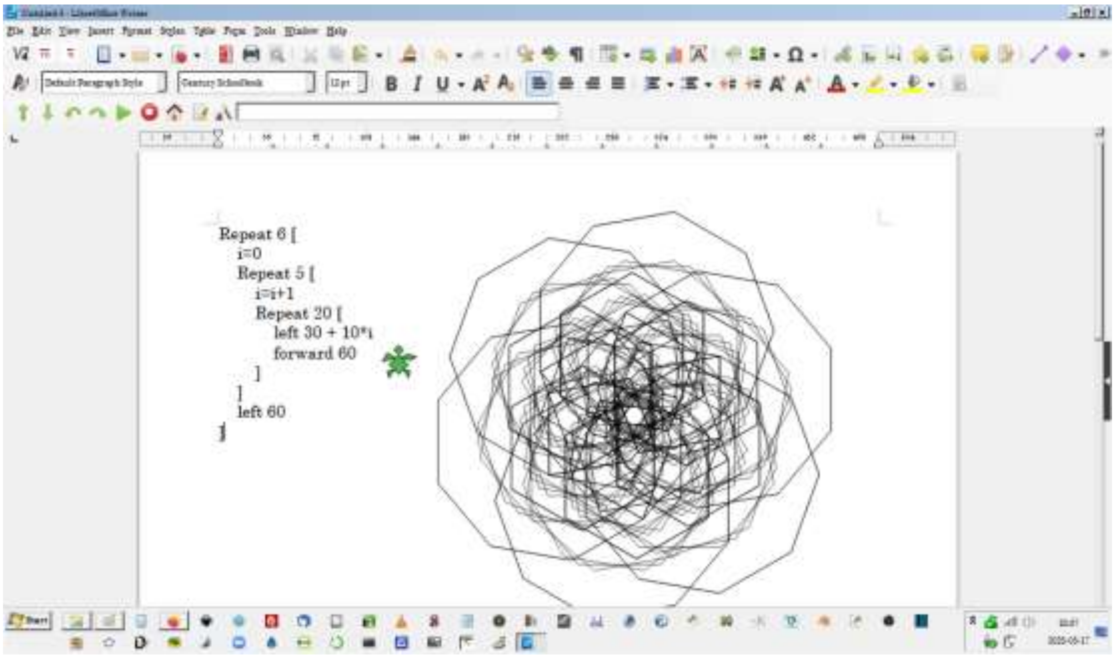
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 291 – Aprile 2023 – Anno Venticinquesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM289 ha diffuso 3'375 copie e il 26/04/2023 per Google eravamo in 7'920 pagine.

La critica rivolta più spesso a LibreOffice è che è "lento come una tartaruga". Bene, con la versione 7.5.1, abbiamo (in Writer) anche la tartaruga. Quella di Logo, ed è dannatamente veloce.

1. Piccolo, gobbo, brutto e cattivo

"Ma tu gli agguati, io replicai, m'insegna,
Ond'io così improvviso a Proteo arrivi,
Ch'ei non mi sfugga delle mani. Un nume
Difficilmente da un mortal si doma."
(Omero, Odissea, canto IV, 495-499
Traduzione di Ippolito Pindemonte)

Quasi nessuno si ricorda che nell'Odissea ci sono le foche.

Non è certo il caso di farne una tragedia: per quanto sia uno dei libri più antichi del mondo, per quanto sia difficile giungere a ottenere un qualsivoglia titolo di studio (licenza elementare compresa) senza sapere che l'Odissea esiste e che al suo autore – per quanto resti ancora oggi alquanto misterioso e quasi ipotetico – è stato dato il nome di Omero, tutto ciò non implica che uno debba ricordarsi tutti i particolari di quel classico fondamento della civiltà occidentale. Anche perché l'Odissea ha una marea di meriti, quasi tutti dovuti alla sua immensa capacità di porsi come capostipite di quasi tutte le forme di letteratura, ma è pur sempre una cosa abbastanza difficile da godersi in lingua originale, anche per gli eroici adolescenti che si sono ammalorati l'esistenza con cinque anni di liceo classico.

Ventiquattro libri nel greco antico di quasi tremila anni fa, composti da più di dodicimila esametri dattilici: anche senza tener conto dell'incontrovertibile fatto che per poter seguire la storia narrata occorre un bagaglio spettacolare di nozioni di contorno relative alla storia, alla mitologia e persino alla vita quotidiana della Greci del VI secolo a.C., è impossibile non giustificare chi, per scoprire il contenuto del decennale viaggio di ritorno a casa di Ulisse, si rifugia in una traduzione nella propria lingua madre. Anche perché, essendo uno dei quattro o cinque libri più famosi del mondo, è difficile parlare una lingua in cui l'Odissea non sia stata tradotta[1]. Ciò non di meno, siamo pronti a scommettere che quasi nessuno si ricordi delle foche: le sirene, ad esempio, c'è da scommettere che se le ricordano tutti. Ma le foche?

1 *Proteo (secondo Calpurnio)*

Beh, le foche stanno a Proteo un po' come le pecore stanno a Polifemo: i poveri greci dei tempi andati dovevano spacciarsi per le une o per le altre, per superare il caratteraccio dei legittimi proprietari. E sempre alla solita maniera: nascosti sotto gli animali di turno – a volte bastava nascondersi sotto una pelle – e il gigantesco proprietario (dacché sia Polifemo che Proteo sono alti quanto un Gran Premio della Montagna del Giro d'Italia), che tastava i suoi amati cuccioli, finiva ingannato. In fondo, però, le differenze sono ancora maggiori: quella con Polifemo è la più iconica delle avventure del protagonista del libro, Ulisse, e il gigante con un occhio solo è dipinto dai

[1] Ad esempio, chi scrive è affezionato alla versione italiana in metrica fatta da Pindemonte, forse per l'atavico affetto nei confronti degli endecasillabi. Ma non possiamo non concordare con Borges, che giudicava come "più fedele delle traduzioni omeriche" quella di Samuel Butler, che ha anche il vantaggio di essere la più leggibile per il lettore moderno. Certo, Butler ha tradotto il poema dal greco all'inglese, e a noi, per godersela appieno, occorre un "traduttor di traduttori", con grande gioia – immaginiamo – di Vincenzo Monti. Noi comunque siamo assai contenti che la *Blackie Edizioni* abbia lanciato la collana "Classici Liberati" proprio con l'Odissea nella versione di Butler riportata in italiano da Daniel Russo, anche perché ci sono dentro anche le illustrazioni di Calpurnio, che sono uno spettacolo nello spettacolo.

versi omerici palesemente come un bruto poco acculturato, divoratore di uomini, uso ad affondare triremi sbocconcellando la prima montagna che si trovava sottomano, con l'unico barlume di nobiltà datogli dall'essere figlio di un dio, Poseidone. Ingannarlo, accecarlo e scamparla con una bella mistura di coraggio, sfacciataggine e bugie è forse il trionfo di Odisseo più ricordato dai lettori. Invece Proteo, detto anche "il Vecchio del Mare", è cosa del tutto diversa: innanzitutto compare nella parte meno amata di tutto il libro, la Telemachia, i primi quattro canti dedicati agli affanni di Telemaco, figlio unigenito di Ulisse, che se ne va in giro per le isole dello Ionio alla ricerca di informazioni sull'augusto genitore: e i lettori, che di Ulisse sono golosi, spesso si annoiano a sentir cantare le goffe gesta del figlioletto.

2 *Menelao (quello che muore misteriosamente sotto le mura di Troia, con gran disappunto di Omero)*

Poi c'è il fatto che l'incontro con Proteo non è nemmeno Telemaco a farlo, ma Menelao, re di Sparta, fratello di Agamennone e marito (tradito) di Elena: già il fatto che quasi tutte le avventure dell'Odissea non sono vissute "in diretta" ma solo raccontate dai protagonisti dopo cena, come sostituti delle serie tv di oggigiorno, toglie un po' di suspense; se poi si aggiunge che le suddette gesta sono di Menelao[2], che non brilla per carisma, si capisce che uno tende a soffermarsi poco sul brano in questione.

Ma questo è un peccato, perché Proteo è un personaggio notevole, e anche abbastanza insolito nel pur ricchissimo panorama omerico. È un dio, ma disdegna Olimpo, nettare e ambrosia – per non parlare di tresche amorose illecite – e l'unica cosa che gli interessa sono le sue foche e poter dormire in pace in mezzo a loro. Però è una specie di vecchio saggio, e chi, come Menelao, è alla ricerca di informazioni, avrebbe ogni curiosità soddisfatta, se riuscisse a convincerlo a parlare. Lui però è burbero come un orso e irritabile come un orco, e vuole solo dormire: se lo si sveglia si arrabbia oltremodo, cambia forma su forma[3], riproduce una specie di catalogo di tutte le specie viventi, e solo dopo, stanco – e sempre che nel frattempo lo si sia tenuto ben stretto affinché non facesse danni durante le varie mutazioni – si rassegnerà a fungere da ufficio informazioni per guerrieri greci dispersi sulla via del ritorno.

Insomma Proteo, pur essendo una divinità minore (alla fin fine, è solo un servo di Poseidone, che lo utilizza come pastore di foche), è anche il primo e più potente dei mutaforma: avrà uno stuolo di epigoni, da Merlino a Loki fino a Mystica, passando per i *jinn* islamici e le *kitsune* giapponesi; solo che a lui, del suo straordinario superpotere sembra interessare assai poco, e il suo stato ideale è quello di essere lasciato in pace con i suoi amati pinnipedi. È cosa insolita, soprattutto se lo si confronta con lo standard del pantheon della mitologia greca, con i numi sempre occupati a farsi gli affar dei mortali, aiutando l'uno o seducendo l'altro o, in mancanza di meglio, a litigare furiosamente sull'alto dell'Olimpo. Anche il nome e l'età sono insoliti: un dio è quasi per definizione immortale e, di conseguenza, senza un'età definita: perché mai presentarsi al mondo come un vecchio? E quel nome, Proteo, che sembra portarsi appresso la stessa radice di "πρῶτος", "primo", quasi a ribadire non solo la sua anzianità, ma addirittura una sorta di primogenitura divina? Curioso, certo: ma forse non abbastanza per risalire l'immaginaria classifica degli

[2] Uno dei più grandi misteri della cinematografia contemporanea è l'oscura ragione per cui gli sceneggiatori di "Troy" – film del 2004 di Wolfgang Petersen con il biondo Brad Pitt nelle vesti di Achille – abbiano deciso di far morire Menelao appena messo piede sulla battigia della costa troiana, anche se Omero e altri lo dipingono felicemente tornato a Sparta con tanto di recuperata moglie fedifraga.

[3] Nell'improbabile caso che foste curiosi sull'etimologia della parola "proteiforme", adesso avete un buon indizio per soddisfare cotanta curiosità.

dei più ammirati e amati. Più facile aspirare ad essere belli come Venere o Apollo, o potenti come Zeus ed Era; o magari anche solo licenziosi come Dioniso, marziali come Marte, veloci e furbastri come Mercurio. Chi mai potrebbe essere pazzo al punto da desiderare di avere un vecchissimo pastore di foche come nume tutelare, e magari da somigliargli, o quantomeno da condividerne il nome?

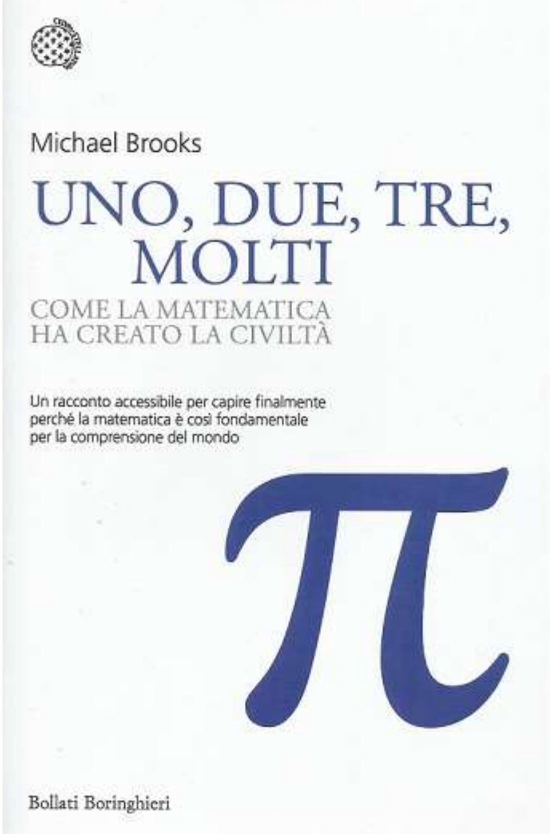
Breslavia è una di quelle città dai molti nomi e, per certi versi, anche di molte nazioni. Nasce boema con il nome di Wratislavia, in onore del suo leggendario fondatore Vratislaus I, ma diventa presto polacca, annoverata nel Ducato di Svevia, e polacca è ancora oggi, con il nome di Wroclav. Ma per lungo tempo si è chiamata Breslau, a partire da quando, nel 1741, finisce con il diventare una città della giovane e prorompente Prussia, e prussiana resterà fino alla fine della Prima Guerra Mondiale. Poi resta tedesca, nella Repubblica di Weimar, finché, dopo la Seconda Guerra Mondiale, tutta la Polonia slitta verso ovest e la città ritorna pienamente polacca. Nel 1865 era però assolutamente prussiana, ed è pertanto a Breslau che, il 9 Aprile, vede la luce Karl August Rudolph Steinmetz.

3 *Karl August Rudolph (poi Charles Proteus) Steinmetz*

Steinmetz aveva sia un corpo che un cervello straordinario. La straordinarietà del suo corpo non gli facilitava la vita: era affetto da nanismo e displasia ai fianchi, e le due cose insieme lo facevano sembrare ancora più piccolo di quanto effettivamente fosse. Era una caratteristica ereditaria, anche suo padre e suo nonno erano affetti dai medesimi problemi. Per contro il suo cervello era eccezionale dal punto di vista della sua straordinaria efficienza e intelligenza, cosa che ci auguriamo lo abbia ampiamente compensato dai fastidi causati dal fatto che la sua altezza arrivasse solo a 122 centimetri. In realtà, abbiamo buone ragioni per pensare che le cose stessero proprio così, perché sembra che giù al liceo Karl fosse assai popolare tra i suoi coetanei: stupiva i professori per le sue capacità, soprattutto in matematica e fisica, e i compagni di classe arrivavano a pagarlo per avere spiegazioni e ripetizioni. Furono proprio loro a cominciare a chiamarlo "Proteus", forse perché il dio citato da Omero aveva anche la capacità di prevedere il futuro, e Karl Steinmetz doveva apparire particolarmente onnisciente ai suoi coetanei. Di certo, comunque, contribuiva anche il fatto che, al pari di Steinmetz, anche Proteo veniva spesso definito "gobbo" dalla mitologia greca.

E infatti Karl era piccolo e gobbo, e aveva un carattere difficile, la cui durezza dipendeva anche dalla predisposizione alla ribellione: nel 1883 si iscrive all'università nella natia Breslavia, e nel 1888 è ormai pronto per discutere la sua tesi di dottorato, ma non arriverà a discuterla. Buona parte del suo tempo era dedicato a un gruppo universitario fuorilegge – perché di ispirazione socialista – che propugnava la totale libertà, indipendenza e la fine della povertà. Scriveva articoli rivoluzionari su giornali socialisti, e questo non era affatto gradito alla polizia tedesca: Karl non ci pensò su troppo e, nonostante la sua giovane età, se ne scappò in Svizzera, forse anche perché erano sorte delle tensioni in famiglia con padre, matrigna e sorellastre. Da Zurigo, dove si era rifugiato nel 1889, fu costretto a partire perché stava per scadergli il permesso di soggiorno: optò allora per un allontanamento ancora più radicale, imbarcandosi per gli Stati Uniti. È proprio nel momento cruciale in cui deve dichiarare le sue generalità per l'immigrazione americana che decide di mutare il suo nome Karl in Charles, e di rinunciare a "August Rudolph" in cambio di "Proteus": trovava che il soprannome affibbiatogli dai suoi compagni di ginnasio si adattasse perfettamente alla sua persona (e anche alla sua personalità, probabilmente).

In America, Charles Proteus Steinmetz rivoluziona la vita di tutti gli abitanti del mondo. Sembra un'affermazione esagerata, ma lo è assai meno di quel che può sembrare a prima vista: gli Stati Uniti erano già all'avanguardia negli sviluppi delle applicazioni della corrente elettrica, ma si trovavano in una critica fase di stallo. Oltre al perdurare della storica competizione tra Thomas Alva Edison e Nikola Tesla, c'era da risolvere una questione cruciale per il futuro dello sviluppo dell'energia elettrica ad uso civile: la scelta tra l'utilizzo della corrente alternata o di quella continua. Fu Proteus Steinmetz a sciogliere l'ambascia e, piuttosto curiosamente, lo fece essenzialmente con un'esortazione di natura puramente matematica.



4 *Quasi tutte le informazioni su Karl Proteus Steinmetz le abbiamo rubate a poche pagine di questo libro di Michael Brooks, "Uno due, tre, molti", edito da Bollati Boringhieri.*

C'è una vecchia storiella che alcuni professionisti amano raccontare, e che si trova molto di frequente in rete, in versioni leggermente diverse. Nella sua forma più diffusa, si narra di una grande società che per risolvere un guaio tecnico richiede inutilmente l'intervento di diversi specialisti, senza successo. Alla fine si decidono a chiamare un esperto assai rinomato ma molto caro: questi arriva, guarda il macchinario, ci pensa su un po', e infine prende un cacciavite e stringe una vite. Il macchinario torna a funzionare, e il tecnico chiede un compenso di mille euro: i clienti ritengono il conto esoso, per un lavoro di pochi minuti, e pretendono che il professionista argomenti in dettaglio come sia arrivato a una tariffa del genere. Senza scomporsi, l'uomo prende carta e penna e scrive:

Stringere una vite = 1 euro
Sapere quale vite stringere = 999 euro
Totale = 1000 euro

Abbastanza curiosamente, la storiella è essenzialmente fedele a quanto realmente accaduto nella realtà, con Karl Steinmetz nella parte del superesperto. L'aneddoto è raccontato in un numero della famosa rivista "Life" del 1965: a chiamare Steinmetz fu la Ford, che aveva problemi con uno dei generatori della catena di montaggio. Il nostro non ci mise i pochi minuti raccontati dalla storiella, ma in verità fece qualcosa di ancora più spettacolare: si fece portare un lettino nella stanza dove era sistemato il generatore, restò lì, in ascolto, per due giorni e tre notti. Alla fine si alzò, si arrampicò sulla macchina (era un generatore davvero grande) e fece un segno col gesso, una classica "X", su un punto ben preciso. Quindi tornò dai tecnici della Ford, dicendogli di cambiare sedici avvolgimenti della bobina in corrispondenza del suo segno: lo fecero, e il generatore tornò a funzionare a pieno regime. A differenza di quanto racconta la storiella, la fattura che la Ford si vide presentare non era di mille euro del XXI secolo, ma di diecimila dollari americani degli anni Venti del Novecento.

Charles Proteus Steinmetz morì, poco più che sessantenne, il 26 ottobre 1923, nella sua casa di Schenectady, dove allevava alligatori e vedove nere, oltre che fare plastici di cittadine da mandare a fuoco sotto una tempesta di piccoli fulmini prodotti artificialmente. Era considerato un po' genio e un po' pazzo, ma questo è un destino comune a molti innovatori: al momento della sua morte, era il detentore di più di 200 brevetti di dispositivi elettrici. Ma non è in queste centinaia di brevetti che sta la sua opera più importante: il suo capolavoro, quello per cui l'umanità dovrebbe essergli perennemente grata, sta tutto nel discorso che tenne nel 1893 al Congresso Internazionale di Elettricità.

5 *Steinmetz e amici. Pare che anche quello con il cappotto sia stato per un po' a Zurigo, in gioventù.*

Il problema della scelta tra corrente continua e corrente alternata era essenzialmente che la continua si disperdeva assai più facilmente dell'alternata, ma aveva il vantaggio che era assai più facile progettare macchinari e reti, perché per la corrente alternata occorreva tener conto delle fasi, e i calcoli trigonometrici implicati, su reti complesse, erano proibitivi. Nel suo discorso al Congresso di Chicago, Steinmetz raccomandò a tutti gli ingegneri e agli elettrotecnici di familiarizzarsi con i numeri complessi: in questa maniera, i calcoli erano sempre possibili, grazie alla nota identità di Eulero[4]

$$e^{ix} = \sin(x) + icos(x)$$

ma invece che complicate funzioni trigonometriche bastava fare delle semplici addizioni. Ci si poteva scordare delle complicazioni dovute alle fasi, insomma, e si poteva tranquillamente aprire la porta alla distribuzione della corrente alternata, che in breve tempo sarebbe entrata in ogni casa, e cambiato la vita quotidiana di quasi tutta l'umanità.

Era piccolo, gobbo, brutto e forse anche cattivo, o quantomeno con un gran brutto carattere. Ma non sono tante le persone che possono essere chiamati "benefattori" con più diritto di lui.

[4] Di questa formula abbiamo parlato fino alla nausea, specialmente nel caso in cui vale x=π.

2. Problemi

2.1 Una (per ora) piccola scacchiera

...nel senso che quella che utilizziamo ci pare rappresenti il minimo sindacale, e l'espansione a dimensioni maggiori non sembra neanche tanto complessa[5].

Vorremmo, come al solito, cavarcela senza troppi disegni, quindi per prima cosa definiamo la scacchiera e la notazione; una piccola 5×5, sulla quale le caselle vengono indicate come ({A, ..., E} {1, ..., 5}); insomma, il modo classico delle scacchiere da scacchi ma limitato dalle dimensioni della nostra scacchiera.

Forti della nostra ineguagliabile collezione di monetine da un centesimo, cominciamo a mettere monete sulla scacchiera, ma in un modo un po' strano. Infatti, se poniamo, ad esempio, una moneta in B4, dobbiamo mettere anche una moneta in A4, C4, B5, B3; insomma, ogni volta che mettete una moneta in una cella dovete anche metterne una per ogni cella ortogonalmente vicina; la regola generale dovrebbe permettervi di risolvere agilmente i casi nei quali mettete una moneta in (ad esempio) E3 (dovete metterla anche in E4, E2, D3) o in A1 (monete anche in A2, B1).

Il vostro scopo è fare sì che, *usando meno soldi possibili*, su ogni casella ci sia lo stesso numero di monete; rimandando ad una fase successiva la definizione dell'algoritmo (no, non è questa la domanda, ma se volete esplorare fate pure), vi chiedete quante monete debbano esserci su ogni casella (no, "zero", anche se soddisfa la definizione, non è valido); in questo modo, potreste verificare "al volo" la bontà dei diversi algoritmi generati.

Sempre ignorando l'algoritmo (che, in questo caso, risulterebbe piuttosto tedioso), ci chiediamo se sia possibile avere 2023 monete su ogni casella... Sarebbe potuto essere un interessante giochino di Capodanno.

...Lo teniamo per l'ultimo dell'anno? O aspettiamo l'anno prossimo?

2.2 Un problema elettorale

...già è complicata la matematica dei sistemi elettorali, poi c'è gente che somma (o confronta) mele con pere e, per condire il tutto, abbiamo anche la richiesta del valore minimo per cui succede qualcosa di astruso. E non sappiamo neanche come va a finire...

I membri del Circolo Scacchistico dell'Istituto di Matematica (Mal) Applicata stanno eleggendo il Presidente tra 27 candidati, e il solito che non ha niente di meglio da fare ha notato una cosa strana: *per ogni candidato*, l'*esatta* percentuale di voti ottenuti era minore di almeno 1 del numero di voti ricevuti da quel candidato.

Qual è il numero minimo di membri del circolo?

Espansione? Espansione, con il solito caveat del "non ne abbiamo la più pallida idea e stiamo brancolando nel buio". Quanti (e, se sono pochi, "quali", dove la valutazione del "pochi" è funzione della vostra pigrizia) sono i risultati elettorali possibili, con il "gruppo minimo"? E quali sono i possibili (non solo il minimo) numeri del corpo elettorale, fermo restando il "27" (*...ma anche no*, come dicevano i VAdLdRM...).

3. Bungee Jumpers

Un signore distratto scrive m lettere (cartacee) e le imbusta senza scrivere preventivamente l'indirizzo sulle buste, che sigilla in modo irreversibile. Avendo dimenticato quale lettera è per chi, scrive gli indirizzi a caso sulle lettere.

Qual è la probabilità che almeno una delle lettere raggiunga il corretto destinatario? E a quanto tende questa probabilità per m tendente a infinito?

La soluzione, a "Pagina 46"

[5] ...tanto semplice che, se non adiamo errati, è la prima volta che proponiamo l'espansione ancora prima del problema.

4. Soluzioni e Note

Aprile!

Rudy ha mandato commenti a quasi tutte le soluzioni, li troverete in linea, ed ha promesso che cercherà altri problemi "brutti secondo lui". Le vostre soluzioni di questo mese lo hanno entusiasmato.

4.1 [290]

4.1.1 Un (altro) brutto problema

Ben poca ambientazione per questo problema:

> *Abbiamo un numero di tredici cifre, scritto in base dieci:* 16926*Z*8244483. *Trovare Z sapendo che il numero è il prodotto di due primi gemelli.*

Mentre ancora il nostro Postino preparava la newsletter per distribuire il numero di marzo che conteneva i nostri problemi, ***Valter*** già li risolveva:

> Il numero compreso fra due primi gemelli è divisibile per tre.
>
> Se "x" è tale numero si ha che: $(x–1)*(x+1)=x^2–1=$16926Z8244483.
>
> Quindi ho: $x^2=$16926Z8244484 e 16926Z8244484 è divisibile per 9.
>
> Anche la somma delle sue cifre lo deve essere; perciò Z è = 5.

Come da sua abitudine, ***Valter*** ci ha scritto ancora due volte:

> Penso si potesse rendere il problema ancora più Q&D chiedendo:
>
> "Valori X e Y in 16926X824448Y prodotto di due primi gemelli".
>
> … siccome Y vale sempre tre se tale prodotto è maggiore di 15.

E ancora:

> … volendo esagerare, mi pare, si potesse addirittura chiedere:
>
> "Valori X Y Z in 1X926Z824448Y prodotto di due primi gemelli".
>
> Per iniziare con 1X9… l'x^2 di prima a sua volta deve iniziare:
>
> - per 11, 12 o 13; ma la terza cifra del prodotto dei gemelli:
>
> -- con 11 può essere solo 1 o 2
>
> —- con 12 può essere solo 4 o 5
>
> —- resta solo 13, per cui X = 6.

Ebbene sì, il problema si prestava. Commento di Rudy: *"L'ultima variazione la ricicliamo, promesso. Con attribuzione. Non subito, altrimenti è troppo facile."*.

Come facilmente si può immaginare, molte sono state le risposte lampo, per esempio ***Antonio*** scrive:

> Il numero nascosto dalla lettera zeta è il numero 5. I due primi gemelli sono 1301021 e 1301023.

Alberto R. risolve come ***Valter***:

> Premesso che non sono d'accordo perché i problemi brutti sono quelli che non riesco a risolvere e quelli che risolvo sono tutti belli, veniamo al dunque.
>
> N= 16926Z8244483 è il prodotto di due primi gemelli.
>
> Dunque N = (X–1)(X+1) = X^2 –1. Cioè N+1 è un quadrato.
>
> Sostituiamo progressivamente Z con 0, con 1, con 2, ecc ... e al quinto tentativo verifichiamo che (1692658244483+1) è il quadrato di X=1301022; inoltre come c'era da aspettarsi (i Rudy sono gente seria, mica raccontano frottole) X–1 e X+1 sono primi.

Ringraziamo ***Alberto***, ovviamente, ma anche se raramente raccontiamo frottole, non siamo per niente seri, almeno quello non lo siamo mai stati… ma non tergiversiamo, non ci sono molti modi per girare questa frittata, e anche l'esperto dei problemi ***.mau.*** ci scrive:

> Dai in pasto il numero a Wolfram Alpha, arrotondi e vedi cosa viene fuori, no?

> Innanzitutto, due primi gemelli hanno radice modulo 9 che differisce di 2 (perché se il numerone finisce per 3 loro possono finire per 1 e 3 oppure per 7 e 9). Poi il numerone è un quadrato meno uno, e la somma delle cifre tranne Z è 3 mod 9; poiché sommando 1 e Z dobbiamo avere un risultato tra 0, 1, 4, 5, 6, 9 questo lascia come possibilità per Z 5, 6, 0, 1, 2, 4. Considerando che i primi gemelli, oltre ad avere differenza 2 tra le radici numeriche, non possono avere somma delle cifre multipla di 3 rimangono solo i casi (2, 4) con prodotto 8, (5, 7) con prodotto 5 e (8, 1) con prodotto 8. Pertanto la cifra mancante è 5. A questo punto puoi usare Wolfram Alpha per verificare che non avete barato nel problema.

No, non abbiamo barato, anche se normalmente se lo facciamo è perché abbiamo sbagliato a schiacciare qualche tasto. Rudy scrive: *"...come si fa a dare in pasto a Wolfram Alpha un numero con dentro una zeta? Chiedo per un amico..."*

Diamo ancora spazio a ***Giovanni***, che ci scrive per la prima volta e chiama la sua soluzione "bruta", un bel gioco di parole che ben si addice a noi Rudi:

> Chiamo a il numero dato $16926Z8244483$ con Z cifra incognita da trovare. Essendo il prodotto di 2 numeri primi gemelli (cioè distanti 2 unità l'uno dall'altro), se chiamo x il primo dei due numeri sarà ovviamente
>
> $$x(x+2)=a$$
>
> Da cui $x^2+2x–a=0$, che posso risolvere con le due soluzioni che saranno
>
> $$x1 = -1 + \sqrt{1+a} \text{ e } x2 = -1 + \sqrt{1+a}$$
>
> Osservo che:
>
> il radicando ($1+a$) deve essere il quadrato di un numero naturale, così che la radice quadrata dia un numero intero n così che $–1+n$ sia la soluzione cercata (scarto ovviamente la soluzione negativa)
>
> se il numero è in base 10, la cifra Z deve essere un numero nell'intervalli [0,9]; avrò al massimo 10 numeri su cui operare con la radice quadrata, ognuno distante 10000000 dall'altro.
>
> Devo quindi verificare quando la radice quadrata dei numeri che vanno da 16926**0**8244483 a 16926**9**8244483 dà un risultato intero. Dovrò quindi effettuare al massimo 10 radici quadrate (mitico Excel!); il numero cercato è quindi 16926**5**8244483 la cui radice quadrata è 1302022, per cui x=1301021 sarà la soluzione accettabile (1301021 e 1301023 sono i 2 numeri che moltiplicati tra di loro danno il numero di partenza). Con un semplice algoritmo di ricerca dei numeri primi si può verificare che sono entrambi primi, e sono i due numeri primi gemelli generatori del numero di partenza.

Tanto "bruta" non ci è sembrata… benvenuto tra i solutori ***Giovanni***! A questo punto forse smettiamo di riportare le soluzioni, ma almeno ringraziamo i lettori: ***Trekker***, ***Galluto***, ***Emanuele***, ***Camillo***, ***Lorenzo***, ***trentatre***. Chiaramente un problemino carino e per niente brutto. Proseguiamo.

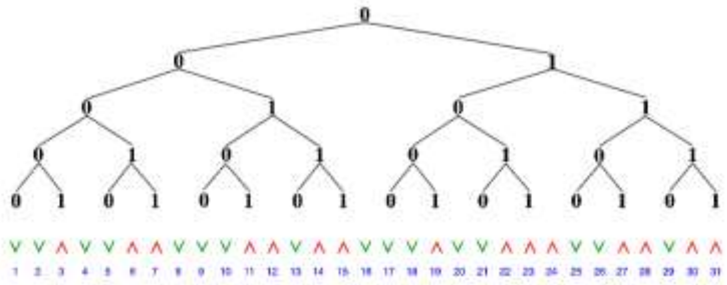
4.1.2 Un (altro) rotolo

Adesso che il Capo si è messo a piegare strisce, non lo fermiamo più. Ecco il secondo problema del mese scorso:

> *Consideriamo una striscia che pieghiamo a metà 2016 volte. Una volta riaperta, si notano un certo numero di pieghe a V e A. Di che tipo è la duemilasedicesima? E per un numero x di pieghe, di che tipo è la piega nella posizione y?*

Anche qui cominciamo con ***Valter***:

> Propongo un'immagine, dove associo per mia comodità 0 a ⋁ e 1 a ⋀, e uno schema (che, almeno nelle mie intenzioni, dovrebbero fornire quanto è richiesto dal problema):



- Se N ≡ 1 mod 2 , vedi mod 4 : se ≡ 1 allora 0/V, se ≡ 3 allora 1/Λ
- se N ≡ 2 mod 4 , vedi mod 8 : se ≡ 2 allora 0/V, se ≡ 6 allora 1/Λ
- se N ≡ 4 mod 8 , vedi mod 16 : se ≡ 4 allora 0/V, se ≡ 12 allora 1/Λ
- se N ≡ 8 mod 16, vedi mod 32 : se ≡ 8 allora 0/V, se ≡ 24 allora 1/Λ
- se N ≡ 16 mod 32, vedi mod 64 : se ≡ 16 allora 0/V, se ≡ 48 allora 1/Λ
- se N ≡ 32 mod 64, vedi mod 128: se ≡ 32 allora 0/V, se ≡ 96 allora 1/Λ
- …

Nello specifico 2016 è ≡ a 32 mod 64 e ≡ a 96 mod 128; quindi la piega è 0/V.

Galluto risolve così:

La prima piega genera una “grinza” (uso un termine diverso da “piega” altrimenti non ci si capisce niente), la seconda piega ne genera 2, la terza 4 e così via; in generale la n-ima piega genera 2^{n-1} grinze.

Queste nuove grinze si dispongono in tutte le (nuove) posizioni dispari: la prima diventa la prima a sinistra ed è a V, dopo di che sono alternate ad A ed a V fino all’ultima che diventa quella all’estrema destra ed è a A. Le grinze preesistenti si ritrovano tutte nelle (nuove) posizioni pari.

Quindi, se il numero che vogliamo testare è dispari (es. 2015 o 2017), la grinza è una di quelle prodotte dall’ultima piega effettuata ed è a V se il resto della divisione per 4 è 1 (2017) o ad A se il resto è 3 (2015).

Se invece il numero è pari, la grinza è una di quelle create da una piega precedente; basta dividere per 2 fino ad arrivare ad un numero dispari e applicare la regola del punto precedente:

2016 è pari a 32 * 63; 63 da resto = 3 per la divisione per 4 e quindi la grinza è ad A.

La versione che segue è di ***Lorenzo***:

Se l’operazione descritta è eseguita n volte, le pieghe risultanti sono $2^n - 1$. I casi base sono $n = 0$, nessuna piega, e $n = 1$, una piega V; per ogni $n > 1$, la sequenza di pieghe è data dalla sequenza al passo precedente ($n - 1$) seguita da una V, e poi dalle sequenze ai passi ancora precedenti (a ritroso) ciascuna seguita da una A.

Ecco un programma in Python (2.7.9) che stampa le sequenze per n da 1 a 6:

```
def pieghe(n):
 if n == 0:
 return
 else:
 if n == 1:
 print ‘V’,
 else:
 pieghe(n-1)
 print ‘V’,
 for i in range(n-2, -1, -1):
 pieghe(i)
```

```
 print 'A',
for n in range(1, 7):
 pieghe(n)
 print '\n'
```

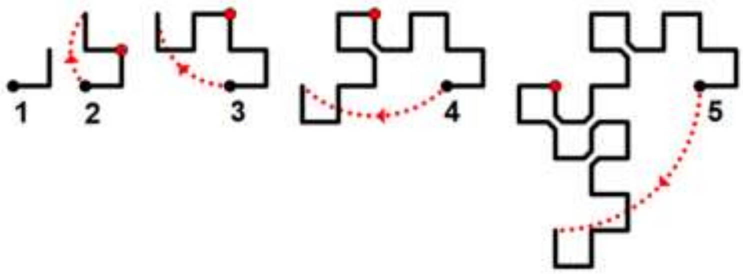
Il risultato è:

```
V
V V A
V V A V V A A
V V A V V A A V V V A A V A A
V V A V V A A V V V A A V A A V V V A V V A A A V V A A V A A
V V A V V A A V V V A A V A A V V V A V V A A A V V A A V A A V V
V A V V A A V V V A A V A A A V V A V V A A A V V A A V A A
```

Tutte le sequenze, per $n > 0$, iniziano con V e, per $n > 1$, terminano con A.

Abbiamo lasciato il programma questa volta perché breve, ma non vi abituate. Rudy ha commentato: "*Citazione del mio professore di Teoria e Applicazioni di Macchine Calcolatrici: '...nella programmazione, la ricorsione è un procedimento assolutamente inutile ma molto elegante...': Lorenzo qui smentisce con facilità la prima parte della frase.*". Concludiamo in bellezza con ***trentatre***:

Piegando la striscia di carta 1, 2, 3 ... volte, lasciando le pieghe aperte di 90° e guardando il risultato di profilo si hanno i tracciati di fugura, dove • è l'inizio di sinistra.



Risulta evidente che

- il tracciato di ogni passo è uguale al precedente con l'aggiunta di una copia ruotata di 90° in senso orario, attorno al punto terminale •

- seguendo il percorso dall'inizio, ogni svolta del tracciato verso sinistra è una *V*, e verso destra è una *A*; nel punto di rotazione viene aggiunta una *V*

- appiattendo il tracciato la copia aggiunta è uguale all'originale, ma letta in senso inverso, e con le svolte scambiate $V \leftrightarrow A$.

Indicando con $s(p)$ la sequenza di *V* e *A* (scritti come 1 e 0) del passo *p* si ha

p	$s(p)$
1	1
2	110
3	1101100
4	110110011100100
5	1101100111001001110110001100100
	...

In base decimale i numeri precedenti sono

$1, 6, 108, 27876, 1826942052, \dots$.

Ma questa è la sequenza A337580 di *OEIS*, dove $s(p)$ si chiama $a(n)$, e ogni termine è "la n-esima interazione della curva del drago", una costruzione frattale; è incluso come al solito un ampio elenco di formule, programmi e riferimenti, fra cui è citato un articolo di *Martin Gardner* e un richiamo al sito Wikipedia dragon curve dove si trovano spiegazioni, formule e due animazioni che generano il frattale.

Ogni $s(p)$ si ripete identica all'inizio delle successive; quindi cercare un elemento in $s(p)$ equivale a cercarlo nella sequenza illimitata $s(p \to \infty)$; questa si trova, ovviamente, in *OEIS* come A014577. Dal vario materiale presente ho ricavato la seguente soluzione generale del problema: il valore dell' n-esimo termine di questa sequenza – e quindi di ogni $s(p)$ – è dato dalla formula

$t(n) = (1 + (-1)^{(d-1)/2}) / 2$

con d parte dispari di n, cioè n diviso per 2 fino a renderlo dispari

- nel nostro caso $d = 2016 / 2^5 = 63$, $t(2016) = (1 + (-1)^{31}) / 2 = \mathbf{0}$ (cioè una piega A).

Una ovvia estensione è partire da un foglio quadrato, piegarlo in un rettangolo, poi di nuovo in quadrato facendo coincidere i quattro vertici originali, e così via. Non ci provo neanche, tanto prima o poi si finisce in *OEIS*.

Peccato, ***trentatre*** non sembra apprezzare le strisce del Capo, che scrive "*...e visto che non apprezza le mie strisce, con riferimento alla copertina di questo numero, adesso il Nostro ci scrive un bel programma in LibreLogo che disegna la Curva del Dragone...*". Ci fermiamo qui, alla prossima!

5. Quick & Dirty

Un cubo di lato n viene prima dipinto di rosso sull'intera superficie e quindi viene segato in cubetti unitari. Delle faccette di questi cubetti unitari, esattamente un quarto risultano colorate. Qual era il lato del cubo originale?

6. Pagina 46

Calcoliamo per prima cosa il numero dei casi possibili.

Se sulla prima lettera viene scritto un indirizzo qualsiasi, restano m–1 indirizzi che si possono scrivere sulla seconda lettera; compilata anche questa, ne restano m–2 per la terza... il totale delle possibilità risulta quindi pari a $m(m-1)(m-2)\ldots1=m!$, e tutti questi risultati sono ugualmente probabili.

Calcoliamo ora il numero dei casi favorevoli.

Sia A_1 il numero dei risultati nei quali la prima lettera è indirizzata correttamente, A_2 il numero dei risultati nei quali la seconda lettera è indirizzata correttamente, eccetera; in questo caso, il numero dei casi favorevoli risulta pari a:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$$

e quindi, indicando con "#" la cardinalità dell'insieme, il nostro problema consiste nel calcolare $\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m)$. Per calcolare questo, dobbiamo conoscere le quantità:

$$\#(A_1), \#(A_1 \cup A_2), \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3), \ldots$$

Se la *i-esima* busta è indirizzata correttamente, ci sono $(m-1)!$ modi di indirizzare le altre, quindi $\#(A_i)=(m-1)!$. Nello stesso modo, $\#(A_i \cup A_j)=(m-2)!$, in quanto una volta che la *i-esima* e la *j-esima* busta sono indirizzate correttamente, restano $(m-2)!$ modi per indirizzare le altre buste; sempre secondo questo ragionamento, $\#(A_i \cup A_j \cup A_k)=(m-3)!$, eccetera.

Nell'espressione generale dei casi favorevoli, avremo:

- m termini del tipo $\#(A_i)$,
- $\binom{m}{2}$ termini del tipo $-\#(A_i \cap A_j)$,
- $\binom{m}{3}$ termini del tipo $\#(A_i \cap A_j \cap A_k)$, ...

E quindi il risultato finale sarà:

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = m(m-1)! - \binom{m}{2}(m-2)! + \binom{m}{3}(m-3)! - \ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m}!$$

Questa espressione può essere semplificata notando che $\binom{m}{r}(m-\mathrm{r})! = \frac{m!}{r!}$, ottenendo quindi:

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = m(m-1)! - m!/2! + m!/3! - \ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m}! = m![1 - 1/2! + 1/3! - \ldots + (-1)^{m-1}/m!]$$

E quindi la probabilità richiesta si ottiene dividendo questo valore per il numero totale dei casi possibili che sappiamo essere $m!$, ottenendo:

$$1 - 1/2! + 1/3! - \ldots + (-1)^{m-1}/m!.$$

Per quanto riguarda il caso di m tendente ad infinito, è sufficiente considerare che la somma:

$$1/2! - 1/3! + \ldots + (-1)^n/n!$$

differisce per meno di $1/(n+1)!$ dalla serie *infinita*

$$1/2! - 1/3! + 1/4! - 1/5! + \ldots$$

che tende a e=2.718..., e quindi la probabilità cercata è pari a $(1-1/e)$=0.63212…, ossia poco meno di due terzi.

7. Paraphernalia Mathematica

"...senza, a quanto pare, averci pensato prima, mentre prendevo la corriera per Coutances mi sono accorto che le isometrie sul piano iperbolico erano equivalenti alle trasformazioni nella teoria delle funzioni di variabile complessa..."

Henri Poincaré

7.1 Coutances, dieci anni dopo...

Se vi chiamate Poincaré, quanto messo in citazione all'inizio è chiarissimo. Se siete delle persone normali, non significa nulla.

Fortunatamente, dieci anni dopo il Nostro ha trovato un altro modello, decisamente più comprensibile, relativamente alla geometria di Lobachevsky.

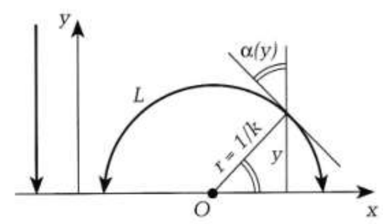
Un raggio di luce che colpisce il nostro occhio appare sempre come una linea retta; un ambiente fisico piuttosto particolare, però, ci permette di cambiare questa percezione del mondo.

Supponiamo infatti che la velocità della luce nel semipiano positivo di un sistema cartesiano sia funzione della coordinata y, ossia supponiamo questa valga per ogni punto $c(x, y)=y$, indipendentemente dalla direzione del raggio luminoso.

Noto che il percorso di un raggio luminoso è quello che impiega il tempo minimo, si può dimostrare che la luce si propaga tra due punti lungo la curva L in modo tale che:

$$\frac{\sin\alpha\,(y)}{y} = k$$

dove $\alpha(y)$ è l'angolo tra la tangente di L all'ordinata y e la verticale, mentre k assume lo stesso valore su tutta L; ma forse con un disegno è più chiaro. Lo trovate qui di fianco.



6 *Uno spazio strano.*

La formula che abbiamo appena scritto dovrebbe far suonare un campanello nella testa, almeno se vi ricordate la ***legge di Snell***:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

che rappresenta la ***legge di rifrazione*** all'interfaccia tra due mezzi: in pratica, il nostro spazio è un mezzo approssimabile da una serie infinita di strati orizzontali ciascuno dei quali ha un indice di rifrazione funzione della propria ordinata. Carino, vero?

Questo spiega anche il motivo del percorso circolare L del nostro raggio: la legge di propagazione del nostro raggio è valida per qualsiasi cerchio con raggio di curvatura k e centro sull'asse x, e nessuna altra curva soddisfa la condizione data. Come caso particolare, k=0 è una retta perpendicolare all'asse x.

Per abbreviare la definizione, definiamo il nostro semipiano come ***P-spazio*** (da "Poincaré"), abitato dai *P-mani* (gli umani del P-spazio); per motivi che dovrebbero essere intuitivamente chiari, il nostro è un semipiano[6] aperto, da cui dobbiamo escludere la retta y=0.

I nostri P-mani vedono i semicerchi di luce come linee rette, anche se per noi restano dei semicerchi; anche qui, ci inventiamo il nome di ***P-linee*** per indicare quello che "è una retta per il P-mano ma un semicerchio per l'umano"; da questa differenza di percezione nasce un primo fatto piuttosto strano: le P-linee sono di lunghezza infinita per i P-mani, e la luce impegna un tempo infinito per propagarsi lungo di loro; per questo, quelli che per noi sono i punti sull'asse, per i P-mani sono dei punti infinitamente distanti. In realtà esiste un altro

[6] ...noi continuiamo a parlare di "(semi)piano", ma solo la nostra inettitudine nel disegno vieta di espandere la cosa allo spazio tridimensionale: questa espansione non porta comunque nulla di non deducibile nel caso bidimensionale.

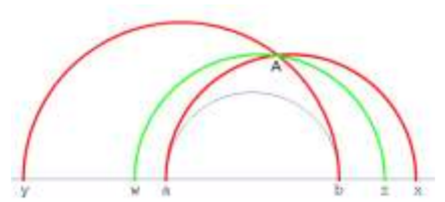
punto all'infinito, definito dall'"altro estremo" del raggio di luce verticale; per motivi che non staremo ad approfondire, questo particolare punto all'infinito è unico. Se comunque la luce percorre dei semicerchi, potremo definire il nostro raggio in funzione dei punti a e b dove il semicerchio incrocia l'asse x (irraggiungibile per i P-mani, ma comunque ben definito nel nostro modello): se uno di questi punti vale ∞, allora per gli umani il raggio di luce è perpendicolare all'asse x.

Per quanto assurdo possa sembrare il P-spazio, i P-mani sono in grado di sviluppare una loro geometria, e fatte le dovute modifiche questi teoremi sono dimostrabili anche nel nostro modello; ad esempio, se un P-mano vi dice che "per due punti distinti passa una e una sola P-linea" significa che "per due punti distinti passa un solo semicerchio perpendicolare all'asse x o una sola retta perpendicolare all'asse x". E, con questo, entrambi intendiamo che un raggio di luce tra due punti passa per un cammino unico.

A questo punto, se avete acquisito una certa familiarità con il P-spazio, dovrebbe sorgervi un dubbio sulla definizione di "parallele".

Infatti, anche nel P-spazio, due rette o hanno un punto del P-spazio in comune o non hanno punti del P-spazio in comune; ma possono averne "altrove", visto che i punti dell'asse x non appartengono al P-spazio. Per una traiettoria $L(a,b)$ e un punto A esterno ad essa, potremo avere diversi tipi di parallele:

1. Di tipo $L(a, x)$, con $x \neq b$: il semicerchio nasce in a e finisce in un qualche punto x
2. Di tipo $L(y, b)$, con $y \neq a$: il semicerchio nasce in un qualche punto y e finisce in b
3. Di tipo $L(w, z)$, con $w<a$ e $z>b$.



7 *Qualche parallela passante per A.*

Tutte passanti per il punto A dato. Forse, a questo punto, un disegno aiuta: in rosso, le parallele di tipo (1) e (2), in verde una parallela di tipo (3). Le parallele del terzo tipo, per distinguerle dalle altre, vengono indicate con il nome di ***superparallele***. Già, da queste parti per un punto passano infinite parallele a una P-retta data.

Il prossimo lavoro da fare è quello di definire i due concetti di ***distanza*** e di ***isometria***, sperando che si possa giungere a qualcosa di coerente.

Dal punto di vista dell'ottica, il modo più naturale per definire la ***distanza*** tra A e B è misurare il *tempo* che la luce impiega per andare da A a B; la distanza ρ definita in questo spazio attraverso le P-linee rispetta le tre fondamentali caratteristiche del concetto "usuale" (ossia, del nostro spazio) di distanza:

1. $\rho(A, B) = \rho(B, A)$;
2. Se B appartiene al P-segmento AC, $\rho(A, B) + \rho(B, C) = \rho(A, C)$;
3. Per tre qualsiasi punti A, B, C vale la $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$ (diseguaglianza triangolare), con l'uguaglianza valida solo se B appartiene ad AC.

La "P-distanza" come tempo impiegato dalla luce è di calcolo immediato per i P-mani ma, se trasferiamo tutto nel nostro mondo euclideo, con il fatto di avere una propagazione non uniforme della luce le cose si complicano, visto che bisogna calcolare un integrale lungo il percorso; ci limitiamo quindi a darvi il risultato finale:

$$\rho(A, B) = ln\frac{r' + r}{r' - r}$$

dove r è la distanza **euclidea** di A da B, mentre r' è la distanza (sempre euclidea) di A da B', dove B' è la ***riflessione*** di B sull'asse x (quello che per i P-mani "non esiste"). Fortunatamente, il logaritmo è il normale logaritmo naturale.

"Qui da noi", le trasformazioni che conservano le distanze sono dette ***isometrie***; cerchiamo di capire come funzionano (e se esistono) le P-isometrie, in grado di conservare le P-distanze nel P-spazio. Ci aspettiamo che queste conservino le P-distanze, e quindi trasformino P-linee in P-linee.

Cominciamo da quelle che non lasciano nessun punto al suo posto (insomma, quelle che non hanno un punto fisso): sono (altrimenti la cosa non funziona) delle ***traslazioni*** lungo l'asse x del tipo $T_a(x, y)=(x+a, y+a)$, e quindi tutti i nostri parametri (la distanza e la velocità della luce) sono conservati.

Un po' più complicate sono le ***dilatazioni*** con centro l'origine (per noi) degli assi, ossia le $D_b(x, y)=(bx, by)$, che moltiplicano per b anche la velocità della luce; qui bisogna lavorare con la formulaccia che abbiamo visto qui sopra e si vede che in questo caso ***la distanza viene conservata***. Quindi, anche le dilatazioni per i P-mani sono delle isometrie; e con questi due tipi di isometrie potete portare ogni punto del P-spazio in ogni punto.

L'insieme delle P-linee si divide in due classi in funzione delle P-isometrie introdotte: una P-isometria trasformerà un "semicerchio" (per noi, per i P-mani è una P-linea) in un altro semicerchio, e un raggio verticale in un altro raggio verticale, ma non potremo per questa via trasformare una P-linea (di tipo "semicerchio") in un raggio (verticale) o viceversa; quindi introduciamo una nuova isometria, la ***P-riflessione*** secondo una P-linea: se la P-linea è un raggio, l'operazione è una normale riflessione; ma se la P-linea è un semicerchio, allora è un'inversione.

Proviamo a chiarirci le idee con un esempio, ricordando che "qui da noi" le inversioni trasformano cerchi e linee in cerchi o linee e conservano gli angoli tra di loro. Nel P-spazio, questo significa che la P-riflessione di una P-linea $L(a, b)$ secondo una P-linea $L(-1, 1)$ è la P-linea $L(1/a, 1/b)$; il caso che ci interessa è quello della P-linea $L(a, 0)$ che, diventando la P-linea $L(a, \infty)$, si trasforma in un raggio verticale.

Si verifica inoltre che le P-riflessioni non modificano le P-distanze: infatti dal punto di vista dei P-mani, non ci sono dilatazioni e le P-linee sono mappate su P-linee.

Se vi siete stufati delle linee, potremmo parlare di triangoli: qui le cose diventano *curioser and curioser*: infatti, valgono le abituali regole di congruenza per uguaglianza di due lati e l'angolo tra di loro (LAL, lato-angolo-lato) e quella dei due angoli e del lato tra di loro (ALA); la dimostrazione della congruenza LLL è più complessa, visto che richiede di dimostrare che i P-cerchi sono, in realtà, dei cerchi euclidei (ma completamente nel P-spazio, questa volta. E il centro è "da un'altra parte"), ma si riesce. Quello che lascia perplessi è che vale anche la ***congruenza AAA***: se due triangoli hanno gli angoli tra loro congruenti, sono congruenti. Il P-spazio ci è già più simpatico, visto che da piccoli questa la sbagliavamo sempre, mettendola tra le congruenze euclidee. In particolare, l'area di un P-triangolo è univocamente definita dai suoi tre angoli, e la somma dei tre angoli è sempre minore di π; la differenza tra la somma dei tre angoli e π è detta ***difetto angolare*** del triangolo, e si comporta come un'area, nel senso che se tagliate un P-triangolo in due passando per uno dei vertici, la somma dei difetti angolari dei due triangoli è pari al difetto angolare del triangolo originale.

Il problema, come diceva una nostra amica di gioventù, è il concetto di metro. Nel senso che un righello, nel P-spazio, si comporta in modo strano, cambiando forma (per i P-mani) quando lo spostate. Poincaré, quando si è inventato tutta questa roba, ha trovato un interessante modello anche per questa parte: il concetto di ***espansione termica***.

Supponiamo che tutti gli oggetti del P-spazio abbiano lo stesso coefficiente di espansione termica e una conduttività termica pari a zero, e che le loro dimensioni siano proporzionali[7] alla loro temperatura T. Un oggetto solido che si muove in un ambiente a temperatura costante mantiene, tra due qualsiasi suoi punti A e B, la medesima distanza (euclidea), ma quando si muove da un ambiente a temperatura T_1 a un ambiente a temperatura T_2 la distanza tra A e B varia di un fattore T_2/T_1; ossia, viene mantenuto il rapporto AB/T; ma se la temperatura varia attraverso diversi valori passando da un punto all'altro, i conti diventano complicati.

In realtà il modello è, in questo caso, sostanzialmente lo stesso che abbiamo visto sinora, supponendo che la temperatura vari come $T(x, y)=y$, ossia con lo stesso modello della

[7] Si noti che, con queste premesse, essendo i normali termometri basati sulla differenza di dilatazione termica del vetro dal mercurio, questi non funzionano nel P-spazio.

propagazione della luce; in questo modo, il tempo di propagazione della luce (che, per i P-mani, è una P-distanza) tra due punti resta uguale alle diverse temperature, anche se per gli umani (che usano la distanza euclidea) non lo è.

Esiste un interessante corollario a quanto abbiamo appena detto: l'asse x non è visibile e non è raggiungibile dai P-mani, in quanto la temperatura tende allo zero assoluto, e quindi ogni oggetto solido perde le sue dimensioni, il che si accorda con il nostro modello.

Questo universo fittizio comincia ad essere un po' troppo coerente per i nostri gusti...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms