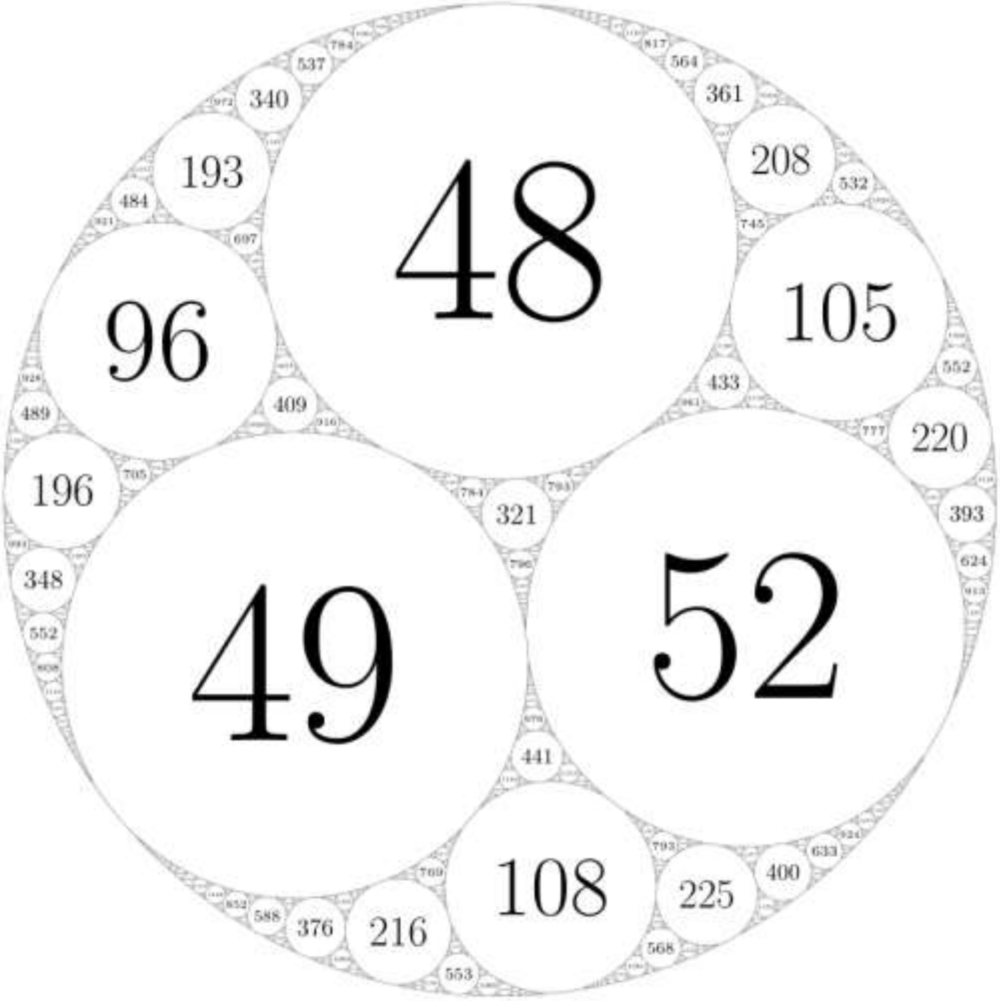
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

295_296 – Agosto & Settembre 2023 – Anno Venticinquesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM289 ha diffuso 3'375 copie e il 26/04/2023 per Google eravamo in 7'920 pagine.

A gioire quando una congettura viene dimostrata falsa si fa sempre un po' la figura dei luddisti; ma quando la congettura la sviluppano due Grandi e la invalida una ventitreenne, un po' di sadica soddisfazione è ammessa.

Ulteriori dettagli nelle ultime pagine.

1. Il lupo occulto

"L'insolenza dei soldati spagnoli di ritorno dalla presa di Castelnuovo ci regalò un inverno più duro del solito, al punto di far meritare alla soldataglia di essere considerata da parte nostra pari a un'orda di barbari. Tra i molti dissesti perfino io (chi non riderebbe?), deposti riga e compasso, fui costretto a prendere le armi per un po'. In cotanto periglio, il ricordo del mio Archimede mi esortò a guardarmi bene dal tracciare linee e cerchi."

La leggenda narra che, nell'ormai lontano 1968, l'eroico segretario del comune di Prato si recasse alla locale stazione ferroviaria armato di un biglietto (presumibilmente di andata e ritorno) diretto verso la lontana Pordenone. Al giorno d'oggi, per coprire quella distanza ci vanno quasi cinque ore di viaggio e due cambi, ma è possibile (forse addirittura probabile) che nel 1968 il viaggio fosse ancora più lungo e complicato. L'impavido segretario comunale non si lasciò spaventare dalle difficoltà ma, dando indubbia prova di abnegazione, si predispose a portare a termine la missione affidatagli dall'intero consiglio comunale della sua città: andare a presentare una supplica all'omologo consiglio comunale della città friulana. Obiettivo: convincere i governanti pordenonesi, che avevano appena avuto l'onore di vedere la loro città assurta al ruolo di capoluogo di provincia, a rinnegare la naturale (e già decisa e approvata) sigla provinciale "PO" e di ripiegare su un'altra coppia di lettere.

1 *La prima targa di Prato (foto di Daniele Berti)*

La leggenda non è una leggenda: è successo davvero, e l'insolita richiesta aveva uno scopo chiaro e motivato. L'ambito traguardo ottenuto da Pordenone, ovvero la creazione di una nuova provincia che la vedesse capoluogo, era anche il sogno di Prato: la ridotta distanza da Firenze complicava le cose ai pratesi, ma sotto molti altri aspetti – primi fra tutti la popolazione della città e il volume di affari che il suo territorio generava – rendeva l'idea tutt'altro che peregrina, al punto che nel consiglio comunale si erano già fatti dei ragionamenti sulla possibile e futura sigla provinciale. Tradizione voleva infatti che le sigle destinate a campeggiare nelle targhe automobilistiche[1] avessero come primo carattere l'iniziale della città capoluogo, seguita da un'altra lettera comunque presente nel nome; e a Prato ci si era già resi conto che, se il sogno provinciale avesse finito per avverarsi, l'unica sigla possibile per loro era proprio "PO", visto che erano già state utilizzate "PR" per Parma, "PA" per Palermo e "PT" per Pistoia. Il lieto fine fu assicurato dal buon cuore dei pordenonesi, che accettarono di buon grado di eleggere come loro sigla "PN" visto che, oltre tutto, ricordava bene anche l'antico nome latino della loro cittadina, *Portus Naonis*.

La concessione dei pordenonesi sembra anche più generosa se si considera che, di fatto, pareva esserci una sorta di particolare privilegio nell'avere come seconda lettera della sigla quella coincidente con la seconda lettera del nome della città stessa: difficilmente può considerarsi casuale, altrimenti, che tutte le prime nove città per popolazione, oltre

[1] Almeno fino al 1994, quando le targhe delle automobili persero la numerazione che prevedeva la sigla provinciale di appartenenza nei primi due caratteri. L'ultima targa del vecchio formato fu emessa a Genova, con la simbolica GE-A00000 che sanciva la milionesima vettura immatricolata nel capoluogo ligure.

ad essere capoluogo di regione, hanno come sigla la prima e la seconda lettera del nome[2]. Ma forse questa sorta di "prestigio" non esiste, o forse non va oltre la seconda lettera, perché esistono casi che lo contraddicono bellamente: ad esempio, la provincia di Terni è siglata come "TR", perché la naturale "TE" appartiene a Teramo; ma questa attribuzione ha tolto la possibilità a ben quattro capoluoghi di provincia (Trapani, Trento, Treviso e Trieste) di fregiarsi della coppia di lettere iniziale del nome[3]. O forse esiste eccome, ma varia di forma ed entità in funzione di fattori di varia natura, non facilmente classificabili: ad esempio, è innegabile che il fatto che Roma (che pure utilizza la sigla "RM" quando c'è il vincolo burocratico dei due soli caratteri) avesse al tempo il nome scritto per esteso, non siglato, sulle targhe delle automobili, da qualcuno era visto come segno di indicibile arroganza da parte degli abitanti della capitale.

2 *Nome antico, sigla nuova.*

La stessa avventura di Prato non ha poi avuto la strada totalmente libera, nonostante la cortesia di Pordenone. La città toscana ha coronato il suo sogno di assurgere a provincia ben ventiquattro anni dopo la missione dell'eroico segretario comunale: in forza al Decreto Legislativo 245 del 27 marzo 1992 è diventata capoluogo della provincia più piccola, per estensione, della Toscana. A farle compagnia nella promozione a capoluoghi di provincia c'erano Biella ("BI"), Crotone ("KR"), Lodi ("LO"), Lecco ("LC"), Rimini ("RN"), Verbania ("VB") e Vibo Valentia ("VV"). È notevole che anche questa nuova infornata di province abbia dovuto risolvere qualche intoppo con le sigle: a parte Biella e Lodi, la seconda lettera non è spettata a nessun'altra città. Rimini, ad esempio, non poteva usare la seconda lettera per il conflitto della già esistente sigla di Rieti, ma neppure la terza, perché – anche se assente dalle targhe – "RM" era pur sempre proprietà romana. Lecco ha ripiegato sulla terza, ma deve ringraziare comunque la sua buona stella, essendo il terzo capoluogo di provincia italiano che ha il nome nella forma "LxCCx"; ma sia Lucca che Lecce si sono tenute la seconda lettera lasciando fortunatamente la duplice "C" ancora disponibile per neoprovincia lacustre. Verbania e Vibo Valentia usano entrambe lettere che vanno oltre la terza posizione, ma bisogna riconoscere che sono le più caratteristiche e riconoscibili per entrambe. Fu però esemplare il caso di Crotone, che invece si è trovato – nonostante un nome lungo ben sette lettere – nella situazione paventata dal consiglio comunale di Prato. Tutte le combinazioni erano già state usate: Cremona, Como, Catania, Cuneo e Caserta hanno congiurato e costretto Crotone a cambiare addirittura la prima lettera della sua sigla provinciale. I crotonesi possono consolarsi proprio per essere eccezionali da questo punto di vista, e anche perché la sigla ricorda il nobile e antichissimo nome di *Kroton*, già famoso ai tempi della Magna Grecia.

Prato ha infine ottenuto la sua agognata "PO", ma con qualche difficoltà, nonostante l'audace missione del 1968: c'è stato infatti il rischio che dovesse accontentarsi di una incredibile sigla "PX". Il problema nasceva dal fatto che, pur non esistendo nel 1992 una provincia con sigla "PO", quella stessa sigla era già stata usata per la provincia di Pola, quando la città (e l'Istria tutta) era territorio italiano. Erano perfino circolate vetture targate PO, e questo poteva causare qualche burocratico problema al Pubblico Registro Automobilistico e ad altri enti pubblici. Per fortuna, per una volta la burocrazia ha ceduto il passo, e tutta la storia è servita soprattutto a mettere in imbarazzo chi era convinto di conoscere a memoria tutti i capoluoghi di provincia italiani e relative sigle.

[2] Le città più popolose sono Roma (che però nelle targhe era del tutto speciale), Milano, Napoli, Torino, Palermo, Genova, Bologna, Firenze e Bari. La decima in classifica, Catania, ha dovuto probabilmente cedere la sigla "CA" a Cagliari perché questa, ancorché assai meno popolosa, è capoluogo regionale della Sardegna.

[3] Poi, chissà… magari è stata invece proprio una sorta di prudenza decisionale: attribuire la sigla a una quinta incomoda per evitare che le altre quattro si accapigliassero.

Inutile negarlo, orizzontarsi nelle province italiane è sempre stato un problema. Le sorelle maggiori, le regioni, sono di gran lunga più facili e trattabili: certo a causa della maggiore dimensione geografica e del minor numero di elementi da mandare a memoria, ma siamo ragionevolmente convinti che una buona percentuale di cittadini italiani sia in grado di recitarle tutte e venti, magari nominando perfino il capoluogo di regione come bonus. Per le province, invece è tutta un'altra storia. È probabile che negli ultimi tempi la situazione sia ulteriormente peggiorata, e non per cattiva predisposizione delle giovani generazioni ad acquisire le basi della geografia amministrativa. Almeno tre fattori hanno contribuito a rendere più misteriose quel centinaio abbondante di città che decorano l'Italia: innanzitutto, una sorta di malcelato disprezzo verso la geografia tutta, ratificato ulteriormente anche dal Ministero dell'Istruzione, con la virtuale abolizione della disciplina come materia di studio; poi la scomparsa della sigla provinciale dalle targhe automobilistiche, che ha tolto quantomeno la naturale curiosità – spesso oggetto di conversazione durante i viaggi in compagnia – quando se ne incontrava qualcuna insolita durante i viaggi[4]. Infine e soprattutto, la strana volatilità delle province stesse: non sono molte le istituzioni che cambiano così velocemente e drasticamente.

Prospetto 2.1 Province per compartimento territoriale di riferimento - Anno 1861

COMPARTIMENTI TERRITORIALI	Province (a)
Piemonte e Liguria	Alessandria, Cuneo, Novara, Torino, Genova e Porto Maurizio (Imperia)
Lombardia	Bergamo, Brescia, Como, Cremona, Milano, Pavia e Sondrio
Parma e Piacenza	Parma e Piacenza
Modena, Reggio e Massa	Massa e Carrara (Massa-Carrara), Modena e Reggio nell'Emilia
Romagne	Bologna, Ferrara, Forlì (Forlì-Cesena) e Ravenna
Toscana	Arezzo, Firenze, Grosseto, Livorno, Lucca, Pisa e Siena
Umbria	Umbria (Perugia)
Marche	Ancona, Ascoli Piceno, Macerata e Pesaro e Urbino
Provincie napoletane	Abruzzo Ulteriore II (L'Aquila), Abruzzo Ulteriore I (Teramo), Abruzzo Citeriore (Chieti), Molise (Campobasso); Benevento, Napoli, Principato Citeriore (Salerno), Principato Ulteriore (Avellino), Terra del Lavoro (Caserta); Capitanata (Foggia), Terra di Bari (Bari), Terra d'Otranto (Lecce); Basilicata (Potenza); Calabria Citeriore (Cosenza), Calabria Ulteriore I (Reggio di Calabria) e Calabria Ulteriore II (Catanzaro)
Sicilia	Catania, Caltanissetta, Girgenti (Agrigento), Messina, Noto (Siracusa) (b), Palermo e Trapani
Sardegna	Cagliari e Sassari

3 *Tabella tratta da "Struttura e dinamica delle unità amministrative territoriali italiane", edizioni ISTAT, 2018.*

Per molto tempo, come ben illustra l'avventura di Prato, c'è stata una sorta di corsa al raggiungimento della "dignità provinciale" per ogni città che riteneva di meritarsela, così, alla sessantina di province che dividevano l'Italia al momento della formazione del Regno nel 1861 hanno continuato ad aggiungersene altre: le province del Veneto e del Nordest arrivarono nel 1866, con la Terza Guerra d'Indipendenza, e nel 1870 Roma si affermò non solo come capitale d'Italia e capoluogo regionale del Lazio, ma anche come provincia. Il fascismo ne crea poi altre ventuno (ma abolendone una, la Terra di Lavoro) e si arriva così alla cifra tonda di 90, che è quella che i lettori più anziani di questa rivista probabilmente ricordano dalle scuole elementari. È proprio Pordenone che rilancia la corsa, e che pertanto può fregiarsi di essere la prima provincia nata repubblicana. Poi il numero lievita, a piccoli salti[5], fino a 107, quando il prestigio provinciale subisce un colpo durissimo: il progetto di abolizione.

[4] Ci rendiamo conto che le ragioni che hanno portato all'eliminazione della sigla provinciale sono diverse, e quasi tutte ben motivate. Ciò non di meno, erano indubbiamente un elemento che riusciva, indubbiamente anche se quasi inconsapevolmente, a rafforzare un minimo di cultura geografica.

[5] Certe volte anche con salti all'indietro: esemplare la Sardegna, che per lungo tempo aveva solo tre province, Cagliari, Nuoro e Sassari. Poi nel 1974 si aggiunse Oristano, e il numero restò stabile a quattro fino alle soglie del nuovo millennio, quando tutto si è parecchio complicato. Le province sono diventate otto, poi un referendum regionale le ha ridimensionate e in parte accorpate, poi Cagliari è diventata Città Metropolitana, e al momento dovrebbero essere tornate ad essere quattro (più Cagliari come C.M.) coincidenti alle storiche del 1974 più quella denominata Sud Sardegna. Ma la cosa è ancora tutta in evoluzione…

4 *Le Città Metropolitane.*

Nel sentire comune il progetto sembra riuscito, anche se in realtà non lo è: un sacco di persone sono convinte che le province non esistano più, soprattutto perché gli organi di governo provinciale non sono più eletti direttamente durante le elezioni amministrative, e perché in effetti, anche se il progetto di abolizione vera e propria non è stato completato, molti compiti delle province sono stati eliminati, o ridotti, o delegati. Quindici tra le città più grandi non sono più “capoluoghi di provincia” ma sono diventate “città metropolitane”; altre si sono trasformate in “consorzi comunali”, altre ancora sono proprio sparite, come le friulane, e soltanto un’ottantina mantengono la denominazione originale. Denominazione che è comunque un problema significativo, perché è presente nella Costituzione, e di conseguenza rende l’abolizione delle province una modifica costituzionale, con tutto quanto una simile azione comporta.

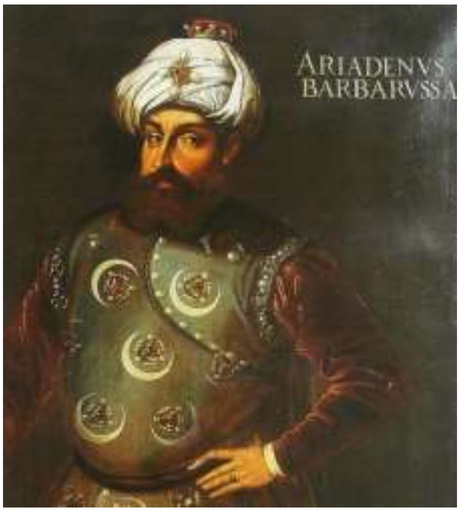
Resta l’idea, forse un po’ troppo nostalgica, che fare la fatica di imparare a memoria quel centinaio di nomi e sigle nei primi anni scolastici aveva il suo perché. Perché poi, da adulti, quando si intercettava il nome di un paesino sconosciuto lo si incontrava quasi sempre accompagnato dalla sigla provinciale, e questo aiutava parecchio a farsi un’idea – certo approssimativa e del tutto insufficiente – perlomeno della sua posizione nella penisola. Si conservava un piccolo database mentale che era assai utile prima dell’avvento del web, ma che mantiene verosimilmente i suoi pregi anche in questi giorni molto informatizzati. E capitava raramente di sentirsi totalmente spiazzati quando si sentiva o leggeva un toponimo sconosciuto, proprio come è capitato a chi scrive quando è incocciato nella citazione posta all’inizio di questo articolo.

In quella citazione si nomina Castelnuovo, che è nome un po’ troppo generico per essere individuato con sicurezza anche con l’ausilio di un buon atlante e perfino con le magiche potenzialità della Rete. Se poi si aggiunge che l’autore della citazione è noto per aver passato gran parte della sua vita a Castelbuono, diventa evidente che è facilissimo confondere un luogo con l’altro. Si può essere tentati di immaginare i due posti vicini, ma l’ipotesi dovrebbe essere verificata, senza contare che la citazione è abbastanza antica, e quindi non ci si può neppure fidare del tutto sul fatto che sia riportata in buon italiano. E se Castelnuovo fosse la resa latinizzata di Newcastle? E se in Turingia ci fosse un posto chiamato Neuschloss? E se invece Castelnuovo è proprio Castelnuovo, non si potrebbe sapere in quale zona si trova, tanto per farsi quella famosa idea?

Curiosamente, quel Castelnuovo si trovava e non si trovava in una provincia italiana, era e non era un nome italiano e, in buona conclusione, una volta tanto anche conoscere a menadito tutte le 107 province non avrebbe aiutato granché, perché – come ricorda giustamente Amleto – ci sono più cose in cielo e in terra di quante ne possa sognare la nostra filosofia, poveri Orazi che non siamo altro.

Prato si era burocraticamente scontrata con Pola, perché Pola era provincia dell’Istria diventata italiana dopo il 1918e poi tornata straniera nel 1945. Ma non era la sola: c’era anche la provincia di Fiume, ed è superfluo ricordare che le province di Trieste e Gorizia erano allora assai più estese di quanto divennero nell’era repubblicana. Fin dalla sua nascita, infatti, il Regno d’Italia si era avventurato in diverse conquiste territoriali, e fa un po’ impressione vedere che un tempo, dopo la conquista del Dodecaneso, esistesse l’italica provincia di Rodi. La disavventura libica generò, per qualche anno, le province di Tripoli, Bengasi, Derna e Misurata: per non parlare poi di tutta l’Albania, che nell’aprile del 1939 fu soggetta al re d’Italia a d’Albania Vittorio Emanuele III e fu tosto parcellizzata in tredici province. E quando abbiamo parlato dell’Istria siamo forse stati troppo frettolosi, perché oltre all’Istria c’era anche la Dalmazia, ed è con un po’ costernazione che scopriamo dell’esistenza delle province di Zara, di Spalato, di Lubiana e di Cattaro. Ed è proprio qui, infine, che decideremo di fermarci.

Cattaro oggi si chiama Kotor, ed è una graziosa cittadina montenegrina di poco più di ventimila abitanti. Dal punto di vista paesaggistico è un incredibile susseguirsi di mare e terra, quasi fosse stata disegnata da un creatore norvegese nostalgico dei suoi fiordi e desideroso di ricrearne uno nel bel mezzo dell'Adriatico. Dal punto di vista militare, è un porto naturale semplicemente fantastico – il migliore di tutto il Mediterraneo, dicono gli esperti – con almeno quattro grandi insenature protette da canali naturali, le cosiddette "Bocche di Cattaro", che l'Unesco ha dichiarato Patrimonio dell'Umanità sia per la loro bellezza che per la rilevanza storica. È diventata parte del Montenegro solo nel 2006, dopo che alla fine della Seconda Guerra Mondiale la zona fu assegnata alla Jugoslavia e poi, a valle della disgregazione della creatura di Tito, alla repubblica montenegrina. Ed è in questa zona ricca di fascino che troviamo finalmente quella Castelnuovo che ha dato inizio a tutta la ricerca: il nome completo è infatti proprio "Castelnuovo di Cattaro" che nell'originale lingua montenegrina suona *Herceg Novi,* conservando il significato delle parole[6].



5 *Khayir al-Din, detto Barbarossa.*

Quando gli Ottomani erano all'apogeo del loro potere mantennero tutta la zona di Cattaro sotto il loro dominio, e per più di due secoli: dal 1482 al 1687. Solo per un breve periodo Castelnuovo tornò ad essere città cristiana e occidentale: tra il 1538 e il 1539, quando con un colpo di mano alcuni *tercios* spagnoli riuscirono ad impadronirsi della fortezza che dava il nome alla cittadina. Si scatenò allora uno degli episodi più famosi della guerra che opponeva a quei tempi cristiani e islamici: l'epoca è quella in cui, sotto la guida di Solimano il Magnifico, gli Ottomani muovono alla conquista dell'Europa occidentale: erano già arrivati sotto le porte di Vienna, ma quasi tutta la Cristianità si alleò per far fronte alla potenza musulmana. Austria, Spagna, Venezia, lo Stato Pontificio e buona parte dei piccoli stati italiani cercarono di opporsi allo strapotere islamico. Alla guida della marina turca c'era Khayir al-Din, ammiraglio nato nell'isola greca di Mitilene, conosciuto tra i cristiani con il nomignolo di Barbarossa: è a lui che tocca il compito di recuperare la fortezza di Castelnuovo dopo che poche migliaia di spagnoli agli ordini di Francisco Sarmiento de Mendoza y Manuel erano riusciti a occuparla. La regione era al tempo nota come "Albania Veneta", perché storicamente dipendente dalle armi e dai commerci di Venezia, ma in quegli anni la Dalmazia era territorio di caccia soprattutto per le navi del sultano di Costantinopoli, piuttosto che per quelle del Doge di Venezia. Barbarossa comincia un assedio lungo e persistente, ma gli spagnoli di Sarmiento resistono eroicamente e rifiutano ogni offerta di resa, anche quando Barbarossa gli offre condizioni assolutamente dignitose e piene di rispetto per un nemico così valoroso.

Alla fine, comunque, la fortezza di Castelnuovo cade, Sarmiento muore e per lungo tempo austriaci, spagnoli e italiani hanno provato a riconquistarla, sempre senza successo. Sono forse proprio la delusione dell'inutilità delle azioni militari e le nefandezze della guerra a indurire i pochi spagnoli che tornano scornati da quell'assedio, e a farli comportare come criminale soldataglia quando giungono nei luoghi in cui vive l'estensore della citazione iniziale di quest'articolo: seminano terrore e paura al punto da convincere il tapino a prendere le armi, nonostante la sua fede e la sua professione sarebbero dovute bastare ad impedirglielo. Era un monaco benedettino, infatti: e viveva nei pressi della cittadina di

[6] Ma solo fino a un certo punto: secondo alcuni, "Herceg" è parola derivata da "Herzog", che significa "conte" in tedesco, e sta insomma a qualificare la città come una specie di contea o ducato. Per il resto, quel "nuovo" proclamato nel nome è in realtà vecchio di secoli: già i bizantini la chiamavano *Νεόκαστρον*.

Castelbuono, come si evince anche dalla citazione, e precisamente nell'abbazia di Santa Maria del Parto, che oggi si chiama Santuario di San Guglielmo[7]. L'ironico riferimento ad Archimede lo qualifica almeno un po' come geometra e storico[8], oltre che religioso, e in effetti è stato davvero matematico assai degno di essere ricordato.

6 *Francesco Maurolico ritratto da Mariano Bovi.*

Francesco Maurolico nasce il 16 Settembre 1494, a Messina, da una famiglia greca che si trasferisce in Sicilia proprio per scampare alle scorrerie dei corsari turchi. La famiglia era agiata, perché il padre Antonio, allievo del dotto umanista Costantino Lascaris (anch'egli transfuga da Costantinopoli), divenne prima medico e poi direttore della zecca di Messina. Quinto in una sequela di otto figli che comprendeva sette maschietti e una femminuccia, non aveva grosse speranze di eredità, e capì presto che una vita da religioso per dedicarsi allo studio delle cose che più lo interessavano era verosimilmente la scelta migliore.

Curiosamente, "Maurolico" non è il cognome di famiglia, che suonava semplicemente "Marulì", ma fin dai suoi primi scritti Francesco usa firmarsi con una sorta di pseudonimo che ricorda – ma ovviamente non coincide – con il vero nome del suo casato: inizialmente usa la firma "Mauro Lycio", che in greco suona più o meno come "Apollo occulto", per passare poi, definitivamente, all'ancora più tenebroso "Mauro Lyco", scambiando così il dio del sole con il predatore dei monti, e presentandosi come "lupo occulto".

I primi anni di maturità lo vedono alternare fortune e disgrazie: Messina viene tormentata da una sorta di pestilenza, e decide di allontanarsene. Prende gli ordini sacerdotali non ancora trentenne, arriva e soggiorna per un certo periodo a Roma. Anche quando infine rientra a Messina riesce a dedicarsi ai suoi studi proprio sostenendosi grazie all'insperata eredità paterna: oltre al padre Antonio, il destino si era portato via anche buona parte dei fratelli, e così Francesco ha abbastanza rendite per condurre una vita, se non agiata, almeno moderatamente sicura.

È già, a tutti gli effetti, un uomo del Rinascimento: non dubitiamo che rispettasse diligentemente tutte le regole e gli impegni della sua dedizione monastica, ma è altrettanto indubbio che è affascinato dal potere della ragione, e dal fascino delle scoperte che si ottengono studiando e applicandosi. Grazie al patrocinio di Ettore Pignatelli riesce a pubblicare una sorta di libro di testo i "*Grammatica Rudimenta*", e poco dopo lo stesso governatore di Messina a incaricarlo di tenere delle lezioni su testi che cominciavano, o

[7] Il nuovo nome è dovuto alla volontà di ricordare il fondatore Beato Guglielmo, che creò l'abbazia nel XIII secolo. L'edificio fu assegnato a Maurolico da Simone Ventimiglia, settimo marchese di Geraci, che si elesse protettore e patrono del monaco come aveva già fatto in precedenza suo padre, Giovanni Ventimiglia.

[8] L'ovvio riferimento è alla celeberrima frase pronunciata da Archimede nel momento in cui la sua Siracusa veniva conquistata dalle legioni del console Marcello nell'ambito della Seconda Guerra Punica: "*Non toccare i miei cerchi!*" ringhiò – secondo la leggenda – il genio siracusano al legionario che reclamava la sua attenzione durante il saccheggio. La reazione poco cortese di Archimede irritò il romano che lo trafisse con la spada, con grande scorno dello stesso Marcello, che invece avrebbe voluto conoscerlo e parlargli. Comunque, qualche dettaglio maggiore lo si può trovare in "*Fuoco, Acqua, Infinito*", RM058, Novembre 2003.

tornavano, a suscitare interesse, quali il "*In Sphaeram*" di Giovanni Sacrobosco[9] o gli "*Elementi"* di Euclide.


FRANCISCI MAVROLYCI
MESSANENSIS.
EMENDATIO, ET RESTITVTIO
CONICORVM
APOLLONII PERGAEI
AD ILLVSTRISS. SENATVM
MESSANENSEM.
MESSANAE,
Typis Heredum Petri Breae. MDCLIIII.
Superiorum Permissu.

7 *Apollonio rivisto e "divulgato" da Francesco Maurolico.*

Come capita spesso quando si parla di personaggi che si dedicarono all'indagine scientifica nei primissimi anni dell'era moderna, è quasi impossibile dar loro una descrizione esaustiva delimitandone il campo di interessi e specializzazione, per la buona ragione che la specializzazione virtualmente non esisteva ancora. Tutto un universo era disteso di fronte a coloro che avevano voglia di scoprirne le regole, e limitarsi a un solo settore specifico era giudicato, dai più, come un'inspiegabile rinuncia. Francesco Maurolico fu un grande matematico, e non solo per la sua opera di divulgazione – se è lecito usare questo termine quando si parla del XVI secolo – degli "Elementi" di Euclide e degli altri classici greci: ridefinì la teoria delle proporzioni, esaminò i primi principi della teoria dei numeri, elaborò il principio di induzione matematica. Ma fu anche astronomo, e fin da giovane ebbe la possibilità di fare osservazioni del cielo dalla torre del Castello di Pollina, che Giovanni Ventimiglia gli aveva messo a disposizione per le sue ricerche: e qui riconobbe e studiò il comportamento di una supernova comparsa nella costellazione di Cassiopea. E fu geografo, perché fu lui a disegnare le mappe che i cristiani in partenza da Messina utilizzarono nel 1573 andando ad affrontare la flotta Ottomana a Lepanto; e fu architetto, progettando due tra le più belle fontane ancora ammirabili a Messina, che sono decorate con distici latini composti da lui stesso. Le sue molte composizioni letterarie non furono da meno di quelle più strettamente scientifiche, certo perché a quei tempi un "dotto", per essere tale, non poteva permettersi il lusso di interessarsi di un solo argomento.

Non ha certo senso rimpiangere quei tempi ai giorni nostri, in cui è ormai impossibile non solo essere dei luminari in più di una disciplina: anzi, in cui è impossibile anche dominare una sola scienza per intero. Nessun rimpianto, quindi: solo un pizzico d'invidia per chi aveva davanti tutto un mondo ancora da scoprire, e la possibilità e la voglia di farlo.

.

[9] O meglio John Holywood, come gli affezionati di RM certo già sanno.

2. Problemi [295]

Quasi due. Nel senso che abbiamo già usato le ambientazioni, quindi dal nostro punto di vista ciascuno di loro vale "un po' meno di uno". Ma è agosto (beh, quasi: per Rudy è luglio), e nessuno ha voglia di fare niente. Voi inclusi, si presume.

2.1 Tornano i batteri!

Tempo fa, ci eravamo fatto gli affari molto privati di una colonia di batteri alle prese con un ambiente ostile; bene, nel nostro vaso di Petri si è sviluppata una colonia di batteri lumacosimili (no, le lumache non c'entrano niente ma ci pare di ricordare che, in caso d'emergenza, le lumache si comportino in questo modo); infatti, se si incontrano due batteri di sesso diverso il figlio sarà una femmina, in caso contrario sarà un maschio; il lato triste di tutta questa faccenda è che, quando il cibo è scarso, gli incontri sono casuali e entrambi i genitori muoiono quando nasce il batterino.

Quindi, la nostra colonia, in caso di scarsità di cibo, si ridurrà prima o poi ad unico batterio; supponendo di avere, all'inizio, 10 maschi e 15 femmine con cronica scarsità di cibo, qual è la probabilità di avere alla fine una sola femmina?

2.2 Tornano i soldatini!

Se ve lo ricordate, questo era un problema decisamente tosto nel quale un esercito di soldatini, saltando ortogonalmente da tutte le parti, cercava inutilmente di raggiungere la quinta riga della scacchiera. Bene, senza scomodare la *Grande Armée*, vorremmo risolvere un problema che a noi pare più semplice.

Avete una scacchiera (infinita? Massì, infinita), e su tre vertici di un quadrato (nel senso che sono in una casella, ma le caselle formano un quadrato. No, non c'è niente altro, sulla scacchiera) ci sono dei pedoni. Questi pedoni muovono in un modo un po' strano: un pedone può saltare un altro pedone e atterrare nella casella a una distanza uguale dall'altra parte del pedone, nella stessa direzione. Per capirci, se il pedone saltante è in A1 e il pedone saltato in A3, il saltante atterrerà in A5. I pedoni *non si mangiano* (anche perché non si dice "mangiano"), quindi è possibile saltellare all'infinito.

Dicevamo che *tre* vertici di un *quadrato* sono occupati da pedoni; come posso far arrivare un pedone qualsiasi nel quarto vertice?

Oh, una piccola nota: abbiamo scritto "salta", ma abbiamo tenuto nel vago cosa questo significhi: di solito in giochi del genere si intende "salto ortogonale"; cambia qualcosa, se permettiamo, sotto le stesse regole, anche il "salto diagonale"?

3. Problemi [296]

3.1 Le ragioni del ritardo

Questo numero è in ritardo per colpa di Alice[10], che ha deciso di fare un viaggio. E quando una persona di nome Alice fa un viaggio, non sappiamo mai come va a finire; anzi, lo sappiamo benissimo. Va a finire che per risparmiare sui souvenir ci porta dei problemi.

Questa volta, la Regina di Cuori (già, il viaggio era proprio lì) ha preparato tredici torte, ciascuna delle quali andrebbe fraternamente divisa tra i quattro semi di ognuna delle carte di pari valore. Ma mentre le torte sono a raffreddare in una stanza, i Sette (mai fidarsi di uno che ha un criterio di divisibilità così svergolo... Sì, oggi ci siamo svegliati un po' lombrosiani) decidono che mangiarsi tredici torte a testa anziché un quarto sia una soluzione più soddisfacente, e decidono di farle sparire; per non dare nell'occhio, ciascuno di loro entra separatamente dagli altri nella stanza e ruba un certo numero di torte.

Siccome il delitto non paga, vengono "pinzati" e, non essendo applicabile la regola della Regina di Picche, vengono interrogati: di seguito, gli atti del processo.

[10] Non è vero. Tanto per cominciare, questo è il primo problema del numero 296, che esce regolarmente; quello in ritardo è il numero del mese scorso (295). Secondariamente, se cominciate a credere alle premesse di ambientazione dei nostri problemi, l'unico consiglio che possiamo darvi è di fare un reality check con uno bravo.

Sette di Cuori: "Ho rubato un numero dispari di torte"

Sette di Quadri: "Ho rubato un numero pari di torte"

Sette di Picche: "Ho rubato i due terzi delle torte che ho trovato"

Sette di Fiori: "Ho rubato un quarto delle torte che ho trovato".

La sentenza del giudice, tenuto conto che nessuno degli imputati aveva intenzioni sanguinarie (a nessuno è stato trovato un coltello addosso), è salomonica; una pena maggiore a chi ha rubato il maggior numero di torte, e pena più blanda agli altri tre.

...allora, chi ha preso più torte?

3.2 Sempre da Alice...

...che, odiando le probabilità, è sempre alla ricerca di nuovi utilizzi per i paraphernalia tipici di quell'ambito; questa volta, ha cercato uno scopo nell'esistenza di quegli strani artefatti noti sotto il nome di *urne*.

Giusto per tirare in mezzo anche qualcun altro, sapete che a Rudy sono sempre un po' antipatici quei problemi risolubili unicamente per forza bruta; in questo caso, il rischio viene quasi evitato ("quasi" perché comunque un po' di Olio Verde[11] di Microsoft secondo noi serve). Anzi, in merito, abbiamo poi una domanda (al solito: non sappiamo neanche se sia sensata, figurarsi se sappiamo la risposta...). Ma veniamo al problema.

Avete appena messo a ferro e fuoco il locale Dipartimento di Probabilità e Statistica, e siete felici possessori di cinque urne e di un congruo numero di palline; per passare il tempo, mettete una pallina nella prima urna, due nella seconda, eccetera sino alla quinta, che ne conterrà cinque. A questo punto, avendole messe in ordine sulla stessa linea, cominciate il gioco.

L'unica regola è che potete spostare qualsiasi urna tra altre due urne: quando effettuate il movimento, incrementate di uno il numero delle palline nelle urne adiacenti a quella appena mossa (ma *non* toccate le palline di quella mossa).

Lo scopo del gioco è avere, alla fine, tutte le urne con dentro il medesimo numero di palline, che deve essere *il minimo possibile*.

Quanto vale questo numero?

E sin qui, il problema, ma se ci passate anche qualche sequenza di soluzione potremmo essere felici. Ecco, a proposito di soluzioni...

Ci pare piuttosto probabile che siano più di una (noi ne abbiamo trovate un paio, andando per tentativi, e ci sembrano entrambe giuste); esiste un modo per calcolare *quante* sono le soluzioni e (nel caso non siano uno sproposito), generarle tutte?

Oh, fate pure con calma. Tanto Alice le urne le ha già buttate via (dice che intristivano l'ambiente).

4. Bungee Jumpers

[295] Nel seguito, per "numero" si intende "numero intero positivo scelto a caso". Qual è la probabilità che:

1. un numero sia primo rispetto a 6?
2. almeno uno di due numeri sia primo rispetto a 6?
3. il quadrato di un numero termini con la cifra 1?
4. il cubo di un numero termini con le cifre 11?
5. la cifra finale della decima potenza di un numero sia 6?
6. la cifra finale della ventesima potenza di un numero sia 6?

[295] Qual è la probabilità che la prima cifra di 2^n (n intero positivo scelto a caso) sia 1?

La soluzione, a "Pagina 46"

[11] Eh? No, nel senso che Excel è verde.

5. Soluzioni e Note

Agosto? Settembre? Mah.

5.1 [293]

5.1.1 …tanti anni fa, in una rivista neanche troppo lontana...

Le poche soluzioni pubblicate il numero scorso dovevano avere una ragione… il primo problema era:

> *Rudy pensa un numero intero tra uno e cento e Doc deve trovarlo. Può fare dei tentativi ripetuti, e ogni volta Rudy gli dirà se il numero è più grande o più piccolo. Doc vince quando lo indovina. Doc ha a disposizione una sola risposta "più grande": la seconda volta che sente rispondere che il suo tentativo è troppo grande, automaticamente perde. Esiste una strategia? E quanti tentativi dovrà fare Doc per vincere?*

In RM 294 abbiamo presentato le soluzioni di ***Emanuele***, ***Valter***, ***Luigi*** e ***Camillo***. Chi si è dimenticato di inviarci le sue soluzioni è stato ***Galluto***:

> La strategia che ho pensato dovrebbe ottimizzare sia il numero medio di tentativi necessari (o la somma dei tentativi necessari per individuare tutti i 100 numeri possibili, che è la stessa cosa), sia il numero massimo di tentativi per individuare il numero più "difficile".
>
> Il primo numero che viene tentato deve bilanciare due aspetti:
>
> - più è alto e più sono i numeri che posso scartare se la risposta è "più piccolo"
> - più è basso e meno saranno le volte che la risposta sarà "più grande", dopo la quale non ho alternativa al cominciare dal più piccolo numero ancora in gioco e andare avanti di uno in uno
>
> Il secondo tentativo dovrebbe fare la stessa cosa rispetto al campo delle possibilità rimanenti, e così via.
>
> Ma come trovare questa sequenza? L'idea è di cominciare dalla fine:
>
> - l'ultimo tentativo sarà 100, che è il massimo
> - il penultimo sarà 99, che dista 1 dall'ultimo
> - il terzultimo sarà 97, che dista 2 dal penultimo, e così via
> - così facendo, il 14-ultimo (e primo) tentativo sarebbe 9 e disterebbe 13 dal secondo;
>   - o ma non è conveniente che il primo tentativo sia "solo" a 9 di distanza dall'inizio, e poi il passo successivo sia a 13 dal primo
>   - o conviene invece cominciare con 13 e poi continuare scalando di 1 in 1, e rimanendo con uno scalino di 9 per due volte:
>
> | | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** |
> |---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
> | **tentativo** | 13 | 25 | 36 | 46 | 55 | 64 | 72 | 79 | 85 | 90 | 94 | 97 | 99 | 100 |
> | **distanza** | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
>
> Con questa logica, il numero medio di tentativi sarebbe **9,45** (**945** tentativi per tutti i 100 numeri) e ogni numero verrebbe individuato in, al massimo, **14** tentativi.

Che è un buon risultato, concordato da quasi tutti il mese scorso.

5.1.2 Tutta colpa di una Curiosona...

Ci ha fatto notare ***Valter*** che effettivamente ci aveva mandato una soluzione al secondo problema di giugno:

> *Prendete un numero, lo invertite, sottraete il minore dal maggiore e guardate il risultato. Per quanti numeri di due cifre questo è un quadrato perfetto? E tre cifre?*

Il mese scorso abbiamo pubblicato la soluzione di ***Emanuele***, ed ecco qui la soluzione di ***Valter***:

> Sia "x" la cifra maggiore e "y" l'altra, individuo le radici intere di: √(x–y).
>
> Intendo cioè le coppie di "x" e "y" che, sottratte, diano un quadrato perfetto.
>
> Mi pare che tutti i numeri siano: 98,95,90,87,84,76,73,65,62,54,51,43,32,21,10.

Beh, scusate, ci è sfuggita. L'altra soluzione, di ***Galluto***, è rimasta nella sua penna:

> Cominciamo con le cose facili:
>
> ***numeri di 2 cifre (ab), necessariamente diverse***
>
> $ab - ba$ è uguale a $(10a-a) - (10b - b)$ e cioè a $9(a-b)$;
>
> il quadrato, quindi, deve essere multiplo di 9 e quindi deve essere il quadrato di un multiplo di 3;
>
> le possibilità sono quindi tre e cioè
>
> - $a-b = 1$, e quindi $ab-ba = 3^2 = 9$ e le soluzioni sono 10, 21, 32, …, 98
> - $a-b = 4$, e quindi $ab-ba = 6^2 = 36$ e le soluzioni sono 40, 51, …, 95
> - $a-b = 9$, e quindi $ab-ba = 9^2 = 81$ e la soluzione è 90
>
> ***numeri di 3 cifre (abc), con a necessariamente maggiore di c***
>
> b è ininfluente, perché qualunque cifra sia, si eliderà nella sottrazione:
>
> $abc - bca = (100a-a) - (100c-c) + (10b-10b) = 99(a-c)$
>
> la differenza sarà multipla di 99, e quindi di 11; per avere un quadrato, occorrerebbe che $a-c$ possa valere 11, ma al massimo può valere 9, e quindi non ci sono soluzioni.
>
> Passiamo a cose più complicate:
>
> ***numeri di 4 cifre (abcd)***
>
> $abcd - dcba = 999(a-d) + 90(b-c)$
>
> come al solito, il quadrato deve essere un multiplo di 9, e quindi deve essere il quadrato di un multiplo di 3.
>
> La prima combinazione valida è con $a-d = 1$ e $b-c = 1$, che significa che $abcd - dcba = 999 + 90 = 1089$ che è il quadrato di 33.
>
> Per trovare le corrispondenti soluzioni valide, occorre però che b = a, altrimenti c sarebbe minore di d, e quindi le quattro cifre non sarebbero ordinate in modo decrescente; le soluzioni sono dunque 9988, 8877, …, 1100
>
> Come per i numeri di due cifre, oltre a 33 sono validi 66 (soluzioni 9955, …, 4400) e 99 (9900), corrispondenti a: $a-d = b-c$ e uguali rispettivamente a 4 ed a 9.
>
> C'è un'ultima combinazione valida che è con $a-d = 6$ e $b-c = 1$, che porta a $abcd - dcba = 6084$, che è il quadrato di 78; le soluzioni sono 9983, 9873, 8872, …
>
> Devo confessare che ho usato un po' di forza bruta: ho cercato quei quadrati (di multipli di 3) per cui modulo(90)(modulo(999)) = 0
>
> Così avevo trovato anche il quadrato di 75, ma va scartato, perché servirebbe che $a-d = 5$ e $b-c = 7$, e quindi d sarebbe maggiore di c.
>
> Mi sono spinto oltre le 4 cifre, e mi sembra che:
>
> - se c'è un numero dispari di cifre (*abcde*, *abcdefg*, …) non ci sono soluzioni
> - se le cifre sono in numero pari, sono sempre valide le combinazioni che danno i quadrati dei numeri formati da tanti 3, tanti 6 e tanti 9, mentre tutte le altre combinazioni "non funzionano" perché le cifre non sarebbero in ordine decrescente
>
> Per cui, per numeri di 6 cifre, le soluzioni valide sarebbero 999888, ecc. che portano a 333^2, 999555, ecc. che portano a 666^2, 999000, che porta a 999^2. E così via per numeri di 8, 10, … cifre.

Problema vendicato. Fermiamoci qui e passiamo ai problemi di luglio.

5.2 [294]

5.2.1 Riciclo di dadi

Per sicurezza il Capo ha presentato due problemi di probabilità, per costringere l'estensore di queste note a leggerli ha anche inserito dei trucchi spudorati. Ecco il primo problema:

> *Il gioco inventato da Rudy richiede l'uso contemporaneo di sei dadi, che vengono lanciati sull'apposito panno: se i dadi a valore diverso tra loro sono quattro (...e solo quattro!) vincete un euro; in tutti gli altri casi, perdete un euro. Il gioco viene ripetuto sin quando non avete perso cento euro. Quante mani vi aspettate di giocare*
>
> *in media, prima di perdere il gruzzolo? E se il "sei dadi" cambia? E se cambia il "quattro"? ...e se cambiano i dadi?*

Cominciamo con la soluzione di ***Valter***:

> Provo a rispondere anche se non sono molto bravo con le probabilità.
>
> I casi possibili dovrebbero essere 6^6; quelli favorevoli mi pare siano:
>
> - (4 su 6 binomiale) * (6*5*4*3) * (2); proverei a motivare i tre fattori:
>
> -- (4 su 6 binomiale): possibili disposizioni dei quattro valori diversi
>
> -- (6*5*4*3): il primo diverso è uno dei 6 valori, il secondo dei 5, …
>
> -- (2): in quanto rimangono solo due valori che devono coincidere.
>
> Ho calcolato il rapporto fra favorevoli e possibili, vale circa: 0.2315.
>
> Da ciò direi quindi che di ogni euro se ne perde mediamente 0.537.
>
> 100 / 0.537 = circa 186 = le giocate, in media, per rimanere "puliti".

Non arriva alla stessa conclusione ***Luigi***:

> Abbiamo tre parametri:
>
> D : numero dei dadi (nel nostro caso 6)
>
> F: numero delle facce (nel nostro caso 6)
>
> V: Numero dei valori diversi che debbono comparire (nel nostro caso 4)
>
> Tirando D dadi con ognuno F facce abbiamo un numero di configurazioni (eventi) possibili dato da F^D (nel nostro caso 6^6 = 46.656).
>
> Gli eventi favorevoli sono quelli in cui compaiono esattamente V valori diversi.
>
> Iniziamo con il calcolare quante combinazioni diverse di V valori ci sono con dadi ad F facce. Il calcolo è semplice e si può indicare con $\binom{F}{V}$ nel nostro caso $\binom{6}{4}$ ovvero (6*5) / 2 = **15**
>
> Ora occorre calcolare quante diverse configurazioni sono possibili per ognuna delle 15 combinazioni
>
> Per il momento mi limiterò ad affrontare il caso particolare.
>
> Abbiamo sicuramente 4 dadi con 4 valori diversi dopodiché abbiamo due diverse situazioni:
>
> 1- Gli ultimi 2 dadi hanno lo stesso valore
>
> 2- Gli ultimi 2 dadi hanno valori diversi
>
> 1 – Nel primo caso abbiamo solo 4 configurazioni possibili. (Ad esempio: 111234 122234 123334 123444). Per calcolare quante sono le combinazioni di ognuna di queste configurazioni calcoliamo quante diverse combinazioni abbiamo dei 3 valori uguali su 6 dadi e avremo $\binom{6}{3}$ = (6*5*4) / (3*2) = 5*4 = 20 e le moltiplicheremo per il numero di permutazioni dei restanti 3 valori diversi, ovvero 3! = 3*2 = 6 e quindi in totale 6*20 = 120. Avendo 4 configurazioni avremo 4*120 = **480** combinazioni

2 – Nel secondo caso abbiamo 6 configurazioni possibili. (ad esempio: 112234 112334 112344 122334 122344 123344). In questo caso abbiamo due valori presenti 2 volte e dobbiamo quindi partire dalle combinazioni di 2 valori uguali su 6 dadi: $\binom{6}{2}$ = 6*5/2 = 15, moltiplicate per le combinazioni degli altri 2 valori uguali su 4 dadi: $\binom{4}{2}$ = 4*3/2 = 6, moltiplicate infine per le permutazioni dei restanti 2 valori: 2! = 2, per un totale di 15*6*2 = 180. Avendo 6 configurazioni avremo 6*180 = **1.080** combinazioni

Sommando i due risultati avremo 1080+480 = **1.560** combinazioni per ognuna delle 15 combinazioni di 4 valori diversi.

Il numero totale di combinazioni favorevoli sarà quindi di 1.560*15 = **23.400**

Risultando quindi una percentuale di vittoria data da 23.400/46.656 = **50,15%** possiamo confermare che questa volta Rudi è stato più che corretto e il gioco potrà andare avanti all'infinito!

Rudy e corretto sono due parole che non vanno nella stessa frase, ma sorvoliamo. ***Emanuele*** prova ancora un'altra tattica e sembra concordare con Luigi:

Un gioco è conveniente equo o sconveniente a seconda che il valore C (convenienza) così definito

C=(casi favorevoli/casi totali) (Vincita/Puntata)

sia rispettivamente >1 =1 <1

Nel nostro gioco

C=(23400/46656)(2/1)=1.003... quindi, se ho fatto i conti giusti, non si perde, ma anzi a lungo andare **si vince**. Dove

23400=15 [4 (6!/3!) + 6(6!/2!2!)]

in cui 15 sono i gruppi di 4 numeri diversi su 6 e il termine fra quadre sono le permutazioni di 6 numeri in cui 2 si ripetono, senza scendere nel dettaglio. Mentre 46656 = 6 alla sesta sono i casi totali.

Ci preoccupiamo? Anche Galluto ha constatato che il Capo non vince:

Incredibile a dirsi, il gioco è, sia pure di poco, sfavorevole per Rudy.

Infatti, i casi possibili sono V^D (dove V è il numero di valori diversi possibili per ogni dado e D è il numero di dadi) = 6^6 e cioè 46.656 e quelli favorevoli 23.400, pari al 50,154%!

Per calcolare i casi favorevoli, conviene procedere per passi: prima vedere le possibilità in base ai valori dei dadi, e poi quelle date dalle combinazioni possibili di scelta dei dadi.

- Posso avere 4 (e solo 4) valori diversi in 6!/(4!*2!) = **15** modi diversi
- Per arrivate a 6 valori presenti, quanti sono i dadi, o ho 3 valori uguali (e uno ciascuno degli altri 3) o ho due coppie (e uno ciascuno degli altri 2)
- Cominciamo dal primo caso: ho ovviamente **4** scelte diverse per il valore che si ripete tre volte
    - E così ho un totale di 15 * 4 = **60** possibilità diverse in base ai valori; passiamo alle combinazioni dei dadi
    - Posso avere le tre ripetizioni del valore "multiplo" su tre dei sei dadi in 6!/(3!*3!) = **20** modi diversi
    - Le combinazioni per piazzare gli altri tre valori sui tre dadi restanti sono 3! = **6**
    - In totale quindi ho: 60 * 20 * 6 = **7.200** casi
- Passiamo al secondo caso: ho 4*3/2 = **6** modi di scegliere i due valori che si ripetono due volte ciascuno

- E così ho un totale di 15 * 6 = **90** possibilità diverse in base ai valori; passiamo alle combinazioni dei dadi
- Posso scegliere i due dadi su cui compare il primo valore "doppio" in 6*5/2 = **15** modi diversi
- Dopodiché, posso scegliere in 4*3/2 = **6** modi i due dadi su cui compare il secondo valore doppio
- Infine, i due dadi su cui compariranno i due valori singoli sono obbligati, ma ho comunque **2** possibilità diverse di piazzare i due valori in questione
- In totale quindi ho: 90 * 15 * 6 * 2 = **16.200** casi

Sommo i due risultati per arrivare ai casi favorevoli totali: 7.200 + 16.200 = **23.400**

E quindi, mediamente, non mi aspetto di perdere il mio gruzzolo ma di incrementarlo pian piano; ad essere pignoli, da un punto di vista teorico questo è vero solo se il gruzzolo iniziale è infinito, in modo da sopportare lunghe sequenze di casi sfavorevoli; ma già con 100 euro (pari a 100 puntate) la probabilità avversa è infinitesimale.

Direi che qualsiasi espansione va gestita allo stesso modo: calcolo dei casi possibili e di quelli favorevoli, dovendo però di volta in volta costruire il ragionamento specifico per quelli favorevoli.

E noi lo lasciamo fare ai nostri lettori, le espansioni di un già fumoso problema di probabilità sanno di nebbia fitta. Un'ultima soluzione, quella di ***Alberto R.***:

Lanciando 6 dadi, o 6 volte un dado, può succedere che:

- Esce sempre lo numero e gli altri 5 non escono mai. Prob = 1/6^5
- 2 numeri escono una o più volte e gli altri 4 mai. Prob = 155/6^5
- 3 numeri escono una o più volte e gli altri 3 mai. Prob = 1800/6^5
- 4 numeri escono una o più volte e gli altri 2 mai. Prob = 3900/6^5
- 5 numeri escono una o più volte e il sesto mai. Prob = 1800/6^5
- Tutti i numeri da 1 a 6 escono una volta. Prob 120/6^5

Ovviamente 1+155+1800+3900+1800+120 = 7776 = 6^5

Nel quarto caso, quello considerato nel problema, la prob 3900/6^5 è di poco superiore al 50% (circa 50,15%) quindi chi scommettesse ripetutamente su questo caso dovrebbe lentamente arricchirsi, ma comunque, disponendo di 100 euro e puntando un euro alla volta, per andare in bancarotta deve essere più scalognato del gatto di una vegana. (Sarebbe interessante calcolarla questa probabilità!).

Come ho ottenuto questi risultati? Nel modo più banale (e faticoso) possibile: disegnando l'albero (che neanche mi sogno di riprodurre qui) di tutte le possibili evoluzioni della situazione al susseguirsi dei 6 lanci di un dado. Spero di leggere, sul prossimo numero di RM, qualche elegante soluzione ottenuta con un metodo meno brutale del mio.

Il Capo ha vinto lo stesso, accidenti. Ho letto tutte le soluzioni.

5.2.2 Alice ha ragione

Il secondo problema, dal titolo sembra onesto, ma in realtà è tutto un trucco:

Dati cento prigionieri, a ciascuno verrà posto (al buio) un cappello rosso o blu sulla testa e poi verrà accesa la luce: ogni prigioniero potrà vedere i cappelli sulle teste degli altri ma non potrà vedere il proprio. A questo punto, scriverà su un biglietto il colore (presunto) del suo cappello.

Prima di ricevere il cappello, i prigionieri (cui il gioco è stato spiegato) possono accordarsi su una strategia. Quali sono le strategie, nei casi:

1. *vengono liberati tutti se e solo se tutti i prigionieri indovinano il proprio colore*

> 2. *vengono liberati tutti se almeno la metà dei prigionieri indovinano il proprio colore*
>
> *Come massimizzate le probabilità di successo nei due casi? E, più precisamente, quanto valgono queste probabilità?*

Anche qui, cominciamo con ***Valter***:

> Provo a rispondere, anche se ho molti dubbi al riguardo; … mi sono un po' perso nel ragionamento (… avete presente i comici Antonio e Michele a Zelig: "il mio cervello sai come fa: titack tack titack):
>
> - per massimizzare la probabilità che tutti siano liberati i prigionieri si accordano in questa maniera:
>   - se vediamo un numero di cappelli blu pari scriviamo blu, se ne vediamo un numero dispari, rosso
>   - in questo caso, o tutti sbagliano, oppure tutti azzeccano il proprio colore; la probabilità è del 50%
> - per massimizzare la probabilità che almeno la metà indovini, proporrei loro la seguente strategia:
>   - 50 dei prigionieri, se vedono un numero pari di cappelli blu scrivono blu, altrimenti scrivono rosso
>   - gli altri 50 prigionieri fanno il contrario: se ne vedono un numero pari scrivono rosso altrimenti blu
>   - esattamente la metà scrive il colore corretto; la probabilità , che "almeno la metà …", è del 100%.

In un momento di pausa tra le sue varie attività, ci ha scritto ***.mau.***:

> Per il problema 2.2, non ho voglia di tirare fuori carta e penna, o pensarci un po' su: sono al furbofono. Così ad occhio nel caso 1 la probabilità di salvarsi è 1/2, con la banale strategia "prima di cominciare lanciamo una moneta: se viene testa supporremo che il numero di cappelli rossi sarà pari, se croce che sarà dispari. Ognuno predirà il proprio colore guardando gli altri e calcolando la parità". La moneta serve per evitare che il carceriere faccia il bastardo :). La strategia è del tipo "separiamo gli output": ci conviene che se uno sbaglia allora sbaglino tutti, per non sprecare i casi positivi.
>
> Il caso 2 è simile, ma i prigionieri si dividono in due gruppi da 50: il primo gruppo immagina che il numero di cappelli rossi sia pari, l'altro che sia dispari. Qualsiasi sia la distribuzione di cappelli, metà indovinare e metà sbaglierà.
>
> (Se non ci fosse stato il primo caso, non sarei riuscito a trovare la soluzione del secondo...)

Non ci crediamo neppure per un secondo, alla parte tra parentesi. Vediamo ora la versione di ***Galluto***:

> La versione "classica" di questo problema prevede che i prigionieri parlino a turno. La soluzione è che c'è qualcuno che si sacrifica parlando per primo, e per quanto riguarda se stesso se la gioca al 50%; ma il colore che dichiara è quello che vede sulle teste degli altri in quantità dispari; poniamo che dica "blu", il secondo a parlare, che come tutti gli altri è un fine logico e un veloce calcolatore, se vede sia rossi che blu in quantità pari sa che il suo è blu; se li vede ambedue in quantità dispari sa che il suo è rosso; il terzo si regola su quanto dice il secondo, e così via; risultato: dopo il primo ci azzeccano tutti e quindi in totale hanno il 50% di probabilità di indovinare tutti e il 100% che almeno la metà (in realtà, il 99%) indovini.
>
> Il testo del problema è abbastanza aperto, ma se l'idea è che i prigionieri scrivano uno alla volta, basta trovare un modo diverso di passare la stessa informazione.

> Ho deciso quindi di imporre una regola in più**: i prigionieri devono scrivere tutti contemporaneamente**; incredibilmente, così la situazione migliora:
>
> ogni prigioniero guarda il compagno alla sua destra (immaginiamo che siano in circolo), afferra la penna con la mano destra se il compagno ha il cappello blu e con la sinistra se ce l'ha rosso, guarda il compagno di sinistra per vedere che mano sta usando, e scrive serenamente il colore del suo cappello. Ci azzeccano tutti!
>
> Non so se quanto sopra è lecito, il testo non lo vieta, ma almeno faccio contenta Alice: le probabilità non c'entrano niente!

Lecito o no, questa soluzione è molto più bella delle altre. O forse no, guardate che cosa ci ha scritto ***Alberto R.***:

> Vi siete scordati di precisare che ai prigionieri è vietato parlare tra di loro dopo che la luce è stata accesa. Diamolo per sottinteso.
>
> Ma anche se non potrebbero comunicare, trasmettere furtivamente un solo bit d'informazione è facilissimo e praticamente impossibile da scoprire e impedire. Ad esempio l'accordo potrebbe essere: "Tu, Marco, se vedi sulle teste di tutti gli altri un numero pari di cappelli rossi ti dai una grattata alla guancia destra, se il numero è dispari alla sinistra." A questo punto ogni prigioniero diverso da Marco controlla la parità del numero dei cappelli rossi sulle teste di tutti, escluso Marco e, ovviamente, sé stesso, confronta questo dato con l'informazione segretamente veicolata dalla grattata di Marco e ne deduce il colore del proprio cappello. In questo modo tutti indovinano escluso eventualmente Marco che deve andare a caso, ma la condizione del 50% è ampiamente soddisfatta. Se invece vogliamo il 100% di successi lo stesso incarico che abbiamo dato a Marco lo diamo anche a Giovanni, sicché Marco indovina grazie all'informazione ricevuta da Giovanni e Giovanni grazie all'informazione ricevuta da Marco, mentre tutti gli altri possono scegliere quello dei due che ritengono sappia grattarsi in modo più elegante.

Grattarsi una guancia o scrivere col la mano destra o sinistra, insomma, qualsiasi forma di comunicazione che trasforma il problema da statistico a deterministico dà un bel senso alle mie giornate, grazie ragazzi. Alla prossima!

6. Quick & Dirty

Dormi, e io ti cullerò nelle mie braccia,
Come il convolvolo e il caprifoglio si intrecciano dolcemente
Shakespeare, Sogno di una Notte di Mezza Estate, Atto 4, Scena 1

Otre al fatto che probabilmente è il primo ad iniziare con una citazione, questo Q&D verrà piuttosto lungo, in quanto ha un mucchio di nozioni al contorno per distrarvi.

Ai tempi del Bardo, il convonvolo era chiamato spesso *woodbine*, In seguito, con questo termine si venne ad indicare esclusivamente il caprifoglio, e il verso "come il caprifoglio e il caprifoglio si intrecciano dolcemente" diventava una cosa piuttosto incomprensibile per molti critici. Ristabilito l'ordine linguistico, ci si è resi conto che il caprifoglio si avvolge alle piante con elica levogira, mente il caprifoglio si avvolge sempre con elica destrogira; quando decidono di rampicare un sull'altro, il groviglio che si lasciano dietro suscita l'immediata invidia di qualsiasi gatto alle prese con un gomitolo.

Nel nostro caso, un convonvolo e un caprifoglio si arrampicano *ordinatamente* su un tronco, partendo entrambi dallo stesso punto e terminando entrambi nello stesso punto (diverso dal precedente, spiritosoni). Sappiamo inoltre che il caprifoglio fa tre giri nel tempo che il convonvolo ne fa cinque nella direzione opposta. Senza contare l'inizio e la fine, quante volte si incrociano?

> *Se incurviamo il tronco d'albero con i due rampicanti ancora attaccati in modo tale che il caprifoglio "venga dritto", vediamo che il convonvolo gira attorno al caprifoglio* 3+5=8 *volte. Ci sono quindi* 9 *incontri in totale e, escludendo l'ultimo e il primo, il numero degli incroci è pari a* 7.

7. Zugzwang!

Noi stiamo sviluppando una congettura.

È nostro sospetto che gli inventori dei giochi abbiano come sadico e segreto scopo nella vita di far stare le istruzioni del gioco sul retro delle scacchiere.

"Sadico" in quanto, se durante una partita volete consultare il regolamento, sospendete la partita, guardate la regola, intanto vi cadono i pezzi, ricominciate da capo e la regola ve la siete dimenticata perché si applicava ad un caso particolare che non vi ricordate più.

I "Pro" di questa visione del mondo sono che se siete dotati di sufficiente pazienza "un gioco è sempre nuovo" (nel senso che non finite mai una partita).

I "Con" sono che gli inventori di giochi su microscacchiere sono tutti quanti accoliti di questo complotto.

Abbiamo notato infatti che i regolamenti dei giochi "piccoli" sono decisamente stringati e, spesso, molto poco chiari: un buon esempio di questo è il gioco che vediamo questa volta.

7.1 Farook

Inventato da quella nostra vecchia conoscenza di ***Stewart Lamie***: "vecchia" anche per il fatto che lo ha inventato nel 1993.

La micro***scacchiera*** è quella solita, 4×4 caselle; non vi servono colorate, quindi potete disegnarvela come vi pare.

Per quanto riguarda i ***pezzi***, dovete fare un piccolo sforzo: ve ne servono 6 Bianchi, 6 Neri e **2** ***Condivisi***: per questi ultimi, consigliamo come colore un simpatico Grigio 30 (non vi spieghiamo il perché, ma c'entra la media geometrica). Opinione strettamente personale, quindi fate come vi pare.

Lo ***scopo del gioco*** è di mettere quattro pezzi *vostri* o *vostri e condivisi* in ***linea*** (ortogonale o diagonale), in ***quadrato*** **2×2** o sulle quattro ***caselle d'angolo***.

I pezzi condivisi li potete "mettere in tavola" solo quando avete messo in tavola tutti i vostri pezzi (sembra una stupidaggine, ma si veda dopo, nella descrizione delle mosse).

Si comincia a scacchiera vuota e muove per primo il Bianco.

Le ***mosse*** sono di diversi tipi, ma se ne può fare una sola per ogni turno:

- ***Depositare*** un pezzo (vostro o condiviso) non ancora in gioco in una qualsiasi casella libera sulla scacchiera.
- ***Muovere*** un proprio pezzo (o un condiviso) in una casella adiacente (dubbio: anche in diagonale? A noi pare di capire di sì, ma nessuno ce lo ha detto); se un giocatore muove un pezzo condiviso, alla prossima mossa l'altro giocatore non può "disfare la mossa" appena fatta.
- ***Saltare*** un *proprio pezzo* con un proprio pezzo per atterrare in una casella vuota; i pezzi condivisi non possono essere saltati. E qui, a chiarezza, siamo in un buco nero. Tanto per cominciare, non siamo sicuri che il "saltato" debba essere un proprio pezzo; in questo caso, la specifica sui pezzi condivisi non saltabili ci sembra inutile. La scacchiera, oltretutto, è piuttosto affollata (16 caselle e 14 pezzi), non dovrebbe essere difficile inventare delle posizioni nelle quali il prossimo giocatore non può muovere; buio totale su cosa fare in questi casi.

Comunque, vi conviene procurarvi anche un ***segnaturni***: se dopo 50 mosse (...o turni? Due mosse fanno un turno?) nessuno ha vinto, la partita è patta.

Come se il gioco non fosse già abbastanza incasinato, ci si mettono anche le traduzioni... Testuale, la nostra dice "Un giocatore non può saltare o muovere lo stesso pezzo (proprio o condiviso) *due volte nella stessa riga*. Questa però l'abbiamo capita: "two times in a row" vuol dire "due volte di seguito". Magra consolazione... Se volete provarci, fateci sapere.

8. Pagina 46

[295]

Risolviamo le singole parti.

1

Di sei interi consecutivi, uno sarà divisibile per 6, uno darà resto 1 una volta diviso per 6, uno darà resto 2, uno darà resto 3, uno darà resto 4 e uno darà resto 5; quindi due e solo due[12] (quello che dà resto 1 e quello che dà resto 5) saranno primi rispetto a 6.

Ogni intero positivo può essere rappresentato nella forma $N=6Q+R$; questa espressione permette di dividere gli interi da 1 a N in Q gruppi di sei interi ciascuno, in funzione dei diversi valori di Q. Esattamente $2Q$ interi nell'intervallo $[1,6Q]$ sono primi rispetto a 6, e dei restanti R interi almeno due sono primi rispetto a 6 (in quanto R vale al più 5).

Quindi un totale di $2Q+r$ interi (con r pari a 0, 1 o 2) tra 1 e N sono primi rispetto a 6 e quindi la probabilità che un numero scelto a caso tra 1 e N sia primo rispetto a 6 vale:

$$P(N)=\frac{2Q+r}{N}=\frac{2Q+r}{6Q+R}$$

Al tendere di N all'infinito, questa probabilità tende a 2/6, ossia a 1/3, che è la soluzione del problema.

2

La probabilità che almeno uno dei due interi selezionati sia primo rispetto a 6 è pari alla probabilità che il primo intero sia divisibile per 6 più la probabilità che il secondo intero sia divisibile per 6 meno la probabilità che entrambi siano divisibili per 6, ossia:

$$2P(N)-P(N)^2=P(N)\cdot(2-P(N))=\frac{(2Q+r)\cdot(19Q+2R-r)}{(6Q+R)^2}$$

Sempre al tendere di N ad infinito, la funzione tende al limite:

$$2\cdot\frac{10}{6^2}=\frac{5}{9}$$

che è la soluzione del problema,

3

Il numero N^2 termina con 1 se e solo se N termina con 1 o 9. Su dieci interi consecutivi, solo due hanno questa proprietà, e quindi la probabilità richiesta è 2/10=1/5.

4

Se scriviamo un numero n nella forma $n=100q+r$ (con $0\leq n\leq 99$), si ha che:

$$n^3=1000000q^3+30000q^2r+300qr^2+r^3$$

I primi tre termini di questa espressione terminano tutti per 00, quindi le ultime cifre di n^3 sono le stesse di r^3.

Se r termina con 1, così sarà per r^3, mentre se r termina in 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 o 0 allora r^3 terminerà rispettivamente per 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2, 9 o 0, quindi i soli valori di r i cui cubi possono terminare in 11 sono 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, o 91. I cubi di questi numeri terminano rispettivamente in 01, 31, 61, 91, 21, 51, 81, 11, 41 e 71. Quindi n^3 termina in 11 se e solo se n termina in 71. E siccome solo un numero su cento termina in 71, la probabilità cercata è 1/100.

5

L'ultima cifra della decima potenza di un numero dipende unicamente dall'ultima cifra del numero, e si verifica facilmente che solo 4^{10} e 6^{10} terminano con 6; 2^{10} e 8^{10} terminano con 4, $0^{10}=0$ e la decima potenza di un dispari è sempre dispari.

[12] Quelli che danno resto 2, 3 e 4 *non* sono primi rispetto a 6, avendo come divisori comuni rispettivamente 2, 3 e 2.

Quindi, di dieci qualsiasi sumeri consecutivi, solo due avranno la decima potenza terminante con 6, e quindi la probabilità che un intero scelto a caso abbia una decima potenza terminante per 6 è 2/10=0.2.

6

Se, come visto qui sopra, la decima potenza di un numero pari non multiplo di 10 termina con 4 o con 6, e siccome 42=16 e 62=36, la ventesima potenza di un qualsiasi numero di questo tipo termina per 6 (gli altri numeri hanno una ventesima potenza che termina per 0 o per un numero dispari). Quindi, la probabilità cercata è pari a 4/10=0.4[13].

[296]

Sia $q(N)$ il numero delle differenti potenze di 2 che cominciano con 1. Dobbiamo dimostrare che:

$$\lim_{n\to\infty} q\frac{(N)}{N}$$

esiste e determinarne il valore.

Notiamo che non possono esistere due differenti potenze di 2 con lo stesso numero di cifre ed entrambe inizianti con 1; se sono date due diverse potenze di 2, la maggiore deve essere almeno il doppio della minore, e quindi la prima cifra della maggiore deve essere almeno il doppio della prima cifra della minore, il che significa che non possono iniziare entrambe con la cifra 1.

Inoltre, la ***più piccola*** potenza di 2 con un dato numero di cifre deve iniziare con la cifra 1, altrimenti potremmo dividere il numero per 2 e ottenere una potenza di 2 con lo stesso numero di cifre ma minore di quella data.

È essenziale ora notare che possiamo avere potenze di 2 con qualsiasi dato numero di cifre: se 2^k è *la più grande* potenza di 2 con p cifre, allora la prossima potenza 2^{k+1} avrà $p+1$ cifre, e per induzione si ricava che per qualsiasi p ci saranno potenze di 2 con p cifre.

Sia ora 2^N un numero di n cifre: quindi, tra le prime N potenze di 2 ci sarà un numero di n cifre che inizia con 1, un numero di $n–1$ cifre che inizia con 1, ..., un numero di 2 cifre che inizia con 1 (16); quindi, $q(N)=n–1$.

Se n è il numero delle cifre nel numero 2^N, allora $n–1$ è la caratteristica del logaritmo in base 10 di 2^N, ossia la parte intera di:

$$\log 2^N = N\log 2$$

In altre parole,

$$N\log 2 = n-1+\alpha_N \text{, con } 0\leqslant\alpha<1$$

e

$$q(N)=n-1=N\log 2-\alpha_N$$

Questo significa che:

$$\lim_{N\to\infty} q\frac{(N)}{N}=\frac{\lim\limits_{N\to\infty} N\log 2-\alpha_N}{N}=\log 2-\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_N}{N}=\log 2$$

ossia, la probabilità che una potenza di 2 inizi con la cifra 1 è log 2≈ 0.30103.

Generalizzeremo prossimamente questo problema.

[13] Per un'interessante estensione di questo ultimo punto, si veda il Bungee Jumpers di RM050.

9. Paraphernalia Mathematica

Prima, due parole di (meta)spiegazione.

Avevamo appena finito un pezzo tranquillo tranquillo da pubblicare ad agosto con seguito a settembre, quando ci è arrivata una notizia da "buttate in aria le ultime pagine" (e anche la prima, come forse avete potuto notare). Nessun problema, posticipa la seconda parte del primo articolo: anziché a settembre, la fai a novembre. Siamo abituati a ritardi peggiori.

Poi, il ritardo del numero di agosto è stato tale da farlo slittare a settembre come numero "quasi doppio". Capite che a questo punto avere il PM295 (quello "tranquillo") prima del PM296 (quello sullo scoop) era piuttosto stupido, e quindi abbiamo invertito i due PM: il primo che trovate è lo scoop, il secondo è quello che era previsto per agosto.

Il che non cambia niente: avete due PM in due mesi. "E allora perché ce lo racconti?" Perché non volevamo pensaste che siamo talmente veloci nel raccogliere le notizie di luglio che *tracchete!* Pubblichiamo il pezzo ad agosto, ma poi ce lo teniamo lì a fermentare. No, lo abbiamo scritto a fine agosto, tranquilli. E se qualcuno ci vuole fornire altre notizie in merito, pubblicheremo volentieri.

9.1 [296] Un cerchio con (non così) tanti piccoli cerchi

"Il *Problema di Soddy* è così chiamato perché utilizza i Cerchi di Apollonio, che sono stati studiati successivamente da Cartesio"

"E cosa c'entra Soddy?"

"Ci ha scritto un sonetto".

OK, scusate, ma non abbiamo resistito. Comunque è vero. E la notizia è riferita ai Cerchi di Apollonio, dei quali parliamo oggi.

Cominciamo smontando la definizione formale, che c'è sempre da imparare.

Un *impaccamento* di cerchi di Apollonio è un impaccamento di cerchi ottenuto riempiendo ripetutamente gli interstizi tra quattro cerchi mutuamente tangenti con ulteriori cerchi tangenti; i quattro cerchi iniziali con punti di tangenza distinti (che sono sempre sei) è nota come ***Configurazione cartesiana*** (o *quadrupla di Cartesio*, ma a noi piace di più il primo nome).

Partendo da qualsiasi configurazione cartesiana, possiamo costruire un impaccamento infinito di cerchi nel quale ogni nuovo cerchio aggiunto è tale da essere tangente a tre dei cerchi precedentemente disegnati[14] e *gli interni di tutti i cerchi sono disgiunti tra loro*[15]. Più che andando a tenere il conto dei raggi dei cerchi, è più comodo lavorare con le *curvature*, ossia con gli inversi dei raggi.

La raffigurazione classica di un insieme di questo tipo prevede che tre cerchi siano correttamente tangenti a due a due tra di loro, mentre il quarto cerchio, tangente a tutti e tre, è esterno; questo sembra violare la regola del "gli interni dei cerchi sono disgiunti tra loro" ma, lavorando con le curvature, la cosa è risolvibile, come anticipavamo, in un modo molto elegante: il cerchio "più esterno" ha *curvatura negativa*, ossia, in pratica, il "cerchio vero" è tutto il resto del piano. Quello in copertina, ad esempio, ha configurazione cartesiana (–23, 48, 49, 52); carino, vero? Esiste anche la possibilità di avere qualche valore infinito, nel quale uno o più cerchi si trasformano in linee rette, ma non intendiamo trattare questi casi.

Se vi sorge un sospetto sul fatto che siano tutti interi, è sensato; ***Cartesio*** ha stabilito nel 1643 la relazione tra le curvature dei quattro cerchi di una configurazione cartesiana (a, b, c, d):

[14] Il signore che ha detto "frattali" vince una bambolina! Dimensione di Hausdorff pari a 1.3.... Dai, ne abbiamo parlato.

[15] ...se vi sta sorgendo un piccolo dubbio relativamente al cerchio più grande, tranquilli. Tra un attimo lo chiariamo in modo molto elegante.

$$a^2+b^2+c^2+d^2=\frac{1}{2}(a+b+c+d)^2$$

La parte più interessante è che se si parte da una configurazione intera (ossia se tutte le curvature di partenza sono valori interi), allora tutte le curvature "successive" (che sono numeri sempre più grandi, essendo i raggi sempre più piccoli) sono intere; la cosa è stata scoperta più volte nella storia della matematica, e una delle dimostrazioni più note è quella di ***Soddy***[16], del 1937.

Quindi, ogni impaccamento di Apollonio può essere definito dalla sua configurazione cartesiana iniziale, che prende il nome di ***radice quadrupla***; un po' più formalmente, la radice quadrupla è la configurazione cartesiana con i valori minimi di curvatura (almeno, in valore assoluto, per tenere conto anche delle curvature negative).

Lasciando perdere per un momento il "primo cerchio", se considerate tre cerchi dell'impaccamento con curvature a, b, c, i *due cerchi* tangenti a tutti e tre i cerchi dati (con curvature d e d') devono soddisfare la:

$$d, d'=a+b+c\pm 2q_{abc}$$

dove:

$$q_{abc}=\sqrt{ab+bc+ac}$$

e quindi:

$$d+d'=2(a+b+c)$$

...il che significa, tagliando un po' per i campi, che se partiamo da interi otteniamo sempre interi[17].

Un altro colpo di genio (almeno per quanto riguarda le definizioni) nasce dall'apparentemente innocua considerazione che, se moltiplicate per due, tre o per quel che vi pare tutte le curvature di un impaccamento di Apollonio, ottenete sempre un impaccamento valido; quindi, per evitare queste noiose duplicazioni, si preferisce considerare solo le quadruple cartesiane ***primitive***, ossia quelle per le quali il massimo comun divisore tra i quattro termini è pari a 1.

A questo punto, come probabilmente qualcuno di voi sospetta, diventa possibile definire il ***gruppo delle trasformazioni*** di un impaccamento; se consideriamo la nostra radice quadrupla cartesiana primitiva come un vettore quadridimensionale (colonna), esistono una serie di operatori che permettono di generare le curvature dei cerchi "successivi": siccome un gruppo di quattro cerchi genera altri quattro cerchi, gli operatori dovranno essere quattro, ossia:

$$S_1=\begin{bmatrix}-1&2&2&2\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad S_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&-1&2&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$S_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&2&-1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad S_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\2&2&2&-1\end{bmatrix}$$

Esplorando questi aggeggi[18], ci si accorge velocemente del fatto che $S_i \circ S_i=I$, ossia che applicare due volte di seguito lo stesso operatore riporta alla quadrupla di partenza;

[16] Sì, se volete lo ammettiamo: ci ha lavorato *sul serio*, non si è limitato a scrivere poesie.

[17] Funziona anche nel tridimensionale, come voi avete dimostrato (sì, ve lo abbiamo rifilato come problema). Al momento, nessuno si è pronunciato per le dimensioni superiori. Proposte?

[18] Nel caso voleste provarci con Excel, le funzioni vettoriali implicite rappresentano un aiuto enorme, a giocare con queste cose.

quindi, il nostro simpatico aggeggio non è altro che un ***Gruppo di Coxeter*** (ammettiamo che la nostra dimostrazione formalmente è un obbrobrio, ma siamo abituati a tagliare per i campi); la definizione del ***segno*** di una quadrupla e il fatto che non sia un problema moltiplicare (ad esempio) per –1 permettono di semplificare di molto le dimostrazioni, trasformando il tutto in un oggetto più o meno facilmente trattabile. Dimostrando tra le altre cose che ogni quadrupla cartesiana è riducibile ad una primitiva.

...e sin qui, come dicono gli inglesi, è *commonplace*.

Supponiamo di avere una primitiva A di un impaccamento, e di volerne studiare le curvature; per una serie di motivi particolarmente noiosi da spiegare, è molto comodo catalogare le curvature *modulo* 24, quindi non stupitevi se questo numero compare spesso. Nel 2003, ***Graham***, ***Lagarias*** e altri si accorgono che per grandi valori della curvatura c'è una tendenza all'aumentare della molteplicità dei valori (modulo 24), con sempre meno valori che sembrano assenti; i Nostri, supportati anche da altri indizi, sviluppano la cosiddetta ***Congettura Locale-Globale***. Nelle loro parole:

> *Sia A un impaccamento di cerchi di Apollonio primitivo, contenente curvature congrue a r (modulo* 24*); allora l'insieme degli interi positivi x congrui a r (modulo* 24*) che non compaiono in A viene detto* ***insieme sporadico*** *ed è* ***finito****.*

Insomma, "da un certo punto in poi", gli interi li trovate tutti. Visto che alcuni insiemi simili alla sequenza delle curvature impongono (con dimostrazione) la finitezza dell'insieme sporadico, la cosa sembrava piuttosto ovvia.

Ma, come ci insegna Doc, "ovvio" è parola pericolosa, soprattutto in matematica: infatti, nel luglio del 2023, ***Haag*** e ***Kertzer*** hanno dimostrato il seguente teorema:

> *La Congettura Locale-Globale per gli impaccamenti dei cerchi di Apollonio è falsa.*

E ci hanno scritto un articolo[19].

Nel senso che sono riusciti a dimostrare che in molti impaccamenti sono assenti intere famiglie di numeri (principalmente quadrati e quarte potenze moltiplicate per un'opportuna costante), e queste sono infinite! Al momento, è ancora aperta la questione se in *tutti* gli impaccamenti l'insieme sporadico sia infinito o se ne esistano alcuni nei quali vale la Congettura Locale-Globale, ma restiamo in trepida attesa.

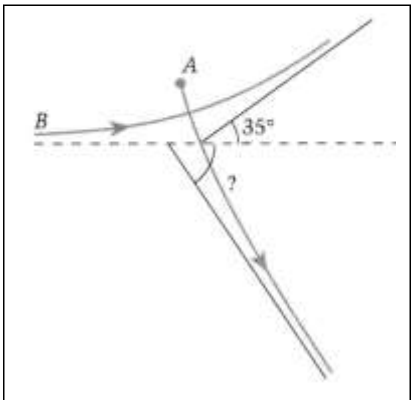
Se volete fare un po' di esperimenti, potete provare con (–3, 5, 8, 8), nella quale non compaiono quadrati; o con (–23, 48, 49, 52), che compare in copertina... Ma questa è più dura.

Abbiamo un ricordo (raramente piacevole) dei primi anni di università: tutta una serie di problemi di meccanica nei quali la soluzione "semplice" prevedeva di risolvere problemi particolarmente balordi nei quali il tutto diventava facilmente risolvibile con una scelta particolarmente bislacca del sistema di riferimento. Fortunatamente, con l'andare del tempo questa tipologia di problemi è scomparsa dal nostro orizzonte degli eventi, sin quando, l'altro giorno...

9.2 [295] Facciamo le cose in grande – [1]

Una stella B *di massa* M *è a grande distanza da una stella* A *di massa uguale la quale si sta avvicinando a* B *alla velocità di* 680 km/s*. Le due stelle avranno un incontro ravvicinato (ma senza urto) e molto tempo dopo la stella* B *si muoverà ad un angolo di* 35° *rispetto alla sua direzione iniziale. Nel sistema di riferimento nel quale la stella* A *è inizialmente ferma, trovate la velocità finale delle due stelle e la direzione del moto della stella* A.

[19] Haag, Kertzer, Rickards, Stange – The Local-Global Conjecture for Apollonian Circle Packing is False – arXiv:2307.02749v2 [Math NT] 21 Jul 2023. Buona parte della base bibliografica, anche se non espressamente indicato, è reperibile su arXiv.

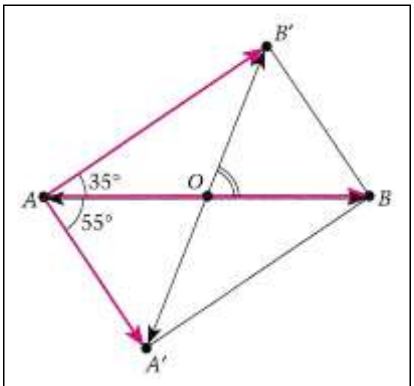


8 *"Quando due mondi si incontrano" (cit.).*

Se non volete spoiler, smettete di leggere qui e datevi da fare, che dal prossimo paragrafo cercheremo di risolvere il problema.

Scegliamo un punto O del nostro piano, rappresentante il baricentro delle due stelle (nel caso specifico, è il punto a metà strada tra le due) o, più precisamente, la ***velocità*** del baricentro. Calcoliamo le velocità relative v_A e v_B delle nostre due stelle e rappresentiamole come due vettori OA e OB sul piano in uscita da O. I due vettori sono uno opposto all'altro, visto che la quantità di moto risultante del sistema rispetto al centro di massa deve essere zero prima, durante e dopo l'interazione. Inoltre, il centro di massa si muove di moto uniforme, quindi è rappresentato sempre dal solito punto nel piano; le stelle cambieranno le loro velocità durante l'interazione, ma non cambieranno le loro velocità rispetto al centro di massa in quanto l'energia (cinetica) del sistema deve essere conservata, se consideriamo l'interazione elastica.

Da questo, si deduce che i vettori OA' e OB' pari alle velocità delle stelle molto dopo l'interazione si possono ottenere semplicemente ruotando i vettori OA e OB attorno al punto O di un qualche angolo; i quattro vettori di "molto prima" e "molto dopo" formano quello che viene definito ***grafico cinematico*** dell'interazione; le "punte" dei vettori sono i vertici di un rettangolo, e le loro origini sono nel centro del rettangolo, come si vede dalla figura.



9 *Il grafico cinematico (e altro).*

Ma il nostro problema originale era riferito alle velocità nel *sistema di riferimento di A*, nel quale la seconda stella era inizialmente a riposo; nessun problema: la velocità di O nel sistema di riferimento di A è ovviamente $-v_A$, e sommando (vettorialmente) le cose possiamo risolvere il problema. Nel nostro grafico, in particolare, si ha che $AO+OX=AX$ e per ottenere il grafico cinematico nel sistema di riferimento di A dobbiamo semplicemente tracciare i vettori da A verso gli altri punti (nel disegno, sono quelli in rosso).

A questo punto, con poca trigonometria e i dati del problema, si ricavano:

- La **velocità iniziale** di B, pari a $AB'=AB\cos 35° \approx 557$Km/s
- L'**angolo di deviazione**[20] di B, pari a $BAA'=90° - 35° = 55°$
- La **velocità finale** di A, pari a $AA'=AB\cos 55° \approx 390$Km/s

Se esploriamo ulteriormente il nostro diagramma possiamo però notare alcune altre cose; ad esempio, attraverso il Teorema di Pitagora, sul triangolo $AA'B'$, otteniamo $A'B'^2=A'A^2+B'A^2$; siccome le lunghezze di AA' e AB' sono le velocità finali u_A e u_B dei due corpi nel sistema di riferimento di A e la lunghezza dell'ipotenusa $A'B'=AB$ è la velocità iniziale w_B di B rispetto ad A; sostituendo nel Teorema di Pitagora e moltiplicando per $M/2$, otteniamo:

$$\frac{Mw_B^2}{2} = \frac{Mu_A^2}{2} + \frac{Mu_B^2}{2}$$

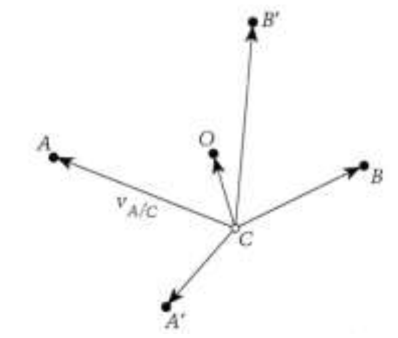
che è la legge di conservazione dell'energia nel sistema di riferimento di A. Inoltre, dal disegno è facile vedere che lo scattering BOB' tra la velocità iniziale e finale di B nel

[20] "Scattering" è, secondo noi, molto più bello.

sistema di riferimento del centro di massa è ***il doppio*** dello scattering *BAB'* nel sistema di riferimento di *A*. Carino, vero?

Cerchiamo allora di generalizzare il concetto: prima però, cerchiamo di semplificarci un po' la vita, statuendo che tutti questi oggetti si muovono in modo *uniforme* (nel senso che le loro velocità non hanno discontinuità) e che questi movimenti sono tutti sullo stesso piano; se volete, comunque, il caso tridimensionale è analogo, e potete calcolarvelo (non molto) facilmente).

Cerchiamo di interpretare la cosa *more geometrico*.



10 ...*ma mettetelo un po' dove vi pare....*

Abbiamo scelto un punto *O* arbitrario (che, "casualmente", era il baricentro del sistema) a rappresentare un sistema di riferimento, e abbiamo correlato ogni oggetto in movimento ad un certo punto *X* in modo tale che il vettore *OX* rappresenti la velocità di un oggetto rispetto a *O*; grazie alla legge di composizione delle velocità di galileiana memoria, possiamo trovare la velocità di ogni oggetto rispetto a qualsiasi sistema di riferimento, semplicemente tracciando il vettore tra il punto di riferimento e il punto rappresentante il nostro oggetto; lo abbiamo fatto per il nostro punto *A*, ma potemmo farlo per un qualsiasi punto *C*, come vediamo nella figura qui di fianco. Il che ci permette di introdurre una nuova, interessante notazione. Qui, il vettore *CA* rappresenta la velocità della nostra stella *A* nel sistema di riferimento centrato su *C*, che indichiamo con $v_{A/C}$; per trovare questa velocità, ci basta misurare la distanza *CA* nel nostro spazio (o, se preferite un po' di trigonometria, potete facilmente calcolarla): insomma, ogni concetto geometrico riceve un'interpretazione cinematica.

Adesso, facciamo il salto: usiamo tutte queste interpretazioni come *definizioni* dei concetti geometrici nell'interpretazione cinematica; o, se volete stare meno sul filosofico, considerate un qualche insieme di punti *V* in corrispondenza biunivoca con tutte le possibili velocità; visto che (Galileo docet) le velocità non esistono "di per sé", ma sempre riferite a un qualcosa (il sistema di riferimento), potremmo dire che ognuno di questi punti rappresenta un'intera classe di oggetti che si muovono tutti alla stessa velocità o, se preferite, che sono in quiete uno rispetto all'altro. Sempre per inventarci delle simpatiche notazioni, attacchiamo al tutto il prefisso "***v***-": in questo modo i punti di *V* si chiamano *v-punti*, eccetera; notate che la la *v-distanza* tra *A* e *B* quindi non è altro che la velocità (relativa) $v_{A/B}=v_{B/A}$, mentre il *v-angolo BAC* corrisponde all'angolo tra i due vettori velocità $v_{B/A}$ e $v_{O/A}$. Si noti che quando questo angolo vale 0° o 180°, i *v*-punti *A*, *B* e *C* sono *v-collineari*, ossia sono tutti sulla stessa *v-linea*; il che significa che *se tre punti sono v-collineari e uno di questi ne incontra un altro, allora prima o poi questi due incontreranno il terzo*: in pratica, dal punto di vista di *A*, che si considera in quiete, gli oggetti *C* e *B* visitano la sua posizione; tornando al *v-spazio*, se sono tutti sulla stessa linea e sono distinti, significa che hanno velocità differenti (e quindi o si incontreranno nel futuro o si sono incontrati nel passato)

Insomma, con un po' di ginnastica geometrica siamo riusciti a risolvere in modo semplice un problema decisamente complicato. La prossima volta, vediamo cosa succede dopo.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms