua città natale. Ma è pur vero che, quando Felice Casorati si decide a muoversi, i suoi viaggi sembrano destinati a restare memorabili.

Inizialmente i suoi interessi sembrano essere diretti verso quegli studi scientifici che, pur essendo ben distanti dalla scienza medica del padre, hanno una natura tutt'altro che teorica: ingegneria e architettura. L'imbarazzo era al più limitato al tipo di costruzioni a cui dedicarsi, non certo alla dicotomia tra teoria e pratica; ma nell'augusta università pavese, fiore all'occhiello del regno Lombardo-Veneto, insegnano docenti di tutto rispetto come Antonio Bordoni e Francesco Brioschi[7], ed è certo a causa loro che Felice incomincia ad interessarsi più esplicitamente alla matematica. Casorati si laurea nel 1856, a ventuno anni d'età, ma non lascia l'università: Brioschi lo assume come assistente e l'anno successivo lo si ritrova già a tenere corsi di topografia, geodesia, idrometria.

---

[4] Il puerile gioco narrativo di usare le espressioni "capoluogo ***della*** provincia più occidentale della Lombardia" per il Felice Casorati matematico e "capoluogo ***di*** provincia più orientale del Piemonte" per il Felice Casorati artista nasceva dalla consapevolezza che quella di Pavia è certamente la provincia lombarda più occidentale (l'estremità occidentale è a 8°29'53" E, nel comune di Palestro), ma la città di Pavia (9°29'54" E) non è il capoluogo di provincia più occidentale della Lombardia, perché Varese (8°49'28" E) è più a ovest. Per contrappasso, è del tutto evidente da qualsiasi mappa che la provincia più orientale del Piemonte è quella di Alessandria (l'estremità più orientale della regione si trova a 9°12'51" E, nel comune di Fabbrica Curone), ma ci pareva evidente che la città di Novara fosse più orientale della città di Alessandria. In realtà (anche se non tutti i siti sono d'accordo, forse perché non tutte le coordinate sono prese nello stesso punto del centro cittadino), quel che "ci pareva evidente" si è rivelato essere una pia illusione, anche se solo per un'inezia. Sembra che Alessandria (8°37'12" E) conquisti il titolo di "capoluogo di provincia più orientale del Piemonte" strappandolo a Novara (8°37'04" E), per la bellezza di otto secondi d'arco. Mentre ci disperiamo per aver perso tempo nel cercare una specie di gioco di parole che si è rivelato essere inconsistente (ma lo lasciamo lo stesso nel testo, che ci importa?) lasciamo al lettore il facile esercizio di calcolare a quanti metri di differenza corrispondano quegli stramaledetti otto secondi di longitudine est (per il calcolo, approssimate pure la latitudine a 45°0'0" N).

[5] Sì, certo, certo… non serve ripetere i link, questa nota è identica alla nota numero 1.

[6] Già, proprio così.

[7] Di lui parliamo nel patriottico RM150 del Luglio 2011, insieme a un altro manipolo di matematici italiani protagonisti del nostro "*Risorgimento!*"

Con lo stesso Brioschi e Betti[8] compie nel 1858 un cruciale viaggio in Europa: visita Parigi, poi si dirige in Germania, prima a Berlino, dove incontra Weierstrass[9] e Kronecker[10] e soprattutto nel tempio scientifico del mondo accademico tedesco, Göttingen, dove resta affascinato dalle idee rivoluzionarie di Riemann[11].

Il viaggio di Betti, Brioschi e Casorati rivestirà un'importanza fondamentale non solo per i tre protagonisti, ma per tutta la matematica italiana: in Francia e in Germania la matematica sta facendo passi da gigante, soprattutto nel fecondo campo dell'analisi complessa, l'Italia, invece, è in evidente ritardo. I tre si rendono ben conto della cosa e, consapevoli o meno che fossero del ritardo delle accademie di quella che da lì a poco si sarebbe presentata al mondo come una giovane nazione finalmente unita, al loro ritorno faranno un gran lavoro di divulgazione accademica, portando di fatto un'intera nuova matematica nelle aule italiane.

Questo vale soprattutto per Felice: quello che nel 1859 ritorna da questo lungo viaggio d'iniziazione è un Casorati diverso da quello che partito un anno prima. Torna probabilmente più sicuro di sé, più consapevole degli sviluppi della matematica moderna e certamente più deciso a farne la sua professione definitiva. Nello stesso anno diventa docente di algebra e geometria analitica, e appena tre anni dopo conquista la cattedra di Calcolo Infinitesimale. E continua, perché la sua carriera accademica non fa altro che crescere, visto che terrà a lungo cattedre sia a Milano che nella natia Pavia, dove continuò a tener lezione fino alla morte, che lo colse certo troppo presto, nel 1890, a cinquantacinque anni d'età.


TEORICA DELLE FUNZIONI
DI VARIABILI COMPLESSE
PAVIA

6 *"Teorica delle funzioni di variabili complesse"*

Legherà il suo nome a quello di un celebre teorema sulle singolarità delle funzioni olomorfe, quello che si chiama ancora "*Teorema di Casorati-Weierstrass*" perché fu il tedesco a renderlo noto alla comunità internazionale dei matematici, ma Casorati lo aveva già scoperto otto anni prima[12].

[8] Enrico Betti, anche lui coprotagonista del compleanno "*Risorgimento!*" citato nella nota precedente.

[9] "*Geometria dell'endecasillabo*", RM057, ottobre 2003.

[10] "*Aramis*", RM239, dicembre 2018.

[11] "*Pellegrinaggio a Thule*", RM068, settembre 2004.

[12] Prima di lanciarsi in rivendicazioni nazionalistiche sul fatto che il nome del teorema dovrebbe essere solo "*Teorema di Casorati*" vista la palese priorità del nostro eroe, è meglio rendersi conto che il nome di un teorema è spesso un cattivo indicatore sulle priorità della sua scoperta. Tanto per dire, se è vero che Weierstrass pubblicò il teorema (ovviamente in lingua tedesca) nel 1876, è anche vero che i russi continuano a chiamarlo "*Teorema di Sokhotski*", perché Julian Karol Sokhotski (o Sochocki, volendo mantenere la grafia polacca) matematico russo-polacco, lo pubblicò (in russo) nella sua tesi di dottorato nel 1868, lo stesso anno in cui fu pubblicato da Casorati. Finì che i matematici occidentali si abituarono a chiamarlo "*Teorema di Weierstrass*" e solo dopo un po' la dizione usuale è cambiata in "*Teorema di Casorati-Weierstrass*", ma per l'Europa orientale il teorema continua a prendere in nome di Sokhotski. Ci si potrebbe lanciare in ricerche per capire chi, in quel fatidico 1868, tra Casorati e Sokhotski abbia preceduto l'altro di qualche mese o magari anche solo qualche giorno, ma è ricerca difficile e soprattutto senza troppo valore, visto che Charles Briot e Claude Bouquet, autori francesi di un celebre testo di Geometria Analitica, pubblicarono il teorema nella prima edizione del loro libro nel 1859. Il loro errore fatale è stato quello di aver rimosso quel teorema dalle successive edizioni del loro libro. Così, anche se gli autori più attenti citano il teorema con la precisa ma lunga definizione di "*Teorema di Casorati-Sokhotski-Weierstrass*", nessuno si è mai sognato di nominarlo come "*Teorema di Bouquet-Briot-Casorati-Sokhotski-Weierstrass*", forse anche solo per risparmiare carta e inchiostro. Noi facciamo lo stesso, anche perché non riusciamo a districarci tra i possibili meriti iniziali di Liouville, quelli successivi e fondamentali di Picard, e men che meno sul fatto che Casorati e Weierstrass erano in corrispondenza, e se l'italiano è stato certamente il primo dei due a giungere alla dimostrazione, è anche vero che quella dimostrazione non sarebbe stata completa senza la dimostrazione di un lemma che fu proprio Weierstrass a dimostrare. La matematica è un'opera straordinariamente collettiva, non bisognerebbe scordarlo mai.

Del resto, la ricerca accademica di Felice Casorati è ben più vasta di quel celebre teorema: il testo in cui fu pubblicato era un volume di ampio respiro, intitolato "*Teorica delle funzioni di variabile complesse*" che contribuì moltissimo alla diffusione dell'analisi complessa in Italia. Ce ne fosse bisogno, lo dimostrerebbero il gran numero di riconoscimenti che ricevette durante la sua vita: lo elessero come affiliato la Reale Accademia delle Scienze di Göttingen, la Società Matematica Torinese, l'Accademia delle Scienze di Bologna, l'Accademia delle Scienze di Berlino, l'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, la Società Italiana delle Scienze e l'Accademia dei Lincei.

[Se questo "compleanno" appare un po' anomalo, la colpa non è certo del lettore e ancor meno dei due Felice Casorati. Prima di scrivere l'articolo avevamo idee molto, molto confuse in merito a un generico personaggio a nome "Casorati" e non riuscivamo a conciliare bene le sensazioni e ancor meno le poche nozioni che le meningi restituivano a fronte di quel cognome. In breve abbiamo capito che si trattava di due personaggi diversi, ma con davvero molte cose in comune: non solo il cognome, ma anche il nome di battesimo, la zona geografica di nascita, e perfino il nome del padre. Abbiamo allora cercato di capire se tra i due corresse un certo grado di parentela, e siamo tuttora abbastanza convinti che sia quasi impossibile che non ci sia davvero, visto che il cognome non è davvero molto diffuso ed è estremamente localizzato geograficamente. Tra il matematico e il pittore, poi, corrono 48 anni di differenza, un numero tutt'altro che impossibile, nell'Ottocento, per essere la differenza di età tra nonno e nipote. Così, abbiamo cercato di capire, con qualche abborracciata ricerca in rete, se la cosa fosse vera, nota, possibile. Eravamo soprattutto incuriositi dall'alternarsi dei nomi Francesco/Felice in entrambe le famiglie dei due Casorati: era possibile che ci fosse una quintupla alternanza Francesco-Felice-Francesco-Felice-Francesco che partiva dal Francesco padre del matematico, passava per il Francesco padre del pittore per concludersi con il Francesco figlio dello stesso? Per quel che siamo riusciti a capire, la risposta ci sembra negativa: per il matematico Felice Casorati abbiamo trovato solo una figlia, Bianca, e nessuna relazione con la famiglia dell'artista. Ma se la matematica è davvero un'opera d'arte essenzialmente collettiva, anche l'Arte nel suo insieme lo è, in molti sensi. E, in fondo, non c'è davvero bisogno di trovare una sorta di prova di consanguineità tra Arte e Matematica, perché che siano strettissimamente imparentate è cosa chiarissima a chiunque abbia occhi per vedere e testa per capire.]

2. Problemi

2.1 Per fortuna, sono onesti...

Avete sicuramente presente quei problemi di logica ambientati su un'isola popolata unicamente da "furfanti e cavalieri"[13]; quello che ci ha sempre lasciati perplessi è il fatto che due visioni del mondo così diverse tra di loro riescano ad accordarsi con un semplice sguardo per rendere la vita impossibile al povero tizio che fa domande (anche se, sempre opinione nostra, uno che va in posti del genere se li merita, quei poderosi mal di testa).

Tranquilli, qui non siamo su un'isola, e sono tutti cavalieri (nel senso che dicono tutti la verità). Siamo su una via e, per farvi venire il mal di testa, i locali si sono accordati per darvi una serie di indicazioni in modo "relativo".

Quello che sapete per certo è che la via ha otto numeri civici, i pari da una parte e i dispari dall'altra; inoltre (...saranno quei cottage edoardiani uguali uno all'altro?) sapete che l'uno è davanti al due, il tre è davanti al quattro, il cinque è davanti al sei e il sette è davanti all'otto, che è anche l'unica casa non abitata della via.

Gli altri cottage sono abitati, non nell'ordine, dalle famiglie Aldi, Bruni, Carli, Danieli, Ernesti, Franchi e Giacomi (evidentemente non in quest'ordine); i nostri fanno le seguenti affermazioni:

Aldi: "I Giacomi vivono nella casa a fianco a quella opposta alla mia"

Bruni: "I miei vicini sono i Carli e i Danieli"

Ernesti: "I Danieli vivono nella casa di fronte alla mia"

Franchi: "Vivo nella casa di fianco a quella degli Aldi"

Essendo stati incaricati di riscrivere l'elenco telefonico, adesso dovete scoprire dove abita chi...

2.2 Un gioco di carte

Ci viene rimproverato sovente di essere criptici nell'esposizione dei problemi (continuate pure a farlo, tanto a noi non importa nulla), ma per una volta dobbiamo ammettere che non è sempre colpa nostra: solo l'assoluta fiducia nel propositore ci ha spinto a capire di cosa stesse parlando. Cerchiamo di essere un po' più chiari di lui, quindi se vi pare ci sia sovrabbondanza di informazioni (soprattutto in corsivo tra parentesi) sappiate che è colpa nostra.

Conoscete tutti l'abilità di Doc nel maneggiare le carte; data la scarsa fiducia che ormai l'intero globo terracqueo sta mostrando nel vederlo con un mazzo di carte in mano, sta cercando di inventarsi qualche nuovo giochino; in questo caso avete, in linea sul tavolo, tre carte che da sinistra a destra riportano ben visibili i numeri 1, 2, 3 e 4; sapete, inoltre, che sul retro di queste carte ci sono i numeri 1, 2, 3 e 4, ma i due numeri (*su ognuna delle carte*) sono diversi tra loro *(e compaiono tutti*).

Mentre non guardate, due delle carte vengono girate, quindi un'altra (*diversa dalle due appena girate*) è spostata in una posizione differente (*facendo eventualmente spazio tra le due carte a fianco della nuova posizione e "chiudendo il buco" che ha lasciato nella vecchia posizione*) e quindi anche la carta restante viene spostata in una posizione differente (*con le stesse premesse del fare spazio e del chiudere il buco*). A questo punto, le carte mostrano (*da sinistra a destra*) i valori 3, 4, 2 e 2 da sinistra a destra.

Che numeri ci sono su ogni carta?

[13] Non per fare gli anglofili, ma "knigts & knaves" ci pare decisamente più bello, come nome. E secondo noi chiarisce il motivo per il quale gli inglesi quando parlano si "mangiano le consonanti".

3. Bungee Jumpers

Il BJ presentato nel numero 298 (Novembre 2023) richiedeva di dimostrare l'esistenza del limite s di s_N per N→∞, con s_N definito come la probabilità che due interi a e b, scelti a caso nell'intervallo $1 \leq a, b \leq N$ siano primi tra loro.

Dimostrare allora che la serie infinita:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$$

converge al valore $1/s$, con s definito come sopra.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Dicembre.

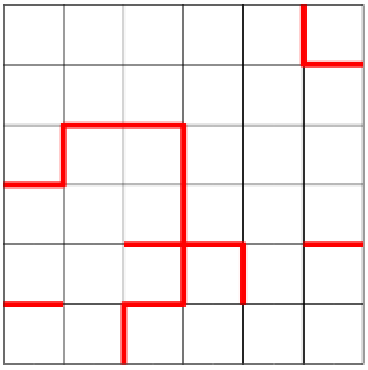
E anche quest'anno ce l'abbiamo fatta, o forse no, che ancora vi manca il calendario per l'anno prossimo... Che ne dite, come dovremmo festeggiare il trecentesimo numero? Facendo vacanza?

4.1 [297]

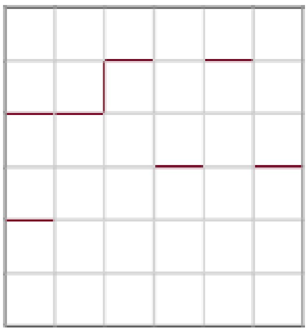
4.1.1 Non soppianterà il Sudoku...

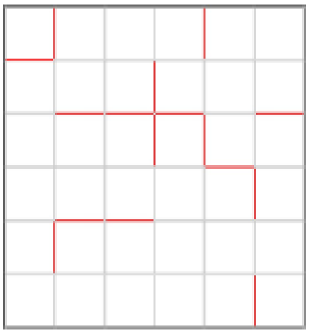
Il Capo è sempre alla ricerca di nuovi giochi, ne ha presentato uno in quadrati con i numeri, che sembra simpatico:

> *Nella figura un "Tower Square": un Tower Square di ordine n è un quadrato nel quale, in ogni riga e ogni colonna, il valore k (con $1 \leq k \leq n$) compare esattamente k volte. Quando due celle hanno in comune un bordo rosso, nelle due celle va scritta la stessa cifra.*



Ci scrive per primo ***Camillo***:

> Per quanto riguarda invece "Non soppianterà il Sudoku..." penso proprio che non lo soppianterà. La soluzione di quello che presentate è facilissima ed in linea generale per risolvere occorre partire mettendo i tre 3 dove vi sono 2 righe rosse adiacenti.
>
> Penso che per renderlo più difficile occorre dare meno indicazioni (le righe rosse) possibile.
>
> Ho fatto alcune prove e ne è uscito questo:
>
> g
>
> Peccato che vi siano 2 soluzioni.
>
> Quello che segue invece è facile però anche le diagonali maggiori...



> Purtroppo non sono in grado di formulare delle formule tanto meno escludendo rotazioni e riflessioni.

In un certo numero di riprese ci ha scritto anche ***Valter***, di cui questa dovrebbe essere l'ultima versione:

> Espongo quel poco che mi pare di essere riuscito a ricavare (nei calcoli tratto Tower Square di lato 6 e valori 1 2 3):
>
> - il lato del quadrato è un numero triangolare
> - dati n valori, il suo lato misura $(n(n+1))/2$
> - il Tower Square disegnato con linee rosse è:
>
> ```
> 3 2 1 2 3 3
> 1 3 2 3 2 3
> 3 3 2 2 3 1
> 3 2 3 3 1 2
> 2 1 3 3 3 2
> 2 3 3 1 2 3
> ```
>
> - i tre valori si possono disporre in 60 modi
> - 60 si ottiene con: 6 per (5 su 3 binomiale)
> - nella formula 6 sono le posizioni per l'uno
> - 5 su 3 binomiale le disposizioni dei: 2 e 3
> - non sono riuscito a contare tutte le Square
> - ho scritto un programma per avere il numero
> - risulta vi siano in tutto 5'450'400 diverse
> - da ognuna se ne ottengono molte delle altre
> - basta spostare a piacere le righe e colonne
> - ovviamente, le sei righe sono tutte diverse
> - infatti 1 non può essere nello stesso posto
> - stesso discorso, ovviamente, per le colonne
> - si può quindi raggrupparle per stesse righe
> - … cioè indipendentemente da come sono messe
> - ogni gruppo avrà: 5'450'400/6!=7'570 Square
> - si può pure accorpare per stessa prima riga
> - così i gruppi sarebbero 5'450'400/60=90'840
> - se quindi, divido 90'840 per 5! ottengo 757
> - cioè scelgo una delle Square di ogni gruppo
> - con 757 Square posso fare tutte le restanti
> - 757 è un numero primo; di meglio non si può
> - stesso dividendo 7'570 per 5 su 2 binomiale

- qui sono le, diverse, disposizioni di 2 e 3
- dato che 1 è unico ho, quindi, 757 di prima
- tali valori li ho verificati col programma.

Propongo infine due Tower Square particolari:

1	2	2	3	3	3		3	2	1	2	3	3
2	2	3	3	3	1		1	3	2	3	2	3
2	3	3	3	1	2		2	1	3	3	3	2
3	3	3	1	2	2		3	3	2	3	2	1
3	3	1	2	2	3		2	3	3	1	3	2
3	1	2	2	3	3	e	3	2	3	2	1	3

Nella prima le righe e le colonne coincidono. Cioè: prima riga = prima colonna… e così via. Nella seconda sempre uguali ma "rovesciate". Prima = ultima dal basso, seconda = penultima, …. Allego, per concludere, un link: http://geofhagopian.net/papers/KenkenTriangular.pdf. Si tratta di un "Sudoku" giapponese. È chiamato KenKen; … e vi è molta matematica:

- numeri triangolari
- "parity argument"
- fattorizzazione
- fattoriali
- scomposizione di un numero come somma di n altri
- un "trucco" assumendo che la soluzione sia unica
- interi Gaussiani
- …..

Interessante, il Capo si è sicuramente studiato il KenKen per future torture. Noi invece andiamo avanti con la soluzione di ***Emanuele***:

Un quadrato di n celle per lato e riempito di k numeri ($1 \leq k \leq n$) è detto PINCO(k, n) se su ogni colonna e in ogni riga ci sono lo stesso numero di numeri.

Definiamo R una relazione tale per cui 2 PINCO(k, n) sono in relazione se

1) Esiste una permutazione dei k numeri che rende uguali i 2 PINCO

2) Scambiando righe o colonne si ottengono PINCO uguali

È semplice vedere che R è di equivalenza

TESI Allora l'insieme di equivalenza di R ha una sola classe

Un PINCO rappresentante è quello la cui prima riga è

$$\underbrace{1\,1\,1\ldots1}_{V1\ \text{volte}}\;\underbrace{2\ldots.2}_{V2\ \text{volte}}\;\underbrace{3\,3\,3\ldots3}_{V3\ \text{volte}}\;\ldots.\;\underbrace{K\,K\,K\ldots K}_{Vk\ \text{volte}}$$

Dove $V_1+V_2+\ldots+V_k = n$. E le righe successive sono le n–1 rotazioni della prima riga.

Detto in parole semplici questo tipo di quadrati con ripetizioni uguali su righe e colonne sono tutti e soli quelli costruiti con la rotazione della prima riga a meno di cosette (rotazioni, permutazioni ecc…)

La dimostrazione a fatica l'ho fatta, ma non so se interessi, ma soprattutto non so se sia corretta! Se interessa la mando.

Anche il problema posto forse era un altro, ma tant'è: mi è riuscito di risolvere questo che spero lo includa e generalizzi.

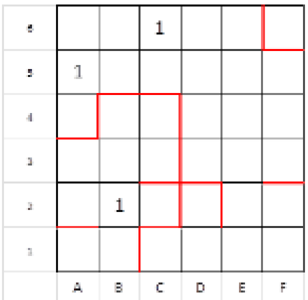
Beh, a noi interessa tutto ovviamente, ma in questo momento, con l'enorme ritardo accumulato, passiamo oltre senza troppi commenti. E lasciamo la parola a ***Galluto***:

Su una simpatica rivista di giochi logici (che giustappunto, con arguto gioco di parole, si chiama "logicamente") c'è un altro gioco giapponese che si chiama Grattacieli; c'è la solita griglia quadrata, in ogni riga e colonna ogni numero può comparire una sola volta, i numeri che vanno messi nella griglia rappresentano il numero di piani del grattacielo posizionato su quella casella, e gli indizi sono costituiti da numeri scritti intorno alla griglia e che indicano il numero di grattacieli visibili da quella posizione (con il grattacielo più alto che nasconde quelli dietro più bassi); forte di questa esperienza, azzardo che il gioco di questo problema sia costituito da uno square riempito di towers, la cui altezza sia indicata anche qui dal numero che viene messo in una casella.

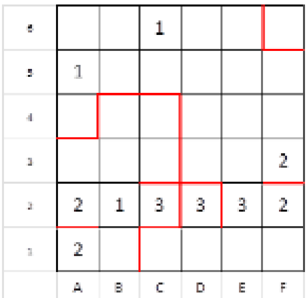
Il lato del quadrato di ordine n è pari all'n-imo numero triangolare, e quindi è uguale ad $(n+1)*n/2$.

Nello schema da risolvere il lato è lungo 6, e quindi $n=3$ e ogni riga e colonna devono contenere un 1, due 2 e tre 3.

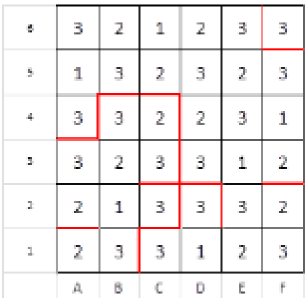
È chiaro che ogni casella delimitata, anche su un solo lato, da una riga rossa non può contenere l'1; quindi, l'unica posizione valida per l'1 nella colonna C è in riga 6 e l'unica in riga 2 è in colonna B; inoltre, avendo messo l'1 in C6, in riga 5 è rimasta solo la possibilità in colonna A



Consideriamo ora la casella D2: ha la riga rossa sia a destra che a sinistra e quindi deve essere uguale sia a C2 che a E2, e quindi tutte e tre devono contenere i tre 3; di conseguenza A2 e F2 devono contenere i due 2 e, viste le righe rosse, sono dei 2 anche A1 e F6



Da questo punto, e senza tediare inserendo schemi man mano più completi, la griglia si riempie velocemente e a colpo sicuro: sono 3 le caselle ancora vuote della colonna A, sono 3 le caselle C3 e D3, è 3 la casella F6, e quindi anche la F5 e la E6, …



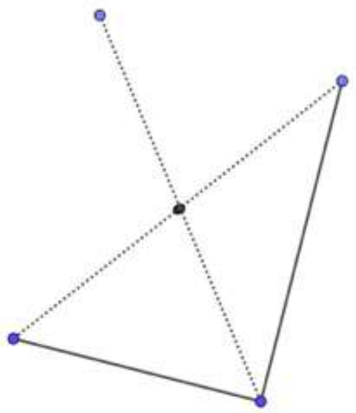
Non è arrivato molto altro, per cui smettiamo subito di giocare e passiamo al secondo problema.

4.1.2 I laghi di Mathland

Mathland è il nostro posto preferito, dove tutti gli oggetti sono enti geometrici perfetti e i punti non hanno dimensione, ed ecco il problema del nostro cartografo:

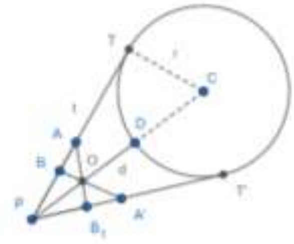
> *Nella mattinata, dovete misurare il raggio di un lago perfettamente circolare. Avete a disposizione strumenti che vi permettono di tracciare (e misurare) unicamente segmenti di retta, e che non potete passare sopra il lago. Come misurate il raggio del lago?*
>
> *Nel pomeriggio avete due laghi circolari della stessa dimensione, e siete interessati alla distanza minima tra di loro: gli strumenti però, pur mantenendo le caratteristiche precedenti, possono misurare una distanza massima minore della distanza minima tra i due cerchi. Esiste un modo per misurare la distanza minima tra i due cerchi?*

Come per il primo problema, sono arrivate diverse revisioni da ***Valter***, di cui riportiamo (o almeno coì speriamo) l'ultima arrivata:

> Propongo un altro metodo per ottenere segmenti perpendicolari; vedi se va (ricordo che il righello, come indicato dai Nostri, può misurare le distanze):
>
> 
>
> Traccio un segmento di lunghezza conosciuta e mi segno il punto centrale ed i suoi due punti estremi; vedi uno dei tratteggiati.
>
> Traccio un altro segmento di inclinazione qualsiasi della stessa lunghezza e col suo punto centrale che coincide con quello precedente.
>
> Unisco i due punti stremi del secondo segmento ad uno di quelli del primo; l'angolo che formano i segmenti, così disegnati, è retto.
>
> Mi pare che in questo modo, a parte i centimetri non ammessi nel loro classico utilizzo, si usi il regolo solo nel modo solito di unire punti.
>
> (…)
>
> Per calcolare la distanza minima tra i cerchi: vado veloce; se ha un senso penso si capisca. Preparo un sistema di coordinate, ortogonale, penso si riesca mostrare che ciò è fattibile. L'origine è nel centro di uno dei due cerchi, si può farlo col regolo conoscendo il raggio perché posso fare segmenti perpendicolari.
> - prendo due punti, a caso, dell'altro cerchio
> - assegno alle loro coordinate: (x_1, y_1), (x_2, y_2)
> - a quelle del centro le due incognite: (x_0, y_0)
> - dal sistema di due equazioni, ricavo x_0 e y_0:
> - $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = r^2$
> - $(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 = r^2$
> - sfrutto quindi, le coordinate dei due cerchi
> - con esse: $(0, 0)$ e (x_0, y_0) calcolo la distanza
> - quella minima si ha sottraendone i due raggi.

Speriamo di non aver rovinato la prosa di Valter cercando di impaginare la soluzione in modo un po' più compatto. Vediamo la versione di Galluto:

Problema della mattina:



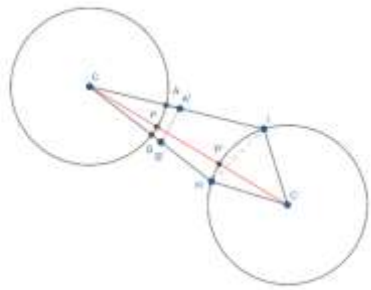
- C è il centro del nostro lago, di raggio *r*.
- Prendo un punto P qualsiasi esterno al lago e traccio le tangenti PT e PT' alla sua circonferenza; chiamo *t* la lunghezza del segmento PT.
- Sul segmento PT prendo i due punti a caso A e B, e misuro la lunghezza dei due segmenti PA e PB.
- Trovo sul segmento PT' i punti A' e B' tali che PA = PA' e PB = PB'.
- Congiungo A con B' e A' con B; chiamo O il punto di incontro delle due congiunzioni.
- sta sulla bisettrice dell'angolo TPT' e quindi sta sul segmento PC. Traccio il segmento PO e lo estendo fino alla circonferenza che incontro nel punto D.
- Chiamo *d* la lunghezza del segmento PD e applico il buon vecchio teorema di Pitagora al triangolo PTC, rettangolo in T:
- $r^2 = (d+r)^2 - t^2 \rightarrow r = (t^2 - d^2)/2d$

L'unico presupposto è che devo essere in grado di disegnare una tangente al mio lago; diciamo che ci riesco perché il punto di tangenza è quello subito prima che il mio regolo smetta di funzionare.

Problema del pomeriggio:

ho trovato la soluzione che segue; premetto che probabilmente c'è di meglio (cioè, una soluzione più semplice) perché non ho sfruttato il fatto che i laghi siano uguali; mi è sufficiente conoscere i raggi dei due laghi, anche diversi tra loro (il che però costituisce un'estensione, così il Capo è contento…).

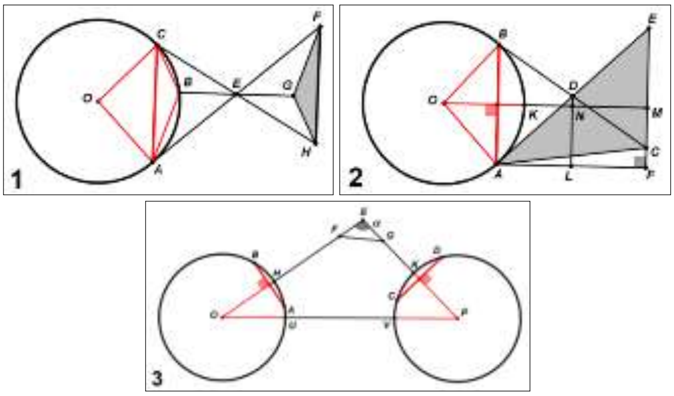
Anche in questo caso l'ipotesi è di poter tracciare delle tangenti. Inoltre ho ipotizzato che una volta tracciato un segmento posso estenderlo lungo la sua retta quanto voglio (fino ad arrivare ad un lago) e conoscerne la lunghezza complessiva.



- C e C' sono i centri dei miei due laghi, i cui raggi sono rispettivamente *r* e *r'*; il segmento di cui devo trovare la lunghezza è PP', ma non so quali sono P e P'
- Prendo un punto esterno al primo lago, traccio le tangenti e con lo stesso procedimento della mattina individuo la bisettrice, la prolungo e incontro il primo lago in A; faccio la stessa cosa partendo da un altro punto, e individuo il punto B;
  - tutta questa parte mi serve ad "uscire" dal primo lago con due segmenti che sono perpendicolari alla circonferenza, e quindi sono la continuazione del raggio del lago stesso; poiché, come detto, è lo stesso procedimento del mattino, non appesantisco il disegno con la costruzione
- Estendo CA fino ad incontrare il secondo lago in I, e CB fino ad incontrare il secondo lago in H (I ed H stanno da parti opposte rispetto a PP', ma è ininfluente)
  - Poiché posso misurare AI e BH, e conosco *r*, conosco la misura di CI e di CH

- Non posso misurare AB, ma prendo un punto qualsiasi A' su AI e un punto qualsiasi B' su BH e misuro AA' e BB'; sempre sommando *r*, conosco la misura di CA' e CB'
- Misuro A'B' e considero il triangolo A'CB': conosco la misura di tutti e tre i lati e quindi, applicando il teorema del coseno, posso determinare il coseno dell'angolo in C e di conseguenza la sua misura
- Adesso considero il triangolo ICH; non posso misurare IH ma conosco le lunghezze di CI e CH, e l'angolo in C, e quindi, sempre con il teorema del coseno, ricavo IH
- Inoltre, ora che conosco IH, sempre lavorando con il triangolo ICH e col solito teorema del coseno, trovo gli angoli CHI e CIH
- Adesso considero il triangolo isoscele IC'H; conosco le misure dei tre lati (i due uguali sono due raggi *r*') e quindi, ancora con il teorema del coseno, posso ricavare sia l'angolo in C' che gli angoli in C'IH e C'HI
- Sommo gli angoli CHI e C'HI e trovo l'angolo CHC'; applico un'ultima volta il teorema del coseno al triangolo CHC': conosco CH, HC' e l'angolo compreso e quindi trovo CC', gli tolgo *r* e *r*' e rimango con PP' !!!

Ottimo lavoro, estensione e felicità del Capo inclusa. Arriva ***trentatre***!



Nelle formule indico con *AB* un segmento e (*AB*) la sua lunghezza, con *ABC* un triangolo e (*ABC*) la sua area.

primo problema

In fig. 1 con i tre punti *A, B, C* sul cerchio e il punto *E* in grado di vederli (senza entrare nel cerchio) si traccia il segmento *AE* prolungato fino ad *F* con $(EF) = (AE)$; lo stesso per $(EG) = (BE)$, $(EH) = (CE)$; i triangoli *ABC* e *FGH* sono uguali con *(FH)* lunghezza della corda; misurando i lati *a*, *b*, *c* di *FGH* si ricavano la sua area *s* e il raggio *r* del suo cerchio circoscritto (cioè del lago) con la formula di Erone

$$\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})/2\,,\ \boldsymbol{s} = \sqrt{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{c})}\ ,\ \boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{abc}/(4\boldsymbol{s})}$$

- notare che *r* non cambia riducendo a piacere le distanze fra i punti *A, B, C, E* cioè utilizzando un righello "corto" (intendo una frazione piccola a piacere del raggio).

secondo problema

Premetto la fig. 2 che mostra come ottenere la retta ortogonale alla corda *AB* dal centro *O* del cerchio; dati i punti *A, B* sul cerchio e *C* esterno con *D* a metà di *BC* e $(DE) = (AD)$ si ricava come sopra

- area ***s*** del triangolo *ACE*; da $\boldsymbol{s} = (CE)\boldsymbol{h}/2 \to \boldsymbol{h} = 2\boldsymbol{s}/(CE)$ dove $\boldsymbol{h} = (AF)$

- da $(AC)^2 - \boldsymbol{h}^2 = (CF)^2$ e quindi il punto *F* sulla retta *CE*

- dato *L* a metà di *AF* si hanno *N* e *M* sulle rette *LD* e *FE* con $(LN) = (FM) = (CE/2)$ (metà della corda)

- *NM* prolungato nei due sensi fornisce *K* sul cerchio ed è la retta cercata
- anche qui avvicinando i punti *A*, *B*, *C* si può usare il righello "corto".

In fig. 3 si intende applicato il processo di fig.2 alle corde *AB* e *CD* sui due cerchi

- le retta *OH*, *PK* si possono prolungare sovrapponendo successivamente il righello "corto" fino all'incrocio *E*
- presi i punti *F*, *G* equidistanti da *E* cioè $\boldsymbol{x} = (EF) = (EG)$, $\boldsymbol{y} = (FG)$, α: angolo in *E*

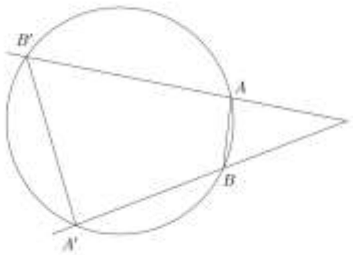
dal teorema del coseno si ha $\boldsymbol{y}^2 = 2\boldsymbol{x}^2(1-\cos\alpha) \to \cos\alpha = 1 - \boldsymbol{y}^2 / (2\boldsymbol{x}^2)$

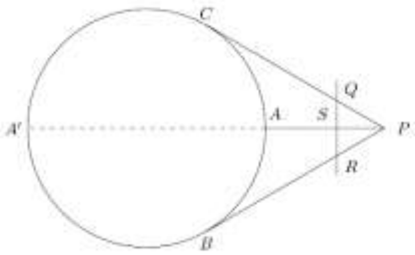
- quindi con i due lati $\boldsymbol{a} = (OE) = \boldsymbol{r} + (HE)$, $\boldsymbol{b} = (PE) = \boldsymbol{r} + (KE)$ del triangolo *OPE* per

lo stesso teorema si ha il terzo lato con $(OP)^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - 2\boldsymbol{ab}\cos\alpha$

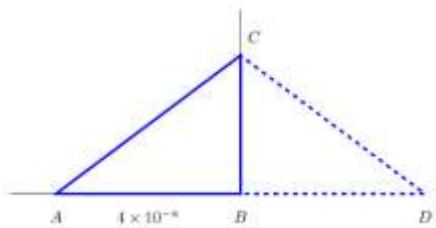
$\boxed{(UV) = (OP) - 2\boldsymbol{r}}$ è la distanza cercata.

Di trentatre ci si può sempre fidare. La prossima soluzione ha bisogno di una premessa. Forse vi ricordate la coppia che forniva meravigliose soluzioni e si firmava ***A***^{2} o ***Asquare*** o ***AA…*** ci siamo divertiti a giocare con le loro iniziali per parecchi numeri di RM, mentre loro continuavano a sfornare belle dissertazioni geometriche e non. Beh, hanno prodotto qualcosa di nuovo, che si chiama ***Levi*** ed ha già più di sette mesi. A questo punto l'allonimo necessita di adattamento, perché il piccolo ha ovviamente contribuito alla soluzione (come scrive ***Andrea***, il contributo "*può anche essere negativo*"). Ecco la soluzione di ***AAL***:

> Possiamo usare la potenza di un punto rispetto ad una circonferenza. È una proprietà interessante e molto potente, ad è anche molto semplice da dimostrare. Considerando la figura sotto, si vede che ABA'B' è un quadrilatero ciclico, per cui la somma di angoli interni opposti è π. Di conseguenza, i triangoli PAB e PA'B' sono simili, per cui
>
> $$\frac{PA}{PA'} = \frac{PB}{PB'} \Rightarrow PA \times PB' = PB \times PA'$$
>
> Questa proprietà continua a valere se prendiamo il limite per una delle rette secanti che diventa tangente (nel qual caso, il relativo prodotto nella formula sopra diventa un quadrato).
>
> 
>
>
> Possiamo quindi considerare la configurazione in figura successiva. Tracciamo due corde tangenti che si incontrano in un punto P a caso. Usando i segmenti PQ=PR tracciamo il segmento QR, e usando il punto medio di QR possiamo tracciare il segmento PA, che quindi biseca l'angolo BPC. Il segmento AA' sarà quindi il diametro. Usando la potenza di P rispetto al lago, si ottiene quindi
>
> $$r = \frac{PB^2 - PA^2}{2PA}$$
>
> Notiamo che tutte le grandezze nel membro di destra sono state misurate all'esterno del lago.



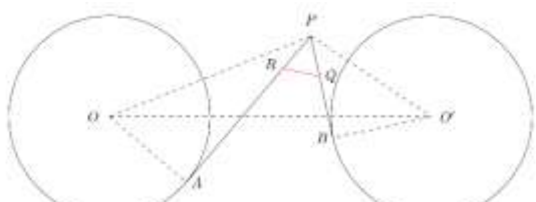
Se ora abbiamo invece due laghetti, siamo limitati a segmenti di lunghezza massima d. Tuttavia possiamo comunque costruire segmenti di lunghezza arbitraria usando una qualunque terna pitagorica. Infatti, facendo riferimento alla figura successiva, una volta tracciato un segmento di lunghezza massima, possiamo tracciarne uno di lunghezza 4×10^{-n} su di esso, vale a dire il segmento AB. Prendiamo un righello di lunghezza 5×10^{-n} che parte da A, e uno di lunghezza 4×10^{-n} che parte da B. Li posizioniamo in modo che si incontrino nel punto C, cosa che garantisce che BC sia perpendicolare ad AB. Usando il segmento BC possiamo ora usare due righelli, uno di lunghezza 4×10^{-n} che parte da B e uno 5×10^{-n} che parte da C, facendoli incontrare nel punto D. Per costruzione, i punti A, B, D giacciono sulla stessa retta, e ripetendo la procedura un numero sufficiente di volte siamo in grado di tracciare segmenti di lunghezza arbitraria. La procedura funziona per n sufficientemente grande, in modo che $5\times10^{-n} < d$.



Avendo a disposizione nuovamente segmenti di lunghezza arbitraria, per misurare la distanza tra i due laghetti è sufficiente prendere due tangenti (una per ogni lago) come rappresentato nell'ultima figura. Dal momento che conosciamo il raggio dei laghetti, e visto che conosciamo la lunghezza dei segmenti PA e PB (li abbiamo costruiti noi), allora usando il teorema di Pitagora conosciamo le lunghezze PO e PO'. Inoltre, usando funzioni trigonometriche inverse, conosciamo anche gli angoli OPA e O'PB. Inoltre, tracciando i segmenti PR=PQ e RQ (scegliendo le dimensioni in maniera che la lunghezza più grande sia minore di d), usando il teorema dei coseni conosciamo anche l'angolo QPR. In altre parole, conosciamo PO, PO', e l'angolo OPO' = OPA + RPQ + BPO, per cui possiamo determinare OO' tramite il teorema del coseno

$$OO'^2 = PO^2 + PO'^2 - 2PO\times PO'\times\cos(OPO')$$

Se si vuole la distanza tra le due circonferenze e non tra i due centri, è sufficiente sottrarre $2r$ da OO'.

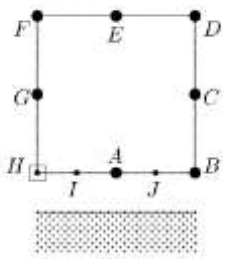


E speriamo solo che Levi continui la tradizione di famiglia ed invii soluzioni per RM quando sarà più grande. Adesso ci fermiamo e procediamo con le soluzioni di RM298.

4.2 [298]

4.2.1 I problemi di Hard Haid Moe

Che sarebbe Dinamite Bla, non molto amichevole in questo problema, come sempre del resto. In ogni caso uno di quei bei problemi per salvare capra e cavoli e pure il lupo, che era tanto che non ne vedevamo uno. Vediamo di che si tratta:



> *La "Bla Mansion" è in H, tutto il terreno è in piano e calpestabile, l'appezzamento è quadrato di lato 4 chilometri; i punti medi dei lati sono proprio i punti medi e il fiume in basso scorre perfettamente rettilineo, parallelo al lato HB e alla distanza di un chilometro da quest'ultimo.*
>
> *Dinamite ha appena finito di preparare sette cartelli, e vorrebbe piantarli nei punti A, B, C, D, E, F, G; al momento i cartelli sono in H, assieme alla pesante mazza ferrata necessaria per piantarli. Il Nostro riesce a portare, a scelta, tre cartelli o due cartelli e la mazza; questi oggetti sono tranquillamente abbandonabili in uno qualsiasi dei punti indicati. Partendo dalla casa, volendo piantare tutti i cartelli e volendo poi riportare la mazza a casa, qual è la distanza minima che dovete percorrere?*
>
> *Nei punti H, I, A, J e B sono presenti dei barili, uno per punto; lui ha una carriola che gli permette di trasportare, con lo stesso sforzo, un barile pieno o vuoto (ma non di più); tutte le mattine deve fare il giro dei barili per portarli al fiume, riempirli e portarli negli stessi punti, per garantire l'irrigazione dell'appezzamento. Come può minimizzare il percorso totale, partendo da un qualsiasi punto e terminando in un qualsiasi punto?*

Beh, diamo subito la parola a ***Valter***:

> Cartelli:
>
> - 2 cartelli con mazza per piantarli nei punti G e F
> - ritorno in H con la mazza
> - 2 cartelli con mazza per piantarli nei punti A e B
> - abbandona la mazza nel punto C
> - ritorno in H a mani vuote
> - 3 ultimi cartelli nel punto C
> - con la mazza già presente in C ne pianta uno
> - prosegue in D con i 2 restanti più la mazza
> - ne pianta uno dei due in D
> - vado in E con l'ultimo cartello e la mazza
> - lo pianta e riporta la mazza in H per F e G
> - chilometri complessivamente percorsi: 36.
>
> Barili:
>
> - mi servo di una proprietà che ha il triangolo isoscele
> - ha il perimetro minore fra quelli con stessa base e area
> - cerco i percorsi tra i punti HIAJB "a triangolo isoscele"
> - ne individuo di tre tipi diversi: 22|121, 13|112, 1111|4
> - con "|" separo andata dal ritorno; i valori sono le basi
> - invertendo andata e ritorno la distanza totale non varia
> - porto il barile al fiume e lo deposito a distanza base
> - prendo quello vuoto a tale distanza e proseguo poi così
> - l'ultimo barile che riempio lo deposito poi alla partenza

- dei tre tipi 22|121 è quello con le 5 basi più "omogenee"
- è, quindi, quello con distanza minima: $2\sqrt{5}+6\sqrt{2} \approx$ Km 12.95
- "battezzo" iaj i punti sul fiume delle proiezioni di IAJ
- uso poi i punti x e y mediani delle proiezioni di HI e JB
- il percorso risulta quindi essere: H→i→A→j→B→y→J→a→I→x→H.

Lo riconoscereste anche senza l'annuncio prima della soluzione, ma noi cerchiamo di scrivere sempre chi è l'autore di una soluzione… anche se è capitato che ci siamo sbagliati. Il prossimo contributo è di ***Camillo***, anche lui abbastanza inconfondibile:

A mio parere la risposta alla gentile domanda è 33, 43 chilometri così ottenuti:

da	a	distanza	cartelli	mazza	pianta in	PESO PORTATO	MEDIA
H	D	5,66	2	1	D	19,8	
D	C	2	1	1	C	5	
C	A	2,83		1	lascia la mazza in A	4,24	
A	H	2			torna a mani vuote	0	
H	A	2	3		A	6	
A	B	2	2	1	B	7	
B	E	4,47	1	1	E	11,18	
E	H	4,47		1	torna con la mazza	6,71	
H	G	2	2	1	G	7	
G	F	2	1	1	F	5	
F	H	4		1	ritorno definitivo	6	
		33,43				77,93	2,33

Ho introdotto una colonna che indica il peso portato per quella distanza, considerando che il peso della mazza sia una volta e mezza quello del cartello. Una casella indica il peso medio portato per ogni chilometro.

Esistono altre soluzioni con un peso portato e media inferiori ma con percorso totale maggiore.

Naturalmente ogni percorso ha anche il suo speculare.

Considerazioni contadine: però un terreno di 16 Km quadrati è ben grosso (il mio paese natio è di 8, 33), HHM sarà una potenza però un trattorino ed una pompa per irrigazione non guasterebbero.

Per quanto riguarda la seconda parte in considerazione del fatto che vi sono 5 barili quindi ognuno deve irrigare 3, 2 Km² vedo 2 soluzioni.

La prima è dividere il terreno in 5 strisce verticali e mentre si percorre ogni striscia; irrigare.

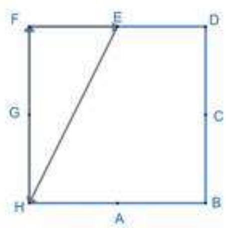
La seconda è individuare i 5 punti dove porre i barili. Uno è al centro dell'appezzamento e gli altri 4 nei punti medi delle semi diagonali. Quindi la prima volta col barile in H e B 5, 12 Km, quelli in I e J 3 km e quello in A 4 km. Per un totale di 20, 24 km. Le volte successive i barili si trovano in linea verticale al fiume per cui saranno 30 Km in totale.

Prima di passare al secondo problema, vediamo ancora la soluzione di ***Galluto***:

Forse non sono le soluzioni minime, ma questo è il meglio che ho trovato…

Primo problema

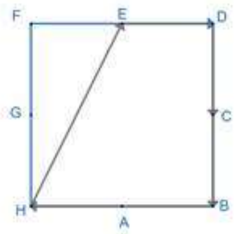
1° viaggio:



- mi carico di due cartelli e della mazza

- parto da H e vado in G (2 km); qui pianto un cartello
- proseguo con l'altro cartello e la mazza e arrivo in F (2 km); qui pianto il secondo cartello
- proseguo con la sola mazza fino ad E (2 km) e ci lascio la mazza
- torno in H ($2\sqrt{5}$ km)
- totale viaggio: $6+2\sqrt{5}$ km

2° viaggio:



- mi carico tre cartelli
- parto da H e torno in E ($2\sqrt{5}$ km); qui pianto un cartello
- prendo gli altri due e la mazza e vado in D (2 km), dove pianto un secondo cartello
- prendo il cartello superstite e la mazza e vado in C (2 km); qui pianto l'ultimo cartello che ho
- prendo la mazza, vado in B (2 km) e ci lascio la mazza
- torno in H (4 km)
- totale viaggio: $10 +2\sqrt{5}$ km

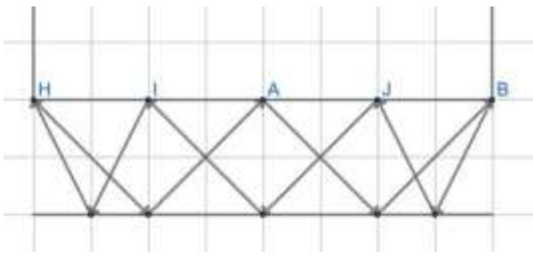
3° viaggio

- prendo gli ultimi due cartelli
- vado fino a B (4 km); strada facendo lascio un cartello in A; perché portarmi dietro un peso inutile?
- In B pianto un cartello, prendo la mazza e torno in A (2 km)
- In A pianto l'ultimo cartello, prendo la mazza e la riporto in H (2 km)
- Totale viaggio: 8 km

Totale generale $24 + 4\sqrt{5}$ km = ca 32,944 km; l'idea, come si è visto, è di spostare sempre la mazza al punto successivo dove verrà usata, e tornare poi "scarico" per la via più breve.

Secondo problema (supponendo che i barili siano intercambiabili)

Il buon Dinamite deve scendere al fiume 5 volte, e risalire al suo confine altrettante, per cui il numero minimo di "tratte" del suo percorso è 10; per mantenere questo minimo, ogni volta che torna all'appezzamento deve arrivare su uno diverso dei 5 punti, compreso quello da cui era partito, per portarci un barile pieno;



Il percorso che propongo inizia e finisce in H, così alla fine Dinamite si può anche riposare; è costituito da 6 segmenti diagonali di un quadrato 1km*1km (1 quadratino = ½ km), che quindi misurano ciascuno $\sqrt{2}$ km e da 4 segmenti diagonali di un rettangolo 1km*½km, che quindi misurano ciascuno $\frac{\sqrt{5}}{2}$ km per un totale di $6\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ km, cioè ca 12,957 km.

E qui ci fermiamo, un po' confusi, ma dopotutto Dinamite ci ha già lasciati doloranti prima di cominciare a risolvere il problema. Vediamo l'altro problema.

4.2.2 Salti "lunghi"

Un bel problema logistico anche il secondo del mese scorso:

Abbiamo una serie di sassi in linea retta, indicati con P_1, P_2, …, P_n, ma non necessariamente in quest'ordine. Inoltre, abbiamo un punto O da qualche parte sulla linea, nel quale posizioniamo una ranocchia. Seguendo le vostre istruzioni, la rana salta dal punto O al punto Q_1, tale che $OP_1=P_1Q_1$; poi salta oltre il sasso P_2 atterrando nel punto Q_2, tale che $Q_1P_2=P_2Q_2$. E così via sino a saltare il sasso P_n in modo tale che $Q_{n-1}P_n=P_nQ_n$; arrivata a questo punto, si accorge che $Q_n \neq O$. Da qui salta nei punti R_1, R_2, …, R_n con, al primo salto, $Q_nP_1=P_1R_1$, e avanti in questo modo: in pratica, dal punto nel quale si trova salta di nuovo il primo sasso con la stessa regola già applicata, per tutti i sassi della linea, e scopre che $R_n=O$. Per quali valori di n la rana si ferma dopo il "giro delle R" nel punto O di partenza?

E sì, vi lasciamo indovinare di chi è la prima, riveduta ed in più revisioni, soluzione:

Mi pare che il gioco si concluda come richiesto solo e sempre per n dispari (per n=2 si può notare verificando i vari tragitti che nessuno termina a O).
Per provarlo ho impostato un sistema di equazioni che mostrano quanto detto.

Come esempio tratto una delle configurazioni di P_1 P_2 P_3 e relativo percorso (mostro su più righe, per distinguere salti verso destra, e verso sinistra):

$O \rightarrow P_1 \Rightarrow Q_1 \rightarrow P_2 \Rightarrow Q_2 \rightarrow P_3 \Rightarrow Q_3$

$R_1 \Leftarrow P_1 \leftarrow Q_3$

$R_1 \rightarrow P_2 \Rightarrow R_2$

$O \Leftarrow P_3 \leftarrow R_2$

Nelle equazioni prima dò la posizione relativa delle tre pietre nel percorso:

$P_1>0$, $P_1<P_2$, $P_2<P_3$, $Q_1<P_2$

Nota: $P_1<P_2$, $P_2<P_3$ per evitare salti sopra pietre e quindi i seguenti sul posto (è solo una finezza in quanto con salti sul posto funziona ugualmente).
Quindi compongo le equazioni dei vari salti basandomi sulla regola del gioco:

$2P_1=Q_1$

$Q_1+2(P_2-Q_1)=Q_2$

$Q_2+2(P_3-Q_2)=Q_3$

$Q_3-2(Q_3-P_1)=R_1$

$R_1+2(P_2-R_1)=R_2$

$R_2-2(R_2-P_3)=0$

Ottengo queste restrizioni a $P_1P_2P_3$ per evitare salti che atterrino su pietre:

$P_1>0$, $P_2>2P_1$, $P_3>-2(P_1-P_2)$

Ecco le soluzioni per i successivi punti di atterraggio nei salti della rana:

$Q_1=2P_1$,

$Q_2=-2(P_1-P_2)$,

$Q_3=2(P_1-P_2+P_3)$,

$R_1=2(P_2-P_3)$,

$R_2=2P_3$

$R_3=0$

Si può far partire la rana da qualsiasi punto di questi punti di atterraggio.
Sia che inizi a saltare verso destra o verso sinistra, comunque poi torna lì.
Ho, quindi, altri tragitti nei quali la rana si ferma dopo il "giro della R".
Variando le posizioni relative di $P_1\ P_2\ P_3$ le equazioni portano, comunque, a O.
Elenco alcune triple $P_1P_2P_3$, e relativi tragitti, verificati con le equazioni:

- 1 4 –4: $Q_1= 2 \to Q_2= 6 \to Q_3=-14 \to R_1= 16 \to R_2=-8 \to R_3=0$
- –4 4 1: $Q_1= -8 \to Q_2= 16 \to Q_3=-14 \to R_1= 6 \to R_2= 2 \to R_3=0$
- 2 5 –4: $Q_1= 4 \to Q_2= 6 \to Q_3=-14 \to R_1= 18 \to R_2=-8 \to R_3=0$
- 5 2 4: $Q_1= 10 \to Q_2=-6 \to Q_3= 14 \to R_1=-4 \to R_2= 8 \to R_3=0$
- 8 9 15: $Q_1= 16 \to Q_2= 2 \to Q_3= 28 \to R_1=-12 \to R_2= 30 \to R_3=0$
- –1 4 –4: $Q_1=-2 \to Q_2= 10 \to Q_3=-18 \to R_1= 16 \to R_2=-8 \to R_3=0$
- –4 5 –12: $Q_1=-8 \to Q_2= 18 \to Q_3=-42 \to R_1= 34 \to R_2=-24 \to R_3=0$
- –10 –1 –12: $Q_1=-20 \to Q_2= 18 \to Q_3=-42 \to R_1= 22 \to R_2=-24 \to R_3=0$
- –12 –1 –10: $Q_1=-24 \to Q_2= 22 \to Q_3=-42 \to R_1= 18 \to R_2=-20 \to R_3=0$

Generalizzando le equazioni con qualsiasi n dispari si giunge, comunque, a O.
In caso di n pari, mostro un percorso e relative equazioni che lo descrivono:

$O\to P_1\Rightarrow Q_1\to P_2\Rightarrow Q_2\to P_3\Rightarrow Q_3\to P_4\Rightarrow Q_4$

$R_1\Leftarrow P_1\leftarrow Q_4$

$R_1\to P_2\Rightarrow R_2\to P_3\Rightarrow R_3$

$X\Leftarrow P_4\leftarrow R_3$

Sistema di diseguaglianze ed equazioni.

$P_1>0$, $P_1<P_2<P_3<P_4$, $Q_1<P_2$, $Q_2<P_3$

$2P_1=Q$,

$Q_1+2(P_2-Q_1)=Q_2$

$Q_2+2(P_3-Q_2)=Q_3$

$Q_3+2(P_4-Q_3)=Q_4$

$Q_4-2(Q_4-P_1)=R_1$

$R_1+2(P_2-R_1)=R_2$

$R_2+2(P_3-R_2)=R_3$

$R_3-2(R_3-P_4)=R_4$

Punto R_4 di atterraggio finale:

$R_4=-4(P_1-P_2+P_3-P_4)$

Si nota che, date le diseguaglianze, R_4 non potrà comunque valere 0=partenza.
Varrebbe 0 se $P_1=P_2$ e $P_3=P_4$ cioè se la rana salta due volte avanti e indietro.
Se $P_1<P_2<P_3>P_4$ o $P_1>P_2<P_3<P_4$ ciò è fattibile con $P_1+P_3 = P_2+P_4$; ecco due esempi:

- 1 4 9 6: $Q_1= 2 \to Q_2= 6 \to Q_3= 12 \to Q_4= 0 \to R_1= 2 \to R_2= 6 \to R_3= 12 \to R_4= 0$
- 4 1 6 9: $Q_1= 8 \to Q_2=-6 \to Q_3= 18 \to Q_4= 0 \to R_1= 8 \to R_2=-6 \to R_3= 18 \to R_4= 0$

Si nota che al primo giro la rana torna alla partenza quindi pure al secondo.
Quanto detto sinora forse si mostra meglio utilizzando l'aritmetica modulare.
Per comodità, modifico i nomi alle incognite nelle equazioni, in questo modo:

$P_1=a$, $P_2=b$, $P_3=c$, $Q_1=q$, $Q_2=s$, $Q_3=t$, $R_1=r$, $R_2=u$, $R_3=x$

Tradotte in aritmetica modulare, le equazioni precedenti si trasformano così:

$\mathrm{Mod}[2a, m]=q$,
$\mathrm{Mod}[q+2(b-q), m]=s$,
$\mathrm{Mod}[s+2(c-s), m]=t$,
$\mathrm{Mod}[t+2(a-t), m]=r$,
$\mathrm{Mod}[r+2(b-r), m]=u$,
$\mathrm{Mod}[u+2(c-u), m]=x$

Il sistema di equazioni in forma modulare, vale per tutti i tipi di percorso.

Non sono necessari i cambi di segno quando la rana varia direzione dei salti.
Se copiate l'intero blocco di equazioni e poi "incollate" su Worfram ottenete:

$Q_1 = (2a)\text{mod } m$

$Q_2 = (2b–(2a)\text{mod } m)\text{mod } m = 2(b–a)\text{mod } m$

$Q_3 = (2c–(2b–(2a)\text{mod } m)\text{mod } m)\text{mod } m = 2(a–b+c)\text{mod } m$

$R_1 = (2a–(2c–(2b–(2a)\text{mod } m)\text{mod } m)\text{mod } m)\text{mod } m = 2(b–c)\text{mod } m$

$R_2 = (2b–(2a–(2c–(2b–(2a)\text{mod } m)\text{mod } m)\text{mod } m)\text{mod } m)\text{mod } m = (2c) \text{ mod } m$

Infine, per R_3, che è il punto di atterraggio finale della rana, si ottiene:

- $R_3 = (2c–(2b–(2a–(2c–(2b–(2a)\text{mod } m)\text{mod } m)\text{mod } m)\text{mod } m)\text{mod } m)\text{mod } m$; per cui:
- $R_3 = 2(c–b+a–c+b–a)\text{mod } m$; quindi risulta che per qualsiasi modulo m si ha:
- $R_3 = 0 \text{ mod } m$.

Tutto ciò, però, equivale a dire che la rana alla fine atterra sempre a O=0.

Con un discorso analogo con quattro sassi si ottiene: $Q_4 = –4(a–b+c–d)\text{mod } m$.
Quindi anche in questo caso, sono valide le posizioni dei sassi dette prima.
Si può poi generalizzare il tutto, per ogni numero di sassi: pari o dispari.

Avete indovinato! Era ***Valter***. Il prossimo, è ***Galluto***:

La risposta è che il giochino riesce sempre per n **dispari,** per qualsiasi valore dei P_n, e non riesce mai, neanche con un numero a piacere di iterazioni, per n **pari**, se non per qualche combinazione particolare dei P_n

Usando P_n, Q_n, R_n per indicare la ascissa dei vari sassi e dei punti in cui atterra la ranocchia, abbiamo:

$Q_1 = 2P_1 – O$

Infatti, se $O > P_1$, $Q_1 = P_1 – (O – P_1)$ e se $O < P_1$, $Q_1 = P_1 + (P_1– O)$

Per semplificare, diciamo che O = 0 e misuriamo tutte le distanze da O (anche perché non credo che sia casuale che la ranocchia parta da O come Origine), e quindi:

$Q_1 = 2P_1$

Allo stesso modo,

$Q_2 = 2P_2 – Q_1$ e cioè: $Q_2 = 2P_2 – 2P_1 = 2 * (P_2 – P_1)$

E così via tutti gli altri Q; quello che succede è che il segno di P_1 (e di tutti gli altri P che man mano si aggiungono) cambia ad ogni salto; usando il caso $n = 3$ per spiegarmi:

$Q_1 = 2P_1$ P_1 è positivo

$Q_2 = 2 * (P_2 – P_1)$ P_1 è negativo e P_2 è positivo

$Q_3 = 2 * (P_3 – P_2 + P_1)$ P_1 è positivo, P_2 è negativo e P_3 è positivo

Quando faccio il giro di ritorno, se n è dispari, i P spariscono man mano dalla equazione:

$R_1 = 2P_1 – 2 * (P_3 – P_2 + P_1) = 2 * (P_2 – P_3)$ e sono spariti i P_1

$R_2 = 2P_2 – 2 * (P_2 – P_3) = 2P_3$ e sono spariti i P_2

$R_3 = 2 P_3 – 2P_3 = 0$ e sono spariti i P_3

Se invece n è pari, i P hanno cambiato segno una volta di troppo e non si elidono con il salto di ritorno, ma si raddoppiano di quantità; ad esempio, per $n = 2$:

$R_2 = 4P_2 – 4P_1$

Iterando, con n pari, non faccio altro che aumentare la quantità di ciascun P_n rimanente nell'equazione: dopo due iterazioni, sempre per $n = 2$, avrò

$R_{2bis} = 8P_2 – 8P_1$

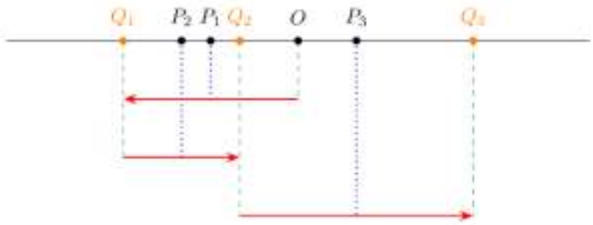
In realtà, ci sono dei casi in cui il giochino riesce anche con n pari, ma non dipendono da n, né dalle iterazioni, ma solo da combinazioni opportune dei valori dei P, tali da azzerare il risultato dell'equazione

per $n = 2$ l'unica combinazione è il banale $P_1 = P_2$

per $n = 4$ l'equazione finale è $R_4 = 4 * (P_4 - P_3 + P_2 - P_1)$; quindi, il giochino riesce se, ad esempio: $P_4 = 5$; $P_3 = 3$; $P_2 = 2$; $P_1 = 4$.

Siamo certi che è tutto chiaro per voi. L'estensore di queste note si augura solo di non aver fatto troppi pasticci con il copia e incolla. L'ultima soluzione è del trio ***AAL***:

La figura rappresenta i salti della rana in un esempio con tre punti.



La rana parte da O (che senza perdita di generalità possiamo considerare come l'origine), e dopo il primo salto si trova nella posizione

$$Q_1 = 2(P_1 - O) = 2P_1$$

Dopo il secondo salto, si trova in posizione

$$Q_2 = Q_1 + 2\,(P_2 - Q_1) = 2P_1 + 2P_2 - 2(2P_1) = -\,2P_1 + 2P_2$$

Dopo il terzo salto si trova in posizione

$$Q_3 = Q_2 + 2\,(P_3 - Q_2) = 2P_1 - 2P_2 + 2P_3$$

Lavorando per induzione è facile vedere che quindi

$$Q_n = -2[(-)^n\, P_1 + (-)^{n-1}\, P_2 + \ldots + (-)^1\, P_n]$$

A questo punto, la rana ripete il giro partendo da Q_n, per cui procedendo alla stessa maniera si avrà

$$\vec{R}_1 = 2(\vec{P}_1 - \vec{Q}_n) = -2\vec{Q}_n + 2\vec{P}_1$$

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + 2(\vec{P}_2 - \vec{R}_1) = 2\vec{Q}_n - 2\vec{P}_1 + 2\vec{P}_2$$

$$\vec{R}_3 = \vec{R}_2 + 2(\vec{P}_3 - \vec{R}_2) = -2\vec{Q}_n + 2\vec{P}_1 - 2\vec{P}_2 + 2\vec{P}_3.$$

Lavorando nuovamente per induzione, e ricordando il risultato precedente relativo a Q_n, si ottiene quindi

$$\vec{R}_n = (-)^n 2\vec{Q}_n - 2[(-)^n \vec{P}_1 + (-)^{n-1}\vec{P}_2 + \cdots + (-)^1 \vec{P}_n] = (-)^n 2\vec{Q}_n + \vec{Q}_n.$$

Lo spostamento totale della rana sarà chiaramente dato da $R_n + Q_n$, e alla luce dei conti precedenti si ha

$$\vec{R}_n + \vec{Q}_n = 2(\vec{Q}_n + (-)^n \vec{Q}_n)$$

e vediamo chiaramente che la rana ritorna sempre al punto di partenza per n dispari, e mai per n pari (a meno di configurazioni particolarmente simmetriche per cui Q_n=0 direttamente, che però sono escluse dal testo del problema). In quest'ultimo caso la distanza dal punto di partenza della rana dopo le due serie di salti è quadrupla rispetto alla distanza dopo una sola serie di salti.

Per rispondere alla domanda se nel caso n pari la rana può mai tornare al punto di partenza iterando nuovamente il ciclo di salti, è sufficiente iterare il ragionamento di prima. Dal momento che n è pari, usando il ragionamento di prima si vede che se la rana parte da Q_n e ripete tutto il ciclo, si ritrova poi nella posizione Q_n+($2Q_n$+Q_n) = $4Q_n$. Se ora parte da $4Q_n$ e ripete il ciclo, finirà in $4Q_n$+($2\times4Q_n$+Q_n) = $13Q_n$. Si vede che iterando la procedura la rana si allontana sempre di più (e sempre nella stessa direzione) dal punto di partenza.

Benissimo, complimenti al trio ***AAL***, e soprattutto a ***AA*** per ***L***. Ci scusiamo con tutti e tre per aver perso i vettori nella soluzione, problemi di impaginazione. Ci fermiamo qui, per quest'anno è tutto. Buone feste a tutti, ci sentiamo nel 2024. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Siamo fieri della nostra traduzione di questo arduo problema. L'originale recitava TWO × TWO = ...

A lettera diversa corrisponde cifra diversa, ma nulla è dato sapere sui punti (tranne il fatto che quelli più alla sinistra di ogni numero non sono degli zeri: insomma, non stiamo barando). Trovate quanto vale DUE.

			D	U	E	x
			D	U	E	
		•	•	•	E	
		•	•	U		
•	•	•	D			
•	•	•	•	•	•	

6. Pagina 46

Sia

$$t_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

Quindi $t_n < t_{n+1}$, ossia la sequenza $\{t_1, t_2, \ldots\}$ è una sequenza crescente.

Inoltre si ha che:

$$t_n < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

e quindi la sequenza $\{t_1, t_2, \ldots\}$ è limitata.

Dato che ogni sequenza limitata ha un limite, segue che il limite t di t_n per $n \to \infty$ esiste. Inoltre, questo significa che

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

converge a t. Inoltre, dato che il limite per $t \to \infty$ di $(t - t_n)$ tende a zero, vediamo che per $n \to \infty$ tende a zero anche la serie:

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \cdots$$

Consideriamo ora l'espressione:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{{p_m}^2}\right)}$$

Dato che la serie geometrica

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

converge per $|x| < 1$, possiamo scrivere:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2^2}} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \cdots$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^6} + \cdots$$

$$\ldots$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{{p_m}^2}} = 1 + \frac{1}{{p_m}^2} + \frac{1}{{p_m}^3} + \frac{1}{{p_m}^6} + \cdots$$

moltiplicando tutte queste espressioni tra di loro, otteniamo che è:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{5^2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{{p_m}^2}\right)} =$$

$$\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^6}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^6}+\cdots\right)\dots\left(1+\frac{1}{{p_m}^2}+\frac{1}{{p_m}^4}+\frac{1}{{p_m}^6}+\cdots\right)$$

Possiamo adesso moltiplicare le serie infinite tra di loro attraverso la legge distributiva della moltiplicazione. Utilizzando il teorema dell'unicità dello sviluppo in potenze di numeri primi di qualsiasi numero intero maggiore di uno, otteniamo:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{5^2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{{p_m}^2}\right)} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

Dove il secondo membro è la somma dei quadrati dei reciproci di quegli interi la cui decomposizione in fattori primi coinvolge solo $p_1, \ldots, p_m$. L'insieme di questi interi include i numeri 1, 2, 3, 4, ..., m e alcuni valori maggiori di m. Quindi

$$t_m = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{m^2} < \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{{p_m}^2}\right)} \leqslant 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots = t$$

Essendo il limite di t_m per $m\to\infty$ pari a t, abbiamo che:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{{p_m}^2}\right)} = t$$

Ma abbiamo già dimostrato che:

$$\lim_{m\to\infty} \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{{p_m}^2}\right) = s$$

e quindi, $s=1/t$, che è la tesi.

Noto che $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}=\frac{6}{\pi^2}$, si ha $s=6/\pi^2$.

7. Paraphernalia Mathematica

Come detto già altre volte, ai più stagionati lettori potrebbe ricordare qualcosa...

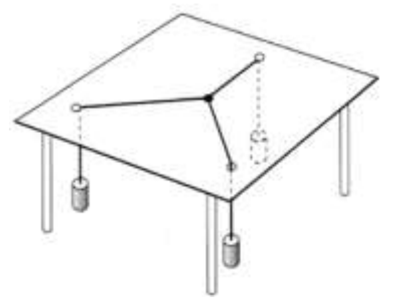
7.1 Il problema degli "n" sindaci

Tempo fa, in una rivista lontana lontana, dicevamo...

> *I sindaci di tre paeselli vorrebbero unire le loro cittadine con delle strade; problemi di bilancio comunale fanno però sì che si debba ridurre al minimo la spesa, e quindi la lunghezza totale delle strade. Come risolvono il problema?*

Da qui in avanti, SPOILER, quindi se non lo conoscevate potreste pensare di fermarvi qui e cercare di risolverlo.

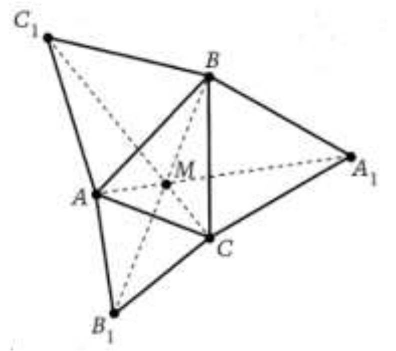
Il problema è noto come ***Problema di Steiner***, e la soluzione non è particolarmente complicata, se si pensa "out of the box": si verifica facilmente che (sotto alcune condizioni che vedremo in seguito) far partire le tre strade dai tre paeselli e fare in modo che si incontrino in un punto formando tra di loro angoli di 120° rappresenta la soluzione minima ottimale, e il punto di incontro delle tre strade è noto come ***Punto di Fermat***.



7 *Il tavolo è un problema altrui.*

Un modo piuttosto vandalico per verificare il fatto (e trovare il percorso delle tre strade) consiste nel fare tre buchi sul tavolo in corrispondenza dei tre paeselli, far passare tre fili opportunamente annodati, aggiungere dei pesi (uguali!) sotto e stare a vedere come si stabilizza il sistema. Più facile a farsi che a dirsi, come potete vedere dalla figura a fianco, se prescindete dal fatto che rovinate il tavolo.

Il fatto che gli angoli tra le strade debbano essere a 120° tra di loro viene, di solito, dedotto da considerazioni di simmetria della figura, ma esistono anche altre strade (ad esempio, costruendo la risultante delle forze dei tre pesi) per dedurlo; dandolo per scontato, sorge però immediatamente un dubbio: cosa succede se nel triangolo formato dai tre paeselli uno degli angoli è maggiore di 120°? Beh, in questo caso il nostro nodo "cade nel buco", ossia le tre strade si riducono a due, e passano per una delle città.



8 *Gli alberi ringraziano.*

Probabilmente i tre sindaci saranno molto felici di una soluzione di questo tipo che permette loro un discreto risparmio, ma noi, in quanto consulenti, mica tanto: sacrificare un tavolo ogni volta che ci arriva un cliente non è una bella cosa. Fortunatamente, esiste un metodo più economico per trovare il Punto di Fermat, e lo trovate nella figura a fianco: in pratica, dati i tre paesi A, B e C, si costruisce su ogni lato l'equivalente triangolo equilatero, e poi si unisce il vertice "libero" di ogni triangolo con il paesello opposto; i tre segmenti si incrociano in un punto e quello è il punto di Fermat. Se volete fare qualche esercizio, poteste provare a dimostrare che effettivamente si incrociano in un punto, che gli angoli in M sono effettivamente a 120°, oppure che $AM+BM+CM=AA_1=BB_1=CC_1$; quest'ultima ci pare piuttosto interessante, in quanto permette di trovare rapidamente la lunghezza totale delle tre strade senza conti troppo astrusi. A margine, per gli scettici ad oltranza, si potrebbe anche dimostrare che $AX+BX+CX>AM+BM+CM$ per qualsiasi X diverso da M se gli angoli del triangolo ABC sono minori di 120°.

Cerchiamo di formalizzare e generalizzare il concetto.

Il problema è statuibile come *connettete n punti nel piano con una rete di segmenti rettilinei di lunghezza totale minima*. Siccome definire qualche termine dà sempre sicurezza, una ***rete che connette** n **punti dati*** è un insieme finito di segmenti rettilinei tale che due qualsiasi dei punti dati sono punti terminali di un qualche cammino poligonale costruito con i segmenti dati; i punti dati sono detti ***città*** e tutti gli altri punti sono detti ***biforcazioni*** (a noi pare migliore i l termine inglese ***fork***): è facile vedere che le nostre reti devono avere, per ogni punto di biforcazione, non meno di tre strade che si incontrino[14]; più rigorosamente, se ci sono solo due segmenti che si incontrano in una biforcazione (attenzione: non in una città!) possiamo eliminare la biforcazione e unire direttamente con un segmento rettilineo i due punti terminali: se, effettuando questa manovra, il nostro segmento ne incrocia un altro, possiamo tranquillamente creare una biforcazione nel punto di incrocio.

In una rete di questo genere, l'angolo BAC tra i segmenti AB e AC non può essere minore di 120°; infatti, se lo fosse, potremmo risparmiare strada costruendo come biforcazione il Punto di Fermat del triangolo ABC: in questo modo tutti i punti vengono connessi da una rete che (almeno localmente) è minimale, visto che la rete per il punto di Fermat è sempre minore anche della somma dei due segmenti AB e AC.

Inoltre, se la nostra rete contiene un circuito, possiamo eliminare un qualsiasi segmento del circuito (riducendo la lunghezza della rete) e avere una rete di lunghezza totale sicuramente minore[15].

Riepilogando, abbiamo tre caratteristiche generali delle reti minime:

1. Ogni biforcazione è il punto terminale comune di esattamente tre segmenti che formano angoli di 120° tra di loro.
2. Da ogni città possono uscire uno, due o tre segmenti; se i segmenti sono due, l'angolo non può essere minore di 120°, mentre se i segmenti sono tre gli angoli tra di loro devono essere di 120°.
3. I segmenti di una rete minima non formano mai un circuito chiuso.

E, dal punto 3, possiamo anche dedurre che la nostra rete è un ***albero***. Il che ci porta a interessanti conseguenze: in ogni albero, il numero dei vertici V è maggiore di uno rispetto al numero degli archi A. Attenzione che in questo caso dovete contare anche le biforcazioni come vertici.

Possiamo però contare i nostri segmenti in un altro modo: se da una biforcazione escono sempre tre segmenti e da ogni città emerge almeno un segmento, il numero dei segmenti deve essere ***maggiore o uguale*** a $(3b+c)/2$, dove b è il numero delle biforcazioni e c è il numero delle città (dividiamo per due visto che $(3b+c)$ conta ogni segmento due volte). Ossia:

$$b + V - 1 \geq \frac{3b + c}{2} \Rightarrow b \leq V - 2$$

Insomma, ***il numero delle biforcazioni è almeno due meno del numero delle città***.

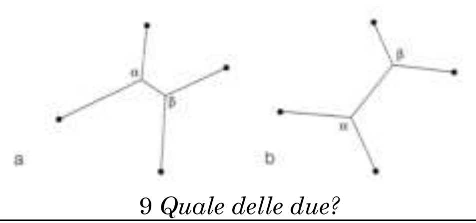
Proviamo qualche caso più complicato del triangolo; ad esempio, un quadrato, con le quattro città nel vertice.

Tanto per cominciare, non possiamo avere parti della rete al di fuori del quadrato: sarebbero immediatamente "ottimizzabili" con il metodo visto sopra della ricerca del punto di Fermat. Non solo, ma da ogni città può partire una sola strada: se ne partissero due, visto che siamo forzati a restare all'interno del quadrato, l'angolo tra di loro sarebbe minore di 90°, e quindi sarebbe sostituibile da una biforcazione nel Punto di Fermat.

Con qualche conto, si vede che dobbiamo avere due biforcazioni (collegate tra di loro) e ogni biforcazione deve andare a due città.

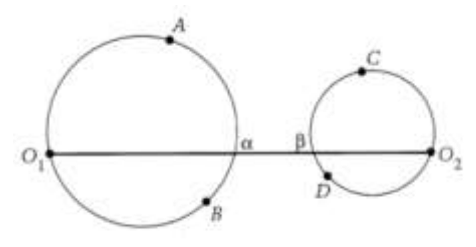
[14] Gestiamo i casi patologici (come quello del "nodo che cade nel buco" visto prima) ammettendo strade di lunghezza zero.

[15] Incidentalmente, stressiamo il concetto che vogliamo la rete di lunghezza *totale* minore: il fatto che per andare da un punto all'altro adesso sia necessario un giro attraverso un mucchio di segmenti non è significativo.



9 *Quale delle due?*

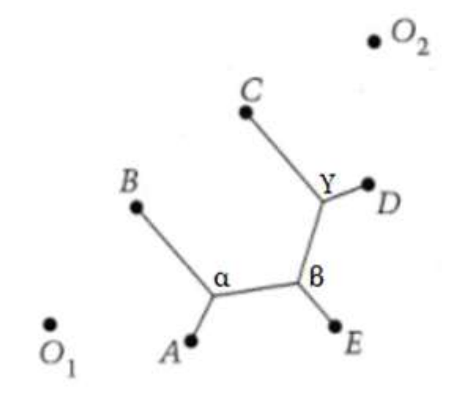
...vi siete accorti, che c'è un problema? Supponiamo le quattro città siano ai vertici di un quadrilatero convesso avente angoli minori di 120°. Seguendo la stessa strada del problema precedente, possiamo arrivare a ***due*** soluzioni, che potete trovare nelle figure qui a fianco. Una soluzione semplicistica potrebbe essere "traccia tutte e due le reti, misurale e scegli la più corta"; ma questo si può fare solo se riusciamo a determinare i punti α e β... Esiste un modo?



10 *Alla ricerca dei punti greci.*

Sì, anche se piuttosto farraginoso. Riferimento alla figura qui a fianco, dove A, B, C e D sono le nostre città.

I segmenti αA, αB e $\alpha\beta$ formano la rete minima per il triangolo $AB\beta$, quindi α è il Punto di Fermat di questo triangolo, e $A\alpha B$=120°; questo significa che possiamo costruire il punto O_1, terzo vertice del triangolo equilatero AO_1B. Identico ragionamento si può fare per i punti β e O_2, e quindi i quattro punti giacciono tutti sulla stessa linea. Siccome AO_1B=60° e $A\alpha B$=120°, tutti questi punti giacciono sul cerchio circoscritto al triangolo, e lo stesso ragionamento si può fare "per l'altro cerchio". Quindi, per trovare i due punti di biforcazione, è sufficiente costruire i due triangoli equilateri, identificare i cerchi circoscritti e unire i due punti estremi. Per la seconda costruzione si segue esattamente lo stesso metodo, considerando però questa volta i cerchi passanti per A e C e per B e D. "...e come si fa a vedere quale è la più corta?" Non vorremmo mai privarvi della piccola gioia di dimostrare che la lunghezza totale della rete è pari alla distanza O_1O_2.



11 *Non si vede, ma è sempre uguale.*

E adesso, tocca al pentagono. Cominciamo da quello regolare, che è sempre più facile.

Gli angoli interni del pentagono sono 108°<120°, quindi avremo un segmento uscente da ogni angolo, e dalle formule precedenti si ricava che il numero delle biforcazioni deve essere 3; non resta che definire i tre punti α, β e γ, che possono essere trovati come nel caso precedente; costruendo i triangoli equilateri BAO_1 e CDO_2, con un ragionamento simile a quello fatto nel caso del quadrilatero vediamo che α giace sulla retta $O_1\beta$, e quindi i tre angoli in α devono essere a 120°; identico discorso si può fare per γ, ma soprattutto *lo si può fare per* β, che è il Punto di Fermat del triangolo O_1O_2E, e che è costruibile con il metodo visto sopra. Lo stesso metodo (applicato ai triangoli $Ab\beta$ e $Cd\beta$) ci permette di trovare le altre due biforcazioni.

Esiste un metodo generale? Beh, "Mica tanto".

Supponiamo ci sia fornita una rete (non necessariamente minimale) per $n \geq 4$ città. Se contiene due città connesse da un segmento, se rimuoviamo questo segmento otteniamo due grafi formati da meno di n villaggi e potremo risolvere il problema separatamente per ognuno di loro. Se la rete che avevamo all'inizio era quella minimale per le n città, allora le due sottoreti ottenute sono le più corte all'interno di quei due sottoinsiemi di città; se invece la rete iniziale non era minimale, possiamo ridurre la lunghezza di una delle sottoreti e, quindi, ridurre la lunghezza della rete originale.

Se ogni arco che parte da una qualche città porta ad una biforcazione, deve esserci una biforcazione che porta a due città (visto che il numero delle biforcazioni è minore del numero delle città); siano i villaggi e la biforcazione A, B e α rispettivamente, e consideriamo il terzo segmento uscente da α; se porta a un'altra città C, possiamo spostare

a in modo tale che si trovi nel Punto di Fermat di ABC e eliminare temporaneamente queste tre strade, trasformando il nostro grafo in tre grafi mutuamente disconnessi e singolarmente risolubili. Se invece il nostro terzo arco porta a un'altra biforcazione, possiamo ricavare i punti O_1 e O_2 come fatto per il quadrilatero e il pentagono, ricavando quindi la posizione delle biforcazioni. Sostituendo adesso le città A e B con la città O_1 e i segmenti aA, aB e $a\beta$ con $O_1\beta$, riduciamo il problema a quello formato da soli n–1 vertici, e possiamo trovare tutte le biforcazioni tranne a, che si troverà all'intersezione tra O_1B e il cerchio circoscritto al triangolo ABO_1.

E adesso, buona passeggiata!

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms