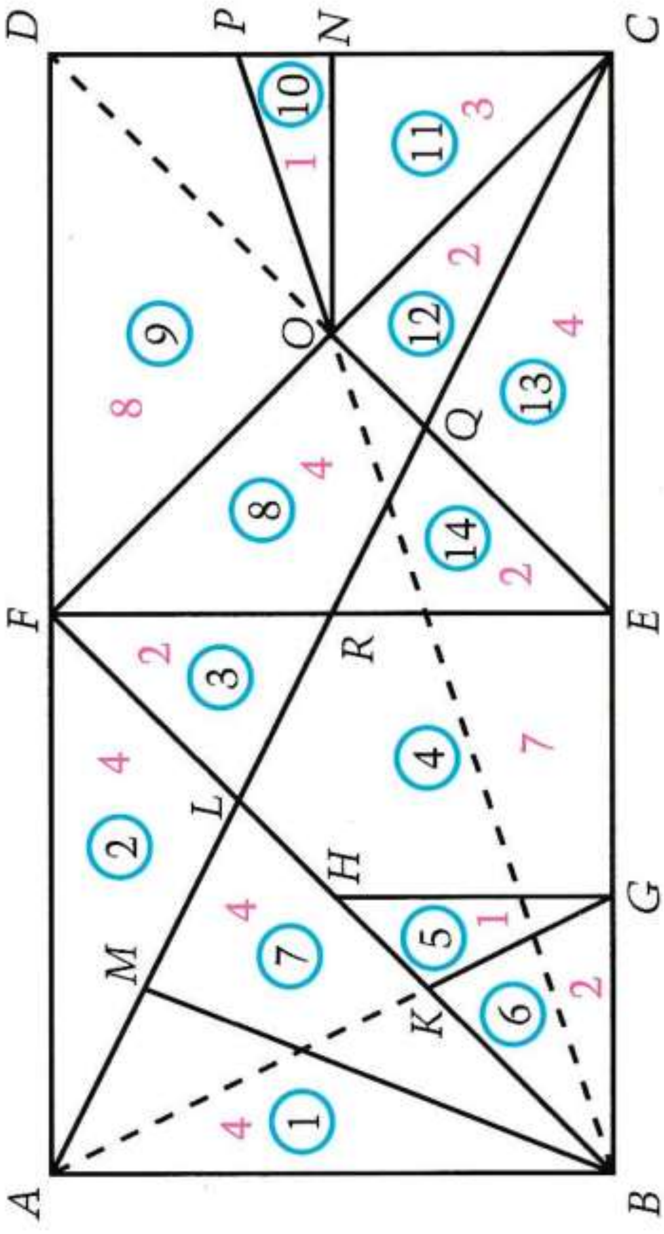
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 297 – Ottobre 2023 – Anno Venticinquesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM289 ha diffuso 3'375 copie e il 26/04/2023 per Google eravamo in 7'920 pagine.

Un buon modo per impegnare le ferie può essere la costruzione di uno ***stomachion***, per costruire qualche figura. Nel caso le vostre vacanze siano talmente avventurose da non avere neppure un foglio di carta per ottenerlo, potete sempre tracciarlo sulla sabbia e calcolare l'area di ognuna delle parti. O esplorare il fatto che, secondo i nostri testi, oltre la forma classica basata sul rettangolo 2:1, esistano interessanti variazioni "effettuando le stesse divisioni su un rettangolo qualsiasi o su un parallelogramma". Ne esiste qualcuno di particolarmente "armonico"?

1. Il più famoso

Ragazzo mio, se desideri uscire nel mondo di cui senti tanto parlare alle riunioni di quartiere, devi procurarti un altro paio di occhi; gli occhi della lettura e della scrittura. C'è così tanta meravigliosa conoscenza e apprendimento nel mondo che non potrai ottenere se non sai leggere e scrivere. La conoscenza è la scala d'oro attraverso la quale saliamo al cielo; la conoscenza è la luce che illumina il nostro cammino attraverso questa vita e conduce a una vita futura di gloria eterna.

(mamma Olimpijada)

Diventare ricchi e famosi è probabilmente il desiderio meno originale del mondo. Non che sia banale, o addirittura riprovevole: alla fin fine, è la scorciatoia perfetta per soddisfare quasi tutti gli imperativi biologici con cui devono fare i conti tutti gli esseri viventi: fama e ricchezza, quasi senza eccezione, garantiscono la sopravvivenza – in genere, una comodissima sopravvivenza – individuale, nonché un'ottima garanzia di trovare facilmente i più desiderabili partner sessuali con cui contribuire alla continuità della specie, e come bonus offrono anche tutta una pletora di possibilità per placare il tedio che talvolta minaccia coloro che riescono a soddisfare temporaneamente i due istinti principali, ovvero proprio quello della sopravvivenza dell'individuo e quello della sopravvivenza della specie di appartenenza. Così, voler diventare ricchi e famosi, per quanto poco originale, è il desiderio più "naturale" del mondo, persino dal punto di vista scientifico.

È però interessante analizzare perché le due proprietà vadano quasi immancabilmente di pari passo: pur non essendo strettamente sinonimi, ai nostri giorni è raro vederli separati. Questo dipende ovviamente dal fatto che nella cultura occidentale (ma anche nel resto del mondo, a dire il vero) e in questi nostri tempi (ma anche in quasi tutti gli altri tempi storici, a ben vedere) è abbastanza difficile trovare qualcuno che sia famoso senza essere ricco, o ricchi che non siano famosi; ma a voler essere pignoli, in via teorica le differenze tra le due caratteristiche sono maggiori delle somiglianze. Essere ricchi significa avere molti beni materiali, e i beni materiali hanno la graziosa caratteristica di essere quantificabili; se a ciò si aggiunge che gli esseri umani hanno da tempo inventato un comodo quantificatore del valore dei beni materiali chiamato denaro, si giunge alla facile conclusione che, per mezzo di facili calcoli aritmetici, la ricchezza è perfettamente esprimibile in quantità di soldi posseduti. Questo comporta che la misura della ricchezza è straordinariamente oggettiva: si possono stabilire convenzionalmente delle soglie che determino classi specifiche di appartenenza (poverissimi, poveri, così così, riccastri, ricchi, ricchi sfondati) e assume significato anche se la grandezza misurata travalica la barriera dei numeri interi e positivi fino ad avventurarsi nel semiasse negativo, dove verranno inseriti coloro che rischiano la galera per insolvenza dei debiti. Insomma, stilare una classifica dei più ricchi del pianeta, avendo a disposizione i dati oggettivi, si riduce solo a un noioso processo di raccolta dati, normalizzazione e ordinamento.

Il discorso è un po' diverso per quanto riguarda la fama. La differenza principale è che la notorietà non dipende (o perlomeno non dipende solo) da riscontri oggettivi, ma anche da valutazioni soggettive. Campioni di cricket sono osannati in paesi popolosissimi, e del tutto sconosciuti in altre parti del mondo; nel Medio Oriente sono tenuti in altissima stima i poeti, ma difficilmente si trovano in Europa persone in grado di nominarne anche solo uno, e così via. Oltre a ciò, la ricchezza – come abbiamo detto – può anche essere negativa, ma l'aggettivo "ricco", quando associato a speranze, auguri e desideri (cioè virtualmente sempre) è inteso solo in senso positivo, perché per coloro che sono "negativamente ricchi" si adoperano centinaia di vocaboli specifici di migliore comprensione, e generalmente poco graditi dai soggetti destinatari. La fama, invece, ha effettivamente un lato oscuro che però è più difficile da separare da concetto primario. Difficilmente una nonna augurerà alla nipotina di diventare "tristemente famosa", ma è indubbio che si può diventare assai famosi anche per ragioni tutt'altro che auspicabili e positive. È più famoso Adolf Hitler o il Mahatma Gandhi? Entrambi hanno avuto influenza su molti milioni di persone, e un approccio quantitativo è forse comunque possibile, anche se assai complicato da valutare, ma conta o no la qualità dell'influenza che hanno avuto? Quasi sempre il termine "famoso" porta con sé, anche se non del tutto giustificato, un'ombra di connotazione positiva, e per eliminarlo occorre sempre aggiungere l'antidoto di un avverbio correttivo (quel "tristemente" che abbiamo usato poco sopra, o "tragicamente", "purtroppo", e così via). Quest'implicita connotazione positiva complica ancora di più la ricerca di una metrica oggettiva della "fama" (o della "notorietà", o della "influenza"), perché aggiunge un ulteriore elemento di valutazione soggettiva: ad un congresso di matematici, è verosimile che tutti riconosceranno che Georg Cantor è meno famoso di Diego Maradona, ma molti sottolineeranno che però Cantor dovrebbe essere un po' più famoso, e magari anche che Maradona dovrebbe esserlo un po' meno. E certo non mancheranno molti che, citando Hardy[1], si diranno disposti a scommettere che, fra un migliaio di anni, la fama di Cantor resisterà ancora in qualche forma, mentre quella di Maradona sarà solo ardito oggetto di ricerca per pochi ricercatori accademici della storia dello sport.

Con certe premesse, è abbastanza difficile immaginare come si possa stilare una classifica delle persone più famose del mondo, anche con la eventuale precisazione che imponga un tempo ben preciso (ad esempio, ai giorni nostri) e in un determinato paese dei duecento e passa che si spartiscono il mappamondo. Ciò non di meno, è tutt'altro che difficile trovare in rete delle liste che ci provano, e la quantità di informazioni che oggigiorno è possibile estrarre dalla Rete sono tante e tali da rendere almeno parzialmente significativi i risultati che si ottengono. Ad esempio, avete idea di chi sia secondo Google l'italiano più famoso del mondo?

1 *Khabi Lame, l'italiano più famoso al mondo nel 2022.*

Dimenticate i grandi dell'antica Roma, sorvolate sui grandi artisti del Rinascimento. In questo XXI secolo. Oggi, nell'epoca dei social, essere famoso implica una certa presenza mediatica che personaggi come Leonardo Da Vinci, Enrico Caruso o Dante Alighieri non possono avere. La veloce ricerca in rete porta a personaggi che spiazza impietosamente la generazione dei redattori di questa rivista, cosa che forse implica anche una certa traslazione dello stesso significato del termine "famoso". E vale per tutto il mondo: caratteristica costante legata alla fama, in ambiente internazionale, è l'appartenenza al mondo dello spettacolo o dello sport. L'elenco degli italiani famosi riporta diligentemente Sofia Loren, Roberto Benigni e Laura Pausini, che condividono le liste con Valentino Rossi e Francesco Totti. La forza dei social network comunque impera (soprattutto nelle liste generate dalla Rete stessa) e lo dimostra che a troneggiare sulla lista degli italiani più famosi nel mondo dell'anno 2022 c'è Khabi Lame, che ha letteralmente spopolato su Tik Tok ed è stato visto in faccia da un numero di persone assai maggiore di tutti gli abitanti della Terra al tempo di Giulio Cesare.

Ma noi scriviamo e voi leggete una rivista di matematica, seppur ricreativa, e ipotizziamo che potreste essere interessati più a scienziati e scienziate che a intrattenitori d'ambo i sessi. In tal caso, sappiate che con la chiave di ricerca "italiani famosi nel mondo" abbiamo trovato solo Guglielmo Marconi. Aggiungendo la chiave "scienziato" alla ricerca, va un po' meglio, con la comparsa di un po' di nomi, primi fra tutti Enrico Fermi, Rita Levi Montalcini ed Alessandro Volta.

[1] «Archimede sarà ricordato quando Eschilo sarà dimenticato, perché le lingue muoiono mentre le idee matematiche non lo fanno. "Immortalità" è forse una parola sciocca, ma probabilmente un matematico ha le migliori probabilità di raggiungerla, qualunque cosa essa possa significare». Godfrey Harold Hardy, "*Apologia di un matematico*", 1941)

2 *David Beckham e la regina Elisabetta.*

Non ci sono solo i motori di ricerca, per fortuna, ma anche le domande dirette ad amici stranieri, specialmente se si ha la ventura di risiedere al di fuori dei patri confini. Il risultato però non è che sia particolarmente consolatorio: per il resto del mondo è assai noto, tra i politici nazionali, solo Mussolini, mentre Camillo Benso, conte di Cavour, resta virtualmente sconosciuto. Chiedendo se si ricorda qualche sovrano del defunto Regno d'Italia, lo stupore è dato soprattutto dalla deduzione che il nostro paese sia stata un tempo una monarchia, cosa che in fondo può anche suonare consolatorio per i cittadini dell'ancor giovane Repubblica Italiana. Restando nel campo dell'appeal esercitato dalle monarchie, bisogna riconoscere che tutt'altro discorso andrebbe invece fatto per i reali britannici: non si capisce se il loro successo come influencer sia da attribuire più all'enorme impatto che ha avuto il Regno Unito sulla storia del mondo, o al florilegio di scandali e chiacchiere generati nell'ultimo secolo. Nel serrato duello ai vertici della fama ingaggiato tra la regina Elisabetta II e David Beckham, con Shakespeare e Newton lontanissimi dalla top-ten, ci sentiamo autorizzati a consolare Leonardo, Galileo, Dante e tutti gli altri artefici della nostra cultura.

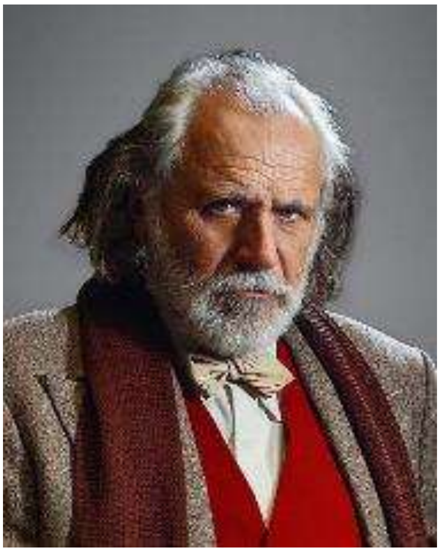
Siamo partiti da realtà molto note, come quella italiana o quella britannica, perché è facile identificare personaggi noti a molti. Appena si comincia ad addentrarsi in altre nazioni, si cominciano ad avere dei problemi. Qual è, per esempio, il primo svizzero che vi viene in mente? Guglielmo Tell? O Roger Federer? O Heidi? E qui parliamo di una nazione con cui confiniamo, per quanto piccola. Ma la nazione nota per il cioccolato, gli orologi, le banche e la neutralità ha prodotto, oltre a Michelle Hunziker, i più grandi matematici di tutti i tempi, come la famiglia Bernoulli e Eulero, per non parlare dei molti ospiti nei vari centri di ricerca, il famoso ETH di Zurigo e oggigiorno il CERN a Ginevra.

Per farsi conoscere al di là dei confini nazionali occorre attraversare quei confini: se non fisicamente, almeno producendo qualcosa che abbia valore anche altrove e che valga la pena di ricordare. Dopo ogni guerra ed ogni crisi economica gli italiani sono partiti per le Americhe e il nord dell'Europa a cercare lavoro e fortuna. Secondo le attuali statistiche ci sono più persone di origine italiana nel mondo (circa 80 milioni) che in Italia. Molti degli italiani partiti agli inizi del Novecento erano armati solo di una valigia di cartone e delle loro braccia, ma la diaspora continua a stupire; solo, adesso ad emigrare sono più i cervelli che le mani.

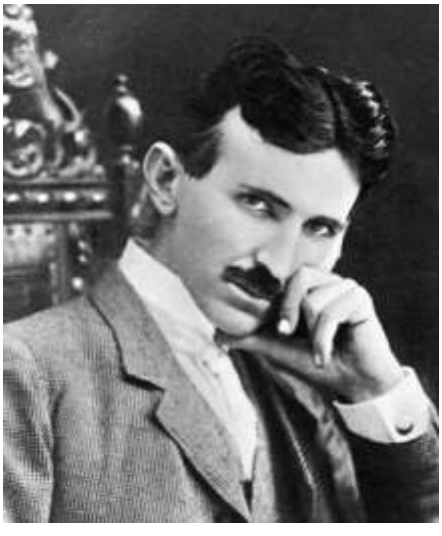
3 *Novak Djoković.*

E ora proviamo a cercare le stesse persone per la Serbia.

Il gioco è possibile solo da pochi anni, perché quella che oggi è Serbia è stata prima Serbia & Montenegro, prima ancora Jugoslavia, e la storia le ha cambiato spesso nome e bandiera. In questa giovane nazione il gioco del connazionale più famoso non è difficile da pronosticare: non c'è avvero dubbio che al giorno d'oggi il serbo più noto al mondo è Novak. È il tennista più vincente della storia del tennis, parla molte lingue e le usa tutte per fare pubblicità alla sua patria. Ma a parte lui, quanti serbi conosciamo?


4 *Rade Šerbedžija*


5 *Mileva Marić.*


6 *Nikola Tesla.*

Sicuramente gli americani ne conoscono più di noi, anche se tra Italia e Serbia distano meno di quattrocento chilometri mentre tra USA e Serbia ce ne sono ben più di seimila. Loro, che apprezzano il basket quasi quanto gli italiani adorano il calcio, conoscono bene alcune leggende serbe del basket del passato e del presente. La pallacanestro, la pallanuoto e la pallavolo sono tra gli sport in cui i serbi sono fortissimi, ma da noi sono moderatamente popolari, e si finisce con il parlarne solo durante le Olimpiadi o i Campionati del Mondo. È possibile che in Italia il volto più noto del basket serbo sia Boban Marjanović, più che altro perché è un gigante alto più di due metri e venti ed è stato protagonista di parecchi film.

Certo, se si parla di cinema, è probabile che a qualcuno venga in mente Emir Kusturica, che ha vinto parecchi premi come regista. Per contrappasso, un attore serbo di cui nessuno ricorda il nome ma che ha recitato (quasi sempre facendo il cattivo) in più film di quanti se ne possano contare è Rade Šerbedžija. Ci saranno poi intere generazioni di maschietti che ricordano benissimo Milla Jovović, ma lei conta solo a metà, perché nata in Russia da mamma russa.

Torniamo alla scienza? Beh, anche qui è relativamente facile: lo scienziato serbo più famoso è senz'altro Nikola Tesla, di cui si è già parlato proprio in queste pagine[2], così come di Mileva Marić[3], meno nota ma ormai da tempo considerata il segreto dietro i primi successi di Albert Einstein.

Essere serbi ha spesso poco a che vedere con il paese in cui si nasce: Nikola e Rade sono nati in Croazia, Emir in Bosnia. Nei passaporti serbi è presente sia l'etnia sia la nazionalità, che per noi può sembrare strano, ma per un paese che ha visto i suoi confini ridisegnati praticamente ad ogni generazione, il senso di appartenenza ad una cultura definita, con tradizioni e storia, ha un valore non indifferente.

Il più grande scrittore serbo di tutti i tempi è stato Ivo Andrić, che ha vinto il Nobel per la letteratura e che con i suoi "*Il ponte sulla Drina*" e "*Cronache di Travnik*" ha descritto centinaia di anni di storia dei Balcani. È una lettura che trasporta in una storia violenta e piena di colpi di scena, in cui i vicini diventano nemici nel giro di una notte e giovani rubati alle loro famiglie diventano generali guerrafondai che attaccheranno con la peggior violenza le loro stesse famiglie. È stato lui a calcolare che negli ultimi 500 anni la regione è stata teatro di guerra in media ogni 50 anni:

[2] Per la precisione in RM174, "*A me gli occhi*", Luglio 2013.

[3] Ne parliamo proprio in occasione del compleanno di Einstein, in RM074, "*Varianti e Invarianti*", Marzo 2005.

in pratica non esiste generazione nei Balcani che non abbia conosciuto la guerra, inclusa l'ultima, che l'ha vissuta negli anni Novanta.

7 *I Balcani.*

L'etimologia della parola "Balcani" rivela che il nome è di origine turca, e significa semplicemente "montagne". E il punto è che la regione è effettivamente piena di monti, e dal punto di vista dei popoli che si muovono le montagne stanno proprio in mezzo alla strada che si intende percorrere. Così, le migrazioni (tutte più o meno motivate da guerre) dall'Asia verso l'Europa e viceversa hanno dovuto attraversare questa regione, e nel farlo hanno lasciato tracce nelle tradizioni, compresa quella gastronomica. Belgrado è stata protagonista in 115 guerre e rasa al suolo 44 volte. Impossibile immaginare che il luogo in cui sorge non sia davvero bello e i suoi abitanti davvero cocciuti, se si sono intestarditi a ricostruirla così tante volte.

Sulla collina di Belgrado c'è una bellissima fortezza – Kalemegdan – che è stata roccaforte turca e austroungarica, protagonista di duemila anni di storia: oggi è un parco per fare lunghe passeggiate proprio dove si incontrano il Danubio e la Sava. È divertente scorrere su Wikipedia[4] la lista degli eserciti, delle nazioni che l'hanno durante i secoli: molto contesa e molto desiderata, non si sa bene per ragioni militari o per la bellezza del paesaggio. Tra i percorsi c'è sia il mausoleo di un dignitario turco che il "Monumento al Vincitore" (nudo, con spadone nella mano destra e un falco posato sulla sinistra, a simboleggiare sia la guerra che la pace), che non ha trovato un posto degno nel centro di Belgrado, e così è stato relegato su una altissima colonna, e non manca una chiesa ortodossa con tanto di fonte che si pensa avere proprietà curative. Sacro e profano, guerra e pace.


8 *Gavrilo Princip*

Non stupisce che il personaggio storico serbo più noto sia Gavrilo Princip, l'uomo che ha provocato l'inizio della Prima guerra mondiale e quindi la caduta di tre imperi, anche se gli storici sono ormai certi che quel conflitto sarebbe scoppiato comunque. È come se la scintilla accesa da Princip a Sarajevo fosse stata quella del primo accendino ad accendersi in un concerto allo stadio: ne sarebbero seguite altre, anche senza la sua.

Invece, colui che ricopre il ruolo di Dante dei Serbi è addirittura un santo: Sveti Sava. Nato nel XII secolo come terzogenito del re in carica, si ritira presto sul monte Athos per studiare e meditare. Non fu solo uno dei primi uomini di cultura del suo tempo, ma un riformatore e viene ricordato per aver fondato la chiesa ortodossa serba.

A lui è dedicata la chiesa di San Sava a Belgrado, una costruzione colossale completata solo negli ultimi anni e iniziata negli anni Trenta, con numerose interruzioni a causa… beh, delle varie guerre. Non c'è rappresentazione di Sava l'Educatore senza un libro o un manoscritto, ma non si limitò a riformare la chiesa: si adoperò per avere le chiese restaurate e la diocesi riorganizzata. Fu famoso per interventi politici e di mediatore, e fondò numerose scuole per permettere ai giovani di imparare a leggere e scrivere.

[4] https://it.wikipedia.org/wiki/Fortezza_di_Belgrado

9 *San Sava.*

La prima ricerca di italiani famosi avrà lasciato deluso qualche lettore: possibile che, se non si aggiunge la parola "scienziato", la lista risultante contenga solo il nome di Guglielmo Marconi? Possibile che, come in una finale del campionato mondiale di basket, noi si venga sconfitti dalla Serbia che, in quella lista, e senza riduzione del campo di ricerca, restituisce due nomi, quello di Tesla e quello di Marić? Possiamo consolarci pensando che il mondo culturale italiano è ben più vasto di quanto possa essere riassunto da una lista compilata da un algoritmo, certo; ma in questo caso bisogna anche tener conto che, magari, l'algoritmo ha giocato lo stesso scherzo anche ai serbi. Ad esempio, siamo certi che non abbia riportato almeno un nome del tutto notevole, quello di Mihajlo Pupin.

10 *Mihajlo Idvorski Pupin*

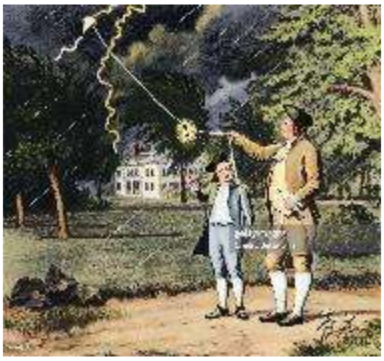
Mihajlo Idvorski Pupin è nato a Idvor il 9 Ottobre 1854 da Kostantin e Olimpijada[5]. La data di nascita è controversa, visto che il nostro calendario gregoriano presso i seguaci del rito ortodosso non ha mai incontrato grande favore: quindi il nostro potrebbe anche essere nato il 22 o il 27 settembre. A complicare ulteriormente le cose, sulla sua tomba americana la data di nascita riportata è il 4 ottobre.

Idvor è un villaggio di pastori, di dimensioni minuscole ancora oggi. A suo tempo si trovava nella zona della frontiera militare dell'impero austriaco. La cittadina più vicina, Pančevo, è oggi un bel centro non lontano da Belgrado, ma a suo tempo era anch'essa di dimensioni piccolissime. In buona sintesi, Pupin non se la prenderà se sintetizziamo il tutto dicendo che è nato in mezzo al nulla. Alle scuole elementari si dimostrò un pessimo studente, anche se probabilmente il vero problema era la scarsa motivazione del maestro locale. Inoltre i genitori di Mihajlo

[5] La lingua serba è molto precisa per quanto riguarda la riproduzione dei suoni, per cui ad ogni suono corrisponde una lettera. In cirillico, le lettere sono 30, mentre la versione con le lettere che usiamo noi usa gruppi di lettere per generare alcuni suoni. Per esempio la "g" in Giovanni si scrive Dj (Ђ) – che è la prima lettera del cognome di Novak. La "j" è da sola per il suono che corrisponde alla prima "i" in iodio. Così nomi come Adriana e Maria si scrivono in serbo Adrijana e Marija. La lettera che genera più confusione è la c, che senza accento si legge come la zeta di pizza, e può avere due diversi accenti – č o ć – per due suoni di "c" morbida che da più di vent'anni uno dei vostri Redattori (Francesca Ortenzio, in serbo Frančeska Ortencio o meglio Франческа Ортенцио) sta ancora cercando di distinguere.

pur non sapendo né leggere né scrivere, erano assai indaffarati perché erano comunque delle un'autorità locali: il padre rivestiva un ruolo chiave nel controllo militare della frontiera, e la madre, nonostante l'analfabetismo, era considerata dai concittadini il miglior riferimento per i testi ortodossi e le vite dei santi, incluso San Sava. Di quest'ultima sono le parole in testa a questo articolo, parole che convinsero Mihajlo ad impegnarsi più seriamente negli studi, tanto che presto diventa troppo bravo per il maestro di Idvor, e ancora più in fretta troppo in gamba per la scuola di Pančevo. Più di qualsiasi altra cosa, furono le letture da autodidatta che lo resero presto curioso di fenomeni scientifici, e soprattutto degli esperimenti di Benjamin Franklin.

A questo punto il metodo scientifico comincia ad interessare talmente a fondo il nostro eroe, e così l'idea di visitare nuovi posti e soprattutto arrivare in quell'America da cui le storie provenivano. Malgrado le limitatissime risorse finanziarie dei genitori, le capacità di Mihajlo non passano inosservate, e presto – anche a causa delle sue idee politiche, che lo misero spesso nei guai – fu presto organizzato un gruzzoletto così che il nostro eroe potesse studiare a Praga. Da qui, viene a sapere della morte del padre e si rende conto di non poter più contare su alcun supporto finanziario da Idvor, e si decide a vendere tutto quello che aveva (più che altro vestiti) per comprare un passaggio da Amburgo a New York.



11 *Benjamin Franklin e l'esperimento sull'elettricità*

Cercando di restare fedele alla promessa fatta alla madre, di tornare ricco di conoscenza e saggezza, arriva oltreoceano con niente e si rimbocca le maniche: mentre lavora tra fattorie e fabbriche, studia l'inglese, il latino ed il greco e raccoglie il necessario per entrare all'università. Università in cui eccelle soprattutto nelle materie scientifiche, e che completa mentre allo stesso tempo ottiene la cittadinanza americana nel 1883.

Tutto questo e molto altro viene raccontato nella sua autobiografia, nella versione americana "*Da immigrato a inventore*" per la quale Mihajlo (a questo punto Michael) vinse un premio Pulitzer. Ma la vita di questo personaggio incredibile non era cominciata in America, il titolo originale in serbo è "*Da pastore a inventore*". Infatti, il motivo per cui parliamo di Pupin è la sua attività come scienziato ed inventore: a suo nome sono registrati 34 brevetti. Fu eccezionale insegnante ed ispirò più generazioni allo studio. La più famosa invenzione è quella che permise la comunicazione telefonica a lunga distanza, utilizzando bobine che amplificavano il segnale, ma escogitò anche numerosi miglioramenti alla base delle moderne radiografie. Non è "famoso" in Italia, forse, ma lo è in America, dove i brevetti qui sopra sono registrati e numerose stanze universitarie, premi e onori sono a lui dedicati. Fu uno dei padri fondatori della NACA (National Advisory Committee for Aeronautics, diventato poi NASA), della American Mathematical Society e della American Physical Society, per non parlare del suo ruolo prominente nelle società scientifiche dell'epoca: American Institute of Electrical Engineers, New York Academy of Sciences, Radio Institute of America, American Association for the Advancement of Science.

Fece onore a sua mamma e a san Sava creando borse di studio, librerie e scuole in varie parti della Serbia, creando associazioni di serbi ortodossi all'estero, e ad ogni possibile occasione rappresentando il suo paese e promuovendo lo spirito di ricerca. Il suo amore per la patria in cui aveva solo vissuto brevemente non venne mai meno, e neppure il suo attivismo politico. Aveva studiato le cause della Prima guerra mondiale in dettaglio ancor prima dell'azione di Gavrilo Princip (a quel punto era già un'autorità in materia) ed era presente durante le trattative per la pace a Parigi: e si dimostrò fondamentale per il tracciamento dei confini della neonata Jugoslavia.

Non tutti gli italiani sono calciatori o cantanti, non tutti i serbi sono tennisti o assassini.

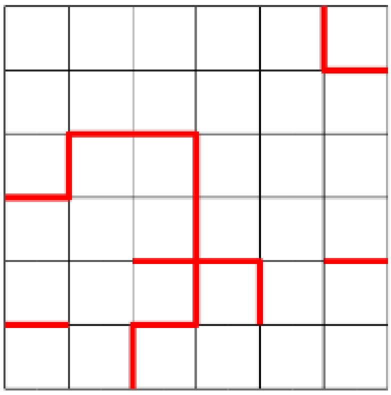
2. Problemi

2.1 Non soppianterà il Sudoku...

...ma a noi pare carino.

Prima la domanda di espansione, decisamente "aperta": qualcuno di voi ha idea del perché questi aggeggi si chiamino "Tower Squares"? Al "quadrato" ci arriviamo da soli, grazie, ma il concetto di "Torre" ci pare abbastanza stiracchiato.

Siamo ragionevolmente convinti che i giapponesi siano invidiosi di sé stessi, almeno nel campo dell'enigmistica: infatti, avevano appena finito di inventare il sudoku e sono partiti subito a cercare di inventare altri giochi dello stesso tipo, con vario grado di interazione matematica.



12 *Tower Square (facile, dicono…).*

L'ultimo che abbiamo scoperto risponde al nome di "Tower Square" (se qualcuno sa come si dice in giapponese, grazie: sfoggeremo subito questa nostra nuova conoscenza): una Tower Square di ordine n è un quadrato nel quale, in ogni riga e ogni colonna, il valore k (con $1 \leq k \leq n$) compare esattamente k volte; quindi avete un "1", due "2", …, kappa "k", …, enne "n". Non dovreste avere problemi a decidere quale debba essere il lato del quadrato e, *a questo punto* (altra espansione, più seria) potreste trovare una formula per calcolare quanti quadrati di questo tipo di un dato ordine esistano, escludendo rotazioni e riflessioni (...e potreste anche spiegarci una buona volta come si escludono matematicamente le rotazioni e riflessioni... Mai stata particolarmente chiara, la cosa).

Comunque, la definizione del Tower Square qui sopra è *incompleta*: infatti, se guardate quello che abbiamo disegnato qui, vedete che alcune linee sono rosse[6]: bene, quando due celle hanno in comune un bordo rosso, nelle due celle va scritta la stessa cifra.

Fateci sapere se questa roba vi piace, che ne abbiamo qualcun altro. O preferite li si tenga per l'estate prossima?

2.2 I laghi di Mathland

I più vetusti lettori di questa rivista ricorderanno, probabilmente, l'affascinante paese di Mathland, nel quale le rette erano vere rette, le circonferenze erano vere circonferenze e... no, meglio se lasciamo perdere.

Una caratteristica di questa landa felice era che i laghi erano perfettamente circolari (e il terreno perfettamente piano, per non far faticare le zanzare).

In base ad oscuri motivi che hanno coinvolto entità che è bene non nominare[7], siete stati nominati cartografi ufficiali di Mathland. E, come avete scoperto a vostre spese, i finanziamenti per il materiale di lavoro latitano (altrimenti, mica nominavano voi, cercavano una persona seria!).

Vi ritrovate, quindi, a prendere le misure sul territorio dotati di un'attrezzatura ampiamente insufficiente alla bisogna, e oggi sula vostra scrivania sono arrivati due problemi complessi.

[6] Negli originali le linee qui rosse sono semplicemente ingrossate: non essendo sicuri della risoluzione del disegno, abbiamo preferito cambiare colore.

[7] Come i più sagaci di voi avranno intuito, Rudy sta rileggendo Lovecraft. *Fthagn!*

Nella mattinata, dovete misurare il raggio di un simpatico laghetto (perfettamente circolare); il guaio è che avete a disposizione strumenti che vi permettono di tracciare (e misurare) unicamente segmenti di retta, e che *non potete passare sopra il lago*; in pratica, fuori dal lago potete tirare tutti i segmenti che volete (e misurarli con precisione assoluta), ma come mettete il righello (o quel che è) sul lago, questo perde le proprie caratteristiche (un "regolo solubile[8]"?). Come misurate il raggio del lago?

Ci avete messo tutta la mattinata per fare questa misurazione e, ristorati da un rustico ma sostanzioso pasto, affrontate il guaio del pomeriggio.

Qui, vi ritrovate con due laghi circolari della stessa dimensione (misurata con il metodo che avete trovato prima di pranzo, quindi ne avete certezza), e siete interessati alla distanza minima tra di loro: i vostri strumenti però, pur mantenendo una precisione assoluta (e pur continuando ad essere inorriditi dal passare sull'acqua), cominciano a mostrare la stanchezza tipica del tardo pomeriggio: infatti, la distanza massima che potete misurare è *minore* della distanza minima tra i due cerchi. Esiste un modo per misurare la distanza minima tra i due cerchi?

3. Bungee Jumpers

- Dimostrate che 2^n può *iniziare* con qualsiasi sequenza di cifre.
- Sia M un numero di k cifre. Qual è la probabilità che le prime k cifre di 2^n rappresentino il numero M?

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Ottobre.

4.1 [295]

4.1.1 Tornano i batteri!

Ambientazione da fine del mondo per questo primo problema:

> *Nel nostro vaso di Petri si è sviluppata una colonia di batteri: se si incontrano due batteri di sesso diverso il figlio sarà una femmina, in caso contrario sarà un maschio; quando il cibo è scarso, gli incontri sono casuali e entrambi i genitori muoiono quando nasce il batterino. Quindi, la nostra colonia, in caso di scarsità di cibo, si ridurrà prima o poi ad unico batterio; supponendo di avere, all'inizio, 10 maschi e 15 femmine con cronica scarsità di cibo, qual è la probabilità di avere alla fine una sola femmina?*

Lo stesso giorno dell'uscita del numero ci ha scritto ***Valter***:

> Una veloce verifica dei tre casi possibili (MM, FF, MF/FM) mostra che la parità del numero di F si mantiene ad ogni accoppiamento.
>
> Il numero di femmine all'inizio è 15, cioè dispari, ed il numero totale di maschi più femmine decresce di uno ad ogni accoppiamento.
>
> Quando si giunge ad un unico batterio, dato che uno è dispari e zero pari, il sopravvissuto è una femmina, quindi probabilità: 100%.

Non è passato molto tempo prima che arrivasse la soluzione di ***Alberto R.***, anche lui si basa sulla parità:

> Sostituiamo "Maschio" con "Pari" e "Femmina" con "Dispari". Poi sostituiamo la nascita di un batterio figlio, e la contemporanea morte dei due batteri genitori, con l'operazione di addizione, dove gli addendi muoiono, cioè scompaiono, e sono sostituiti dalla loro somma.

[8] Volevamo cercare qualche arguto gioco di parole tra "soluzione" (nel senso di quella cosa che viene dopo il problema) e "soluzione" (nel senso di quella cosa che si scioglie), ma meglio se lasciamo perdere…

> Il problema diventa: La somma di 15 numeri dispari e non importa quanti numeri pari è pari o dispari?
>
> La risposta è data dal noto gioco di parole: "la somma di più numeri è dispari sse è dispari il numero degli addendi dispari".

Ci sembra abbastanza chiaro come procedere, a questo punto, ma vi passiamo la soluzione di ***Galluto***:

> 100%.
>
> Il numero delle femmine è dispari e tale rimarrà sempre: quando l'incontro è "etero" nasce una femmina e ne muore una (oltre ad un maschio) e quindi il numero delle femmine rimane invariato (e dispari); quando l'incontro è tra due femmine, muoiono entrambe (e nasce un maschio) e quindi il numero delle femmine scende di due, da un numero dispari all'altro.
>
> E quindi, presto a tardi, rimarrà una unica femmina che incontrerà tutti i maschi (compresi quelli nati dagli incontri di due femmine) e il risultato di ciascun incontro sarà la riduzione di uno del numero dei maschi, finché s'incontreranno l'ultimo maschio e la femmina superstite e … ciao maschio! (Marco Ferreri, 1978).

Beh, ambientazione da fine del mondo, l'avevamo detto. ***Luigi*** scrive:

> Il meccanismo di riproduzione in caso di emergenza fa sì che sia i Maschi che le Femmine vengono distrutti se incontrano una Femmina. Se il numero di femmine nel gruppo di partenza è pari il loro destino è segnato poiché negli accoppiamenti con un Maschio non diminuiscono di numero mentre nell'accoppiamento con un'altra Femmina spariscono in coppia lasciando come erede un Maschio. Nel caso invece di un numero disparo di femmine alla fine resterà una sola Femmina che continuerà a riprodursi fino al completo sterminio dei Maschi!. Quindi il batterio sopravvissuto sarà al 100% un Maschio se le femmine sono in numero pari mentre sarà al 100% una Femmina se le Femmine sono in numero dispari. La risposta ai dati del problema (10 Maschi e 15 Femmine) è 100%!

Sopravvivenza del più forte, ne sono convinta. Ultima soluzione, di un redivivo ***Bluemonday***:

> Questo è uno di quei carinissimi problemi in cui un ragionamento sulla "parità" ci conduce alla soluzione abbastanza speditamente: l'osservazione cardine è quella che entrambe le "regole d'accoppiamento" preservano la parità del numero di batteri femmine.
>
> Per essere più espliciti, assumendo di avere un numero F di batteri femmine in un dato momento, se si accoppiano batteri di sesso diverso alla fine avremo lo stesso numero F di batteri femmine (muore la madre, nasce la figlia), mentre negli altri due casi in cui i batteri hanno sesso diverso vediamo che il numero finale di batteri femmine è o di nuovo F (nel caso in cui si siano accoppiati due maschi) o F-2 (nel caso in cui si siano accoppiate due femmine). Ad ogni modo si vede che se il numero iniziale di femmine è pari(dispari) allora anche il numero finale deve essere pari(dispari), rispettivamente.
>
> Con questa osservazione è poi facile dimostrare che l'ultimo batterio rimanente non può essere maschio: se così fosse avremmo un numero finale di batteri femmine pari (in questo caso 0!), ma dato che partivamo da un numero dispari di batteri femmine (15) è abbiamo dimostrato sopra come la parità del numero di femmine è un invariante, questo è un assurdo. Quindi con probabilità 1 avremo che l'ultimo batterio è una femmina.

E adesso andiamo al secondo problema.

4.1.2 Tornano i soldatini!

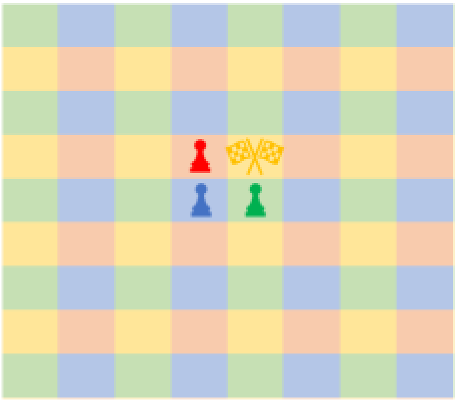
Pedoni come soldati su scacchiere infinite:

> *Avete una scacchiera infinita e su tre vertici di un quadrato ci sono dei pedoni. Questi pedoni muovono così: un pedone può saltare un altro pedone e atterrare nella casella*

> *a una distanza uguale dall'altra parte del pedone, nella stessa direzione. I pedoni non si eliminano, quindi è possibile saltellare all'infinito. Come posso far arrivare un pedone qualsiasi nel quarto vertice?*

Cominciamo questa volta con la soluzione di ***Galluto***:

> Non ci posso mai arrivare.
>
> Per risparmiare spazio, supponiamo che all'inizio i 3 pedoni stiano ai vertici di un quadrato 2×2; non mi sembra che con un quadrato più grande cambi qualcosa, perché posso sempre vedere la casella dove sta il pedone come il centro di un quadrato più grande.
>
> Con un salto ortogonale non c'è speranza: se coloriamo le caselle della scacchiera con quattro colori (credo di ricordare un altro problema di qualche tempo fa…) invece che solo con due possiamo vedere che il pedone rosso può finire solo su caselle rosse, ecc., e quindi nessuno dei tre potrà finire su una casella gialla come quella del quarto vertice.



> Direi che il discorso non cambia anche con salti in diagonale, sia che siano le diagonali di un quadrato che quelle di rettangoli più o meno lunghi: il pedone rosso atterra sempre su caselle rosse, ecc.

Niente altro si è visto per questo problema, andiamo avanti.

4.2 [296]

4.2.1 Le ragioni del ritardo

Il Capo sta cercando di ricordare a tutti perché mi chiamo Alice, ambientando i problemi nel Paese delle Meraviglie:

> *La Regina di Cuori ha preparato tredici torte, ciascuna delle quali andrebbe divisa tra i quattro semi di ognuna delle carte di pari valore. Ma mentre le torte sono a raffreddare in una stanza, ciascuno dei Sette entra separatamente dagli altri nella stanza e ruba un certo numero di torte. Quando vengono scoperti ed interrogati affermano:*
>
> *Sette di Cuori: "Ho rubato un numero dispari di torte"*
>
> *Sette di Quadri: "Ho rubato un numero pari di torte"*
>
> *Sette di Picche: "Ho rubato i due terzi delle torte che ho trovato"*
>
> *Sette di Fiori: "Ho rubato un quarto delle torte che ho trovato".*
>
> *Chi ha preso più torte?*

Questa volta comincia ***Alberto R.***, che propone anche un teorema che non conoscevamo:

> Inizialmente ci sono13 torte
>
> - Entra Cuori e ne ruba 5 (dispari). Ne restano 8
> - Entra Fiori e ne prende 2 cioè 1/4 di 8. Ne restano 6
> - Entra Picche che se ne sbafa 4 cioè 2/3 di 6. Ne restano 2

- Entra Quadri che porta via le 2 (pari) rimanenti.

E non ci sono altre soluzioni in forza del noto teorema di unicità: "I rudiproblemi, quando il testo non è equivoco, hanno sempre una e una sola soluzione".

Teorema che non può essere verificato facilmente, perché la condizione raramente si applica. ***Valter*** considera tutte le possibili combinazioni:

Per comodità chiamerò C, Q, P e F i quattro Sette. L'ultimo a rubare può essere solamente C oppure Q. Gli altri 2 Sette lascerebbero torte nella stanza. Il primo ad entrare nella stanza non può essere P. Le 52 torte non sono, infatti, divisibili per 2/3. Il primo a rubare torte, non può essere neppure C. I due successivi a rubare sarebbero infatti P e F.
Ho controllato, quindi, tali possibili casistiche. L'ho fatto dal numero di torte, man mano restanti. Ho utilizzato la loro parità ed il loro MOD3/MOD4. Risulta che, comunque si proceda, non è possibile (o per la parità o la divisibilità delle rimaste).
Verifico ora, tutte le possibili sequenze rimaste.
Se la sequenza con cui rubano è: FPCQ oppure FPQC:
- F: 52 – (1/4)*52 = 39 → F ruba 13 torte
- P: 39 – (2/3)*39 = 13 → P ruba 26 torte
- comunque C e Q facciano, è P che ruba più torte.
Elenco, brevemente, tutti i possibili QFPC e QPFC:
- Q: 52 – 8 = 44 → Q ruba 8 torte
- F: 44 – (1/4)*44 = 33 → F ruba 11 torte
- P: 33 – (2/3)*33 = 11 → P ruba 22 torte
- quindi è P che ruba più torte
- Q: 52 – 16 = 36 → Q ruba 16 torte
- F: 36 – (1/4)*36 = 27 → F ruba 9 torte
- P: 27 – (2/3)*27 = 9 → P ruba 18 torte
- quindi è P che ruba più torte
- Q: 52 – 16 = 36 → Q ruba 16 torte
- P: 36 – (2/3)*36 = 12 → P ruba 24 torte
- F: 12 – (1/4)*12 = 9 → F ruba 3 torte
- quindi è P che ruba più torte
- Q: 52 – 24 = 28 → Q ruba 24 torte
- F: 28 – (1/4)*28 = 21 → F ruba 7 torte
- P: 21 – (2/3)*21 = 7 → P ruba 14 torte
- quindi è Q che ruba più torte
- Q: 52 – 32 = 20 → Q ruba 32 torte
- F: 20 – (1/4)*20 = 15 → F ruba 5 torte
- P: 15 – (2/3)*15 = 5 → P ruba 10 torte
- quindi è Q che ruba più torte
- Q: 52 – 40 = 12 → Q ruba 40 torte
- F: 12 – (1/4)*12 = 9 → F ruba 3 torte
- P: 9 – (2/3)*9 = 3 → P ruba 6 torte
- quindi è Q che ruba più torte
- Q: 52 – 40 = 12 → Q ruba 40 torte
- P: 12 – (2/3)*12 = 4 → P ruba 8 torte
- F: 4 – (1/4)*12 = 3 → F ruba 1 torta
- quindi è Q che ruba più torte
- Q: 52 – 48 = 4 → Q ruba 48 torte
- F: 12 – (1/4)*12 = 9 → F ruba 3 torte
- P: 9 – (2/3)*9 = 3 → P ruba 6 torte
- quindi è Q che ruba più torte.
Vi sono poi tutti i, numerosi, casi FCPQ e FQPC (**CQ** è C se dispari con **QC** che è Q …e viceversa):

F	CQ	P	QC
13	3	24	12
13	6	22	11
13	9	20	10
13	12	18	9
13	15	16	8
13	18	14	7
13	21	12	6
13	24	10	5
13	27	8	4
13	30	6	3
13	33	4	2
13	36	2	1

Qui P ruba più torte sino a 16, poi sono C o Q.

Fin qui non ci preoccupiamo più di tanto, in un problema dove Alice viene nominata più di una volta di sicuro le soluzioni devono divergere. Vediamo la versione di ***Galluto***, coloratissima:

> Il più colpevole è 7♥, che ha rubato 5 torte.
>
> Il primo a rubare non può essere né 7♠ né 7♣ perché 13 non è multiplo né di 3, né di 4.
>
> Stessa cosa vale per l'ultimo perché deve portare via tutto il malloppo restante e non solo una parte.
>
> Quindi 7♥ e 7♦ sono il primo e l'ultimo e 7♠ e 7♣ sono il secondo ed il terzo.
>
> Se il primo fosse 7♦ (che ruba un numero pari di torte, e ne lascia quindi un numero dispari), dovrebbe lasciarne 9 (prendendone 4) o 3 (prendendone 10), in modo da lasciarne un multiplo di 3 per 7♠; ma comunque dopo il furto di 7♠ non rimarrebbe un multiplo di 4 per 7♣.
>
> E quindi il primo è 7♥; delle varie combinazioni, l'unica valida è che 7♥ prenda 5 torte e ne lasci 8; entra per secondo 7♣ che ne ruba 2 (un quarto di 8), poi 7♠ che ne ruba 4 (2/3 delle 6 restanti) e infine 7♦ che ruba le ultime 2 (che è un numero pari).

Che assomiglia alla soluzione di Alberto R.! Ci ha poi scritto ***Heaviside***, con molti dubbi:

> Provo a rispondere, anche se la non univocità della soluzione mi lascia perplesso. Ipotizzo – per restringere il campo – che ciascuno dei Sette prenda un numero positivo e intero di torte.
>
> Così facendo, non tutte le sequenze di ingresso nella stanza sono consentite, poiché 13 non è divisibile per 3 (quindi Picche non entra per primo) o per 4 (quindi Fiori non entra per primo).
>
> Vediamo le restanti 12 (potenziali) sequenze.
>
> <u>Entra per primo Cuori</u>
>
> - entra come secondo Picche: in questo caso, per avere una soluzione che rispetti i criteri che abbiamo imposto, Picche deve trovare un numero di torte che sia multiplo di 3 e che sia pari (visto che Picche preleva dalle 13 torte un numero dispari di torte). Delle due opzioni possibili (12 e 6), solo con 12 abbiamo una soluzione valida (ma solo se Fiori entra prima di Quadri)
> - entra come secondo Quadri: ragionando come sopra, se Picche entra per terzo, può trovare 9 o 3 torte, ma questo non consente comunque a Fiori di prenderne almeno una. Anche se entra Fiori per terzo, non troverà comunque un multiplo di 4 (visto che le torte sono dispari).
> - entra come secondo Fiori: adesso Fiori trova 12, 8 o 4 torte. Nel primo caso, 12 è accettabile se il Sette successivo è Picche (che ne prende 6 delle rimanenti 9). Anche 8 è accettabile, con il successivo Sette di Picche che prende 4 torte, lasciando le ultime 2 al Sette di Quadri. Invece non è accettabile 4, a prescindere dall'ordine dei successivi due Sette.
>
> <u>Entra per primo Quadri</u>

- entra come secondo Fiori: non è possibile, visto che ci sono un numero dispari di torte
- entra come secondo Picche: ragionando come sopra, Picche può trovare 9 o 3 torte. Con 9 torte, ne resterebbero 3 per Fiori e Cuori, ma non è accettabile. Ancora peggio con 3 torte.
- entra come secondo Cuori: dopo i primi due Sette, resta un numero pari di torte. Se il terzo è Fiori, devono essere 8 o 4 torte (12 non è possibile, visto che rubano tutti almeno una torta): in entrambi i casi ci sono soluzioni ammissibili. Se il terzo è Picche, devono essere 6 torte, ma in questo caso non abbiamo soluzioni accettabili.
Dunque secondo me la risposta alla domanda "chi ha preso più torte?" è "di certo non Fiori, scommetterei su Picche".

Ma sicuramente non ho compreso bene il testo del problema: perché dovrei rubare un quarto delle torte, quando ho diritto ad un quarto delle torte?

Sequenza				Accettabile S/N	Torte Rubate C	Q	F	P
C	P	F	Q	SI	1	2	1	8
C	P	Q	F	NO				
C	Q	F	P	NO				
C	Q	P	F	NO				
C	F	P	Q	SI	1	2	3	6
					5	2	2	4
C	F	Q	P	NO				
Q	F	C	P	NO				
Q	F	P	C	NO				
Q	P	F	C	NO				
Q	P	Q	F	NO				
Q	C	F	P	SI	3	2	2	4
					1	4	2	4
					7	2	1	2
					3	4	1	2
					1	6	1	2
Q	C	P	F	NO				

Beh perché ogni Sette ha diritto a un quarto di una torta, non di tutte le torte. Comunque la logica non è mai stata il nostro forte… o forse sì? Concludiamo con ***Bluemonday***:

Una serie di osservazioni ci permette di ricostruire l'intero ordine delle mangiate di torta. L'osservazione 0 è quella che i nostri mangiatori sono mangiatori discreti, nel senso non solo che stanno molto attenti a non farsi beccare (fallendo) ma anche che a loro non piace mangiare fette o frazioni di torte, è o tutto o niente: di conseguenza, alla fine di ogni mangiata avremo sempre un numero naturale di torte.

L'osservazione 0bis è che tutte le torte sono sparite: quindi dovremmo rimanere senza torte alla fine delle quattro mangiate consecutive.

Per semplicità chiamiamo P, D, Q, T rispettivamente il mangiatore di torte Pari, Dispari, unQuarto, dueTerzi. Ora l'osservazione 1 è che il numero 13 è un numero primo, in particolare non è divisibile per 3 o per 4: questa, insieme all'osservazione 2, ossia che il mangiatore T o Q possono solo agire quando il numero rimasto di torte è divisibile per 3 o 4 rispettivamente, otteniamo che sicuramente loro non possono essere stati i colpevoli della prima mangiata.

Inoltre, se chiamiamo x le torte presenti in un dato momento, notiamo che dopo la mangiata di T avremo (1/3)*x torte rimaste mentre dopo la mangiata di Q avremo (3/4)*x torte rimaste. Ora, dato che come abbiamo ribadito nell'osservazione 0bis dopo l'ultima mangiata dobbiamo restare senza torte, non è possibile che Q O T siano i colpevoli dell'ultima mangiata, perché se così avremmo già mangiato tutte le torte alla fine della terza mangiata.

> La situazione che abbiamo ricostruito finora è quindi: PRIMA MANGIATA: P o D | SECONDA MANGIATA: Q o T | TERZA MANGIATA: Q o T | QUARTA MANGIATA: P o D.
>
> Ora, sia che sia P o D il primo mangiatore, questi lascerà una quantità 13-a di torte. Poi, in virtù delle commutatività della moltiplicazione, in tutti i casi avremo che alla fine della terza mangiata il numero rimanente di torte è: (1/3)*(3/4)*(13–a) = (13–a)/4. Da qua otteniamo che alla fine della prima mangiata le torte (13–a) devono essere un multiplo di 4. Poiché i multipli di 4 minori di 13 sono solo 4, 8, 12 questo limita il numero a mangiato alla prima mangiata ai valori 9, 5, 1, tutti dispari.
>
> Questo ci dice anche che il primo mangiatore deve essere D e l'ultimo P. Fatto questo si vede che l'unica possibilità è che il numero di torte mangiate nella prima mangiata deve essere 5. Infatti fosse stato 9, rimarremo con 4 torte. Quindi, essendo 4 multiplo di 4, la seconda mangiata è di Q che ci lascia con 3 torte, e la terza poi di T, restando con una sola torta. Ma poi dovrebbe essere il turno di P, ma 1 è dispari. Un ragionamento simile dimostra l'impossibilità del caso a=1. Quindi deve essere a=5 e dopo la prima mangiata arriviamo a 8 torte, poi sarà il turno di Q, che ci lascia con 6 torte, dunque T che ci lascia con 2 torte e infine P può mangiare le ultime 2 torte. Ricostruita la situazione vediamo che dunque quello che ha mangiato di più è proprio il primo mangiatore D (nel problema, "Sette di Cuori") che ha mangiato 5 torte.

E qui ci fermiamo, con una certa quantità ci concordia sul risultato, visto che l'ultimo problema continua a contenere il mio nome…

4.2.2 Sempre da Alice

Problema con urne e combinazioni, non lasciatevi fregare da Capo:

> *Sono date cinque urne e un congruo numero di palline mettete una pallina nella prima urna, due nella seconda, eccetera sino alla quinta, che ne conterrà cinque. A questo punto, avendole messe in ordine sulla stessa linea, cominciate il gioco. L'unica regola è che potete spostare qualsiasi urna tra altre due urne: quando effettuate il movimento, incrementate di uno il numero delle palline nelle urne adiacenti a quella appena mossa, ma non toccate le palline di quella mossa. Lo scopo del gioco è avere, alla fine, tutte le urne con dentro il medesimo numero di palline, che deve essere il minimo possibile. Quanto vale questo numero?*

Vista la velocità nelle risposte del Nostro, cominciamo con ***Valter***:

> Io la vedrei così:
> - prima di tutto un commento alla frase del testo:
> "… spostare qualsiasi urna tra altre due urne …"
> - "…tra altre due" esclude quindi le due ai lati?
>
> Tratto le due casiste che sono riuscito a pensare. Se significa: non spostare mai la prima e l'ultima (sono, infatti, le due urne non "…tra altre due"):
> - ad ogni mossa le palline in totale crescono di 2
> - si inizia con 5*6/2=15 palline totali nelle urne
> - la loro somma quando sono tutte uguali vale: 5*N
> - il loro numero alla fine può solo essere dispari (sommando sempre 2 a 15 il totale rimane dispari)
> - cinque palline nelle urne non si riesco a averle
> - l'urna in posizione quattro non si deve spostare
> - se lo si fa quella in cinque avrebbe sei palline
> - si possono spostare solo le seconda e terza urna
> - una verifica mostra l'impossibilità sopra citata
> - mostro come riuscirci con sette palline per urna (>.> urna mossa a destra, <.< mossa a sinistra):
> -- 1<2<345
> -- 2<2<445
> -- 23<5<45
> -- 2<5<455

-- 53<5<55
-- 554<6<5
-- 55<6<56
-- 5>6>666
-- 676<6<6
-- 6<7<677
-- 77777.

La mia "tecnica" è usare adiacenti a somma minima. Vi sono casi in cui tale somma è in più posizioni. Forse anche seguendo le altre strade, si ha: 77777 (…quindi ottenere tutte le, possibili, soluzioni).

Ora, il caso in cui posso spostare le due laterali (muovendole si incrementa solo l'unica adiacente). Ecco come ottenere cinque palline, in cinque urne:

-- 1<2<345
-- >2>2445
-- >3>2445
-- >3>3445
-- >4>3445
-- 44<4<45
-- >4>4555
-- >5>4555
-- 55555.

In entrambi i casi, ho il numero minimo possibile.

Bene, soluzione trovata. Per ***Galluto*** è tutto piuttosto lineare:

Prima di cominciare ad effettuare la prima "mossa", cioè di prendere un'urna e spostarle tra altre due, abbiamo già utilizzato 15 palline (1+2+3+4+5); se vogliamo che alla fine ce ne siano un numero uguale in tutte le 5 urne, le palline totali, dopo tutte le mosse, devono essere un multiplo di 5 e dunque anche le mosse devono essere 5 o un multiplo di 5.

Il primo tentativo è allora di vedere se si trova una soluzione con sole 5 mosse, che effettuate opportunamente portino ad avere 5 palline per urna.

Per fortuna è così, ad esempio con:

		1 pos	2 pos	3 pos	4 pos	5 pos
	Iniziale	1	2	3	4	5
mossa 1	1 --> 2.3	3	1	4	4	5
mossa 2	1 --> 2.3	2	3	5	4	5
mossa 3	4 --> 1.2	3	4	4	5	5
mossa 4	3 --> 1.2	4	4	5	5	5
mossa 5	3 --> 1.2	5	5	5	5	5

Dove la notazione indica che prendo l'urna che sta in una certa posizione e la metto in mezzo alle due separate da un puntino.

E quindi la risposta al quesito è **5**.

Altro discorso è calcolare ed elencare tutte le soluzioni. Per fare questo bisogna prima decidere se è lecito prendere un'urna e rimetterla da dove è stata presa; per capirci, e usando la notazione di cui sopra, è lecita, ad esempio, la mossa 2 → 1.3 ?

Se questo non fosse ammesso, ad ogni mossa le alternative sarebbero 12 e quindi con 5 mosse avremmo *soltanto* 12^5 = 248.842 casi totali.

Se invece la "rimessa a posto" è consentita, le alternative ad ogni mossa sono 15 ed i casi totali diventano 15^5 = 759.355.

Detto questo, ho usato l'Olio Verde di Microsoft generando tutti i casi possibili; però, dopo ogni mossa, ho scartato subito tutti i casi che sicuramente non potevano funzionare (cioè, quelli in cui in un'urna c'erano 6 palline) e così ho limitato di molto la proliferazione dei casi.

> Risultato: **1.272** diverse soluzioni, se la rimessa a posto è consentita, che si riducono a **750** se invece non lo è. Direi che non è il caso di elencarle tutte: sarebbero decine di pagine noiosissime; comunque, allego l'excel… fate voi.

Facciamo noi, e l'excel ce lo teniamo volentieri. Se lo volete vedere scriveteci. Anche ***Camillo*** non è per niente convinto:

> Dalla regola di spostamento non si capisce bene se l'incremento alle urne adiacenti è fatto prima o dopo lo spostamento. Poi un altro lato oscuro (ma non molto) è: ma posso spostare anche la prima e l'ultima urna o no?
>
> Se l'incremento viene fatto dopo lo spostamento e non si spostano le urne agli estremi (niente Excel ma Turbo C e DOS) è scontato che il numero minimo possibile è 5. Le combinazioni che ho trovato sono quasi 200.
>
> Ma a questo punto ho pensato che si devono muovere anche le urne agli estremi per cui; "vai giù di forza bruta". Risultato 522 combinazioni di cui vi allego il file di testo generato con le sequenze di soluzione. Il numero totale dei "brutali" movimenti è 32000000 ovvero 5^5*4^5 è sì perché sono 5 urne e 4 posti dove spostarle. Il numero di passaggi per ottenere le 5 palline in ogni urna è 5.
>
> Voi chiedete il numero minimo; ma oltre? Non è possibile avere il numero di palline pari in ogni urna per cui il successivo è 7. Però per calcolare le combinazioni ci vorrebbe un matematico volenteroso che con un bel formulone pieno di simboli lo facesse. Ammesso che ciò sia possibile.
>
> Con 7 il numero di passaggi per ottenerlo è 10 per cui i movimenti di forza bruta sono 5^{10}*4^{10} che fa 10240 miliardi tondi. Col mio elaboratore per brutalizzare la cosa ci vogliono 2 anni o poco più.
>
> Comunque "giocando di sponda" ho trovato più di 7000 combinazioni. Di queste non vi allego il file completo ma un ritaglio di una decina di loro.

Anche questo ritaglio è rimasto nel nostro archivio a futura memoria dell'amore del Capo per le simulazioni. È chiaro che nessuno ha trovato una soluzione dal "Libro", ma dopotutto il Capo non aveva promesso molto nel testo. Chiudiamo qui. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Voi e il vostro partner siete stati ammessi al prestigioso torneo di Gioco della Pulce, al quale sono invitati solo i 64 migliori giocatori del Braccio di Orione, che sono suppergiù tutti dello stesso livello agonistico.

Il torneo si svolgerà in forma di eliminazione diretta (alla prima partita che perdete, siete fuori), e sapete benissimo che, se vi capitasse di giocare contro l'altra metà del vostro cielo e putacaso commetteste l'imperdonabile errore di vincere, la cosa causerebbe lo spargimento di vostri importanti fluidi corporei.

I partecipanti ad ogni partita saranno abbinati casualmente.

Qual è la probabilità che ci sia uno scontro diretto tra voi due?

6. Pagina 46

6.1 Prima parte:

Il problema può essere riformulato in questo modo: provate che per un qualsiasi intero positivo M esiste un n tale che 2^n inizia con la sequenza di cifre che rappresenta il numero M in notazione decimale: questo è equivalente a provare che per un qualsiasi intero positivo M è possibile trovare due interi positivi n e k tali che:

$$10^k \cdot M \leqslant 2^n < 10^k (M+1)$$

I numeri che iniziano con le stesse cifre di M sono cioè quelli nella forma $10^k M+r$, dove $0 \leq r < 10^k$. Prendendo il logaritmo dei membri dell'equazione qui sopra, si ottiene:

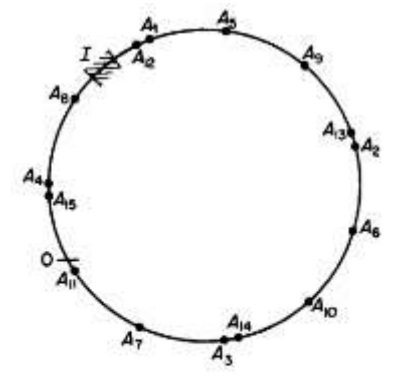
$$\log M + k \leqslant n \log 2 < \log(M+1) + k$$

Dobbiamo ora provare l'esistenza di due interi positivi n e k in grado di soddisfare questa diseguaglianza.

Consideriamo sull'asse reale gli intervalli (aperti a destra) [log$M$+k, log(M+1)+k), dove k assume tutti i possibili valori interi; tutti questi intervalli hanno la medesima larghezza, che vale:

$$\log(M+1) - \log(M) = \frac{\log(M+1)}{M} = \log\left(\frac{1}{1+M}\right)$$

e sono ottenuti traslando l'intervallo base [log$M$, log(M+1)) di una distanza positiva 1, 2, 3, ... I numeri log2, 2log2, 3log 2, ... formano una progressione aritmetica; dobbiamo allora provare che almeno uno di loro giace in uno degli intervalli che abbiamo indicato.



13 *I primi 15 punti.*

Immaginiamo ora di riprodurre l'asse reale come un cerchio di raggio $1/2\pi$ (ossia, una circonferenza di lunghezza 1); in questo modello, tutti i punti che differiscono tra di loro di un intero coincideranno.

Per quanto riguarda i nostri punti log2, 2log2, 3log 2, ..., nessuno di loro coinciderà con un altro[9]; quindi i valori della nostra successione formano (in un qualche ordine) una sequenza infinita A_1, A_2, ... sulla nostra circonferenza. Dobbiamo quindi dimostrare che ci sono dei punti della sequenza delle A_i che cadono nell'intervallo I di larghezza [log$M$, log(M+1)).

Essendo la nostra sequenza composta da infiniti punti, è possibile trovarne una coppia tale che la distanza tra di loro (ossia, la lunghezza dell'arco della circonferenza avente questi due punti come estremi) sia minore di qualsiasi numero dato (in caso contrario, solo un numero finito di punti potrebbero stare sulla circonferenza): siano A_p e A_{p+q} questi due punti.

Notiamo che la distanza tra A_p e A_{p+q} è pari alla distanza tra A_{p+q} e A_{p+2q}, che è pari alla distanza tra A_{p+2q} e A_{p+3q}, eccetera: questo segue dal fatto che:

$$(p+q)\log 2 - p\log 2 = q\log 2 = (p+2q)\log 2 = (p+3q)\log 2 - (p+2q)\log 2 = \ldots$$

Quindi i punti A_p, A_{p+q}, A_{p+2q}, ... sono tutti alla stessa distanza tra loro sul cerchio e, essendo questa distanza minore della lunghezza a dell'intervallo I, almeno uno dei k punti consecutivi della sequenza (dove k è tale che ka<1) deve appartenere a I, il che conclude la dimostrazione.

6.2 Seconda parte:

Utilizzando la medesima interpretazione geometrica vista nella prima parte, possiamo riformulare il problema in questo modo: qual è la probabilità che un punto scelto a caso tra A_1, A_2, A_3, ... cada nell'intervallo I costruito precedentemente?

Intendiamo verificare che, se N è un intero positivo e se $f(N)$ è il numero dei punti della sequenza A_1, A_2, …, A_N che giacciono in I, allora:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{f(N)}{N} = a$$

Dato un numero positivo ε<1/2, sappiamo che esistono due punti A_p e A_{p+q} separati (sulla circonferenza) tra loro di una distanza $d<\varepsilon$.

Per qualsiasi i, la distanza tra A_i e A_{i+q} è anch'essa d, in quanto questa seconda coppia può essere ottenuta dalla prima ruotando il cerchio. Sia ora n l'unico intero per cui $1/n>d\geq 1/(n+1)$: i punti A_i, A_{i+q}, A_{i+2q}, ..., $A_{i+(n-1)q}$ sono sulla circonferenza ad una distanza d

[9] Se $p \cdot \log 2$ e $q \cdot \log 2$ coincidessero (con p e q interi) sulla circonferenza, sarebbe $p \cdot \log 2 - q \cdot \log 2 = r$, con r intero. E quindi sarebbe $\log 2 = r/(p-q)$. Ma log2 è irrazionale, quindi non può essere pari ad un rapporto tra interi.

l'uno dall'altro, e quindi l'arco $A_iA_{i+q}A_{i+2q}\dots A_{i+(n-1)q}$ ha lunghezza $(n-1)d$ e, essendo la circonferenza lunga 1, la distanza tra $A_{i+(n-1)q}$ e A_i vale $1-(n-1)d=e$.

Essendo ora $d<1/n$, abbiamo $e>1-(n-1)/n=1/n$, ed essendo $d\geq 1/(n-1)$ abbiamo anche che $e\leq 1-(n-1)/(n+1)=2/(n+1)$, e quindi $d<e\leq 2d$.

Sia m un intero tale che $m/n\leq a<(m+1)/n$: allora al più $m+2$ e almeno $m-1$ dei punti A_i, A_{i+q}, A_{i+2q}, ..., $A_{i+(n-1)q}$ giacciono in I, visto che se k di questi punti sono in I, allora si trovano su un arco σ di lunghezza $(k-1)d$, tutto contenuto in I. di conseguenza:

$$(k-1)d<a<\frac{m+1}{n} \quad \text{e} \quad k-1<\frac{m+1}{n}\cdot\frac{1}{d}$$

e siccome $1/d\leq n+1$,

$$k-1<\frac{m+1}{n}(n+1)=(m+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)=m+1+\frac{m+1}{n}$$

Siccome $1/d<n$, segue che $k+2>m$ e quindi $k-1<m+2$; ma essendo $k-1$ un intero, questo implica $k-1\leq m+1$, ossia $k\leq m+2$. D'altra parte, I è sicuramente coperto dall'arco τ ottenuto da σ aggiungendo un arco di lunghezza d ad una delle sue estremità e un arco di lunghezza e all'altra. Dato che τ ha lunghezza $kd+e\leq(k+2)d$, abbiamo:

$$(k+2)d\geqslant a\geqslant\frac{m}{n} \quad \text{ossia} \quad k+2\geqslant\frac{m}{n}\frac{1}{d}$$

Ed essendo $1/d>n$, segue che $k+2>m$, da cui $k\geq m-1$.

Consideriamo i punti A_1, A_2, ..., A_{nq}: questi possono essere divisi in q insiemi della forma $\{A_i, A_{i+q}, A_{i+2q}, \dots, A_{i+(n-1)q}\}$ come:

$$\begin{aligned}&S_1=A_1, A_{1+q}, A_{1+2q},\dots,A_{1+(n-1)q}\\&S_2=A_2, A_{2+q}, A_{2+2q},\dots,A_{2+(n-1)q}\\&\vdots\\&S_q=A_q, A_{2q}, A_{3q},\dots,A_{nq}\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato che ognuno degli insiemi S_i contiene almeno $m-1$ e al più $m+2$ punti di I. Quindi, ci sono almeno $q(m-1)$ e al più $q(m+2)$ punti di I in A_1, A_2, …, A_{nq}, e lo stesso ragionamento può essere applicato a qualsiasi insieme di nq punti consecutivi A_{j+1}, A_{j+2}, …, A_{j+nq}.

Per ogni intero positivo N possiamo scrivere $N=snq+1$, dove $s=[N/nq]$ è il quoto ottenuto dividendo nq per N e il resto t della divisione soddisfa $0\leq t<nq$; possiamo allora dividere i punti A_1, A_2, …, A_{snq} in s blocchi della forma generica A_{j+1}, A_{j+2}, …, A_{j+nq}, dove $j=\{0, nq, 2nq, \dots, (s-1)nq\}$, ed ognuno di questi s blocchi contiene almeno $q(m-1)$ e al più $q(m+2)$ punti di I. Non sappiamo quanti dei restanti t punti A_{snq+1}, $A_{snq+2}, \dots, A_N$ siano in I, ma in ogni caso segue che deve essere:

$$sq(m-1)\leqslant f(N)\leqslant sq(m+2)+t$$

Essendo poi $N=snq+t$, abbiamo $sq=(N-t)/n$; sostituendo questo, si ha:

$$\frac{N-t}{n}(m-1)\leqslant f(N)\leqslant\frac{N-t}{n}(m+2)t$$

e, dividendo per N,

$$\left(1-\frac{t}{N}\right)\frac{m-1}{n}\leqslant\frac{f(N)}{N}\leqslant\left(1-\frac{t}{N}\right)\frac{m+2}{n}+\frac{t}{N}$$

Ma essendo $m/n\leq a<(m+1)/n$, questo implica che:

$$\left(1-\frac{t}{N}\right)\left(a-\frac{2}{n}\right)\leqslant\frac{f(N)}{N}\leqslant\left(1-\frac{t}{N}\right)\left(a+\frac{2}{n}\right)+\frac{t}{N}$$

Al tendere di N a infinito, la quantità t/N tende a zero, in quanto $t<nq$ ed è quindi limitato, e quindi il limite inferiore tende a $a–2n$ e il limite superiore tende a $a+2n$.
Quindi, per valori sufficientemente grandi di N, si ha:

$$\left(a-\frac{3}{n}\right)<\frac{f(N)}{N}<\left(a+\frac{3}{n}\right) \quad \text{ossia} \quad \left|\frac{f(N)}{N}\right|<\frac{3}{n}$$

Essendo, per qualsiasi intero positivo n, $1/n\leq 2/(n+1)$, possiamo scrivere:

$$\left|\frac{f(N)}{N}-a\right|<\frac{6}{n+1}\leqslant 6d<6\epsilon$$

Quindi per ogni $\varepsilon>0$ vale la diseguaglianza

$$\left|\frac{f(N)}{N}-a\right|<6\epsilon$$

Ma questo non significa altro che:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{f(N)}{N}=a$$

Quindi, la probabilità che una potenza di 2 inizi con le cifre che rappresentano il numero M in notazione decimale è $\log(1+1/M)$.

6.3 Nota:

Con una dimostrazione sostanzialmente identica, si può ricavare che per ogni intero positivo A il cui logaritmo in base 10 sia irrazionale (ossia, ogni intero positivo che non sia una potenza di 10), l'espressione dimostrata fornisce la probabilità che una potenza A^n scelta a caso inizi con le cifre che rappresentano il numero M.

7. Paraphernalia Mathematica

Bene, dopo la *non*-interruzione per il *non*-scoop del numero precedente, riprendiamo il discorso lasciato in sospeso nel PM di due *non*-numeri fa[10].

7.1 Facciamo le cose in grande [2] (e anche alla svelta)

Come facilmente intuibile dal titolo, tiriamo in ballo la relatività einsteiniana.

Quando applichiamo la nostra costruzione del *v-spazio* ad un ambiente einsteiniano, funziona tutto benissimo tranne, evidentemente, la definizione di *v*-distanza vista come velocità relativa: è basilare, anche in questo caso, richiedere che le *v*-distanze soddisfino la regola di addizione, ossia che $AB=AC+CB$ ogni volta che C giaccia sulla linea tra A e B, e la relazione $XY=v_{X/Y}$ viene ad implicare la regola di somma delle velocità come $v_{B/A}=v_{C/A}+v_{B/C}$, almeno nel caso monodimensionale nel quale A e B si muovono in direzioni opposte rispetto a C; ma supponendo che in questa situazione A e B si muovano entrambi rispetto a C con velocità pari ad esempio a $0.6c$, avremmo che la velocità di B rispetto ad A è pari a $1.2c$, il che è proibito dalla teoria della relatività ristretta.

Dobbiamo quindi generalizzare la definizione e assumere che la *v*-distanza relativistica tra A e B, indicata come $r(A, B)$ sia una qualche funzione R della velocità relativa dei due oggetti A e B, ossia:

e richiederemo anche che la *v*-distanza soddisfi la regola di addizione:

per ogni punto C che si trovi sul *v*-segmento AB: la funzione R ha il compito di correlare l'addizione di distanze lungo una linea con la somma *relativistica* delle velocità: tutto questo, dovrebbe bastare per studiare la struttura geometrica del *v*-spazio V e trovare un'espressione esplicita per $R(v)$.

Scegliamo un punto O per rappresentare un qualche osservatore in moto (rettilineo) uniforme sul piano; il fatto che velocità superiori a quella della luce non siano possibili fa sì che qualsiasi vettore velocità misurato dal nostro osservatore abbia l'estremo comunque contenuto in un cerchio centrato in O e di raggio c (la velocità della luce); questo, per metterla in una forma più corretta, significa che l'intera mappa M_O dello spazio V costruita da O coincide con questo cerchio.

Un modello di questo genere causa comunque delle situazioni piuttosto strane: ad esempio, un segmento avente un estremo sulla circonferenza e l'altro estremo in un punto qualsiasi all'interno del cerchio avrà comunque, dal punto di vista di O una velocità c, indipendentemente da dove si trovi il secondo estremo.

In realtà questo fatto che c'è una differenza tra la mappa e quello che stiamo mappando è una situazione abbastanza comune: ogni volta che usate un planisfero, riducendo il globo terracqueo su un piano, qualunque sia la proiezione che usate state deformando qualcosa; la vostra mappa deforma certi aspetti della "realtà", ma quello che vi interessa è che funzioni per gli altri aspetti. La nostra mappa del *v*-spazio relativistico non potrà mai essere ridotta sul piano mantenendo *tutte* le sue caratteristiche, visto che questo spazio è curvo.

Delusi? Beh, per alcune cose, la nostra rappresentazione funziona, e riesce a rappresentare bene alcune caratteristiche del *v*-spazio. Una di queste caratteristiche (tutt'altro che scontata, visto che non possiamo sommare le velocità come facciamo usualmente con i vettori) è ad esempio che le immagini di tre *v*-punti che siano collineari giacciono tutti sulla stessa linea, che è una corda del *v*-spazio (attenzione che prima abbiamo detto *immagini*: qui sta la complicazione). Questo porta alla conclusione importante che ***lo spazio delle velocità relativistiche può essere mappato su un cerchio in modo tale che le v-linee siano mappate come corde di questo cerchio***. Detta un po' più brutalmente, "il nostro modello funziona".

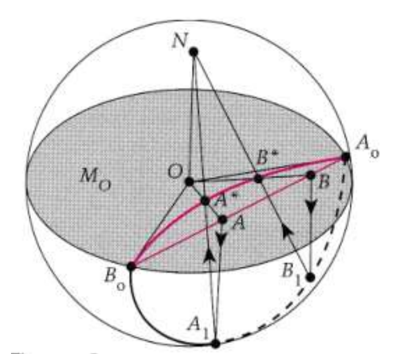
[10] Se state per insinuare che nel discorso di Rudy vi sia anche solo la parvenza di una sia pur vaga nota polemica, avete perfettamente ragione.

Qualcuno ha come una sensazione di *deja-vu*? E fa bene, visto che questo non è altro che il ***modello di Klein per la geometria iperbolica***: un modello di questo genere obbedisce a tutti gli assiomi della geometria euclidea tranne a quello delle parallele: se prendete due qualsiasi corde che non si intersechino, per la nostra definizione ("non esiste lo spazio al di fuori del cerchio dell'osservatore") sono parallele tra di loro; quindi, una v–retta avrà infinite v-rette parallele passanti per un punto.

Potrebbe sorgervi un dubbio, a questo punto: "Ma siamo sicuri che gli altri assiomi restino validi?" Beh, dobbiamo fare un assunto, prima; partiamo dal principio che siano soddisfatti nel modello di Klein; a questo punto, ci basta verificare che ***segmenti congruenti nel v-spazio sono rappresentati sulla mappa come segmenti congruenti nel senso del modello di Klein***[11]. Vediamo un po' più in dettaglio.

Sappiamo che i due v-segmenti AB e CD hanno pari v-lunghezza se le corrispondenti velocità relative sono uguali, ossia se $v_{B/A}=v_{D/C}$; Nel modello di Klein, due segmenti sono considerati congruenti se uno di loro può essere portato sull'altro da una trasformazione del cerchio che conservi la collinearità dei punti (ossia, che porti corde del cerchio in corde del cerchio: in particolare, sono tutte isometrie), Sia allora $k(A, B)$ la distanza (non euclidea) tra due punti A e B nel modello di Klein; se riusciamo a dimostrare che $k(A, B)$ è una funzione della velocità relativa $v_{B/A}$, questo implicherà che $v_{B/A}=v_{D/C}$ implicherà $k(A, B)=k(C, D)$, e avremo dimostrato l'equivalenza tra i due modelli. La cosa è piuttosto noiosa, se interessa basta chiedere: qui, per ora, la diamo per acquisita.

Con qualche noioso calcolo, possiamo comunque ricavare l'espressione per $R(v)$, ma esistono vie più interessanti; se vi ricordate il modello di Poincarè, questo è costruito attraverso i punti interni di un cerchio (...chi ha detto M_O? Bravo), ma le linee sono definite come archi di cerchio ortogonali alla circonferenza della mappa, non come corde, e le isometrie sono definite come trasformazioni che portano archi in archi.



14 *Visto così, è tutto più semplice.*

Il passaggio da un modello all'altro è relativamente semplice (non lo è il disegno, e infatti lo abbiamo rubato a Vladimir Dubrowsky). Consideriamo la sfera avente M_O come suo equatore; da un qualsiasi punto A di questo cerchio tracciamo la perpendicolare (al piano del cerchio) che ci permette di incontrare l'emisfero inferiore in A_1; congiungiamo questo punto appena trovato con il "Polo Nord", e questa retta intersechi il nostro cerchio equatoriale in A': a questo punto, abbiamo una trasformazione a due passi, sintetizzabile come $A \to A_1 \to A'$, dove il primo passo converte una corda A_0B_0 in un semicerchio di diametro A_0B_0 giacente sul piano verticale, mentre la seconda non è altro che una "proiezione stereografica" nella quale il piano di proiezione non passa però per un polo, ma per il centro della sfera.

Ma le proiezioni stereografiche trasformano i semicerchi in archi, che sono considerati linee rette nel modello di Poincaré, e quindi siamo riusciti a trasformare il modello di Klein in quello di Poincaré.

Ripassiamo un attimo il concetto di ***birapporto***: questo vale, nel nostro caso:

$$\{AB, A_0 B_0\} = \frac{A A_0}{A_0 B} : \frac{A B_0}{B_0 B} = \frac{A_0 A \cdot B B_0}{A_0 B \cdot A B_0}$$

Se ora ci ricordiamo che la distanza tra A' e B' nel modello di Poincaré è $d(A', B')=\log\{A'B', A_0B_0\}$, e se imponiamo:

[11] Questo, se volete fare i pomposi, in quanto tutto l'apparato geometrico delle proprietà può essere espresso in termini di punti, linee e congruenze.

$$k(A,B)=d(A',B')=\frac{1}{2}\log\{AB,A_0B_0\}$$

ecco che tutti gli assiomi della geometria (non euclidea!) sono soddisfatti all'interno del modello di Klein.

Riscriviamo allora questa formula in termini di velocità relativa $v=v_{B/A}$; se $k(A, B)=k(O, P)$, dove P è un generico punto per cui $OP=v$: sfruttando il fatto che il raggio della nostra mappa è pari a c, abbiamo allora

$$\{OP,OV\}=\frac{UO\cdot PV}{UP\cdot OV}=\frac{c(c+v)}{c(c-v)}=\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}$$

ponendo c=1 e utilizzando il logaritmo naturale[12] otteniamo il risultato (quasi) finale:

$$r(A,B)=k(A,B)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right)$$

dove possiamo notare che, per piccoli valori di $\boldsymbol{v}$, questa formula diventa $AB=v_{B/A}$, che è l'espressione non relativistica vista alla puntata precedente.

La grandezza r, anche se non ha alcun significato fisico, è più semplice da calcolare rispetto alla velocità relativa, e quindi le è stato dato un nome (pessimo, secondo noi, ma tant'è...): ***rapidità***. Risolvendo l'equazione qui sopra in v, otteniamo l'espressione per la velocità in termini di rapidità:

$$v=\frac{e^{2r}-1}{e^{2r}+1}=\frac{e^{r}-e^{-r}}{e^{r}+e^{-r}}$$

e quindi:

$$v_{B/A}=\tanh r(A,B)$$

da cui possiamo ricavare la regola della composizione delle velocità relativistiche (sempre ponendo $c=1$):

$$v=\frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2}$$

...insomma, la relatività ristretta in tre paginette, e pure con pochi calcoli.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[12] Utilizzare il logaritmo in una base diversa significa semplicemente cambiare l'unità di misura nel nostro modello.