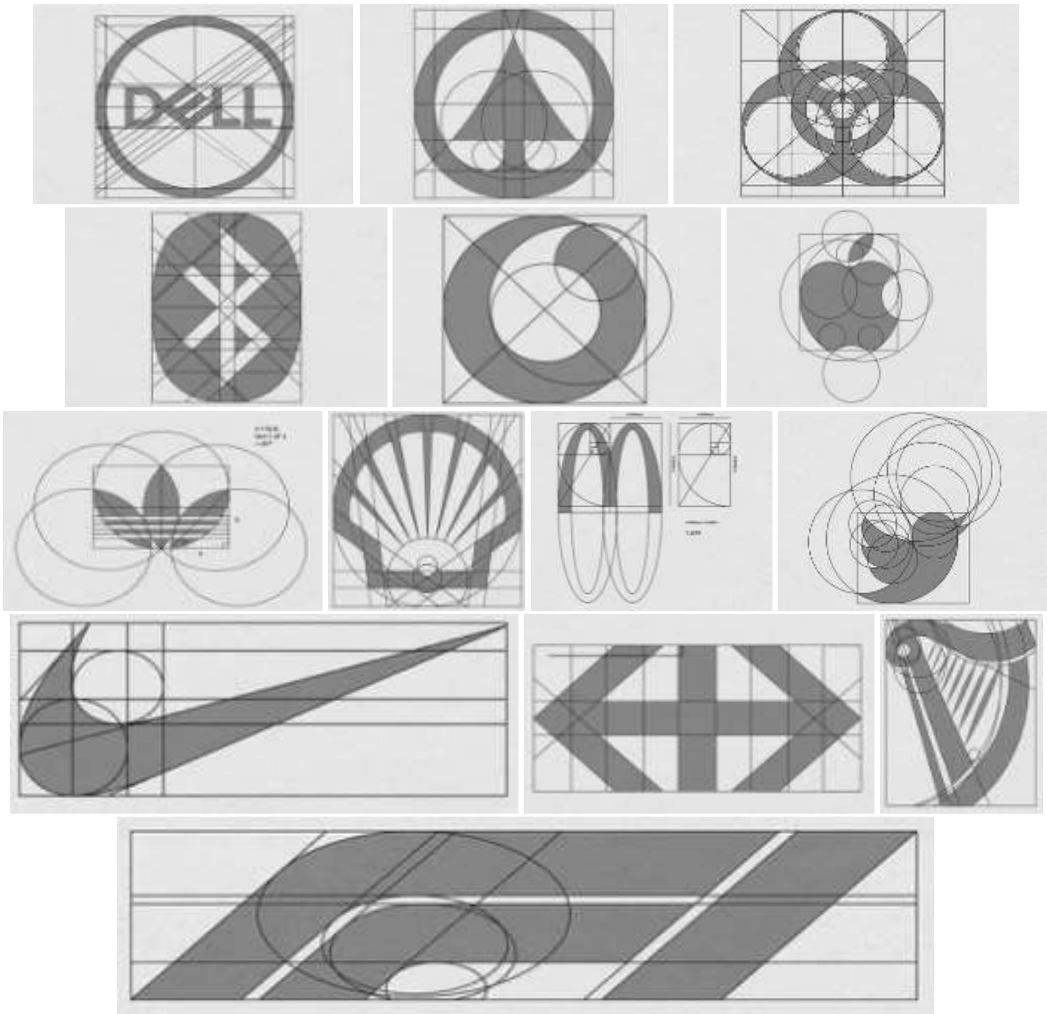
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 293 – Giugno 2023 – Anno Venticinquesimo



1. Fiat lux **3**

2. Problemi **10**

2.1 …tanti anni fa, in una rivista neanche troppo lontana 10
2.2 Tutta colpa di una Curiosona... 10

3. Bungee Jumpers **11**

4. Soluzioni e Note **11**

4.1 [291] 12
4.1.1 Una (per ora) piccola scacchiera 12
4.1.2 Un problema elettorale 16
4.2 [292] 18
4.2.1 Lavoro per Doc 18
4.2.2 Pronti per le elezioni? 21

5. Quick & Dirty **24**

6. Pagina 46 ..... **24**

7. Paraphernalia Mathematica **26**

7.1 Elezioni al Paesello 26

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM289 ha diffuso 3'375 copie e il 26/04/2023 per Google eravamo in 7'920 pagine.

...a noi MacDonald's non è mai stato particolarmente simpatico, ma dobbiamo ammettere che da quando abbiamo scoperto che c'entra la sezione aurea, il nostro atteggiamento verso di lui è nettamente migliorato. Ulteriori loghi e simboli analizzati matematicamente a: https://www.defantri.com/2018/11/mathematics-in-pictures-math-art.html.

1. Fiat lux

“וַיֹּאמֶר אֱלֹהִים יְהִי
אוֹר וַיְהִי־אוֹר:”[1]

(Genesi, 1, 3)

Di tutti i sensi che abbiamo (e che sono parecchi di più dei canonici cinque ricordati dalla tradizione) la vista è quello generalmente ritenuto più importante. Il tatto è difficile anche solo definirlo con esattezza; olfatto e gusto sono regali preziosissimi della natura, ma un eventuale difetto di sensibilità di questi non è in genere considerato come una vera e propria menomazione, almeno dai più. È probabile che la pensino in maniera assai diversa coloro che di tali menomazioni soffrono, ma resta il fatto che la maggior parte delle persone non possiede neppure un termine, una parola colloquiale per definire chi è affetto da queste patologie. È diverso il caso dell'udito: la capacità di intercettare i suoni è cruciale nella vita quotidiana, soprattutto da quando gli esseri umani hanno deciso che la maniera più efficace per comunicare tra loro era quella di articolare specifici rumori codificati con l'apparato boccale. Anche i pitecantropi con problemi d'udito avranno avuto seri problemi, non riuscendo ad ascoltare le grida d'allarme dei compagni di branco che segnalavano l'arrivo di una tigre, ma *Homo sapiens* ne ha forse di più – anche se forse meno determinanti per la sopravvivenza – da quando i grugniti e i mugolii si sono trasformati in veri e propri linguaggi.

In ogni caso, non v'è dubbio che le difficoltà maggiori le abbiano sempre avute quegli individui i cui occhi non erano in grado di recepire a dovere le mille informazioni che erano veicolate dalla luce. Gli esseri umani sono così strettamente legati alla percezione del mondo attraverso la vista che la natura della luce è restata – oltre che protagonista assoluta di migliaia di metafore – la più esplicita manifestazione della magia dell'esistenza stessa. Per la religione più diffusa sul pianeta, la luce è il soggetto della prima frase mai pronunciata, il primo sostantivo[2]: più in generale, se si sceglie davvero il linguaggio come metrica di valutazione, è quasi impossibile trovare, sia negli usi comuni che in quelli letterari, la luce associata a qualcosa di negativo; per contro, è quasi impossibile tessere le lodi di qualcosa o di qualcuno senza spendere qualche aggettivo che, in un modo o in un altro, non abbiano un'etimologia imparentata con la luce.

Oltre all'indiscutibile fatto che gli esseri umani si sentano perduti in assenza di luce, a renderla misteriosa, preziosa, talvolta addirittura sacra, contribuisce anche il fatto che la sua natura è davvero difficile da interpretare. Ritornando ai cinque sensi elementari, è abbastanza naturale associare tatto, gusto e olfatto a una sorta di "contatto diretto di materia", che è verosimilmente la forma più immediata di conoscenza: anche se, a ben vedere, perfino il contatto è qualcosa di fisicamente assai complicato da spiegare[3], è indubbio che anche per piante, animali e uomini primitivi è una sorta di "conoscenza" che è del tutto naturale, e che non richiede ulteriori spiegazioni. Olfatto e gusto sono forme un po' più elaborate di contatto (una specie di "tatto fatto con la lingua o con il naso", visto che il cibo è effettivamente toccato dalla lingua e i sensori dell'olfatto catturano particelle volatili della sorgente che emette odori) e quindi probabilmente ritenute banali, quasi ovvie

---

[1] "Dio disse: "Sia la luce!". E la luce fu." (Bibbia CEI, 2008). La citazione d'apertura è ovviamente scritta in ebraico.

[2] È interessante il commento di Gesualdo Bufalino, grande scrittore siciliano, in merito a questa sorta di primogenitura: anche se la luce è il primo nome mai pronunciato, resta il fatto che Dio, appunto, la pronuncia, e quindi la parola precede persino la luce. Una sorta di ratifica del Vangelo secondo Giovanni, che in effetti comincia con la frase "*In principio era il Verbo*".

[3] Su scala atomica, due corpi sono "a contatto" quando gli elettroni superficiali degli atomi dei corpi che "si toccano" sono abbastanza vicini da respingersi per interazione elettromagnetica. Insomma, se uno è ancora abituato a immaginarsi le particelle atomiche e subatomiche come delle palline solide (cosa che non è), quelle palline cominciano a respingersi ben prima di "toccarsi". Ma è ovvio che tutto sta proprio nella definizione di "toccarsi".

anche dai nostri antenati meno scolarizzati. Non vale lo stesso per l'udito, perché è abbastanza istintivo ritenere "il rumore di un oggetto" qualcosa di essenzialmente diverso dall'oggetto che causa il rumore; però è immaginabile che non ci sia voluto molto ad associare i suoni a delle vibrazioni. Non fosse altro perché c'è un'associazione quasi immediata tra suono e movimento: una cosa ferma è solitamente del tutto silenziosa, e se non lo è significa che, in realtà, qualcosa al suo interno si sta muovendo. Poi, non appena si inventano i primi tamburi, la cosa deve essere risultata evidente a tutti: se c'è qualcosa che vibra, fa rumore; e da lì a immaginare che il tipo di rumore sia dipendente proprio da come e quanto l'oggetto vibra, il passo è relativamente breve. Ma la luce no.

1 *…e la luce fu.*

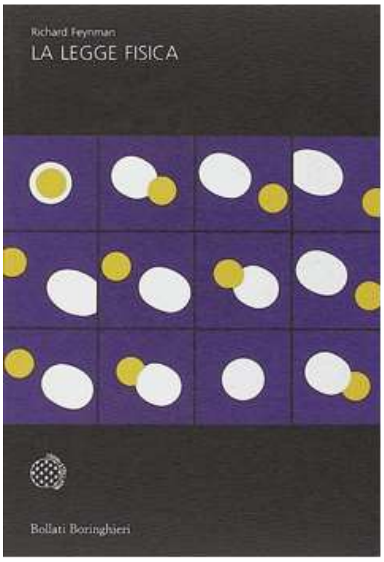
Cosa sia, e come funzioni la luce – e di conseguenza la capacità di vedere, e quindi il modo principale con cui conosciamo tutto quanto ci circonda – è sempre stato misterioso, e quindi facilmente riconducibile al miracoloso. A pensarci bene, è un po' così ancora oggi: i testi di fisica e di storia della scienza possono raccontarci benissimo cosa si credeva che fosse e cosa effettivamente sia questa cosa sfuggente e indispensabile che è la luce, ma quasi sempre si rimane, almeno all'inizio, abbastanza insoddisfatti dalle spiegazioni. I libri raccontano di onde elettromagnetiche, e sono cose poco intuitive sia il sostantivo "onde" che l'aggettivo "elettromagnetiche" ma, più che un problema di conoscenza lessicale, il primo risultato della definizione è una certa insoddisfazione psicologica. Perché c'è poco da fare, anche quando ci si familiarizza con le geniali Equazioni di Maxwell rimane una specie di incompletezza di fondo: il mondo è ciò che vedo, viene da pensare mentre si studia per la prima volta la natura della luce, e il mondo è tutto. Cieli azzurri, sorrisi, le colorazioni degli uccelli, il grigio scuro dell'asfalto, la scacchiera sullo schermo del pc e gli occhi verdi del mio amore eterno: come cavolo faccio a riassumere tutte queste cose con la misera consapevolezza che tutto si riduce alla capacità delle mie retine di intercettare le onde elettromagnetiche con frequenza dai 440 ai 770 Terahertz?

Beh, si può solo rispondere che, alla fin fine, proprio di quello si tratta: quel che chiamiamo "mondo" lo conosciamo quasi esclusivamente attraverso quella piccola finestra dello spettro elettromagnetico, e siamo veramente bravi a estrarre dati, informazioni, e soprattutto un'enormità di emozioni da quelle asettiche ondicole. Ma probabilmente riusciremmo a fare le stesse cose, ad estrarre lo stesso concentrato di emozioni anche se la finestra del "visibile" fosse spostata verso frequenze diverse, verso il cupo infrarosso o l'abbacinante ultravioletto, perché le emozioni sfuggono ancora assai bene all'indagine scientifica e sono capaci di spuntare un po' dappertutto. Non per niente non esiste scienziato che non dichiari, con gli occhi trasognati, che perfino la medesima indagine scientifica è una sorgente spettacolare di emozioni, di sensazioni strane e potentissime nel suscitare – soprattutto – l'emozione della meraviglia. E, a ben vedere, è proprio la luce uno dei fenomeni naturali che più ne ha generata nella lunga storia della scienza: sfuggente, misteriosa e bifida, così si è mostrata fin dalla notte dei tempi, e ancora oggi è difficilissima da spiegare, quasi impossibile. Una delle menti più acute del secolo scorso fa questa premessa al suo pubblico di uditori e lettori, durante una delle sue più famose lezioni, poi raccolte in un libro:

> *Vi dirò come si comporta la natura. Se ammetterete semplicemente che essa si comporta in questo modo, la troverete una cosa incantevole e meravigliosa. Se ci*

> *riuscite, cercate di non chiedervi "*Ma come può essere così?*" perché entrereste in un vicolo cieco da cui nessuno è ancora uscito. Nessuno sa come possa essere così.*[4]

Bisognerà precisare che in questo passaggio Feynman sta iniziando a spiegare non solo la natura della luce, ma essenzialmente la "natura della natura", così come è stata scoperta nello sviluppo della fisica quantistica. La lezione prosegue con la descrizione dell'esperimento delle "due fenditure", che dovrebbe dare una risposta definitiva all'apparentemente innocua domanda classica se la luce sia composta da particelle o da onde, ma Feynman si affretta a precisare che il comportamento osservato non vale solo per le particelle di luce – i fotoni – ma anche per tutte quelle che compongono ciò che siamo soliti chiamare "materia", a partire dagli elettroni. Aggiunge anche, a consolazione del lettore, che praticamente tutti gli aspetti stupefacenti della meccanica quantistica sono in ultima analisi riconducibili a questo fenomeno messo in evidenza dall'esperimento delle due fenditure.



2 *Ancora in catalogo, con la stessa copertina, da più di mezzo secolo. Una ragione ci sarà…*

La risposta alla fatal domanda è anticipata nel brano riportato: è una risposta strana, che lascia insoddisfatti tutti coloro che amano schierarsi per un partito o per l'altro. L'osservazione finale che Feynman suggerisce di non fare ("*Ma come può essere così?*") è proprio quella che invece, immancabilmente, tutti si fanno, la prima volta che sentono la risposta. Noi invece cercheremo davvero di dar retta a Dick, e ci limiteremo a ricordare che la domanda primigenia – "*la luce è fatta di onde o di particelle?*" – è davvero molto, molto più vecchia della meccanica quantistica, e se la sono posta un po' tutti i filosofi naturali, da Newton in poi. Anzi, da prima ancora di Newton: gli antichi greci, ad esempio, erano anch'essi divisi in due scuole di pensiero, solo che anziché interrogarsi sul dualismo onda-particella si schieravano come *emissionisti* e *immissionisti*, con i primi che pensavano che fosse l'occhio ad emettere i "raggi" che consentivano di vedere le cose, mentre i secondi ritenevano (più saggiamente, col senno di poi) che fossero le cose a sparare i raggi negli occhi di chi osserva. In ogni caso, tra i millanta che presero posizione nel più fervido dibattito tra la scuola ondulatoria e quella corpuscolare c'era anche un matematico francese di grande valore, anche se la storia della scienza lo ricorda spesso – impietosamente – per un paio di suoi giudizi affrettati, o quantomeno sfortunati.

[4] Richard Feynman, "*The Character of Physical Law*", 1965. Il brano è stato preso dall'edizione italiana "*La Legge Fisica*", Universale Scientifica Boringhieri, 1976 (ristampa della prima edizione del 1971). Traduzione di Luca Radicati di Bròzolo.

3 *Siméon-Denis Poisson*

Siméon-Denis Poisson nasce a Pithiviers, cittadina grossomodo a mezza strada tra Parigi e Orleans, il 21 Giugno 1781. Karl Marx avrebbe probabilmente definito la sua famiglia con il vetusto termine di "piccolo borghese": tutt'altro che nobile, il padre era un ex-militare che a fine carriera aveva ottenuto un posto di lavoro come impiegato nell'amministrazione pubblica, e tirava avanti una famiglia assai numerosa ma con la maggior parte dei figli che non riuscivano a sopravvivere all'infanzia. Anche Siméon-Denis è tutt'altro che vigoroso e robusto, ma almeno sembra eccellere negli studi e riceve dalla famiglia tutto l'aiuto necessario per proseguirli. Quando scoppia la Rivoluzione Francese è ancora un bimbo, ma suo padre è un acceso rivoluzionario della prima ora, e già programma per il figlioletto un avvenire come medico. Se ne parliamo qui, in un articolo di una serie che tradizionalmente racconta le vite dei matematici, è facile immaginare il seguito: il giovane Poisson non ha nessuna passione per la scienza medica, ritorna a casa dall'apprendistato che suo padre gli aveva trovato come assistente chirurgo[5] in una città vicina, riprende a studiare e impressiona i suoi insegnanti – soprattutto in matematica – al punto che questi lo sollecitano a provare gli esami per l'ingresso alla da poco fondata École Polytechnique di Parigi.

I professori lo hanno consigliato bene: Poisson fa l'esame, lo supera, entra all'École Polytechnique e qui trova altri insegnanti che condividono pienamente l'opinione espressa dei docenti del liceo di provenienza. Solo che questi nuovi insegnanti si chiamano Lagrange[6], Laplace[7], Legendre[8], Monge[9] e così via. Il fior fiore della matematica francese, insomma, che in quegli anni post-rivoluzionari non aveva davvero rivali al mondo; un fior fiore in cui Poisson si inserisce incredibilmente bene: già al primo anno di corso le sue capacità matematiche – senza contare il non trascurabile fatto che la sua formazione matematica, fino ad allora, era stata assai poco alimentata – sono così evidenti che convincono i grandi del Politecnico a nominarlo "professore assistente"[10] già al primo anno di corso; del resto, era già a metà della sua carriera di studente, visto che la completa in due soli anni.

Il resto della vita di Siméon-Denis è già praticamente tracciato: si sposa, genera e cresce quattro figli, sarà sempre un fedele ammiratore della Prima Repubblica nata dalla rivoluzione, anche se la Francia, durante la sua vita, attraverserà molte peripezie politiche; ma Poisson resterà abbastanza defilato, perché tutto sommato la politica lo interessava assai poco.

---

[5] C'è da dire che, forse ancora più che il disamore per la chirurgia, al suo ritiro da quell'apprendistato contribuì in maniera decisiva la sua totale imperizia manuale, una quasi patologica incapacità di coordinazione che gli sarà d'impaccio persino nella sua – ovviamente assai poco manuale – carriera accademica. Non c'era materia in cui non eccellesse, fatto salvo uno dei corsi "fiori all'occhiello" della École: quello di geometria proiettiva tenuto da Monge, proprio per la sua incapacità di disegnare diagrammi in maniera accettabile.

[6] Giuseppe Luigi Lagrange: parliamo di lui in RM048, Gennaio 2003, "*Torino, 1750*": primo compleanno di RM.

[7] Come sarebbe a dire? Non abbiamo ancora scritto un compleanno su Laplace? Per la miseria…

[8] Adrien-Marie Legendre: parliamo di lui in RM140, Settembre 2010, "*Le opere e le facce*".

[9] Gaspard Monge: parliamo di lui in RM206, Maggio 2016, "*Mille e una Gioconda*".

[10] Titolo che abbiamo inventato noi, in realtà, nel goffo tentativo di rendere il termine francese "*répétiteur*", nella ferma convinzione che se avessimo tradotto letteralmente con "ripetitore" non avremmo reso meglio l'idea.

La sua università, per contro, sarà sempre un luogo di fervente attività politica, e l'impressione che si ha, alla fin fine, è che Poisson, quando si schierava a favore o contro una tendenza politica, lo facesse soprattutto pensando a come questa potesse favorire o danneggiare l'École. Nel 1825 finì perfino con l'essere insignito di un titolo nobiliare, quello di barone, ma non lo usò mai: forse perché ricordava l'antipatia paterna verso gli aristocratici o, più probabilmente, perché rientrava nelle cose che non lo interessavano. Del resto, la migliore sintesi del suo carattere la riporta Arago[11], quando riporta la sua più celebre affermazione: "*La vita è buona solo per due cose: fare matematica e insegnare matematica*".

4 *L'École compirà 240 anni nel 2024, ma gode ancora di ottima salute. Il suo logo ufficiale certifica il nomignolo con cui è chiamata dagli studenti: "l'X".*

La cosa più stupefacente del suo passaggio su questo pianeta è la quantità – oltre che la parallela qualità – dei suoi lavori matematici. Elettricità, magnetismo, meccanica celeste, equazioni differenziali, meccanica, termodinamica, virtualmente ogni campo delle discipline di matematica e fisica: su di esse scrisse tra i trecento e i quattrocento articoli, e la cosa notevole è che non procedeva mai in parallelo su più studi; ogni memoria era scritta con piena e totale concentrazione, e solo dopo averne terminata una era in grado di iniziare un nuovo studio. Una tale mole di lavori e una così totale abnegazione avrebbero dovuto forse renderlo più famoso di quello che effettivamente è oggi, anche se non c'è studente di discipline STEM che possa concludere il suo corso di studi senza aver incontrato il suo nome almeno un paio di volte; è possibile che la sua relativamente scarsa fama sia dovuta, almeno in parte, alla eccezionale quantità di grandi matematici che affollano gli anni e gli spazi della sua vita. In parte, forse solo alla sfortuna, visto che il nome di Poisson è spesso ricordato, nell'aneddotica scientifica, in merito a due episodi in cui il nostro, pur non facendo certo la figura dell'incompetente, si ritrova a rivestire il ruolo peggiore degli aneddoti.

Il primo è quello legato alla figura di Galois[12], il protagonista della vita più romanzesca della storia della matematica e forse della scienza tutta; del resto, morire a vent'anni in un duello per amore e passare l'ultima notte di vita a creare un'intera nuova disciplina della matematica è una storia che sarebbe stata giudicata inverosimile anche dai più spregiudicati sceneggiatori di Hollywood. L'episodio è spesso raccontato impietosamente: nel gennaio del 1831 Galois invia all'Accademia i suoi lavori sulla teoria delle equazioni, e Poisson viene incaricato di leggerli e giudicarli. Alla fine della sua analisi, Poisson giudica il lavoro del giovanotto con un aggettivo rimasto indelebile come un marchio: "incomprensibile". Il marchio d'infamia però finisce per portarselo appresso proprio Poisson, perché dopo la morte di Galois nel fatidico duello del maggio 1832 i suoi scritti vengono nuovamente analizzati, compresi; la genialità di Galois risalta in tutto il suo splendore e la matematica si arricchisce di quella miniera di meraviglie che è la Teoria dei Gruppi. In realtà il racconto canonico, per quanto veritiero nell'essenziale, è a sua volta assai romanzato: si dimentica quasi sempre di dire che fu proprio Poisson a sollecitare inizialmente Galois a inviargli i suoi lavori, e già questa era un'apertura niente male, visto che Galois era notoriamente una testa calda, noto soprattutto come violento attivista antimonarchico e appena espulso dalla Normale. Si dimentica anche di riportare che Poisson non disse "incomprensibile" con espressione di altero disprezzo, ma accompagnando il giudizio con la sollecitazione a Galois di riorganizzare e completare quanto aveva letto, in maniera da rendere più chiaro quanto sostenevano i suoi scritti. Si dimentica di dire che Galois ricevette la risposta di Poisson con molto ritardo, perché era finito in prigione, e ciò non di meno tenne in buon conto il suggerimento dell'accademico, e

[11] François Arago: di lui parliamo in RM193, Febbraio 2015, "*La face l'École Militaire, #16*".

[12] Évariste Galois: di lui parliamo in RM069, Ottobre 2004, "*Group Fiction*".

iniziò davvero a mettere in ordine idee e lavori, e continuò a farlo fino a poco prima del duello. Il suo celebre "*Non ho tempo…*" ripetutamente scritto a margine dei fogli riempiti nella sua ultima notte di vita era riferito non tanto alla creazione di una nuova teoria, quanto piuttosto a completare il compito che Poisson gli aveva suggerito.

5 *Un giovane Poisson ritratto nel 1804 da E. Marcellot.*

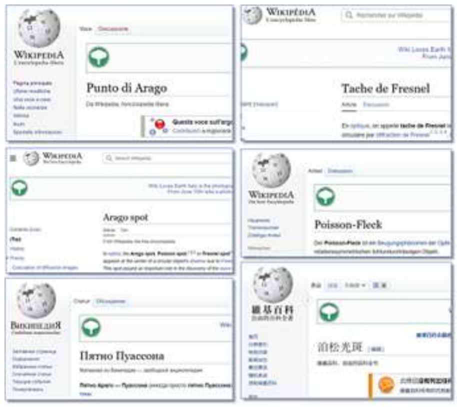
Il secondo episodio è certamente meno drammatico: è limitato a una schermaglia scientifica che porterà alla fine ad una scoperta importante, e anche se Poisson ne esce un po' deluso e scornato, non c'è dubbio che riesca comunque a mettere in risalto la sua spettacolare capacità analitica. Bisogna tornare al 1817: Poisson era già membro dell'Accademia delle Scienze di Francia, e tutta l'augusta istituzione scientifica era una fervida sostenitrice della natura corpuscolare della luce. Del resto, era la teoria che era stata avallata dal più grande fisico mai esistito, Isaac Newton, mentre solo di recente stava prendendo forma la scuola ondulatoria. Questa era nata soprattutto a causa del protagonista delle prime pagine di quest'articolo: l'esperimento delle due fenditure. Abbiamo accennato a come Feynman, nel bel mezzo del ventesimo secolo, racconti ancora della meraviglia che questo esperimento riesce a suscitare ai fisici contemporanei, ma non vorremo aver dato l'impressione che l'esperimento fosse contemporaneo alla nascita della meccanica quantistica. Tutt'altro: la prima forma dell'esperimento risale al 1799, quando Thomas Young, uno studente inglese che studiava medicina nella germanica università di Göttingen, scrisse alla Royal Society una tesi secondo la quale anche la luce, come il suono, poteva forse essere composta di onde, visto che un suo esperimento mostrava che creava delle figure di interferenza, esattamente come fanno le onde sonore. La Royal Society non era certo meno newtoniana – e quindi partigiana della teoria corpuscolare – di quanto lo fosse l'Accademia di Francia, ma nondimeno la teoria di Young cominciò a fare proseliti.

Il citato 1817 è l'anno in cui l'Accademia francese pone come tema per l'annuale concorso proprio la diffrazione, e certamente si aspettava che a vincere il premio sarebbe stato un teorico della natura corpuscolare della luce. Sul fronte opposto, però, era giunto all'esame della commissione uno studio di valore scritto da un ingegnere civile, Jean-Augustin Fresnel[13]. Poisson si incaricò di analizzare a fondo il documento di Fresnel, e lo fece con tutta la competenza che gli era propria e con la caparbietà di uno dei maggiori sostenitori della tesi corpuscolare: e riuscì pienamente nell'intento. Ovviamente il suo intento era quello di dimostrare la fallacia della tesi di Fresnel: i concorsi scientifici, a quei tempi, assomigliavano più a una competizione tra sportivi professionisti che a un consesso di ricercatori animati dal sacro fuoco della ricerca della verità. Fatto sta che Poisson sottopose il lavoro di Fresnel a un rigoroso esame e, pur non riscontrandovi errori, si lanciò nel calcolo delle implicazioni. Riuscì così a dedurre che, qualora la teoria di Fresnel fosse stata giusta, ponendo un ostacolo circolare perpendicolarmente al raggio di una sorgente puntiforme di luce, sullo schermo posto dietro l'ostacolo dovrebbe formarsi un singolo punto luminoso in asse con la sorgente luminosa stessa. La cosa appariva paradossale, non solo perché

[13] Per quanto nato in una data incredibilmente notevole, a Fresnel non abbiamo ancora dedicato un compleanno. Di certo se lo merita, e altrettanto certamente definirlo soltanto come "ingegnere civile" è assai riduttivo. È di fatto l'inventore dei sistemi catadiottrici, che hanno radicalmente rivoluzionato l'ottica; la prima applicazione rese i fari estremamente più efficaci, rendendo così la navigazione molto più sicura e di conseguenza salvando presumibilmente migliaia di vite. Fresnel riuscì poi a spiegare non solo la diffrazione, tema del concorso, ma anche tutti i tipi di polarizzazione. Non ebbe forse una fine spettacolare come quella di Galois, ma una vita comunque breve e dolorosa: combatté sempre contro la tubercolosi e scese nella tomba appena trentanovenne, nel 1827.

spudoratamente controintuitiva, ma anche perché non era mai stato osservato nulla del genere: solo oscurità, dietro lo schermo, esattamente come prevedeva la teoria corpuscolare.

Il presidente della giuria esaminatrice era Arago, famoso per la sua correttezza e l'apertura mentale: questi propose comunque di metter in piedi un esperimento apposito, anche perché la tesi presupponeva una sorgente puntiforme e, a quei tempi, era davvero difficile ottenere delle sorgenti davvero puntiformi di luce, e non era mai sembrato necessario arrabattarsi troppo per crearle. Fu lo stesso Arago a preparare l'esperimento, preparando un disco metallico di due millimetri e inserendolo con cura all'interno di una lastra di vetro: ed eccolo là, il punto luminoso, proprio dove la teoria di Fresnel, opportunamente elaborata da Poisson (anche se con intenti tutt'altro che collaborativi), prevedeva si dovesse trovare.



6 *Capiamo il cirillico quel pochissimo che basta a capire che a Mosca preferiscono la denominazione "punto di Poisson". Siamo convinti che valga lo stesso anche per la Cina, perché, visto che la traduzione automatica di Wikipedia si rifiutava di funzionare, abbiamo dato in pasto a Google Translate solo il titolo, e la traduzione è stata "punto velenoso". Ipotizziamo che gli algoritmi affrontino il cinese passando per l'inglese, e che il "pesce" francese sia diventato nel passaggio il "veleno" inglese. Ma chissà se è vero…*

Dal punto di vista della storia della scienza, bisogna registrare almeno tre diverse conseguenze dell'esperimento del 1817. La più immediata, ovviamente, è che Fresnel vinse con pieno merito il premio del concorso dell'Accademia Francese delle Scienze. La più importante, è il vistoso e radicale cambio di opinione della comunità dei fisici in merito alla natura della luce; se prima quasi nessun dotto aveva il coraggio di mettersi contro l'opinione del sommo Newton, capostipite della scuola di pensiero corpuscolare, dopo l'esperimento quasi nessuno aveva più dubbi sul fatto che la luce fosse fatta di onde. Dovrà passare quasi un altro secolo prima che un altro grande, l'unico in grado di rivaleggiare davvero con Newton, si schierasse per una volta a fianco del grande inglese del quale aveva distrutto una buona parte del lavoro: con l'effetto fotoelettrico spiegato in una delle sue celeberrime memorie del 1905, Albert Einstein riporta in auge l'immagine della luce composta da particelle, i fotoni o "quanti di luce". La spiegazione di Einstein però non demolisce la scoperta di Young e Fresnel: che la luce abbia anche una natura ondulatoria resta del tutto innegabile. Il dualismo lascia perplessi i fisici del XX secolo, ma resta lì, ancora irrisolto. O meglio, come dice Feynman, senza bisogno di soluzione: nessuna delle due scuole di pensiero ha ragione, e nessuna delle due ha torto.

La terza conseguenza è la meno importante, ma comunque divertente. Che nome dare a quel piccolo punto luminoso che ha dimostrato la natura ondulatoria della luce? Quello di Fresnel, autore della teoria che lo avrebbe previsto? Quello di Arago, che impose l'esperimento risolutivo, e lo realizzò in prima persona? O quello di Poisson, che a ben vedere è certo stata la prima persona ad immaginarlo, anche se immaginava e sperava nella sua inesistenza? Senza che nessuno abbia pianificato la cosa, quel che è successo è che la molteplice natura della luce sembra aver avuto la meglio anche in questo caso: c'è chi lo chiama "punto di Fresnel", chi preferisce denominarlo "punto di Arago" e naturalmente chi lo riconosce come "punto di Poisson".

A nostro modesto parere, la cosa più importante non è certo quella di scegliere una volta per tutte un solo nome, anzi: niente rende meglio onore a quel rivoluzionario punticino luminoso di questa triplice e contrastante denominazione.

2. Problemi

2.1 ...tanti anni fa, in una rivista neanche troppo lontana...

OK, per prima cosa chiariamo il titolo. La rivista non può essere molto lontana, visto che la state visualizzando a schermo o sfogliando, se siete dei feticisti della carta[14]. Un po' diversa la situazione per quanto riguarda gli anni: basti dire che era talmente tanto tempo fa che per appassionarci al problema hanno dovuto tirarci dentro delle ragazze... Comunque, la similitudine è piuttosto remota, visto che all'epoca si cercava di massimizzare una probabilità, mente qui vi si chiede proprio una strategia.

L'ultimo gioco inventato da Rudy per far impazzire Doc richiede, nella peggiore delle ipotesi, un foglio di carta e una matita: infatti, Rudy pensa un numero (intero. Su, fate i bravi) tra uno e cento (estremi inclusi), e Doc deve trovarlo.

"Vabbè, una probabilità su cento... Paga almeno centoun volte la posta o non vale la pena..."

No, un attimo. Doc può fare dei tentativi ripetuti, e ogni volta Rudy gli dirà se il numero è più grande o più piccolo. Doc vince quando lo indovina.

"...ricerca binaria, allora... Sai che emozione..."

La finite di interrompere? Doc ha a disposizione una sola risposta "più grande": la seconda volta che sente rispondere che il suo tentativo è troppo grande, automaticamente perde. E, una volta tanto, Rudy è onestissimo nelle risposte.

Rudy, come sempre, si basa sulla scarsa voglia di analisi da parte di Doc (contrariamente a quanto si crede, Doc se la cava bene in matematica: è che "non ne ha voglia"... insomma, studia ma non si impegna), ma questa volta gli è parso di cogliere un lampo satanico dietro gli occhiali. Voi che ne dite? Esiste una strategia? E quanti tentativi dovrà fare Doc per vincere?

L'espansione dovreste essere in grado di trovarla da soli; noi ci limitiamo a condensarla in un "se non vi piacciono i numeri, provate con le lettere...". Anche perché i numeri (anzi, il numero) ce li siamo inventati noi, quindi non sono molto importanti. Ma cominciare con un caso numerico può aiutare.

2.2 Tutta colpa di una Curiosona...

"Allevare un segugio è estremamente frustrante. Quando lo chiami, non gli importa nulla di dove sei; quello che lo affascina, è scoprire come ci sei arrivato".

James Thurber*, Il Cane che Sapeva Troppo e Altre Storie*

Cominciamo dal fondo, che come al solito non c'entra nulla.

Sapete benissimo che la nostra attività preferita è prendere un problema abbastanza noioso e insignificante, costruirci attorno un'ambientazione e passarvelo. Bene, qui non si può fare. Quindi, ci limitiamo a raccontarvi come lo abbiamo trovato, che già così c'è ampiamente da divagare.

Sapete anche che quella in testa è la citazione preferita da Rudy, e se non è anche la vostra quando leggete queste note avete sbagliato rivista.

Quello che non sapete, è che su un blog che Rudy segue è apparso di recente un articolo (sì, come dicevamo al problema precedente, abbiamo una certa età, quindi noi li chiamiamo "articoli". Fateci causa, come suol dirsi) relativo ai PIN (***non***) preferiti dai Geek. Il motivo della parentesi dovrebbe essere evidente, comunque trovate la spiegazione al link (che vi diamo dopo. Adesso, attenti alla lavagna!). Attenzione che sono PIN "vecchi", quindi di quattro cifre.

Breve elenco disordinato dei numeri:

[14] In merito, abbiamo recentemente ritrovato una citazione di un nostro vecchio conoscente: *"...se siete appassionati della carta, potete sempre tenere l'eBook reader con la sinistra mentre, con la destra, palpeggiate sensualmente una vecchia guida del telefono..."*. (Davide Mana)

0042: Se non ci arrivate da soli, l'unico neurone che avete è inibitore.

1701: Leggermente più difficile, ma potreste farcela. Aiutino: "NCC".

1138: Allo stesso livello di difficoltà della precedente, tant'è che anche qui l'aiutino ha tre lettere: "THX".

1337: Non ci pronunciamo. Rudy e Doc hanno giocato a lungo (tra di loro e con i figli) a "trova una parola dalle targhe", da quando ci sono dentro lettere e numeri.

3435: Assieme a **1**, è l'unico Numero di Münchausen.

5141: Se lo esprimete in esadecimale, ribalta le cifre (lo fanno anche altri, ma questo è l'unico di quattro cifre).

1969: Ci rifiutiamo. Warning: c'entra Ackermann (No, non è nato quell'anno).

Ne manca uno del quale parliamo dopo, ma se volete la spiegazione del perché (non) usarli come PIN, trovate tutto, con i relativi link, al blog della Curiosona (https://lacuriosona.blogspot.com/2023/05/numeri-speciali.html).

Dicevamo, ne manca uno: **6174**, noto come ***Costante di Kaprekar***. E vi spieghiamo come ottenerlo.

1. Prendete un numero di quattro cifre, non formato da quattro cifre uguali ripetute.
2. Organizzate le cifre in ordine crescente e decrescente (sì, in un'altra riga, spiritosi).
3. Sottraete il minore dal maggiore.
4. Ripetete i passi (2) e (3)

Al più al settimo passaggio, dovreste ottenere 6174. Carino, vero?

Ci piacerebbe chiedervi la dimostrazione di questo fatto (e magari di trovare eventuali costanti di Kaprekar in altre basi, posto che esistano), ma non ci pare il caso. E qui finisce l'introduzione, perché tutte queste Kapr&Kavoli ci hanno ricordato un vecchio problema che potremmo intitolare "Siete pigri".

Nel senso che il passaggio qui sopra non solo lo fate con numeri di due cifre, ma lo effettuate una volta sola: prendete il numero, lo invertite, sottraete il minore dal maggiore e guardate il risultato. *E vi accorgete che è un quadrato perfetto*. Oibò! Per quanti numeri di due cifre funziona questa strana proprietà?

Oh, siccome questo è facile, potreste provare con due complicazioni: (1) TRE cifre (2) QUATTRO cifre. Non siamo convinti valga una qualche forma del principio di induzione, qui, ma se volete esplorare realtà superiori, liberi di farlo.

Grazie, Gwendolyne. Così riusciamo a far stare tranquilli i bambini per un mesetto.

3. Bungee Jumpers

(Questa è la seconda parte di un problema tripartito)

$n+m$ persone sono in attesa alla biglietteria; n di loro hanno solo banconote da 5 euro, mentre i restanti m hanno solo banconote da 10 euro. Il costo del biglietto di ingresso è 5 euro, e al momento dell'apertura la cassa contiene p biglietti da 5 euro.

Se ogni persona compra solo un biglietto, qual è la probabilità che non ci sia mai nessuna persona in attesa del resto?

La differenza rispetto al problema precedente consiste nel fatto che all'apertura nella cassa sono presenti p euro.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Giugno!

Siccome abbiamo saltato maggio, doppie soluzioni per questo mese.

4.1 [291]

4.1.1 Una (per ora) piccola scacchiera

Il Capo prevede sempre scacchiere di dimensioni variabili:

> *Definiamo la scacchiera* 5×5*, sulla quale le caselle vengono indicate come ({A, ..., E} {*1, ..., 5*}). Disponiamo delle monete sulla scacchiera, con la regola che ogni volta che mettete una moneta in una cella dovete anche posizionarne una per ogni cella ortogonalmente vicina. Il vostro scopo è fare sì che, usando meno soldi possibili, su ogni casella ci sia lo stesso numero di monete. Quante monete devono esserci su ogni casella? È possibile avere* 2023 *monete su ogni casella?*

Come spesso accade, il primo solutore in assoluto è ***Valter***, con i soliti dubbi esistenziali:

> Mi viene che non si possa raggiungere lo scopo: … quindi penso di sbagliarmi:
>
> | | | | | |
> |---|---|---|---|---|
> | a | d | b | d | a |
> | d | c | e | c | d |
> | b | e | c | e | b |
> | d | c | e | c | d |
> | a | d | b | d | a |
>
> - nella tabella sopra, ho assegnato ad ogni cella una “etichetta” alfabetica
> - ho suddiviso le lettere fra celle nere e bianche, e alle loro celle vicine
> - ad esempio: le celle “a” sono tutte nere, con due celle bianche ortogonali
> - detto ciò propongo la seguente equazione: $12(a+b+c+3d+4e)=13(d+e+2a+3b+4c)$
> - le variabili indicano il numero totale di monete, sulle celle di tale tipo
> - $(a+b+c+3d+4e)$ è il numero totale di monete presenti su tutte le celle nere
> - è la somma delle monete posate, direttamente, su tali celle, cioè: $(a+b+c)$
> - più il numero totale di quelle messe posando le monete sulle celle bianche
> - ad esempio $3d$ è il numero monete messe su celle nere, posando su celle “d”
> - infatti “d” è il numero totale di tali monete, tre le celle nere adiacenti
> - discorso analogo per $(2a+a+2a+3a+5a)$: il totale monete sulle celle bianche
> - ci sono 13 celle nere e 12 bianche, ognuna ha lo stesso numero di monetine
> - dividendo per 13 il totale nere e per 12 le bianche ho le monete per cella
> - da quanto detto sinora, mi pare debba derivare l’equazione che ho proposto
> - ma valgono, pure, le seguenti equazioni fra celle: $b=a$, $c=1.25a$, $d=2a$, $e=a$
> - ad esempio vi sono 5 celle “c” e 4 “a” con stesse monete quindi: $c = 1.25a$
> - sostituendo con “a”, nell’equazione iniziale, si ottiene: $12*13.25a=13*13a$
> - ma tale equazione vale unicamente se “a” è uguale a zero; cosa non ammessa..

La seconda soluzione è di ***Luigi***:

> Dovendo ottenere un numero uniforme di monete su tutte le caselle della scacchiera ipotizzo uno schema simmetrico della disposizione dei punti di inserimento delle monete (che poi coinvolgeranno i punti a loro adiacenti). Ad ogni gruppo di caselle simmetriche quindi collego una variabile, lo schema è il seguente:

	A	B	C	D	E
1	X_4	X_5	X_6	X_5	X_4
2	X_5	X_3	X_2	X_3	X_5
3	X_6	X_2	X_1	X_2	X_6
4	X_5	X_3	X_2	X_3	X_5
5	X_4	X_5	X_6	X_5	X_4

Abbiamo 6 variabili più una settima variabile K che indica la somma totale delle monetine in ogni casella.

Possiamo quindi definire 6 equazioni in base alle regole di inserimento delle monetine:

(casella C3) $X_1 + 4X_2 = K$

(casella C2) $X_2 + X_1 + 2X_3 + X_6 = K$

etc. etc.

svolgendo i calcoli ottengo ad esempio :

$K = 22X_2/3$

Da cui ottengo come valore minimo $X_2 = 3$ e $K = 22$. (Per la cronaca $X_1 = 10$, $X_3 = 2$, $X_4 = 8$ $X_5 = 7$ ed $X_6 = 5$).

Quindi su ogni casella debbono esserci 22 monetine e poiché 22 x 92 = 2024... penso che potete tenerlo per il giochino del prossimo capodanno!

Se ci seguite sempre saprete che manca all'appello ancora un altro classico solutore, il nostro ***Galluto***:

Chiamo "mossa" l'operazione di mettere la monetina su una certa casella, e di conseguenza le monetine sulle celle vicine; ad esempio, la mossa A1 è quella che mette una monetina in A1 e *di conseguenza* quelle su A2 e B1.

Chiamando Z il numero di monetine, uguale per tutte le caselle, che sto cercando, le Z monetine in A1 sono la somma di quelle dovute alle mosse A1, alle mosse A2 e alle mosse B1, cioè:

A1+A2+B1=Z

Analogamente posso scrivere le equazioni per tutte le caselle:

A1+A2+A3+B2=Z

A2+A3+A4+B3=Z

…….

D5+E4+E5=Z

E così ho creato un mostruoso sistema di 25 equazioni in 25 incognite, dove Z è il termine noto; l'unica cosa buona è che il sistema ha tantissimi 0, e i coefficienti diversi da 0 sono tutti 1.

Adesso basta (!?!) risolvere il sistema; per fortuna ho trovato un sito che lo ha fatto per me, e che ha anche accettato in input una tabella excel con coefficienti e termini noti;

senza riportare tutto il risultato, quello che conta è che la soluzione per ciascuna variabile è espressa come

$$aZ/11 + bR_1 + cR_2$$

dove a, b e c sono dei coefficienti interi o nulli, positivi o negativi, e R_1 ed R_2 sono dei parametri; ad esempio A1 = 9/11 Z – R_1 – R_2

Questo risultato porta a due considerazioni:

La prima, che risolve il quesito, è che per avere valori interi delle variabili A1…E5, Z deve essere uguale a 11 o ad un suo multiplo; il minimo, quindi, è proprio Z = 11.

La seconda è che le soluzioni sono infinite, visto che R_1 ed R_2 possono assumere qualsiasi valore; intanto gli unici che ci interessano sono i valori interi, ma poi, per quasi tutti i valori di R_1 ed R_2 alcune variabili assumono valori negativi (però sarebbe una bella idea quella di introdurre la possibilità della mossa "a togliere"); gli unici valori di R_1 ed R_2 che danno solo valori positivi (o 0) per tutte le variabili sono con R_1 ed R_2 compresi tra 1 e 4; ad esempio, per R_1 ed R_2 uguali a 3, la soluzione è la seguente:

5	4	4	2	3	5
4	3	1	2	1	3
3	3	1	5	2	2
2	4	1	1	1	4
1	3	4	3	3	4
	A	**B**	**C**	**D**	**E**

(In realtà le soluzioni sono sempre le stesse 3, con le loro simmetrie di rotazione e di riflessione)

Direi che questo risolve anche la questione dell'algoritmo perché ci dà il numero di mosse da effettuare su ogni casella, una volta stabiliti i valori che vogliamo dare ad R_1 ed R_2; per inciso, le mosse in totale sono sempre 69, di cui 35 su caselle nere (come A1) e 34 su caselle bianche (come A2).

Visto che 2023 non è un multiplo di 11, non è possibile che Z = 2023; però lo è 2024 (11*184) e quindi basta aspettare la mezzanotte dell'ultimo dell'anno; in effetti l'algoritmo sarebbe un po' tedioso: bisognerebbe ripetere 184 volte le 69 mosse della soluzione di Z = 11; per movimentare la serata si potrebbero usare le varie combinazioni di R_1 ed R_2, ma temo che non basterebbe a rendere l'evento entusiasmante.

Visto l'aiuto del sito, ho provato a vedere cosa succede con scacchiere diverse, sia più piccole (con buona pace del minimo sindacale) che più grandi, fino alla 8×8.

2×2: non ci sarebbe bisogno del sistema, che comunque conferma quello che si trova facilmente "a mano": per tutte le variabili la soluzione è 1/3 Z; quindi Z = 3, con una mossa su ciascuna delle 4 caselle

3×3: tutte le variabili sono in funzione di Z/7 e quindi Z = 7; c'è una unica soluzione, ma per la casella al centro (B2) la soluzione è negativa (B2 = – Z/7 = –1)

4×4 non ci sono divisori di Z e quindi Z = 1; le soluzioni sono infinite, perché c'è un parametro R_1; gli unici due valori interi di R_1 che danno risultati positivi (o nulli) per tutte le variabili portano alle due soluzioni simmetriche con una mossa solo sulle seconde o sulle terze caselle di ciascun bordo

6×6 tutte le variabili sono in funzione di Z/13 e quindi Z = 13; c'è una unica soluzione, ma per 4 caselle simmetriche la soluzione è negativa

7×7 tutte le variabili sono in funzione di Z/17 e quindi Z = 17; c'è una unica soluzione, ma per la casella al centro (D4) ed altre 4 la soluzione è negativa

8×8 tutte le variabili sono in funzione di Z/27 e quindi Z = 27 (confesso che speravo che, dopo 3, 7, 11, 13 e 17, il divisore fosse 19…); c'è una unica soluzione, stavolta non ci sono caselle con valori negativi e questo è lo schema con le mosse da effettuare:

8	13	7	6	8	8	6	7	13
7	7	1	6	5	5	6	1	7
6	6	6	9	3	3	9	6	6
5	8	5	3	7	7	3	5	8
4	8	5	3	7	7	3	5	8
3	6	6	9	3	3	9	6	6
2	7	1	6	5	5	6	1	7
1	13	7	6	8	8	6	7	13
	A	B	C	D	E	F	G	H

E così anche il desiderio di espansione del Capo è stato esaudito… ma vediamo che cosa ne dice il grande ***trentatre***:

> Il problema è invariante per le simmetrie del quadrato. Quindi ho diviso la scacchiera in sei zone che rispettano queste simmetrie, attribuendo lo stesso numero di monete alle caselle di una data zona.
>
> Distinguo le monete fra *prime* (collocate all'inizio) e *finali* (incluse quelle generate dalle *prime* nelle caselle adiacenti).

a	b	c	b	a
b	d	e	d	b
c	e	f	e	c
b	d	e	d	b
a	b	c	b	a

m	m	m	m	m
m	m	m	m	m
m	m	m	m	m
m	m	m	m	m
m	m	m	m	m

1 *A* *B*

In fig. 1 sono indicate

A - la scacchiera 5×5 con le caselle ripartite in 6 zone a,b,c,d,e,f

- le lettere sono usate anche come incognite (n° di monete *prime* in ogni casella)

B - la scacchiera con le monete *finali*, con lo stesso valore m su tutte le caselle

- le relazioni fra i valori in *A* e quelli in *B* sono

zona	
a	$m = a + 2b$
b	$m = a + b + c + d$
c	$m = 2b + c + e$
d	$m = 2b + d + 2e$
e	$m = c + 2d + e + f$
f	$m = 4e + f$

p.es. in ogni casella d in B si hanno le monete $2b + d + 2e$ presenti in A

- il sistema si può scrivere

$\boldsymbol{M} \times [a\ b\ c\ d\ e\ f]^T = m.\boldsymbol{I}$ (T: *trasposto*, si intende un vettore verticale) con $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1&2&0&0&0&0\\1&1&1&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\0&2&0&1&2&0\\0&0&1&2&1&1\\0&0&0&0&4&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}^T$

- il determinante e l'inversa di M sono

$D=\det(\boldsymbol{M})=22$

$$\boldsymbol{M}^{-1}=\frac{1}{D}\cdot\begin{bmatrix}6&16&-10&-4&-6&6\\8&-8&5&2&3&-3\\-10&10&13&-8&-1&1\\-4&4&-8&10&4&-4\\-6&6&-1&4&-5&5\\24&-24&4&-16&20&2\end{bmatrix}$$

- da cui

$$\begin{bmatrix}a&b&c&d&e&f\end{bmatrix}^T=m.\,\boldsymbol{M}^{-1}\times\boldsymbol{I}=\frac{m}{D}\cdot\begin{bmatrix}8&7&5&2&3&10\end{bmatrix}^T$$

- il problema ammette una soluzione per ogni m multiplo di $D=22$

8	7	5	7	8
7	2	3	2	7
5	3	10	3	5
7	2	3	2	7
8	7	5	7	8

A

22	22	22	22	22
22	22	22	22	22
22	22	22	22	22
22	22	22	22	22
22	22	22	22	22

B

2

- in fig. 2 la soluzione minima, con $m=D=22$

- le monete poste in A sono 138, quelle in B sono $25\times 22=550$.

Il problema richiede $m=\mathbf{2023}$ <u>che non è multiplo di 22</u>, mentre lo è $\mathbf{2024}=22\times 92$; quindi aspettiamo l'anno prossimo (con tutti i numeri in figura moltiplicati per 92 e serviranno $550\times 92=50.600$ monete).

Con lo stesso metodo ho provato con altri quadrati; salvo il caso banale 2×2, nei casi fino a 7×7 non esiste soluzione (perché in alcune zone compare un valore negativo e queste monete, chissà perché, ancora non le fanno).

Fermiamoci qui e passiamo al secondo problema.

4.1.2 Un problema elettorale

Il secondo problema di aprile prevedeva elezioni, un tema che al Capo è molto caro:

> *I membri del Circolo Scacchistico dell'Istituto di Matematica (Mal) Applicata stanno eleggendo il Presidente tra 27 candidati. Per ogni candidato, l'esatta percentuale di voti ottenuti era minore di almeno 1 del numero di voti ricevuti da quel candidato. Qual è il numero minimo di membri del circolo?*

Anche dolorante e pigro, è sempre ***Valter*** a mandare la prima soluzione:

> La butto lì "ad istinto" senza fare troppi calcoli; …dopo l'operazione sono pigro e dolorante:
>
> - trovo il numero minimo di voti tutti uguali per i candidati che soddisfano quanto richiesto
>
> - partendo da 1 si ricava velocemente che tale numero minimo di voti ai 27 candidati è cinque

- posso però assegnare ad uno dei 27 candidati soltanto quattro voti, senza violare la regola

- riassumendo: numero membri=134, percentuale per numero voti 5≈3.73, per numero voti 4≈2.99.

Anche per questo problema proseguiamo con la soluzione di ***Luigi***:

> Dovendo ottenere una percentuale più bassa (di almeno 1%) rispetto al numero di voti ricevuti dobbiamo focalizzare l'attenzione sui candidati meno votati. Tralasciando i casi di 0 o 1 voti ottenuti, con un minimo di 2 voti ottenuti dovremmo avere almeno 200 votanti (2/200 = 1%). Se il numero minimo di voti ottenuti è 3 avremmo bisogno di almeno 150 votanti (3/150= 2%). Se il numero di voti minimo è 4 possiamo fermarci a 134 votanti (4/134 = 2,985%). Se il numero minimo di voti fosse 5? Non potremmo scendere a 125 (5/125 = 4%) perché 27*5 = 135 ci limita inferiormente il numero di votanti.
>
> Quindi il numero minimo di votanti è 134. Tutti i candidati hanno ottenuto almeno 4 voti ed i restanti 26 voti (134– 4*27 = 26) sono distribuiti tra i 27 candidati in modo casuale. I possibili risultati elettorali dovrebbero essere pari alla distribuzione di 26 voti tra 27 candidati ovvero (consultando le tabella di calcolo combinatorio): $\binom{26+27-1}{26}$.

Come vedete in questo caso ***Valter*** e ***Luigi*** concordano. Vediamo che cosa ne dice ***Galluto***:

> Nessun candidato può aver preso 0 voti, o il suo 0% sarebbe uguale (e non inferiore di almeno 1) ai suoi voti; parimenti, nessuno può aver preso 1 solo voto, altrimenti, quale che fosse il numero di votanti, la sua percentuale sarebbe qualcosa più dello 0%, e quindi la differenza tra la sua esatta percentuale ed il suo voto sarebbe di qualcosa inferiore ad 1.
>
> Quindi, il numero di voti di ogni candidato deve essere almeno uguale a 2; se (anche solo) un candidato ha preso solo 2 voti, il numero minimo di votanti dovrebbe essere 200 (2/1%), perché solo così la percentuale corrispondente a 2 voti scenderebbe all'1%.
>
> Se tutti hanno preso almeno tre voti, ma (anche solo) un candidato ne ha presi proprio 3, il numero di votanti deve essere almeno pari a 150 (3/2%).
>
> Andando avanti, se tutti hanno preso almeno 4 voti, ma un candidato ne ha presi proprio 4, scendiamo a un minimo di 134 votanti (int(4/3%)+1).
>
> Con tutti che hanno preso almeno 5 voti (e uno che ne ha presi proprio 5) scenderemmo a 125 votanti (5/4%), ma il problema è che per dare 5 voti a 27 candidati me ne servirebbero comunque 135.
>
> E quindi il numero minimo dei votanti è 134.
>
> Do 4 voti a ciascuno dei 27 candidati, e così ne ho allocati 108 e me ne restano 26; questi 26 li posso dare tutti ad un candidato, uno ciascuno a 26 candidati, ecc., ecc.
>
> Dunque, i diversi risultati elettorali possibili sono quelli delle partizioni dei 26 voti in più, che sono 2.436.
>
> Francamente, la domanda seguente: "E quali sono i possibili (non solo il minimo) numeri del corpo elettorale, fermo restando il "27"" non l'ho capita: qualunque corpo elettorale superiore al minimo va ugualmente bene, perché per chi prende i voti in più l'aumento del numero di voti è maggiore dell'aumento della percentuale corrispondente (e per chi non prende voti in più è addirittura peggiorata la percentuale); solo, il numero minimo può essere più alto a seconda del numero di voti "dell'ultimo arrivato", come visto sopra.
>
> Se invece il numero di candidati non è 27, il numero minimo può cambiare (anche qui, come visto sopra): se ad esempio i candidati fossero solo 25 il minimo scenderebbe a 125; se salissero a 34, salirebbe a 150.

4.2 [292]

4.2.1 Lavoro per Doc

I tormentoni sui componenti della Redazione di RM sono ormai talmente arcinoti che non ci si stupisce mai a vedere il nostro Piotr a fare il gioco delle tre carte, ma alcuni saranno rimasti un po' straniti a vederlo manovrare $2n$ carte:

> *Doc è il Banco e dispone* $2n$ *carte riportanti tutti i valori da* 1 *a n, in duplice copia, a dorso in alto, quindi non riuscite a vedere quanto valgono. All'inizio del gioco avete stabilito un valore k e, a questo punto, siete liberi di girare k carte, non necessariamente contigue; vincete se almeno due delle carte presentano lo stesso valore; in caso contrario, Doc rimescola scambiandole tra loro le sole k carte che avete scelto, le rimette a dorso in alto e si fa un altro giro con lo stesso k. Voi non riuscite a "seguire" nessuna delle carte che vengono spostate ma lui tocca solo le carte da voi scelte, le altre restano al loro posto. Diciamo che il gioco è vincente se esiste un valore intero positivo m e una qualche strategia che garantisce la vincita al più in m ripetizioni del gioco; quali valori di n e k danno un gioco vincente? E con quale strategia? E quanto vale m?*

Attenzione! La prima soluzione arrivata in Redazione non è di ***Valter***! Ci scrive infatti ***.mau.***:

> Beh, se non ho capito male il problema con n=2 è impossibile, perché k=2 per forza, e se becco due carte diverse non ho idea di come fare per tenerne una di quella coppia. E questo vale in generale per k=n qualunque sia n, direi, anche e probabilisticamente trovare sempre n carte diverse diventa sempre più difficile al crescere di n.
>
> Con n=3 e k=2 le cose diventano più divertenti. Le carte sono ABCDEF.
>
> * primo tentativo: prendo AB. Se sono uguali, bene: altrimenti posso dire wlog che {AB} = {12} e {CDEF} = {1233}.
>
> * secondo tentativo: prendo CD. Ci sono quattro casi possibili:
>
> * {CD} = {33}; ho vinto
>
> * {CD} = {12} (e {AB} = {12}); al prossimo tentativo scelgo {EF} = {33} e ho vinto.
>
> * {CD} = {13} (e {AB} = {12}); ho {EF} = {23}
>
> * {CD} = {23} (e {AB} = {12}) ; ho {EF} = {13}
>
> Faccio il ragionamento per quest'ultimo caso; l'altro è simile.
>
> * terzo tentativo: prendo AC. Ci sono di nuovo quattro casi possibili:
>
> * {AC} = {12} (e B=2, D=3); al quarto tentativo scelgo AE, e se non vinco conosco quattro posizioni e quindi per il principio dei cassetti ne trovo due uguali.
>
> * {AC} = {23} (e B=1, D=2); come sopra.
>
> * {AC} = {13} (e B=2, D=2); al quarto tentativo scelgo {BD} = {22} e ho vinto.
>
> * {AC} = {22} : ho vinto.
>
> Insomma, in questo caso $m \leq 5$ (non credo si possa fare in quattro tentativi, ma non si sa mai). Più in là, non so.

Se non lo sa lui, forse ***Valter***:

> Provo a rispondere in fretta a istinto (in attesa di leggerne di più "serie").
>
> - inizio girando le prime due carte
> - dopo scelgo la seconda e la terza
> - così poi, so cosa c'è nella prima
> - proseguo con la terza e la quarta
> - in questo modo conosco la seconda
> - itero così sino alle n+2/n+3esime
> - ovviamente se sono poco fortunato

- due delle conosciute, sono uguali
- vedi “principio della piccionaia”
- il valore “m” richiesto vale: n+2.

Non sembra essere sicuro nemmeno lui, ma un sistema che genera sicurezze e non probabilità piace all’estensore di queste note. Vediamo che cosa ne pensa ***Luigi***:

Con n>4 e k = n–1 abbiamo una strategia che ci garantisce la vincita con m = 4 ripetizioni del gioco.

Strategia:

1° passo : si scelgono le prime n–1 carte

A – ci sono carte uguali, fine del gioco

B – carte diverse memorizziamo la mancante: valore = A

2° passo: si scelgono le carte dalla n alla 2n–2

A – ci sono due carte uguali (le carte di valore A) fine del gioco

B – carte diverse ma uguali alle carte del 1° passo:

al 3° passo si scelgono almeno le ultime due carte (che conterranno necessariamente le due carte di valore A) fine del gioco

C – carte diverse ma contenente la carta A: si memorizza la carta mancante, valore = B. Le due carte dal valore A e B saranno presenti nelle ultime due carte a terra (carte 2n–1 e 2n)

3° passo: si scelgono le carte dalla 3 alla n+1

A – carte uguali fine del gioco

B – Carte diverse ma uguali a quelli del 1° passo (contenenti la carta B ma non la carta A). nel 4° passo si scelgono le carte dalla n+2 alla 2n che conterranno due carte di valore A

C – Carte diverse contenenti sia A sia B. Nel 4° passo si scelgono le carte 1, 2, n+2, …, 2n–2 che conterranno due carte di valore = C, unico valore non presente in questo passo.

D – Carte diverse ma uguali a quelle del 2° passo contenenti la carta A ma non la carta B). Nel 4°passo si scelgono almeno le carte 1, 2, 2n–1 e 2n che conterranno le due carte di valore B.

Con n = 3 e k = n–1 abbiamo una strategia che ci garantisce la vincita con m = 5

Strategia

1° passo: si scelgono ad esempio le prime due carte (carte 1 e 2)

A – carte uguali, fine del gioco

B – carte diverse memorizziamo la carta mancante A

2° passo: si scelgono altre 2 carte (carte 3 e 4)

A – carte uguali (nel nostro esempio A e A) fine del gioco

B – carte diverse ma senza la carta A (carte uguali al 1° passo):

al 3° passo si scelgono le carte 5 e 6 (che saranno necessariamente A e A) fine del gioco

C – carte diverse ma contenente A memorizziamo la carta mancante B e chiamiamo C la terza carta. Nelle prime due carte avremo i valori B e C, nelle carte 3 e 4 avremo i valori A e C

3° passo: si scelgono le carte 2 e 3

A – carte uguali fine del gioco (carte di valore C)

B – Carte diverse con valori A e B nel 4°passo si scelgono le carte 1 e 4 che avranno valore C e C, fine del gioco

C – carte diverse ma con una C possiamo identificare la carta 1 e la carta 4:

se abbiamo C e A il valore di carta 1 è B e quello di carta 4 è C

se abbiamo C e B: il valore di carta 1 è C e quello di carta 4 è A

Proseguiamo considerando la prima ipotesi

4° passo: si sceglie 1 carta tra le carte 2 e 3 (valori A e C) ed una carta tra le carte 5 e 6 (valori A e B) ad esempio carte 3 e 5

A – carte uguali (valori A e A) fine del gioco

B – Carte diverse ma con valori B e C nel 5°passo si scelgono le carte 2 e 6 che avranno valore A e A, fine del gioco

C – carte diverse ma con una A (ad esempio carta 3 valore A e carta 5 valore B) possiamo identificare nella carta 2 il valore C e nella carta 6 il valore A.

5° passo: Nei passi precedenti sono stati identificati i valori delle carte 1, 2, 4 e 6 (nel nostro esempio B, C, C, A) a questo punto si scelgono le due carte che avranno valore uguale (nel nostro esempio carte 2 e 4 valore C).

Non può mancare all'appello il nostro ***Galluto***:

Per qualsiasi n, $k = 2$ e $m = 2n$. L'obiettivo è di identificare due carte uguali e, al giro successivo, selezionare quelle due. Per questo (immaginiamo che le carte siano tutte in fila in una unica riga), al primo tentativo scelgo la prima e la seconda carta: sono un 1 e un 2 (qui, e in tutto il seguito, le carte che indico sono ovviamente esemplificatrici); Doc me le rimescola e le rimette nelle prime due posizioni.

Adesso scelgo la seconda e la terza; diciamo che sono un 1 ed un 3; questo significa che la prima carta è il 2 e d'ora in poi non la tocco più.

Continuo così, e quindi la strategia è di *scalare ogni volta di una posizione*; ogni volta che la coppia è diversa da quella precedente, riesco ad identificare la carta che non ho riusato.

Se andasse sempre avanti così, una volta identificate n+1 carte due sarebbero necessariamente uguali e quindi al giro successivo vincerei; in tutto mi servirebbero: il tentativo iniziale, n+1 tentativi per identificare due carte uguali, e un tentativo finale vincente: in totale n+3.

Ma questo non è il caso peggiore perché può succedere che la stessa coppia si presenti due o tre volte di fila; cominciamo con due volte:

- al primo tentativo le prime due carte sono un 1 ed un 2,
- al secondo tentativo la seconda e la terza sono ancora un 1 ed un 2,
- al terzo tentativo la terza e la quarta carta sono un 1 ed un 3; così ho identificato la seconda carta, che è un 2, ma la prima può ancora essere sia un 1 che un 2
- quindi con tre tentativi ho identificato una sola carta e non due
- sempre costruendo il caso peggiore, al quarto tentativo (quarta e quinta carta), scopro ancora un 1 ed un 3
- al quinto tentativo (quinta e sesta carta) scopro un 1 ed un 4 e sono in grado di identificare la carta in quarta posizione (che è un 3) ma quella in terza posizione può essere sia un 1 che un 3
- e così via, con l'1 che continua a proporsi, ma non so se è sempre quello iniziale o se a un certo punto è stato sostituito dal suo gemello, con una sola carta identificata ogni due tentativi, e con lo schema che segue che man mano si viene costruendo:

Posizione carta	Che carta c'è
1	1 o 2
2	2
3	1 o 3
4	3
5	1 o 4
6	4
…	…

Però, quando arrivo all'ultimo tentativo (che è il numero $2n$-1), scoprendo la penultima e l'ultima carta, e dopo che ai due precedenti ho scoperto per due volte un 1 ed un "n", i casi sono i seguenti:

- scopro due "n" ed ho vinto
- scopro due 1 ed ho vinto
- scopro per la terza volta un 1 ed un "n"; ma questo significa che le ultime quattro carte sono i due 1 ed i due "n" e quindi posso sciogliere il dubbio su tutte le carte precedenti; ad esempio, la carta in prima posizione è sicuramente l'altro 2; e quindi con un ultimo tentativo (che è il numero $2n$) vinco di sicuro scoprendo i due 2 (o i due 3, …)
- scopro un 2 ed un "n"; questo però mi permette di identificare in un solo colpo ambedue gli 1: uno era quello in prima posizione, e l'altro quello in terzultima, e di conseguenza posso sciogliere il dubbio su tutte le altre posizioni; quindi, anche in questo caso con un ultimo tentativo vinco di sicuro

Se invece ad un certo punto l'1 non compare più, lo posso identificare nella ultima carta che non ho riutilizzato, e continuo con la solita strategia di scalare una carta alla volta; presto o tardi (al peggio, al tentativo con le ultime due carte), mi deve comparire il secondo 1 o il secondo 2, comunque posso identificare la carta in prima posizione e con un altro tentativo vinco.

Rimane da vedere il caso in cui la stessa coppia si presenta per tre volte consecutive; ancora una volta diciamo che accade subito, ma è ininfluente:

- ai primi tre tentativi scopro sempre un 1 ed un 2
- al quarto tentativo scopro un 1 ed un 3; questo mi permette di identificare la terza carta, che è un 2, ma rimango con il dubbio per la prima e la seconda che possono essere ambedue sia 1 che 2, ma *devono essere diverse*
- continuo con la solita strategia di scalare una carta alla volta, ma in questo caso a ogni tentativo, e finché l'1 persiste, identifico una carta e ad un certo punto ne avrò identificate due uguali
- se invece ad un certo punto l'1 scompare, lo identifico nella ultima carta non riutilizzata; a questo punto ho chiaramente identificato un 1 ed un 2, e ho altre due carte che contengono l'altro 1 e l'altro 2; scopro la carta in prima posizione ed una altra carta qualsiasi (anche non identificata) e così identifico la carta in seconda posizione e sicuramente adesso conosco la posizione dei due 1 o dei due 2

e quindi, anche in questo caso, vinco con al massimo $2n$ tentativi

Ci fermiamo qui per il momento, perché anche il secondo problema di maggio vuole il suo spazio.

4.2.2 Pronti per le elezioni?

Visto il successo (ehm…) del problema elettorale del mese scorso il Capo persiste e propone ancora elezioni:

> *Freedonia è divisa in* 999 *distretti elettorali, tutti con esattamente lo stesso numero di votanti; ciascuno di questi elegge un singolo rappresentante e abbiamo tre partiti*

*(Federani, Repubblicatici e Democralisti), che sull'intera nazione si dividono i voti secondo le proporzioni Federani=*15%*, Repubblicatici=*30% *e Democralisti=*55%*, e nominano il candidato (uno solo per partito) per ogni collegio. Se in un collegio nessuno dei tre candidati raggiunge almeno il* 50%+1 *dei voti, si passa al ballottaggio tra i due candidati che hanno avuto il miglior risultato. Il partito escluso dal ballottaggio appoggia uno dei due concorrenti, e sappiamo che i Federani e i Repubblicatici si appoggeranno a vicenda, mentre i Democralisti, se esclusi, appoggeranno i Federani. Per ogni partito, quali sono i valori massimi e minimi delle rappresentanze parlamentari?*

E qui partiamo come da tradizione con ***Valter***:

Tre tabelle con quanto sono riuscito a calcolare come valori massimi e minimi:

Max (+) Min (-)	**Partito (D-F-R)**	**% distretti dove vice**	**# distretti dove vince**	**% distretti dove perde**	**# distretti dove perde**
+	D	55%	999	--	0
+	F	29%	481	2%	518
+	R	38%	783	1%	216
-	D	93.4% (467/5)	135	49%	864
-	F	--	0	15%	999
	R	--	0	30%	999

Partito con il Max	**Altro partito**	**% quando il Max vince**	**% quando il Max perde**	**Altro partito**	**% quando il Max vince**	**% quando il Max perde**
D	F	15%	--	R	30%	--
F	D	27%	81%	R	16%	43%
R	D	47%	84%	F	15%	15%

Partito con il Min	**Altro partito**	**% quando il Min vince**	**% quando il Min perde**	**Altro partito**	**% quando il Min vince**	**% quando il Min perde**
D	F	5.6% (28/5)	16.469% (527/32)	R	1%	34.531% (1105/32)
F	D	--	55%	R	--	30%
R	D	--	55%	F	--	15%

Mi pare si spieghino da sole; per brevità ho usato le iniziali dei tre partiti. Per ottenerle ho impostato un sistema di equazioni e diseguaglianze, opportune. Mi sono basato sulle indicazioni forniteci dal problema, "tradotte" in formule. Ho richiesto che in esse, il numero dei distretti fosse, ovviamente, un intero.

Dato che, il numero di votanti è sempre lo stesso, ho tentato di semplificarle. Mi è parso che, per quanto detto, i distretti fossero solo multipli di 27 o 37. Tali due numeri sono infatti, i divisori di 999, che è il totale dei distretti.

Ho proceduto a tentativi: trovato un minimo, o massimo, cercavo di migliorarlo. Arrivando ad un "muro invalicabile", battezzavo come buoni gli ultimi ottenuti. Per quasi tutti i casi, vi sono più combinazioni per ottenere i minimi/massimi.

Nelle tabelle ho documentato una sola di esse, per mostrare la sua fattibilità. Per avere un numero di votanti, che sia un intero, basta basarsi sui distretti. Ad esempio dagli 864 distretti di "D" perdente ho 86'400 votanti per distretto.

Ho verificato, calcolando i votati D-F-R nei vari casi e ottengo sempre interi.

Mi sono basato su: "50% + 1 dei voti" per il primo turno e per il ballottaggio.

> Se fosse richiesto solo “maggiore di 50%” si avrebbero minimi/massimi migliori.
>
> Non annoio con formule in quanto immagino che le mie siano solo farneticazioni. (…in attesa di leggere sulla rivista quanto scrivono solutori più “seri” di me)

Non sappiamo mai decidere sul livello di farneticazione, dato che è una cosa che facciamo in continuazione (farneticare) per cui non commentiamo ed andiamo avanti con ***Galluto***:

> Il massimo per i Democralisti è chiaramente il **100%**, con un elettorato più o meno omogeneo in tutti i collegi; quindi, il minimo per gli altri due partiti è lo **0%**.
>
> Il minimo per i Democralisti si ha quando “sprecano” voti arrivando al $49,\overline{9}\%$ in un gran numero di collegi, e poi prendono il 100% in quelli restanti; la situazione limite è data dalla formula:
>
> $100\% * D + 49,\overline{9}\% * (999 – D) = 55\% * 999$
>
> E cioè D = 97,941, che vuol dire che i Democralisti vincono in 98 collegi su 999, pari al **9,81%**
>
> Il massimo i Federani lo ottengono quando riescono a vincere al ballottaggio in più collegi possibile, senza sprecare voti arrivando in qualche collegio primi al primo turno.
>
> Il caso limite è quando in un collegio c’è un primo arrivato col solito $49,\overline{9}\%$, e i Federani arrivano secondi con il $25,\overline{0}1\%$, perché al secondo turno prenderanno il 25% tondo del terzo arrivato e vinceranno con il $50,\overline{0}1\%$.
>
> Il numero massimo di questi collegi è dato dalla formula:
>
> $F = 15\% * 999 / 25,\overline{0}1\%$, = 599,4; quindi i Federani possono vincere in massimo 599 collegi, pari al **59,96%.**
>
> Il massimo per i Repubblicatici si ha quando non vincono nessun collegio al primo turno (anche qui, per non sprecare voti) e vincono al ballottaggio in tutti collegi in cui i loro voti più quelli dei Federani sono il $50,\overline{0}1\%$ (e ovviamente i loro voti sono almeno uno più di quelli Federani). Poiché la somma dei loro voti in tutta la nazione è il 45%, la formula che dà il massimo è la seguente:
>
> $R = 45\% * 999 / 50,\overline{0}1\% = 899,1$, e cioè 899 collegi, pari all’**$89,\overline{9}\%$.**

Per concludere, vediamo che cosa ne pensa ***Luigi***:

> Forchetta per il partito D (dei Democralisti): 100 - 999
>
> Forti del 55% dei consensi nel caso migliore avranno il 100% dei parlamentari ovvero 999. Questo implica che la forchetta per gli altri partiti partirà da 0.
>
> Il caso peggiore è dato dalla serie più lunga possibile di risultati al 50% - 1 voto che darà la vittoria al ballottaggio ai suoi avversari coalizzati. Questo valore sarà massimo se, nei restanti collegi il partito D prenderà il 100% dei voti. Bisogna risolvere la semplice equazione:
>
> $$55*999= x*50+(999-x)*100 \Rightarrow x = 899,1$$
>
> Quindi nel caso peggiore il partito D avrà 100 parlamentari eletti.
>
> Forchetta per il partito R (dei Repubblicatici): 0 – 899
>
> Il partito R, nel peggiore dei casi per il Partito D, potrà andare, nell’ipotesi più favorevole, sempre al ballottaggio e vincerlo, quindi il suo limite superiore è complementare al limite inferiore del partito D cioè 899 parlamentari eletti.
>
> Forchetta per il partito F (dei Federani): 0 – 599
>
> La situazione migliore per il partito F si verificherà nel caso peggiore per il partito D (solo 100 parlamentari eletti con il 100% dei voti ed il resto dei collegi con il 50%-1 voto) unito al successivo risultato peggiore per il partito R che è dato dalla serie più lunga possibile di risultati al 25% - 1 voto che darà la vittoria al ballottaggio al partito F che avrà ottenuto il 25% + 1 voto è andrà lui al ballottaggio, vincendolo, contro il partito D. Come nel caso precedente questo valore sarà massimo se, nei restanti

collegi il partito R prenderà il 50% (+1 voto) dei voti. Bisogna risolvere la semplice equazione:

$$30*999= x*25+(899-x)*50 \Rightarrow x = 599{,}2$$

E' interessante notare che questo stesso risultato si potrà ottenere considerando la situazione in cui il partito F andrà al ballottaggio contro il partito R mentre è appoggiato dal partito D.

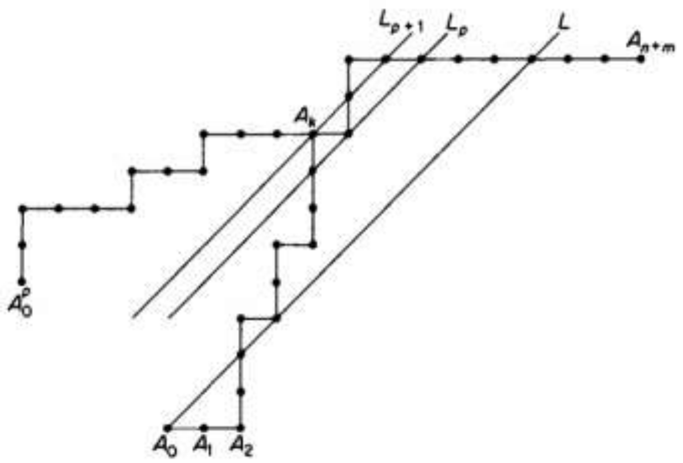
A voi la decisione sull'uso delle posate, noi ci fermiamo qui, alla prossima!

5. Quick & Dirty

Sia O il centro del triangolo ABC. Un altro punto P è scelto secondo distribuzione uniforme all'interno del triangolo. Trovate la probabilità che P sia più prossimo a O che a A, B o C.

6. Pagina 46

La presenza di p biglietti da 5 euro in cassa significa che è possibile dare immediatamente il resto ad ogni cliente purché il numero delle persone con biglietti da 10 euro davanti a lui non ecceda per più di p il numero delle persone che hanno biglietti da 5 euro. Geometricamente, nel nostro modello di taxicab geometry, questo significa che i cammini favorevoli giacciono completamente al di sotto della retta L_p, ottenuta spostando la linea L di p unità verso l'alto (si veda la figura, caso particolare per p=3).



È evidente che, per $m>n+p$, tutti i nostri cammini avranno vertici al di sopra della linea L_{p+1}, e quindi per questo caso la probabilità richiesta è pari a zero. Di converso, per $m\geq p$, tutti i cammini giacciono al di sotto della linea e quindi in questo caso la probabilità richiesta è uno.

Assumiamo ora che $m\leq n+p$ ma $m\geq p+1$. Attraverso lo stesso metodo visto la volta scorsa, è possibile vedere che il numero dei cammini corrispondenti a risultati sfavorevoli in questo caso è pari al numero di cammini che uniscono il punto A_{n+m} con il punto A_0^p ottenuto riflettendo il punto A_0 sulla linea L_{p+1} (questo significa che il nuovo punto A_0^p si trova p+1 unità al di sopra e p+1 unità alla sinistra di A_0). Da questo segue che il numero di risultati sfavorevoli è pari a:

mentre il numero dei risultati favorevoli risulta pari a:

$$\binom{n+m}{m-p-1}$$

Quindi, per $n+p\geq m\geq p+1$, la probabilità che nessuno dei clienti in attesa debba aspettare per avere il resto è pari a:

$$\frac{\binom{n+m}{m}-\binom{n+m}{m-p-1}}{\binom{n+m}{m}}=1-\frac{\frac{(m+n)!}{(m-p-1)!(n+p+1)!}}{\frac{(m+n)!}{m!n!}}=1-\frac{m(m-1)\dots(m-p)}{(n+1)(n+2)\dots(n+p+1)}$$

Il che risolve il problema.

È interessante analizzare il caso speciale per cui p=1. Supponiamo che all'inizio ci sia un solo biglietto da 5 euro in cassa, e sia $r(n, m)$ la probabilità dell'evento C che il cassiere possa sempre dare il resto se richiesto.

Nello schema della parte di problema visto il mese scorso, questo è equivalente alle due condizioni; (1) il primo cliente ha un biglietto da 5 euro e (2) gli n+m-1 clienti restanti devono essere disposti in modo tale che tra di loro possa avvenire l'evento C. Quindi se n>0, deve essere:

$$p(n,m)=\frac{n}{n+m}r(n-1,m)$$

Essendo:

$$p(n,m)=\begin{cases} 0 & se \quad m>n \\ \dfrac{n-m+1}{n+1} & se \quad m\leqslant n \end{cases}$$

otteniamo

$$r(n-1,m)=\begin{cases} 0 & se \quad m>n \\ \dfrac{(n+m)(n-m+1)}{n(n+1)} & se \quad m\leqslant n \end{cases}$$

Sostituendo n con n+1, otteniamo:

$$r(n,m)=\begin{cases} 0 & se \quad m>n \\ \dfrac{(n+m+1)(n-m+2)}{(n+1)(n+2)} & se \quad m\leqslant n \end{cases}$$

Che è il risultato per il caso particolare.

7. Paraphernalia Mathematica

Siccome siamo in ritardo, l'argomento di questo pezzo, mentre scriviamo, è passato da poco e, quando vedrete questo numero, sarà probabilmente scomparso da qualsiasi testata elettronica o nucleonica. Non solo, ma ne avevamo già parlato, molto tempo fa.

Il motivo per cui riprendiamo l'argomento è che questo ci pare un interessante caso da portarsi sempre in tasca, per lavorare con numeri facili.

7.1 Elezioni al Paesello

Sì, riprendiamo l'argomento elezioni, anche perché di recente vi abbiamo rifilato un problemino mica da ridere; non vorremmo, comunque, andare sul complicato. Come dicevamo poco sopra, c'è chi afferma che questo sia il *modello minimo* che evidenzia alcune interessanti contraddizioni del sistema; chi lo afferma, logicamente, non si sogna neanche di darne dimostrazione, quindi se volete provare a fare qualcosa di ancora più piccolo, prego.

	Coorti			
Ordine	**5**	**3**	**5**	**4**
1	a	a	b	c
2	d	d	c	d
3	c	b	d	b
4	b	c	a	a

7 *Il primo corpo elettorale.*

Come d'uso, per prima cosa definiamo una base elettorale di 17 elettori; la trovate nella tabella qui a fianco, ed è quella che dovete portarvi dietro.

Per riuscire a fare un'analisi completa, stabiliamo un ordine completo di gradimento dei candidati; per semplificarci la vita non prendiamo tutti i possibili esiti, ma ci limitiamo agli strettamente necessari. Questo, paradossalmente, ci permette di essere anche più vicini ad una situazione reale, evitando ad esempio il fatto che una persona abbia come prima simpatia un estremo dello schieramento e come secondo l'altro estremo. Il significato della nostra tabella è presto detto: ci sono 5 elettori che hanno come candidato preferito a; se proprio non possono votarlo, la loro seconda opzione risulta d, e avanti in questo modo; per le altre colonne vale lo stesso principio. Adesso, possiamo vedere "chi vince", specificando però prima "come si vince"; in tutti questi casi, comunque, consideriamo sempre un solo vincitore.

Un sistema elettorale può essere la ***Regola della Maggioranza Relativa***: ogni elettore esprime un voto per un solo candidato, e il candidato con il maggior numero di voti vince; nel nostro caso, abbiamo (ci inventiamo la notazione) {a, b, c, d} = {5+3=8, 5, 4, 0}, e vince il candidato a.

Un secondo sistema può essere la ***Regola della Maggioranza Assoluta***: sempre un voto per un candidato, ma questa volta per vincere il candidato deve raggiungere un numero di voti pari alla metà più uno dei votanti: se nessuno raggiunge questa quota, si passa al secondo turno (ballottaggio), al quale concorrono solo i due candidati che hanno ricevuto più voti al primo turno (e questo causa, automaticamente, il fatto che uno dei due ottenga la maggioranza assoluta); gli elettori che hanno votato al primo turno i candidati esclusi scelgono, tra i due antagonisti al secondo turno, quello che secondo loro è il "meno peggio": dei due, il primo che compare nella loro lista personale. Nella nostra popolazione il primo turno si svolge esattamente come quello della Regola a Maggioranza Relativa, ma nessuno dei candidati raggiunge il valore critico di [(17/2)+1]=9 voti; quindi, si passa alla fase di ballottaggio tra i due più votati (a e b); le prime tre coorti mantengono il proprio voto ma la quarta, avendo visto eliminati i primi due candidati preferiti (c e d), ripiega sulla terza scelta, che è b; questo significa che il risultato del nostro ballottaggio è {a, b}={5+3=8, 5+4=9}, e vince il candidato b.

Il terzo sistema che esaminiamo è la ***Regola del Massimo Punteggio***, noto anche come *Metodo di Borda*. In questo caso, ogni elettore, quando vota, esprime tutto il proprio ordinamento di preferenze; per ogni elettore vengono quindi attribuiti tre punti al candidato preferito, due al secondo in ordine di preferenza, tre al terzo e zero all'ultimo[15]. In questo caso, i risultati della nostra tornata elettorale verrebbero ad essere {a, b, c, d} = {5*3+3*3=24, 3*1+5*3+4*1=22, 5*1+5*2+4*3=27, 5*2+3*2+5*1+4*2=27}, dove abbiamo ignorato, per ogni candidato, i casi nei quali arriva in quarta posizione e riceve un punteggio pari a zero. E vince il candidato *d*.

L'ultimo metodo applicabile è quello che segue la ***Regola del Duello*** o *Metodo di Condorcet*: ogni candidato si confronta direttamente uno a uno con gli altri. Questo dovrebbe portare a sei votazioni, delle quali però possiamo dedurre il risultato dalla nostra tabella. Ad esempio, scegliamo il duello tra *a* e *d*: la prima coorte preferisce *a* a *d*; quindi, essendo la coorte formata da 5 votanti, abbiamo 5 punti per il candidato *a*. Stesso discorso per la seconda coorte, quindi aggiungiamo altri ter punti: totale per *a*, 8. La terza e la quarta coorte invece preferiscono *d* ad *a*, e quindi i loro punteggi vanno a *d*, per un totale di 9; quindi, nel confronto diretto tra *a* e *d*, vince *d* per 9 a 8. Nello stesso modo, se confrontiamo direttamente *d* con *b*, vediamo che *d* vince con 15 punti contro 5. Possiamo indicare i risultati come si vede nella tabella qui sopra, dove abbiamo indicato in rosso i duelli vinti dal Candidato e in nero quelli vinti dall'Antagonista. Il *Principio di Cordoncet* parte dal fatto che se *a* batte *b* e *b* batte *c*, allora forzatamente *a* batterà *c*; quindi, *il vincitore finale in una sfida di Cordoncet è l'unico che vince tutti i duelli*. E quindi, vince il candidato *c*.

	Antagonista			
Candidato	a	b	c	d
a	-	8:9	8:9	8:9
b	9:8	-	8:9	5:12
c	9:8	9:8	-	9:8
d	9:8	12:5	8:9	-

8 *I risultati dei duelli.*

Bene, siamo riusciti ad accontentarli tutti. Con un unico modello dei dati contenente valori con i quali è facile fare i conti anche a mano.

Un altro lato interessante di questo modello è che permette di evidenziare anche alcuni paradossi.

Se prendiamo il Metodo della Maggioranza Assoluta (nel quale la vittoria andava a *b*), abbiamo visto che *a*, pur avendo una robusta base elettorale, è destinato a perdere nel ballottaggio. Se rinunciasse già in partenza, i candidati al ballottaggio sarebbero *b* e *d* (con 5 e 8 voti, rispettivamente: basandosi sulla tabella originale, basta cancellare *a*). E, al ballottaggio, sempre secondo la nostra tabella modificata, vincerebbe *d* (con 12 punti contro 5).

Cambiamo (ma non troppo) discorso. Anziché dei candidati, supponiamo di avere un insieme di progetti da finanziare *S*={a, b, c, d}: i decisori sono quelli che prima chiamavamo "elettori", sempre divisi nelle stesse coorti viste prima. Il nostro scopo, però, è quello di *ordinare* i progetti, quindi in questo caso seguiamo un sistema di votazione leggermente diverso.

Il ***Metodo delle Esclusioni Successive*** prevede per prima cosa di decidere un certo metodo *R* di votazione tra quelli visti prima; indi, si passa alla votazione sull'insieme *S* e la regola *R* ci permette di selezionare il vincitore, che sarà il primo progetto ad essere finanziato. Successivamente escludiamo questo vincitore da *S*, e attiviamo il metodo *R* sul sistema S_1 ottenuto escludendo il vincitore al primo turno[16]. La stessa procedura viene quindi applicata all'insieme S_2 ottenuto escludendo da S_1 il vincitore del secondo turno. Nel nostro caso il processo finisce qui, visto che resta un solo progetto che sarà l'ultimo ad essere finanziato: nel caso di più progetti, si procede nello stesso modo sino ad avere un unico elemento restante.

[15] Si possono anche decidere altri valori di attribuzione ma, sin quando sono attribuiti in ordine decrescente, la cosa non ha particolari influenze sul risultato.

[16] Per i fanatici delle notazioni e per mantenere la generalità di non indicare un vincitore del turno con un esempio, di solito si scrive $S_1=S\backslash R(S)$. Si noti la barra "al contrario" rispetto al segno di divisione.

Indicando con x, y, z tre progetti e supponendo x vinca la prima votazione e y la seconda, il risultato viene di solito indicato come $x>y>z$.

Abbiamo volutamente mantenuto R nell'indeterminazione, e a questo punto potreste anche avrà già capito il perché:

- Se applichiamo la ***Regola di Maggioranza Relativa***, il risultato è $a>d>c>b$.
- Se applichiamo la ***Regola di Maggioranza Assoluta***, il risultato è $b>c>d>a$.
- Se applichiamo la ***Regola del Massimo Punteggio***, il risultato è $d>c>b>a$.
- Se applichiamo la ***Regola del Duello*** (Condorcet), il risultato è $c>d>b>a$.

Prima di votare, quindi, bisognerebbe votare per decidere come votare, e prima ancora, ...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms