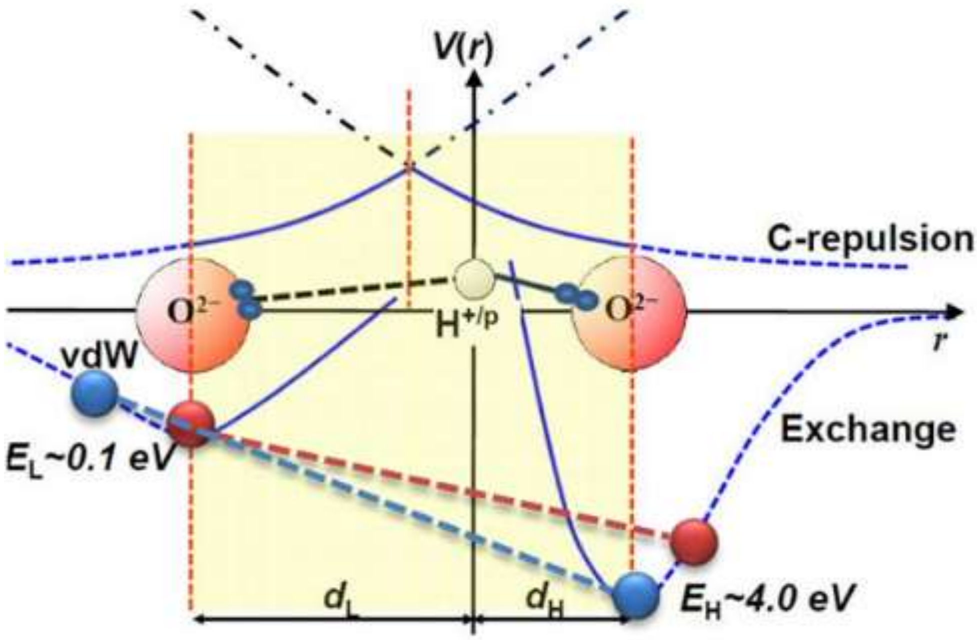
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 289 – Febbraio 2023 – Anno Venticinquesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com
www.rudimathematici.com

RM285 ha diffuso 3'366 copie e il 03/02/2022 per Google eravamo in 7'280 pagine.

Uno dei fenomeni più strani della "Kitchen Physics" rimasto per lungo tempo senza spiegazione è l'***Effetto Mpemba*** (http://it.wikipedia.org/wiki/Effetto_Mpemba), consistente nel fatto che sotto determinate condizioni l'acqua calda gela più velocemente di quella fredda. ***Xi Zhang*** (http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1310/1310.6514.pdf) ha finalmente spiegato il fenomeno e (dice lui) tutto è riassunto nel disegno che vi presentiamo. ...c'è un chimico in sala?

1. Una collana per lei

> *"Non dovevo cercare niente; non dovevo andare in biblioteca o cercare libri di testo. Mi bastava sedermi e immaginare le cose."*
>
> *"Qualsiasi cosa tu faccia, qualsiasi cosa ti stia accadendo, assicurati di andare all'università."*
>
> "[parlando dell'algebra] *Sembrava un mucchio di trucchetti. È stato solo molto più tardi che ho scoperto che tutta quella roba aveva dei fondamenti. Non mi sono mai piaciute le regole basate su qualcosa che non riesco a capire."*

Sono molte le ragioni per cui il carnevale è una festa abbastanza diversa dalle altre. Non è una ricorrenza civile, insomma una festività che celebra qualche evento memorabile della storia patria: anzi, la sua mobilità sul calendario denuncia chiaramente la sua stretta dipendenza dal calendario liturgico. Anticipa la Quaresima, che non per niente inizia proprio il giorno successivo all'acme carnevalesco del Martedì Grasso, e a ben vedere sembra proprio una festa che ha l'obiettivo di impazzare ed esagerare proprio per togliersi qualche sfizio liberatorio prima del periodo di vigilia e penitenza[1]; in questo senso, non ci sono molti altri esempi di "feste preventive", con la possibile – ma tutt'altro che istituzionalizzata – celebrazione degli addii al celibato e nubilato.

Sembra insomma una festa legata alla religione, ma con la discola intenzione di vaccinarsi dagli obblighi a cui costringe la religione stessa. Ma anche questa conclusione rischia forse di essere un po' affrettata, vista la stretta parentela storica che il carnevale ha con i Saturnalia degli antichi romani e con le Antesterie dei greci. Quale che ne sia l'origine, cristiana o pagana, il carnevale ha anche un'altra caratteristica saliente: anche se il calendario è pieno di festività – anzi, a ben vedere il calendario serve soprattutto per registrare le festività, piccole o grandi che siano – non sono tante quelle che prevedono un grande ammassarsi di persone per le vie e le piazze cittadine. Le feste normali si celebrano e consumano quasi sempre in casa, in gruppi più o meno grandi, e sono ben poche quelle che richiedono che buona parte della popolazione si riversi per le strade, facendo festa essenzialmente solo per il gusto di farlo. Anche per questo sono le feste che più hanno pagato lo scotto dei lockdown e del distanziamento sociale, e c'è chi si prepara a valutare la percezione popolare nei confronti della pandemia proprio in base al "successo di pubblico" che registreranno i vari carnevali cittadini.

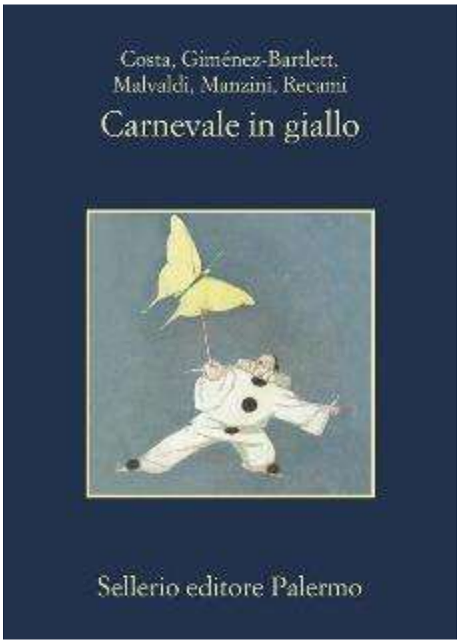
Certo, il problema sarà forse che il carnevale, quasi per definizione, è una manifestazione non troppo regolamentata, salvo alcune eccezioni[2]; e quindi provare a registrare le "differenze" tra un anno e un altro è impresa assai ardua, se non altro per mancanza di una metrica consolidata. Di certo, ogni carnevale è diverso dagli altri, e non solo perché

[1] La cosa è resa particolarmente evidente da quella che si ritiene essere la più probabile etimologia della parola, "*carnem levare*", ovvero l'incombente eliminazione dei piatti di carne dalla dieta dei cristiani osservanti, come richiederebbe il rispetto del periodo quaresimale.

[2] Le eccezioni sono quelle dei carnevali più famosi, che proprio a causa del loro successo, sono solitamente assai ritualizzati: esisteranno di certo regole rigorose che governano il fluire delle scuole di samba durante il Carnevale di Rio o il succedersi dei carri nelle sfilate a Viareggio, Cento e Putignano. Per esperienza diretta possiamo citare solo il Carnevale d'Ivrea, che dall'Epifania al Martedì Grasso – e soprattutto negli ultimi sei giorni "grassi", da giovedì a martedì – ha una sequela di eventi, appuntamenti, regole e riti da far impallidire qualsiasi codice di procedura giuridica.

ogni cosa (e non solo gli occhi di chi guarda) cambia con il passare degli anni, con buona pace di coloro che si sforzano tenacemente di salvaguardare ogni dettaglio delle tradizioni.

Per vedere come cambia il carnevale è in fondo sufficiente guardare come si travestono i bambini: per quanto sfoggiare un costume bello e originale sia un desiderio diffuso – probabilmente anche tra i genitori, e non solo tra gli infanti – le mode e i nuovi personaggi portati alla ribalta da cinema e televisione impattano violentemente sull'abbigliamento dei giovanissimi agghindati per il carnevale. Le tradizionali maschere della Commedia dell'Arte (che, in fondo, era la televisione dei secoli andati) come Arlecchino, Pulcinella, Brighella, Colombina e Stenterello sono virtualmente scomparsi dalle strade già da diversi decenni; la varietà dei giorni nostri è dovuta essenzialmente all'inflazione dei nuovi personaggi (soprattutto supereroi) e anche al non trascurabile fatto che il costo di un passabile costume di carnevale è diventato, col tempo, un po' meno impattante sul bilancio di una famiglia media. Mezzo secolo fa, comprare un costumino da fatina alla cinquenne era certo un lusso per la maggioranza degli italiani, e anche per questo il periodo di carnevale metteva duramente alla prova la fantasia e l'abilità sartoriale di mamme e papà.



1 *"Carnevale in giallo", l'antologia che contiene "Costumi da tutto il mondo" di Marco Malvaldi.*

È probabilmente anche per questa ragione, e non solo per l'indubbia fama dell'eroe eponimo, che a quei tempi almeno due ragazzini su tre giravano dal Giovedì al Martedì Grasso con lo stesso, identico travestimento: quello di Zorro. In un racconto di qualche anno fa[3] di Marco Malvaldi la moltitudine di piccoli Zorro che impazzavano per le vie di paesi e città durante il carnevale diventava addirittura l'elemento cruciale della trama, tanto era comune il travestimento. Comune, e soprattutto economico: era possibile tralasciare il cavallo (Tornado) con cui l'eroe era solito muoversi, e quindi bastava vestire i bimbetti di nero, acquistare per poche lire un cappello di cartone nero (meglio se con una "Z" disegnata sopra), aggiungere una mascherina (sempre nera e sempre di cartone), e i genitori potevano limitarsi a procacciare una spadina e un pezzo di federa nera, che sarebbe poi stata trionfalmente adattata a mantello. Era davvero difficile raccapezzare un costume meno caro e altrettanto apprezzato dai ragazzini: certo, magari avrebbero preferito vestirsi da astronauta o da Buffalo Bill, ma Zorro era comunque sempre un ottimo ripiego.

Erano i tempi in cui don Diego De La Vega (l'identità segreta di Zorro) era noto a tutti: la colpa era di una serie televisiva della Disney che andava in onda sulle italiche televisioni in bianco e nero degli Anni Sessanta: l'eroe era interpretato da Guy Williams, attore che tutti gli spettatori erano in grado di riconoscere ma che certo non avevano mai visto al di fuori di quei telefilm. Come sempre accadeva nell'età eroica in cui l'intrattenimento visivo era limitato a rare visioni di film al cinema e ai due canali televisivi della RAI, ogni personaggio che aveva la ventura di comparire sul piccolo schermo diventava istantaneamente un protagonista dell'immaginario collettivo. Tutti conoscevano non solo Zorro (e una delle domande più frequenti che si facevano i ragazzini era proprio "Ma lo sai che cosa vuol dire "*zorro*" in spagnolo?", e non c'era quasi nessuno che non sapesse rispondere "Volpe!"), ma anche i comprimari: il nobile papà di Diego/Zorro, don Alejandro; la bella Lolita Pulido, che respingeva spietatamente le avances di Diego perché

[3] "*Costumi di tutto il mondo*", nell'antologia "*Carnevale in giallo*", di AA.VV. – Sellerio, 2014.

perdutamente innamorata di Zorro (cosa che sconvolgeva e divertiva i giovani telespettatori), il fedelissimo aiutante muto Bernardo, che spesso riesce a salvare situazioni disperate, e soprattutto il grasso sergente Garcia, quasi un controcanto di Lolita: buffo e brutto quanto lei è bella, grande amico di don Diego De La Vega quanto destinato a dare la caccia al fantomatico Zorro. Se c'era una cosa sicura in ogni episodio, era che Garcia avrebbe avuto una parte di vestiario colpita tre volte dalla punta del fioretto[4] di Zorro, e che i tre tagli avrebbero formato una "Z".

In un certo senso, l'indomito Zorro può quasi essere considerato uno dei primi spin-off della storia: il personaggio compare infatti come comprimario nel romanzo "*La maledizione di Capistrano*" di Johnston McCulley del 1919, ma fa presto a diventare indiscusso protagonista. Prima e dopo della serie di telefilm della Walt Disney, Zorro ha imperato anche sui grandi schermi delle produzioni hollywoodiane: Wikipedia elenca una quarantina di film, il primo dei quali è "*Il segno di Zorro*" del 1920, con Douglas Fairbanks, attore che dette al personaggio fama immortale e ne ricevette in cambio quasi altrettanta come indiscussa star dei film d'azione (ma a quel tempo si chiamavano al massimo "film d'avventura"). Dopo Fairbanks ci sarà un esercito di attori a vestire il nero e fluente mantello, tra i quali spiccano nomi celebri come Tyrone Power, Alain Delon, Anthony Hopkins e Antonio Banderas; ma la fama del personaggio si capisce meglio leggendo i titoli delle decine di film minori, produzioni a basso costo e parodie: si trovano perle come "*Zorro Marchese di Navarra*", "*Zorro alla corte d'Inghilterra*", "*Le galanti avventure di Zorro*", "*Zorro e i tre moschettieri*", fino a inimmaginabili congiunture come "*Zorro contro Maciste*"[5].

2 *La nascita di Zorro.*

Per quanto celeberrimo, non erano in fondo molti a chiedersi come mai l'americanissima Hollywood, per non parlare dell'ancora più americana Walt Disney, celebrassero con tanta enfasi un'epopea che statunitense non sembrava affatto, piena com'era di atmosfera spagnoleggiante ben lontana dai tradizionali (e soprattutto anglofoni) pistoleri del Far West o detective newyorkesi. Erano tempi in cui era ancora ben vivo il ricordo della devastante guerra mondiale, e tutti i media delle varie nazioni tendevano per lo più o mostrare eroi originari del suolo patrio. Se si fosse fatto un sondaggio tra i ragazzini (e non solo ragazzini) italiani che non perdevano una puntata del telefilm chiedendo loro quale fosse il posto in cui erano ambientate le avventure di Zorro, probabilmente le risposte si sarebbero divise tra Spagna e Messico, forse con una leggera predominanza di quest'ultimo. Solo pochi fan particolarmente attenti – perché in fondo, nel telefilm la città di ambientazione era spesso nominata – avrebbero risposto correttamente "Los Angeles".

Bastava farci caso, e tutto tornava: Los Angeles non solo è la seconda città più grande degli USA, ma è proprio la città che ospita Hollywood, e gli *studios* californiani che girano le

[4] In realtà, la spada di Zorro non è affatto un fioretto, ma una "*striscia*" ("*rapiére*" in francese, "*rapier*" in inglese, "*ropera*" in spagnolo). Spada lunga e sottile, con elsa bella ed elaborata, a doppio filo per poter essere usata anche come arma da taglio, pur restando principalmente una spada da affondo. È detta anche "spada all'italiana", perché pare fosse particolarmente prediletta dagli spadaccini nostrani, oltre che da Zorro.

[5] Va riconosciuto che, in questo caso, è probabile che il colpevole della strana unione sia verosimilmente più Maciste che Zorro, perché Maciste ha una filmografia assai più strana e interessante di quella, pur notevolissima, di Zorro. La nascita e lo sviluppo stesso del personaggio Maciste è particolarmente curiosa, ma questa nota a margine ha il margine troppo stretto per contenerla.

avventure dell'eroe mascherato non celebrano soltanto un eroe nazionale, ma addirittura un mito cittadino. L'informazione poteva sorprendere molti dei seguaci internazionali di Zorro, ma si tratta di sorpresa ben comprensibile: se è vero che gli americani prendono spesso delle cantonate mirabili se interrogati sulla storia o sulla geografia europee, va riconosciuto che anche l'immagine che gli europei hanno della storia degli Stati Uniti è abbastanza approssimativa. Spesso si riduce a ricordare che alcuni Padri Pellegrini inglesi sono arrivati sulla costa atlantica, hanno fondato tredici colonie e poi hanno cominciato a costruire una ferrovia diretta a ovest: dopo una complicata guerra fratricida hanno fatto la pace e hanno completato la formazione del paese che poi ha vinto due guerre mondiali ed è diventato il più potente del mondo.

3 *Quando gran parte del Nordamerica era spagnolo*

È ovviamente un'esagerazione, ma è anche vero che – poiché la conoscenza degli USA all'estero è in gran parte dovuta alle produzioni cinematografiche e televisive della seconda metà del Novecento – questa ha trascurato moltissimo buona parte della storia statunitense. I nativi americani sono stati raccontati parecchio solo come gli "indiani" dei film sul Far West, e la questione dei milioni di neri portati in America è inizialmente trattata solo come per dipingere un po' la distanza tra il Nord e il Sud del paese durante la Guerra di Secessione. Ma è restata, e resta tuttora quasi del tutto assente la storia di tutta la fascia centrale del paese, inizialmente francese, delle immigrazioni tedesche, irlandesi, cinesi, e soprattutto di tutto quel pezzo del Nordamerica che è stato a lungo spagnolo. E sì che nomi come California, Nevada, Florida si sente bene che hanno una radice assai poco anglosassone[6].

Del resto, la California fa parte degli USA solo dal 1850, e a ben vedere c'è tutta una parte di territorio con cui condivide il nome ma non la nazionalità: la grande e lunghissima penisola adagiata sul Pacifico della "Baja California" è tuttora messicana. La prima avventura di Zorro è cronologicamente situata nel 1820, quando Los Angeles e la California non sono ancora statunitensi: ed è pertanto gioco facile per gli sceneggiatori costruire un eroe ribelle e rivoluzionario che combatte governo, tirannide e istituzioni, titillando l'orgoglio nazionalistico della repubblica federale che, da lì a poco, ingloberà Los Angeles e buona parte della costa nordamericana del Pacifico[7].

Agli occhi degli adolescenti italiani di quegli anni era ancora difficile associare qualcosa di "americano" – nel senso colloquiale di "statunitense" – a qualcos'altro che parlasse spagnolo. Lo spagnolo era meno esotico, era una lingua che più o meno si riusciva a capire, mentre i nomi americani erano tutta un'altra roba. Sembrava tutto più familiare, con lo spagnolo, a cominciare dai nomi: alla fin fine, la città stessa di San Francisco era dedicata persino a un santo italiano, per quanto famosissimo; e se era evidente perfino in inglese che Los Angeles avesse qualcosa a che fare con gli "angeli", era facile prendersi la rivincita sciovinista scoprendo il nome completo della città: "*El Pueblo de Nuestra Señora la Reina*

[6] Ma non necessariamente spagnola: se per "Nevada" e "Florida" ci sono ben pochi dubbi, il nome "California" è ben più complesso da risolvere etimologicamente.

[7] La storia è sempre cosa complicata da sintetizzare, si lasciano sempre per strada un sacco di elementi cruciali. Tanto per tornare un po' con i piedi per terra, ricordiamo solo che gli USA strappano al Messico la California non per merito di Zorro ma con una guerra (durante la quale assediarono la città di Los Angeles), e che solo qualche anno prima il Messico si era reso indipendente dalla Spagna tramite un'altra sanguinosa guerricciola.

Virgen de los Ángeles del Río de la Porciúncula de Asís"[8]; per un umbro[9], poi, tutto l'esotismo lasciava immantinente posto a una sorta di orgoglio campanilistico transcontinentale.

Il chilometrico nome completo di Los Angeles finisce di diritto all'interno del Guinness dei primati: certo non come toponimo più lungo (c'è un famoso villaggio gallese che ha un nome di una sola parola lunga 55 lettere, e una collina neozelandese che arriva a 85, ma ci rifiutiamo di trascriverli entrambi) ma come abbreviazione più efficiente. Los Angeles è infatti ormai chiamata dalla maggioranza delle persone con la brevissima sigla "L.A.", così che la performance abbreviativa è davvero di tutto rispetto: due sole lettere al posto di 75, insomma una sintesi pari al 2,6%[10]. Se l'abbreviazione dovesse prendere definitivamente (e ufficialmente) piede, Los Angeles potrebbe aspirare ad un altro nuovo record, quella della città più grande con un codice aeroportuale più lungo del nome della città servita.

4 *Codici aeroportuali di buon augurio.*

Tutti gli aeroporti hanno un codice – proprio quello che finisce sulle etichette che vengono incollate sulle valigie imbarcate – e il codice più diffuso è quello IATA di tre caratteri, anche se non è l'unico. I codici aeroportuali sono un labirinto in cui è assai difficile districarsi: anche se in alcuni casi è del tutto evidente che ci si è limitati a prendere le prime lettere della città servita dall'aeroporto (MIL per Milano Linate, NAP per Napoli Capodichino, etc.), in altri casi il codice proviene dalla località precisa dell'aeroporto (FCO per Roma Fiumicino). Tre lettere sono comunque poche, e a volte è necessario adattarsi: probabilmente è per questo che Torino Caselle ha rinunciato a TOR ripiegando, con il metodo reso comune dai nostri codici fiscali, su TRN: probabilmente Torrington (Wyoming, USA) è arrivata prima. Ma spesso le cose sono complicate in maniera non così facilmente prevedibile specie in una nazione come gli USA, che l'aeroplano lo hanno inventato e lo usano più spesso di quanto gli italiani usino la pastasciutta. Orizzontarsi all'interno dei codici aeroportuali americani è oggettivamente difficile, anche perché alcune lettere iniziali sono riservate: ad un certo punto, la marina statunitense ottenne di avere tutti i codici ancora liberi per suo uso e consumo, riservandosi così tutte le sigle che iniziassero per "N" ("Navy")[11]. Dal canto loro, i canadesi ottennero di identificare internazionalmente i propri aeroporti occupando la lettera iniziale "Y" (e infatti Toronto non fa concorrenza a Torino né a Torrington: la sua sigla è YTO; sempre più comprensibile, comunque, della YUL di Montreal), e altre lettere iniziali furono ancora riservate a gruppi speciali, come la "W" o la "K". Questo ha generato scelte anche ragionevoli, ma non troppo intuitive: Norfolk, non potendo più chiamarsi NOR, ha fatto cader la "N" e proseguito con la quarta lettera del suo nome, diventando ORF; la stessa scelta è stata fatta da Key West, che è diventata EYW, e da Wilmington, che si identifica con ILM. Altri aeroporti hanno fatte scelte diverse: Kansas City, nel Missouri, avrebbe tanto voluto chiamarsi proprio KCM (Kansas City, Missouri), ma l'impossibilità di

[8] Ovvero "la città di Nostra Signora la Vergine Regina degli Angeli del fiume della Porziuncola di Assisi". La Porziuncola (così chiamata perché costruita su una piccola "porzione" di terreno del monte Subasio) è la chiesetta dove san Francesco scoprì la sua vocazione. La chiesa – restaurata dal santo stesso – si trova adesso all'interno d'una grande basilica che si chiama – tanto per chiudere il balletto dei nomi che saltano tra Umbria e California – Santa Maria degli Angeli.

[9] Com'è per nascita l'autore di questo articolo, anche se non di Assisi.

[10] Il sito online del Guinness abbassa la prestazione al 3,6%, perché considera la "versione corta" del nome ufficiale di L.A., che è pari a quello riportato con l'esclusione dei termini "Virgen", "del Rio" e "de Asis". Il punto è che il nome "ufficiale" di Los Angeles ha diverse versioni e varie storie: quello riportato nell'articolo è quello che ha il conforto di Wikipedia, ma esistono versioni "storiche" ancora più lunghe.

[11] NYC, per New York City, era ovviamente uno dei codici già attribuiti prima che la Navy facesse l'asso pigliatutto.

iniziare con la “K” l’ha fatta cambiare in MKC (Missouri, Kansas City). Ma è impossibile arrivare a trovare tutte le ragioni di ogni codice aeroportuale: in alcuni casi si prende il “nome” dell’aeroporto (esempio evidente: JFK per il John Fitzgerald Kennedy di New York) e certe volte si arriva quasi all’afflato poetico: anche il campetto sabbioso di Kitty Hawk, dove i fratelli Wright alzarono per la prima volta in volo un oggetto più pesante dell’aria, ha un codice ufficiale: FFA, ovvero *First Flight Airport*.

Ormai tre lettere si stanno rivelando del tutto insufficienti per classificare globalmente tutti gli aeroporti del pianeta, e esistono già codifiche che ne standardizzano quattro o più. Un tempo, però, quando negli Stati Uniti gli aeroplani erano rari, la prima codifica degli aeroporti utilizzava solo due lettere: quando si decise di passare a tre, qualche pragmatico burocrate suggerì di mantenere la codifica a due lettere per gli aeroporti già esistenti limitandosi ad aggiungere una “X” come terzo carattere. Per questa ragione Portland (PD) passò a PDX, Phoenix (PH) a PHX e, ovviamente, il già attivo aeroporto di Los Angeles divenne universalmente noto come LAX, cosa che finalmente ci consente di parlare di matematica e della protagonista di questo compleanno.

5 *Anneli Cahn Lax (no, non è una modella: è una matematica)*

Quando Anneli nasce a Katowice il 23 Febbraio del 1922, nessuno poteva immaginare una qualsivoglia connessione tra la bimbetta appena nata e l’aeroporto di Los Angeles. L’America era lontanissima dai pensieri di tutti, anche perché l’infanzia di Anneli si srotola in anni decisamente complicati; complicati perfino dalla storia e dalla geografia, non solo dai soliti affanni degli esseri umani. La città di nascita, per esempio: Katowice è oggi città pienamente polacca ed europea, ma come spesso è accaduto in quelle zone dell’Europa Centrale, nomi e confini sono spesso volatili e saltuari. La stessa regione di Katowice è quasi un simbolo dei terremoti storici causati dall’incontro di tre potenze: la Slesia è infatti incastrata tra Germania, Polonia e Cechia (e quindi dell’impero controllato dall’Austria), ed è oggettivamente complicato cercare di ricostruire popolazioni etnie. Gli Asburgo entrano in possesso della Slesia già alla fine del Medioevo, strappandola alla Polonia di re Casimiro III, e la tengono integrandola nel Sacro Romano Impero, che era già diventato praticamente un impero essenzialmente asburgico.

6 *L’Alta Slesia dopo l’invasione del 1939*

Nel Settecento, però, compare e cresce velocemente la potenza prussiana, soprattutto grazie a Federico il Grande, che senza troppi complimenti si impadronisce della Slesia con grande scorno della grande Maria Teresa d’Austria, e incredibilmente riesce a mantenerne il possesso. La Slesia stessa è regione complicata di suo, visto che è abitata da tedeschi, polacchi ed ebrei, e suddivisa amministrativamente in Alta Slesia, Media Slesia e Bassa Slesia; al punto che, quando dopo la prima guerra mondiale l’Alta Slesia viene assegnata alla Germania, una parte di essa rimane semi-indipendente costituendo il “Voivodato della Slesia”. “Voivodato” significa più o meno “provincia autonoma”, e probabilmente “autonoma” significava che – a valle del plebiscito del 1921 – gli abitanti stessi facevano fatica a capire se dovevano considerarsi ancora tedeschi o ufficialmente polacchi, al punto che Katowice (o

Katowicy, o *Kattowitz,* o *Katevits,* o *Katovice*, a seconda della lingua preferita dai vari gruppi dei suoi abitanti), al momento della nascita di Anneli nel 1922, è definita come tedesca da alcune fonti e polacca da altre.

È anche difficile[12] risalire a quale fosse l'etnia della famiglia Cahn; non aiuta neppure il nome proprio "Anneli" perché, pur essendo assai caratterizzato geograficamente, è originario di regioni diverse: Anneli è nome assai diffuso in Finlandia, frequente in Svezia e relativamente usato anche in Estonia e Norvegia. Ma c'è di bello che le etnie contano solo fino a un certo punto – anzi quasi niente – e la sola cosa significativa, in fondo, è che quale che fosse l'etnia, la religione o il credo politico della famiglia di Anneli Cahn, per lungo tempo i componenti di questa famiglia saltarono a lungo da una città all'altra, cercando di evitare i nazisti, finché nel 1935 optarono per scappare definitivamente in America.

L'ultima città europea dove Anneli Cahn abita è proprio Berlino, il cuore della Germania di Hitler. È una tredicenne, ha appena iniziato il liceo quando è già tempo di scappare: ma, anche se così giovane, ha già capito di avere una passione chiara per la matematica, la geometria euclidea in particolare; in seguito, spiegherà questa sua dedizione con la prima citazione messa in testa a quest'articolo. La seconda citazione non è invece sua, ma del suo professore al liceo berlinese, e ha proprio il tono accorato di un insegnante che, pur conoscendo bene le difficoltà e le precarietà di quegli anni, è preoccupato che un talento come quello di Anneli possa andare sprecato.

Il resto della vita della piccola Cahn è pienamente statunitense: arriva a New York e lì abiterà, studierà e lavorerà per gli anni della sua giovinezza. Mantiene la passione per la geometria, comincia a scoprire i segreti dell'algebra (che inizialmente apprezzerà assai di meno, proprio perché più difficile da visualizzare) e prende il suo primo alloro accademico all'Università Adelphi (università privata situata a Long Island) da ventenne, nel 1942. Comincerà poi a lavorare alla NYU, New York University, ed è proprio qui, in un'aula o forse nella caffetteria di quell'ateneo, che incontrerà Peter.

7 Peter David Lax

Con il senno di poi, è abbastanza facile asserire che Peter Lax è uno dei maggiori matematici a cavallo tra XX e XXI secolo. E forse era già abbastanza immaginabile anche quando incontra Anneli nella caffetteria di NYU, anche se in quel 1947 era ancora solo un ricciolutoventunenne. Sono però già molte le cose che Peter e Anneli hanno in comune, oltre alla New York University e l'amore per la matematica: anche Peter è un figlio della Mitteleuropa (è nato a Budapest il 1° Maggio 1926), e anche lui è dovuto scappare dall'ideologia nazista verso l'America quando era ancora un adolescente, nel 1941, a soli quindici anni di età. Quindici anni sono davvero pochi, ma che Peter fosse eccezionale era già chiaro: la sua famiglia scappa in America appena in tempo, verso la fine di Novembre 1941. L'attacco giapponese a Pearl Harbour che causerà l'entrata in guerra degli USA arriva circa una settimana più tardi, e a quel punto la madrepatria e la patria adottiva di Peter sono ufficialmente in guerra una contro l'altra. Ciò non di meno, e nonostante la giovane età, Peter Lax riceve quasi subito,

[12] "Difficile" per noi, che siamo notoriamente dilettanti cialtroneschi: non dubitiamo che seri professionisti di storia o di storia della matematica sappiano facilmente risalire alle origini etniche della nostra protagonista: noi, semplicemente, non ci siamo riusciti.

appena arrivato, la visita nientepopodimeno che di Von Neumann[13], al quale era stato raccomandato dal suo insegnante di Budapest, Denes König[14]. Anche lui non fa in tempo ad arrivare che è già destinato a diventare "americano" a tutti gli effetti: i due anni tra il 1945 e il 1946 (ovvero prima ancora di arrivare a vent'anni d'età) lo vedono già impegnato al lavoro a Los Alamos, insieme a tutti gli altri scienziati impegnati nel Progetto Manhattan.

Quando torna a New York, alla NYU, non ci metterà molto a diventare professore associato e a tenere lezioni: accadrà nel 1951, ma a quell'epoca sarà diventato il marito di Anneli già da tre anni, i due si sposano nel 1948. Da lì in avanti, Peter non farà altro che matematica, e a livelli stratosferici. È difficile immaginare come possa figurare il suo curriculum, ammesso e non concesso che ne conservi – o abbia bisogno di conservarne – uno. È membro di almeno una decina di Accademie delle Scienze in ogni parte del globo; ha una decina di lauree ad honorem attribuitegli da alcune delle più prestigiose università del mondo; ha una quantità di premi e riconoscimenti, tra cui spiccano la Medaglia Nazionale per la Scienza (1986), il Premio Wolf (1987) e il più ricco dei premi matematici, il Premio Abel del 2005. Se ci soffermiamo sui premi non è per mancanza di informazioni in merito alle sue ricerche teoriche (ci sono almeno una mezza dozzina di teoremi che prendono il suo nome), ma perché ci sembra parecchio significativo che esista perfino un importante premio internazionale di cui è nume tutelare, visto che si chiama "Peter Lax Award": è un premio per giovani matematici che si occupano di equazioni iperboliche, e nel 2021 è stato vinto da una brillante matematica italiana, Maria Colombo. Insomma, tornando al palmares di Lax, sembra di essere di fronte a uno di quei rari casi in cui viene da chiedersi se l'assenza della Medaglia Fields sia più una sua mancanza o un errore dei designatori della giuria dell'IMU, l'Unione Matematica Internazionale.

8 *Anneli e Peter.*

E Anneli? Si bea della gloria del marito, ne prende il cognome, sforna figli e si gode la vita casalinga, mettendo da parte la matematica? Ma neanche per idea…

O, perlomeno, non del tutto: perché è certo vero che ad Anneli faccia piacere la gloria del consorte; è indubbio che il cognome Lax le piaccia molto, e lo userà regolarmente; è certo verissimo che di pargoli ne sforna un paio (John nel 1950 e James nel 1954), ma in quanto al resto, beh… non ci siamo proprio. Tra una gravidanza e l'altra non trascura studio e lavoro, e nel 1955 si prende un brillantissimo Ph.D. sotto la guida di Richard Courant[15], mostro sacro della NYU e celebre coautore di "*What is Mathematics*?".

[13] RM107, Dicembre 2007, "*Dottor Stranamore*".

[14] Non esattamente un "signor nessuno": è stato il primo a pubblicare un libro di testo sulla Teoria dei Grafi. Forse doveva lasciare Budapest anche lui: si suicida nel 1944, quando a Budapest essere ebreo era diventato davvero impossibile.

[15] RM172, Gennaio 2012, "*Estetica del sarchiapone*".

9 *Anneli.*

Anneli è molto brava, in matematica. Anneli ha dimostrato di essere una validissima ricercatrice, lavorando insieme a Courant, che è uno scienziato assai brillante e molto difficile da accontentare. Però, nonostante tutto, Anneli sembra insoddisfatta delle sue attività di ricercatrice. Forse perché c'è tanta ricerca di altissimo livello sia al lavoro con Courant sia a casa con Peter, o forse – assai più probabilmente – perché capisce di essere ancora più brava in attività che pochi amano fare, e che a lei riescono benissimo, e piacciono molto. Durante i dodici anni di ricerca fatta insieme a Richard Courant, Anneli Lax si è dedicata a tradurre in inglese alcuni libri del suo capo (Courant era tedesco), e scopre che il lavoro di editor le piace moltissimo. A differenza di quasi tutti i matematici, soprattutto se americani, Anneli è particolarmente dotata per le lingue ed è bravissima nell'usare le parole per spiegare la matematica, cosa che ai grandi ricercatori riesce invece assai poco. In fondo, è ancora oggi una dote rara: i creatori di teoremi sono spesso in difficoltà nel renderli comprensibili, e per chiudere il gap esistente tra l'alta matematica e la sua divulgazione – intendendo con questo termine non nel significato di "spiegazione all'uomo della strada", ma a un pubblico di pari e studenti universitari – occorre anche un'ampia cultura matematica d'alto livello. È un mix di competenze assai raro, e Anneli ce l'ha tutto. È anche un'attività davvero necessaria, perché la letteratura matematica soffre da tempo di questa grave malattia, la difficoltà nell'essere ben compresa, perché sempre esposta in maniera troppo poco chiara.

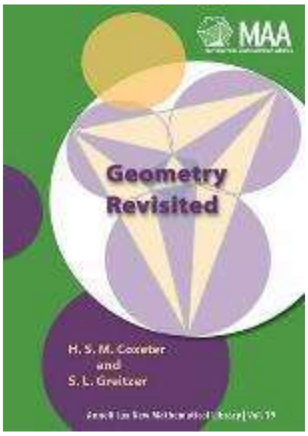
Paradossalmente, a dare un'ulteriore spinta alla nuova missione di Anneli Lax sono i sovietici: nel 1957, lo Sputnik fa ben presente a tutta l'America, non solo agli addetti ai lavori, che una ampia, diffusa, chiara e completa letteratura scientifica e matematica è davvero necessaria, per non essere superati sul piano tecnologico da quella di Mosca. Sull'onda di quella preoccupante emozione, si formano diversi consorzi di insegnanti ed esperti in ogni campo della scienza, e per la matematica il ruolo è coperto dallo "*School Mathematics Study Group*", e la prima raccomandazione del consorzio è di formare al più presto una "New Mathematical Library" (NML) che aveva l'esplicita intenzione di far arrivare le scoperte dei ricercatori di matematica agli studenti interessati e anche, più in generale, al grande pubblico. Una collana di divulgazione di buon livello, insomma, come peraltro erano già diffuse nei paesi dell'Europa Orientale legati al Patto di Varsavia.

Anneli Lax viene chiamata a dirigere la collana, ed è perfetta per il ruolo. Ama rendere la matematica comprensibile e sono davvero tante le testimonianze che indugiano sulla sua eccezionale capacità non solo di divulgare, ma anche di educare, insegnare, istruire. La New Mathematical Library è probabilmente la sua creazione più grande e duratura, e le sopravvive ancora oggi, un quarto di secolo dopo la sua morte avvenuta nel 1999. Del resto, dove trovare una persona migliore? Mark Saul, in un articolo a lei dedicato sul numero 7 del 47° volume delle "Notices of AMS[16]", racconta quanto accadde durante l'editing di un volume della collana intitolato "*An Introduction to Inequalities*", scritto da due ricercatori, Edwin Beckenbach e Richard Bellman. L'ultimo capitolo del libro fu scritto interamente da Anneli Lax, senza informare nessuno dei due autori: il libro uscì senza che Beckenback e Bellman dicessero una parola, perché ognuno era convinto che l'avesse scritto l'altro.

Era solo la punta dell'iceberg delle attività di Anneli Lax in favore della divulgazione e della didattica della matematica: organizzò lezioni e corsi destinati a insegnanti di matematica e di lingua inglese, naturalmente tutti insieme nella stessa classe, di modo che

[16] American Mathematical Society.

gli insegnanti di lingua perdessero il timore reverenziale che avevano nel parlare di concetti matematici, e quelli di matematica imparassero i modi migliori per comunicare in maniera chiara ed efficace i concetti matematica.



10 *Un volume della "Anneli Lax New Mathematical Library".*

In vita, ricevette onorificenze, premi, e soprattutto la stima incondizionata di tutte le persone che avevano l'opportunità di conoscerla. Ricevette anche una laura ad honorem in pedagogia, ma siamo certi che la cosa che le farebbe più piacere sapere è che la sua New Mathematical Library continua le pubblicazioni, e che adesso si chiama "Anneli Lax New Mathematical Library".

2. Problemi

2.1 Non finiscono mai...

...e per fortuna. Sì, stiamo parlando di rotoli, ma di *calcolatrice*. In alcuni oscuri recessi dell'azienda per la quale abbiamo lavorato molti anni fa e che l'azienda per la quale lavoriamo ora occupa (Rudy è una delle poche persone che è riuscita a cambiare più aziende senza mai cambiare parcheggio aziendale), abbiamo trovato una scorta praticamente infinita dei suddetti. E quindi abbiamo cominciato a giocare.

In particolare, ne abbiamo trovato uno della larghezza di un'unità e della lunghezza di 1024 unità; colpiti dalla singolare coincidenza, per prima cosa abbiamo disteso l'intero rotolo (nessun collega ha avuto nulla da ridire: sanno che Rudy, in certi momenti, può essere molto pericoloso) e abbiamo numerato tutti i quadratini da sinistra a destra da 1 a 1024. Successivamente, abbiamo preso l'estremo destro e lo abbiamo portato a sinistra, piegando la striscia a metà (e ottenendo una striscia spessa il doppio lunga 512); e poi abbiamo ripetuto il processo, piegando sempre da destra verso sinistra, sino ad ottenere una colonna di quadrati unitari (alta 1024: OK, non cominciate a fare i pignoli sull'impossibilità di piegare una cosa del genere. Era la stessa cosa che pensavano i colleghi di Rudy, sin quando lui non li ha guardati).

Felici del risultato raggiunto, cominciate a porvi delle domande: ad esempio, quanti quadrati (intesi come parti di foglio a due facce, una numerata e l'altra no) ci siano *sotto* il quadrato con scritto sopra il numero 942 (...certo che siete dei tipi ben strani... perché proprio 942? Beh, se non vi piace, potete generalizzare per un qualsiasi n. E giacché ci siete, per un qualsiasi nastro di calcolatrice lungo una qualsiasi potenza di due. E anche piegarlo una volta da una parte e una volta dall'altra. Contenti?). Solo una nota per i pignoli: quello "sotto tutti" è numerato "1". Ma la cosa non dovrebbe essere molto importante.

...tornando a quello che *non* era l'argomento di questo pezzo: ma qualcuno li ha mai contati, gli strappi in *quegli altri* rotoloni? Come suggerisce indirettamente la pubbicità, "Don't try at home!".

2.2 L'amico di due vecchi amici

Rudy è il felice possessore di due cubi di Rubik "della prima ora", uno originale e l'altro no[17]; quelli che non gli sono mai stati eccessivamente simpatici sono i "cuboni", da cinque cubetti per lato; tempo fa era stato tentato di comprarne uno, ma poi si è reso conto che lo avrebbe fatto solo per smontarlo e vedere "com'era fatto dentro", e ci ha rinunciato[18].

A quanto pare, qualche ingegnere che aveva fumato della roba decisamente buona è riuscito a costruire un cubo 11×11×11 (tre, cinque, undici... che ci sia un motivo, che sono tutti primi? E perché manca il sette?), e oggi consideriamo questo.

Vi ricordate la mossa "fetta", del 3-cubo? In pratica, prendete il cubo a due mani, una di fronte all'altra (ad esempio, la sinistra sulla faccia verde e la destra sulla faccia blu); poi con la sinistra (vi ricordate, vero, che Rudy è mancino?) ruotate le due "fette" sulla sinistra del cubo in avanti e poi ruotate la *sola fetta più a sinistra all'indietro*. Questo fa sì che alla fine abbiate solo la "fetta" centrale ruotata in avanti[19]; non l'abbiamo detto, ma tutte le rotazioni sono a 90°.

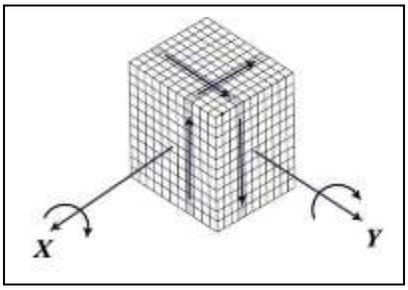
Ecco, pensiamo ad una cosa del genere sull'undici di cui sopra, in modo tale che solo una singola "fettina" venga ruotata. Ma prima cerchiamo di definire un po' di notazioni.

[17] Nel caso vi chiediate dove sta la differenza: il cubo originale aveva una faccia viola, che nelle imitazioni era sostituita da una faccia arancione. Questa peculiarità poi si è persa, ma all'epoca gli "arancioni" (e i loro possessori) venivano guardati con disprezzo dagli "ungari puri".

[18] ...ma è rimasto con la curiosità. Qualcuno ha uno schemino?

[19] I più scafati cubologi riconosceranno la mossa che, ripetuta due volte per ciascuna di tre facce contigue, genera il "Pons Asinorum".

Forse una figura aiuta. La trovate in teoria qui di fianco.



11 *Tutto più chiaro, adesso?*

In pratica, definiamo la "mossa fetta n su X" come l'impugnare la faccia da cui esce l'asse X (e l'opposta) ed effettuare una mossa fetta che porti a ruotare di 90° in avanti solo l'n-esima fetta; in figura, vedete indicato il risultato. Analogamente, definiamo la "mossa fetta m su Y", e anche questa la trovate indicata.

Partiamo da un cubo "risolto" (non sapete risolverlo? Male. OK, per voi è un cubo "nuovo"), e applichiamo ripetutamente e ordinatamente queste mosse: prima la fetta n su X, poi la fetta m su Y, poi la fetta n su X, eccetera. La domanda è: quante "coppie di mosse" dovete fare, per ritornare allo stato "risolto" (o "nuovo")?

Adesso però, appassionati dalla cubomatica, non dimenticate che a Rudy interessa anche il meccanismo, almeno del "cinque"... Basta un link, grazie.

3. Bungee Jumpers

In un cappello sono messi dieci biglietti riportanti le cifre da zero a nove. Uno per volta, cinque biglietti vengono estratti, e vengono utilizzati nell'ordine di estrazione per formare un numero (dalla cifra più significativa alla meno significativa). Qual è la probabilità che il numero ottenuto sia divisibile per 495?

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Febbraio!

A gennaio abbiamo saltato la rubrica, per cui c'è molto da farvi vedere, diamoci da fare.

4.1 [287]

4.1.1 Non è "Uno di quelli"

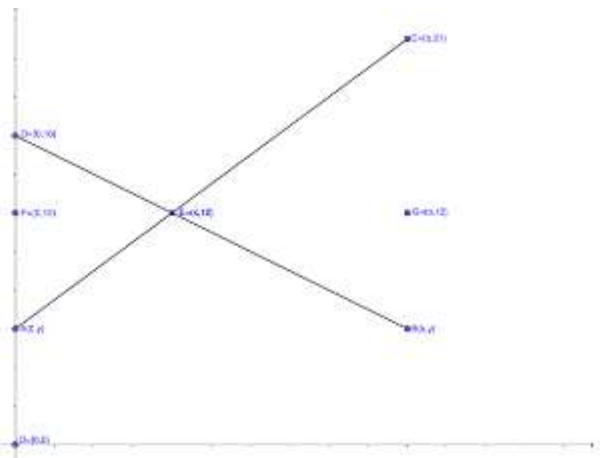
Un bel problema logistico:

> *Rudy e Doc partono all'alba rispettivamente da A verso B e da B verso A, lungo la medesima strada entrambi a velocità costante. A mezzogiorno si incrociano, Rudy arriva nel punto B alle quattro del pomeriggio, mentre Doc arriva nel punto A alle nove di sera. A che ora è sorto il Sole?*

Tutti (tranne il correttore di bozze, responsabile anche di queste note, e che si deve cospargere il capo di cenere…) si sono accorti che A e B erano scambiati nel testo, ma siamo relativamente certi che si capiva che i nostri non tornavano al punto di partenza.

Partiamo quindi, con ***Valter***:

> Ho messo le informazioni su un sistema di assi cartesiani ortogonali:



- in ascissa riporto le posizioni di partenza di A e di B, in metri
- in ordinata le ore: di partenza=y, incrocio=12 e arrivo=16 e 21
- assumo che A parta in posizione zero e che B gli sia distante b
- x è la distanza che ha coperto A, nel momento in cui incrocia B
- y è l'ora di partenza richiesta, cioè di quando è sorto il sole
- le due coppie di triangoli DEF/BEG e AEF/CEG, sono simili fra loro
- da cui le equazioni:$(16–12)/x=(12–y)/(b–x)$, $x/(12–y)=(b–x)/(21–12)$
- moltiplicando i loro due membri e poi semplificando ho: $(12–y)^2=36$
- da ciò ricavo che il sole è sorto alle $y=6$ e quindi $b=(5/2)x$
- le velocità di A e B sono: x/y e $(b–x)/y$, con $y=6$ e $b=(5/2)x$
- sostituendoli a y e b ottengo che il rapporto tra le due è 2/3.

Vediamo che cosa ha scritto ***Alberto R.***:

Sia X (al sorgere del sole) l'ora di partenza e S la distanza A-B

Rudy che viaggia alla velocità costante V1 percorre lo spazio S nel tempo 16–X, mentre Doc, alla velocità V2, impiega il tempo 21–X. Dunque

$$S = V1 \cdot (16–X)$$

$$S = V2 \cdot (21–X)$$

Rudy e Doc insieme, movendosi alla velocità "cumulata" V1+V2 coprono lo spazio S nel tempo 12–X. Quindi

$$S = (V1+V2) \cdot (12–X)$$

Combinando la prima equazione con la terza si ottiene

$$V2 \cdot (12–X) = 4V1$$

Combinando la seconda con la terza si ottiene

$$V1 \cdot (12–X) = 9V2$$

E moltiplicando membro a membro queste ultime due si ha

$$V1 \cdot V2 \cdot (12–X)^2 = 36 \cdot V1 \cdot V2 \text{ da cui}$$

$$\mathbf{X=6}$$

<u>Prima osservazione:</u> A prima vista il problema potrebbe apparire indeterminato perché possiamo scrivere solo 3 equazioni a fronte di 4 incognite V1, V2, S, X. Ma in realtà le incognite sono solo 3 perché il risultato non dipende da V1 e da V2 ma solo dal loro rapporto.

<u>Seconda osservazione:</u> Un pignolo (non io!) potrebbe obiettare che, salvo situazioni particolari (tipo equinozio e ugual longitudine), il sole non sorge alla stessa ora in due località diverse e la differenza potrebbe non essere trascurabile tenuto conto che

la distanza A e B è notevole, corrispondendo a molte ore di viaggio con un mezzo motorizzato (*…con un rapido lampeggio si salutano…*)

Siamo contenti della mancanza di pignoleria, vediamo la soluzione di ***Lorenzo***:

Detta x l'ora… x? No, l'ora dell'alba! La frazione del tratto AB percorsa da Doc fino a mezzogiorno è $(12 - x) / (21 - x)$, mentre la frazione percorsa da Rudy è $(12 - x) / (16 - x)$, e la somma di queste due frazioni deve essere 1. Si ottiene quindi l'equazione $x^2 - 24x + 108 = 0$, e poiché x deve essere minore di 12 la sola soluzione accettabile è $x = 6$.

Ci sembra che siano tutti d'accordo sul risultato, ma ci sembra simpatico vedere i diversi approcci. Per esempio ***Giorgio*** scrive:

Lo spazio percorso da Rudy e da Doc al momento dell'incontro è proporzionale alle rispettive velocità. Chiamo kv_1 lo spazio percorso da Rudy e kv_2 lo spazio percorso da Doc; allora dal fatto che Doc ci mette nove ore a percorrere kv_1 e Rudy viceversa impiega quattro ore a percorrere kv_2 si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{kv_1}{v_2} = 9h \\ \dfrac{kv_2}{v_1} = 4h \end{cases}$$

Da cui dividendo membro a membro si ottiene che $v_1 = \frac{3}{2} v_2$.

Quindi Rudy e Doc coprono la stessa distanza in tempi che differiscono di cinque ore e Rudy viaggia a una volta e mezza la velocità di Doc. Tramite l'inversa proporzionalità tra tempi e velocità si può dedurre che il viaggio di Doc è durato quindici ore: l'alba è quindi sorta alle 6:00 di mattina.

Ci sembra a questo punto di aver esaurito gli approcci, anche ***GaS*** risolve così:

Definiamo "M" il punto in cui Rudy e Doc si incontrano, dividiamo quindi il tragitto A→B in A→M→B e il B→A in B→M→A

Definiamo inoltre V_R la velocità di Rudy e V_D la velocità di Doc.

Basta adesso ricordare che Spazio=Velocità X Tempo per trovare tutto quello che ci serve.

Lo spazio tra A ed M è stato percorso in 4h da Rudy nel pomeriggio ed in un tempo t, incognito, da Doc nella mattinata.

Ugualmente lo spazio tra M e B è stato percorso in 9h da Doc nel pomeriggio e nello stesso tempo t, incognito, da Rudy nella mattinata.

Abbiamo quindi le 2 equazioni:

$$V_R*t=9*V_D$$
$$V_D*t=4*V_R$$

Da cui si ricava $t^2=36$ e quindi t=6h

L'alba è stata quindi 6 ore prima di mezzogiorno, quindi alle 6:00

Lo stesso approccio è proposta da ***AB***, per cui ci fermiamo qui, ma prima di andare avanti ancora un paio di commenti su una domanda non espressa nel problema, cominciando con ***Br1***:

(…) Naturalmente, tutto ciò potrebbe funzionare solo se l'*orario dell'alba* fosse lo stesso nei punti A e B; ad esempio, si potrebbe obbiettare che oggi 10 gennaio il sole è sorto ad Agrigento alle 07:20, ma solo alle 07:44 a Trieste (suppergiù sullo stesso meridiano). Mentre a Cogne (stesso parallelo di Trieste) è sorto alle 08:10…

Poiché la *Vs. Spett.le Redazione Editoriale* si suppone collocata dalle parti di Torino, si può pensare che il quesito vada fissato temporalmente nel giorno 15 maggio, quando il sole sorge lì esattamente alle 06:00 (ciò per il punto A). Per il punto B, andrebbe bene Trapani in pari data; resterebbe solo da capire come potrebbero Doc e Rudy percorrere i 1695 Km fra le due località rispettivamente in 15 e 10 ore…

Supponiamo che sia tutto possibile, nei problemi del Capo, ma aspettiamo che sia lui a darci indicazioni, anche su quello che scrive ***Galluto***:

> (…) Insomma, c'è stato un errore di sbaglio e alla fine Rudi e Doc si devono semplicemente scambiare di posto, o invece devono anche tornare al proprio punto di partenza (girandosi e ripartendo immediatamente, e senza perdere le loro rispettive velocità)?
>
> Nel dubbio risolvo tutti e due i casi.
>
> **Viaggio solo andata**: Doc va da A a B e viceversa Rudi va da B ad A
>
> Chiamo V_D e V_R le velocità di Doc e Rudi, S l'ora del Sorgere del sole (la A di Alba era già presa…), X il punto di incontro a mezzogiorno, per semplicità pongo uguale ad 1 la distanza tra A e B, e costruisco il seguente sistema di 4 equazioni in 4 incognite:
>
> $V_D * (12 – S) = X$
>
> $V_R * (12 – S) = 1 – X$
>
> $V_D * (21 – S) = 1$
>
> $V_R * (16 – S) = 1$
>
> Risolvendo il sistema trovo che le soluzioni per S sono 6 e 18, ma 18 mi porta ad un X negativo e la devo scartare; quindi:
>
> S = 6
>
> X = 2/5
>
> $V_D = 1/15$
>
> $V_R = 1/10$
>
> **Viaggio andata e ritorno**: Doc arriva a B e torna ad A e viceversa Rudi arriva ad A e torna a B
>
> Le prime due equazioni rimangono uguali, nelle seconde due l'uguaglianza è con 2 e non con 1
>
> $V_D * (12 – S) = X$
>
> $V_R * (12 – S) = 1 – X$
>
> $V_D * (21 – S) = 2$
>
> $V_R * (16 – S) = 2$
>
> Risolvo il sistema, scarto la soluzione che mi darebbe un X negativo e ottengo il seguente risultato:
>
> S = ~10 e 5 minuti
>
> X = ~4/11
>
> $V_D = \sim 2/11$
>
> $V_R = \sim 7/22$
>
> Però suggerisco che la domanda inaspettata sia: **dove avviene tutto questo** (stante che siamo al 20 Dicembre, giorno di uscita della rivista)?
>
> Nel primo caso, con il sorgere del sole alle 6, per esempio Doc e Rudi potrebbero stare a **Khartum**, in Sudan; nel secondo caso, con il sorgere alle 10 e spicci, a **Trondheim**, in Norvegia.
>
> In ambedue i casi l'Ape verde farebbe la sua gran figura.

E su questo siamo tutti d'accordo. All'ultimo momento ci ha ancora scritto ***Antonio***:

> (…) Sono rimasto meravigliato perché i vostri problemi sono tutt'altro che semplici, mentre quello a cui mi riferisco mi è sembrato molto facile. Se non ho preso un abbaglio il problema si risolve così: se x è l'ora della partenza si ha: $12–x$ sta a 4 come 9 sta a $12–x$ e quindi x=6.

Perché no? Passiamo ora al secondo problema.

4.1.2 Doc ha perso la pazienza

Il Capo si è ridotto a giocare da solo:

> *Per giocare il solitario dovete definire un numero $N \geq 3$, e quindi procurarvi una scacchiera $1\times(2N+1)$, con le caselle numerate $-N$, …, 0, …, N; all'inizio del gioco ponete N monete sulla casella indicata dallo zero. Ad ogni mossa, potete scegliere una qualsiasi casella contenente almeno tre monete e spostare due di queste di una casella verso destra e una di una casella verso sinistra. Scopo del gioco è ottenere una serie di $N-2$ caselle contigue contenenti una e una sola moneta, mentre la casella immediatamente successiva (sulla destra) a questa serie contiene le altre due monete. Per che valori di N si può vincere? Per quei valori di N, "si può" o "si deve" vincere? O sarebbe possibile giocare la versione misère, perdendo anche per quei particolari N? E, sempre per quei valori di N, quale casella contiene due monete alla fine del gioco?*

Non siamo molto preoccupati per lui, ma vediamo come è stato affrontato, come al solito partendo da un Valter poco convinto:

> Tento di rispondere, anche se le mie conclusioni "stridono un po'" con il "senso" delle domande che ci vengono poste.
> Parto dal risultato finale che il gioco vuole raggiungere e, a ritroso, individuo le possibili posizioni precedenti:
> - la penultima pozione può solo essere: N meno 4 numeri 1 in serie seguiti da una casella vuota e, poi, dal numero 4
> - dalla terzultima e a seguire: …111111032, …111110312, …111103112, …111031112, …110311112, …103111112 … e a seguire
> - si nota dalla sequenza che, solo nel caso in cui N meno 4 vale zero il gioco termina come richiestoci dal problema.
>
> Le mie risposte (sbagliate) quindi sono:
> - "Per che valori di N si può vincere?"
> solo per N=4.
> - "Per quei valori di N, "si può" o "si deve" vincere?"
> "si deve" vincere
> - "O sarebbe possibile giocare la versione misère, perdendo anche per quei particolari N?"
> no
> - "E, sempre per quei valori di N, quale casella contiene due monete alla fine del gioco?"
> la casella 1.

Chi vi scrive non ha capito niente, ma non aveva nemmeno capito il problema, quindi non è nessuna indicazione. Proviamo a vedere che cosa ne dice ***Lorenzo***:

> Si può congetturare che si tratti di un falso gioco: il giocatore è *dummy*, come si usa dire, ovvero finge di giocare, poiché in realtà – qual che sia la sua condotta – non può influire sul risultato finale, che è la riuscita per tutti e soli gli N (≥ 3) che siano potenza di 2.
>
> Ecco le configurazioni finali alle quali necessariamente si perviene, calcolate da un programma per N da 3 a 32:

N	sequenza finale	numero di partite possibili
3	0010200	1
4	000112000	1
5	00001220000	1
6	0000021120000	1
7	000000221200000	1
8	00000011111120000	5
9	0000000112111200000	15
10	000000001211111200000	146
11	00000000012211112000000	310
12	0000000000211111111200000	2439464
13	000000000002121111112000000	10218833
14	00000000000022111111112000000	
15	0000000000000222111111120000000	
16	000000000000011111111111111200000	
17	00000000000000112111111111112000000	
18	0000000000000001121111111111112000000	
19	000000000000000011221111111111120000000	
20	00000000000000000121111111111111112000000	
21	0000000000000000001212111111111111120000000	
22	000000000000000000012211111111111111120000000	
23	00000000000000000000122211111111111111200000000	
24	0000000000000000000002111111111111111111112000000	
25	000000000000000000000021121111111111111111120000000	
26	00000000000000000000000212111111111111111111120000000	
27	0000000000000000000000002122111111111111111111200000000	
28	000000000000000000000000022111111111111111111111120000000	
29	00000000000000000000000000221211111111111111111111200000000	
30	0000000000000000000000000002221111111111111111111111200000000	
31	000000000000000000000000000022221111111111111111111112000000000	
32	00000000000000000000000000001111111111111111111111111111112000000	

Se N = 2^n, la casella che alla fine contiene due monete è la (n + 2)-esima a partire da destra.

Il numero di "partite" possibili aumenta sensibilmente con N, come mostrato sopra, per N da 3 a 13 – procedere oltre è proibitivo, se si usa un personal computer!

L'unica configurazione finale che non presenta una sequenza ininterrotta di caselle occupate si ha per N = 3. Si possono notare altre regolarità nelle configurazioni finali: ad esempio, per N = 6, 12, 24 … si hanno due monete in entrambe le caselle alle estremità della sequenza di caselle occupate, mentre le intermedie contengono una sola moneta.

Interessanti anche i ragionamenti di ***Giorgio***:

Il secondo problema invece non sono riuscito a risolverlo; appunto qua alcune considerazioni, principalmente per il fatto di buttarle giù, più che per la speranza di ulteriori sviluppi: non volendo rubare tempo a voi e ai lettori, consideratele soltanto nel caso in cui non si arrivi a una definitiva soluzione.

Ho ragionato con il gioco al contrario perché mi pareva un approccio più forzante: quindi la posizione di partenza è {2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1…, 1} e l'obiettivo è riunire tutte le monete in una sola pila; le regole sono che se due caselle A, B sono in posizione [A, C, B] si possono togliere due monete da una delle due pile e una dall'altra e le si aggiungono alla pila intermedia (naturalmente a patto che alla fine ogni pila non abbia un numero negativo di monete). Le prime mosse sono obbligate: 2, 1, 1, 1, 1----> 0, 4, 0, 1, 1--> 0, 2, 3, 0, 1-->0, 2, 1, 1, 3, 0

Giochicchiando un po', nelle fasi iniziali pare emergere una strategia sulle altre: si può creare un' "onda" che raggiunge la parte opposta della disposizione di monete, ottenendo la seguente configurazione: 2, 1, 1, 1, 1…, 1, 3. Con un po' di considerazioni si può dimostrare che nel momento in cui parte un'onda è sostanzialmente indifferente farla progredire nel suo moto o fare mosse differenti (ad esempio far partire una seconda onda dalla testa delle pile); mi spiego meglio: si può dimostrare che tutte le mosse che non portano a un'immediata sconfitta possono essere fatte anche dopo che l'onda è passata. Se al termine della prima onda se ne fa partire una seconda, poi una terza, ecc.. è facile convincersi che il processo termina quando la scacchiera sarà trasformata in qualcosa di irrisolvibile (in particolare se sarà Già al termine della prima onda però si presentano due strade, in corrispondenza con le due sole mosse legali che si presentano: la seconda onda deve essere fatta partire da destra o da sinistra?

> Non ho trovato una risposta soddisfacente a questa domanda; ho deciso di far partire tutte le onde da sinistra per il fatto che a ogni iterazione cancellano il 2 e "tagliano" i bordi senza lasciare nulla indietro.
>
> I problemi però non si fermano qui: nelle fasi finali del gioco, quando le onde "erodono" tutti gli 1 in mezzo, anche le precedenti considerazioni si rompono e l'onda diventa una strategia come le altre una strategia come le altre per risolvere il gioco, quasi sicuramente non ottimale.
>
> In ogni caso ho implementato un programma che ragiona "a onde": fa ciecamente partire onde da sinistra e una volta arrivato sul bordo destro, fa il possibile per non far rimanere nessuna moneta "indietro".
>
> Lasciando progredire il programma in tempi ragionevoli è risultato che i numeri per cui è possibile risolvere il solitario sono:
>
> 4, 10, 14, 29, 40, 56, 107, 377, 964, 1801, 8573, 21856, 40786, 55715
>
> Sarebbe bello vederne uno di pattern in questi numeri, altro che essere influenzati!
>
> Naturalmente è molto probabile che altre soluzioni siano inframmezzate tra questi numeri e che possano essere risolti in altro modo. Io mi sono fermato qua…

Ma abbiamo la soluzione di ***Gas***! Eccola:

> Cominciamo a mettere qualche paletto per la risoluzione del solitario: quello in discussione è un solitario "deterministico", la configurazione finale che si avrà sulla scacchiera è infatti indipendente dalla strategia adottata dal giocatore; possono cioè essere prese strade differenti nel corso del solitario ma il risultato finale non cambia. Per ogni N, quindi, la configurazione **finale** del solitario è univoca (sia che il solitario abbia esito positivo che nel caso contrario).
>
> Nell'avanzare del solitario si possono infatti avere step in cui più caselle hanno un totale di monete pari o maggiore a 3 e quindi il giocatore potrebbe ritenere che scegliendo una casella piuttosto che un'altra il solitario prenda delle strade differenti con risultati finali differenti. Vediamo perché, invece, la strategia adottata dal giocatore è indifferente ai fini della configurazione finale; potrei sinceramente sbrigarmela con un "*per evidenti ragioni di simmetria*" (cosa verissima, secondo me) ma, come è noto, è una considerazione poco gradita a parte della redazione di RM e quindi mi adeguo ad un più corretto formalismo…; -)
>
> Consideriamo inizialmente il caso in cui due caselle abbiano rispettivamente A e B monete con A, B>2; i casi possibili sono tre:
>
> 1. tra le celle con A e B monete ci sono più di 2 celle; in questo caso è evidente che fare la mossa prima su A e poi su B è identico a fare la mossa prima su B e poi su A in quanto le mosse su A e su B non interagiscono tra di loro in nessun modo.
> 2. tra le celle con A e B monete è presente una singola cella, si ha quindi una configurazione del seguente tipo:
>
>   …x y A w B z…
>
>   In questo caso applicando la mossa prima su A e poi su B si ottengono le seguenti configurazioni:
>
>   …x (y+1) (A–3) (w+2) B z…
>
>   …x (y+1) (A–3) (w+3) (B–3) (z+2)…
>
>   applicando invece prima a B e poi ad A si ottiene
>
>   …x y A (w+1) (B–3) (z+2)…
>
>   …x (y+1) (A–3) (w+3) (B–3) (z+2)…
>
>   e le 2 configurazioni finali nei 2 casi sono identiche.
> 3. le celle con A e B monete sono adiacenti. Applicando il metodo usato nel punto precedente si riscontra, ancora una volta, che applicando le mosse prima ad

A e poi a B porta allo stesso risultato che si avrebbe applicando prima a B e poi ad A:

…x (y+1) (A–2) (B–1) (w+2) z…

Stiamo quindi lavorando con un operatore su una matrice (la mossa prevista dal solitario) che gode della proprietà "commutativa": l'ordine di applicazione delle mosse non varia la configurazione finale del solitario che è quindi indipendente da un'eventuale strategia di gioco ma dipende esclusivamente dal valore N iniziale.

Possiamo quindi rispondere velocemente a due delle domande del problema: *Per quei valori di N, "si può" o "si deve" vincere? O sarebbe possibile giocare la versione misère, perdendo anche per quei particolari N?*

Abbiamo visto che per ogni N esiste un risultato finale deterministico, se quindi N è vincente si "deve" vincere, non si può giocare una versione misère del solitario.

Detto questo, passiamo alle domande serie: per quali valori N si vince il solitario?

Abbiamo dimostrato che la configurazione finale del solitario è indipendente dall'ordine di applicazione delle mosse, questo vuol dire che possiamo caratterizzare univocamente ogni partita del solitario con il numero di mosse, M[x], che applichiamo su ogni casella x della scacchiera. Procediamo quindi a trovare, in maniera costruttiva, la forma con cui si deve presentare un solitario "risolto".

Partiamo allora dalla configurazione finale (riga inferiore in tabella) e ricerchiamo il numero di mosse (riga superiore) che abbiamo dovuto applicare su ogni casella per giungere a quella configurazione:

n° mosse	?	?	?	?	?	?	…	?	?	?	?	?	?
n° monete	…	0	0	1	1	1	….	1	1	2	0	0	…

Prima di tutto notiamo che il range della scacchiera su cui si estendono le celle con almeno una moneta ad ogni mossa o rimane invariato o aumenta di uno verso sinistra o verso destra se la mossa viene applicata, rispettivamente, alla prima cella non nulla o all'ultima non nulla. Quindi, data la configurazione finale, sono pari a 0 le mosse per tutte le caselle fino al primo 1, compreso, e dall'ultimo 2, compreso, alla fine della scacchiera:

n° mosse	0	0	0	0	A?	B?	…	Y?	Z?	0	0	0	0
n° monete	…	0	0	1	1	1	….	1	1	2	0	0	…

Chiamiamo quindi A, B, C, ..., X, Y, Z il numero di mosse per le celle rimanenti ed introduciamo adesso per comodità anche degli indici x, w per indicare l'indice delle celle nella scacchiera. Nella soluzione finale il primo 1 sarà nella cella $-x$ mentre il 2 sarà nella cella w.

Affinché la cella $-x$ abbia un 1 e la w un 2 si deve obbligatoriamente avere:

- A=1
- Z=1

n° cella	…	-x-2	-x-1	-x	-x+1	-x+2	…	w-2	w-1	w			…
n° mosse	0	0	0	0	A=1	B?	…	Y?	Z=1	0	0	0	0
n° monete	…	0	0	1	1	1	…	1	1	2	0	0	…

Concentriamoci adesso sulla parte finale/destra della scacchiera: affinché la cella (w–1) abbia 1 moneta significa che alla cella w–2 devono essere applicate 2 mosse (Y=2). A cascata all'indietro si ricava, semplice dimostrazione lasciata al lettore per esercizio, che alla cella (w–k) devono essere applicate k mosse. E questo è valido fino alla cella "0" su cui erano originariamente presenti le N monete:

n° cella	...	0	1	2	...	w-5	w-4	w-3	w-2	w-1	w	...	...
n° mosse	...	w	w-1	w-2	...	5	4	3	2	1	0	0	0
n° monete	...	1	1	1	...	1	1	1	1	1	2	0	...

In questo modo abbiamo completamente caratterizzato il numero di mosse da applicare per la casella 0 e per tutte le caselle con indice positivo.

Concentriamoci adesso sulla parte iniziale/sinistra della scacchiera (indice negativo):

n° cella	...	-x-2	-x-1	x	-x+1	-x+2	-x+3	-x+4	...	-1	0	1	...
n° mosse	0	0	0	0	A=1	B	C	D	...	?	w	w-1	
n° monete	...	0	0	1	1	1	1	1	...	1	1	1	...

Per avere 1 moneta nella cella (–x+1) si deve avere –3*A+B=1 da cui B=3*A+1=4

Per avere 1 moneta nella cella (–x+2) si deve avere 2*A–3*B+C=1 da cui si ricava C=3*B–2*A+1=11

In generale, procedendo in avanti, per la cella (–x+i)-esima vale che il numero di mosse M[–x+i]=3*M[–x+i–1]–2*M[–x+i–2]+1 e questo è valido fino alla cella "0" in cui erano originariamente poste le N monete. Risolvendo per i si ha:

$$M[-x+i]=2^{(1+i)}-i-2$$

n° cella	...	-x-1	-x	-x+1	-x+2	-x+3	-x+4	-x+5	...	-x+i	...	0	...
n° mosse	0	0	0	1	4	11	26	57	..	2^(1+i)-i-2	...	2^(1+x)-x-2	..
n° monete	..	0	1	1	1	1	1	1	..	1	..	1	..

Abbiamo quindi prima risolto il lato destro della scacchiera, fino allo 0, e poi il lato sinistro, sempre fino allo 0: <u>per avere una soluzione valida del solitario i valori trovati per il numero di mosse della casella 0 calcolata da destra o da sinistra deve essere uguale</u>, si deve quindi avere:

$$w = 2^{(1+x)}-x-2 \qquad [1]$$

Inoltre il numero totale di monete deve essere, dalla definizione di x e w:

$$N=x+w+2 \qquad [2]$$

Sostituendo la [1] nella [2] si ottiene:

$$N=x+2^{(1+x)}-x-2+2 = 2^{(1+x)}$$

<u>Si hanno quindi soluzioni per il solitario esclusivamente nel caso in cui N sia una potenza di 2</u> (e vale anche per il caso di x=0 con N=2 anche se non viene considerato dal testo del problema). Per tali N la soluzione può essere trovata procedendo senza strategia alcuna ma semplicemente applicando iterativamente la mossa ad ogni casella con un numero di monete pari o maggiore a 3; le tabelle sopra ci anticipano quante mosse verranno applicate ad ogni cella per raggiungere la soluzione ma non l'ordine con cui debbano essere applicate che, per quanto esposto, può essere casuale.

Qualche esempio di risoluzione del solitario per N basso (in bold la cella a cui viene applicata la mossa):

N=4 (x=1)

0 0 0 0 **4** 0 0 0 0
0 0 0 1 1 2 0 0 0
\-
n° di mosse 0 0 0 0 1 0 0 0 0

N=8 (x=2)

```
               0 0 0 0 0 0 0 0 8 0 0 0 0 0 0 0 0
               0 0 0 0 0 0 0 1 5 2 0 0 0 0 0 0 0
               0 0 0 0 0 0 0 2 2 4 0 0 0 0 0 0 0
               0 0 0 0 0 0 0 2 3 1 2 0 0 0 0 0 0
               0 0 0 0 0 0 0 3 0 3 2 0 0 0 0 0 0
               0 0 0 0 0 0 1 0 2 3 2 0 0 0 0 0 0
               0 0 0 0 0 0 1 0 3 0 4 0 0 0 0 0 0
               0 0 0 0 0 0 1 1 0 2 4 0 0 0 0 0 0
               0 0 0 0 0 0 1 1 0 3 1 2 0 0 0 0 0
               0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 3 2 0 0 0 0 0
               0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 4 0 0 0 0 0
               0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 2 0 0 0 0
             -------------------------------------
n° di mosse    0 0 0 0 0 0 0 1 4 3 2 1 0 0 0 0 0
```

Il numero di mosse totali per la risoluzione aumenta però in maniera vertiginosa già da N=16 (71 mosse). Possiamo infatti calcolare il numero di mosse necessarie per il generico caso N=2^(1+x)=2^n:

$$\text{n° mosse parte destra}=[2\text{^}n-n-1]*[2\text{^}n-n]/2$$

$$\text{n° mosse parte sinistra}=2\text{^}n-1-n*(n+1)/2$$

$$TOT_{\text{mosse}}=[2\text{^}n-n-1]*[2\text{^}n-n]/2+2\text{^}n-1-n*(n+1)/2$$

Se definiamo la funzione di numero triangolare Tri[a]=a*(a+1)/2 abbiamo:

$$TOT_{\text{mosse}}=\text{Tri}[N-n-1]+N-1-\text{Tri}[n]$$

Da cui ricaviamo i privi valori per n:

n	N=2^n	TOT_{mosse}
1	2	0
2	4	1
3	8	11
4	16	71
5	32	367
6	64	1.695
7	128	7.359
8	256	30.847
9	512	126.719
10	1024	514.559

Per completezza possiamo infine rispondere all'ultima domanda del problema: *quale casella contiene due monete alla fine del gioco?*

Abbiamo già visto che l'ultima casella è quella che abbiamo chiamato w e che vale (vd [1] sostituendo n=x+1)

$$w = N-n-1$$

Una nota finale, secondo me molto interessante: le soluzioni trovate con la metodologia sopra esposta possono, in linea teorica, essere raggiunte applicando direttamente il numero di mosse ad ogni cella a prescindere dal numero di monete in essa contenuta; questo a patto di accettare di lavorare con "monete negative" per la maggior parte del tempo ma comunque con la certezza di arrivare, alla fine del solitario, con una soluzione consistente con solo "monete positive".

Es. per N=8 dove applichiamo 1, 4, 3, 2, 1 mosse in sequenza a partire dalla cella –1 (quindi quella a sinistra della casella con 8 monete):

0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	−3	10	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	−2	7	2	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	−1	4	4	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	1	6	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	−2	8	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	−1	5	2	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	2	4	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1	−1	6	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	3	2	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	4	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	0	0	0	0

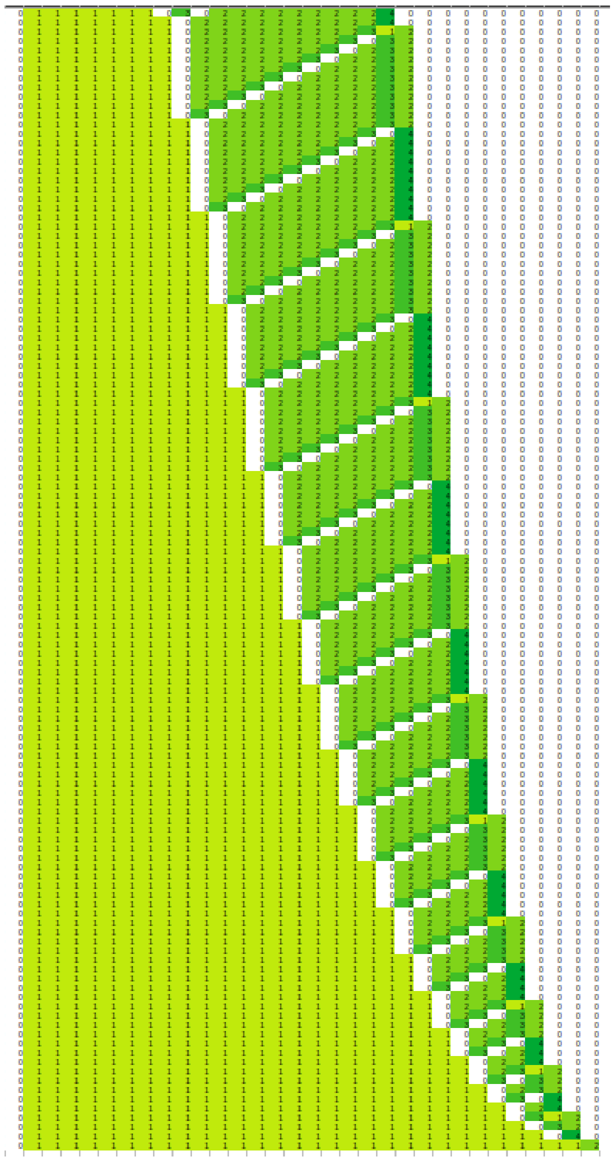
è da quando ho letto, ed ero ancora adolescente, sul solito Gardner del problema delle noci di cocco risolto adoperando "noci negative" che avrei voluto adoperare un simile escamotage. Le monete negative non sono proprio la stessa cosa ma un po' me le ricordano.

N.B.: Ad essere pignoli, fino a qui è stato dimostrato che il fatto che N sia una potenza di 2 è condizione <u>necessaria</u> per la risoluzione del solitario. Non è stato invece dimostrato che sia anche una condizione <u>sufficiente</u> a meno di non adeguarsi a lavorare con le monete negative come illustrato sopra. Nessuno garantisce ancora, infatti, che per ogni $N=2^n$ ci sia sempre una soluzione che non comporti mai l'utilizzo di monete negative. Una simile dimostrazione della sufficienza della condizione è possibile mostrando, sempre costruttivamente, un ordine con cui applicare le mosse. L'intera dimostrazione è un po' troppo lunga ma diamo 2 cenni:

- La prima parte della soluzione consiste nel trasformare la configurazione iniziale nella configurazione 0 0 0 … 0 2 2 2 … 2 2 2 4 0 0 0 … Questo è sempre possibile, per ogni N>4, perché (vd. principio di induzione) è vero per N=8 (vedi soluzione sopra) e per N>8 basta applicare per 2 volte la strategia esistente per N/2
- dalla configurazione 0 0 0 … 0 2 2 2 … 2 2 2 4 0 0 0 … si possono applicare poi strategie "iterative" non semplici da descrivere ma che possiamo illustrare con delle immagini che valgono più di 1000 parole:

1	1	1	0	2	2	2	2	3	2	0	0	0	0	0
1	1	1	0	2	2	2	3	0	4	0	0	0	0	0
1	1	1	0	2	2	3	0	2	4	0	0	0	0	0
1	1	1	0	2	3	0	2	2	4	0	0	0	0	0
1	1	1	0	3	0	2	2	2	4	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	2	2	2	2	4	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	2	2	2	3	1	2	0	0	0	0
1	1	1	1	0	2	2	3	0	3	2	0	0	0	0
1	1	1	1	0	2	3	0	2	3	2	0	0	0	0
1	1	1	1	0	3	0	2	2	3	2	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	2	2	2	3	2	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	2	2	3	0	4	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	2	3	0	2	4	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	3	0	2	2	4	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	2	2	2	4	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	2	2	3	1	2	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	2	3	0	3	2	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	3	0	2	3	2	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	2	2	3	2	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	2	3	0	4	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	3	0	2	4	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	2	2	4	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	2	3	1	2	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	3	0	3	2	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	2	3	2	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	3	0	4	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	2	4	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	3	1	2	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	3	2	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	4	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2

Parte finale della soluzione per N=16



Parte finale della soluzione per N=32.

Attenzione, non perdete la concentrazione, perché c'è ancora tanto materiale. Il prossimo solutore è ***Galluto***:

> Doc ha perso la pazienza… e tutti la perderanno prima di arrivare in fondo alla mia farneticazione.
>
> Le risposte sono facili:
>
> - Si vince quando N è una potenza di 2, ossia quando $N = 2^a$ (con $a \geq 2$)
> - Non esiste la versione misère, per quegli N si vince comunque
> - La casella con 2 monete è la $+ N - a - 1$
>
> Quello che è difficile è spiegare perché (non uso il termine "dimostrare" perché le mie elucubrazioni non sono sicuramente una dimostrazione formale).
>
> Comincio con la versione misère: se esistesse, vorrebbe dire che l'ordine con cui vengono effettuate le mosse conta, mentre ciò non è vero; visto che una mossa ha effetto solo sulle caselle immediatamente prima e immediatamente dopo, basta analizzare due casi: quello in cui due caselle consecutive contengono 3 o più monete (ad esempio 0330, il risultato è sempre 1122) e quello in cui ci sono due caselle con 3

o più monete separate da una altra casella (ad esempio 03230, il risultato è sempre 11222).

E visto che l'ordine non conta, invece che ragionare per mosse singole, d'ora in poi lavoro per "megamosse", che in onore del compianto Conway chiamo generazioni: ad ogni generazione, data la situazione sulla scacchiera, effettuo contemporaneamente tutte le mosse possibili, aggiornando il contenuto di tutte le caselle.

Per N=8 (e quindi, a=3), il risultato è il seguente (con la scacchiera posta verticalmente)

	generazione -->	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
casella	11	1	1	1	1	2	2	1	1	1	0
-3	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2	0		0	0	0	0	1	1	1	1	1
-1	1		1	2	2	3	0	1	1	1	1
0	4	8	5	2	3	0	3	0	1	1	1
1	3		2	4	1	3	0	3	0	1	1
2	2		0	0	2	2	4	1	3	0	1
3	1		0	0	0	0	0	2	2	4	1
4	0		0	0	0	0	0	0	0	0	2

Qualche spiegazione: la riga sotto a quella che indica le generazioni dice quante mosse singole vengono fatte in quella generazione per passare alla successiva, la colonna a destra di quella che indica le caselle dice quante volte quella casella sarà oggetto di una mossa singola (cioè quante volte quella casella conterrà 3+ monete).

E così il giochetto presenta una sua elegante schematicità.

Passiamo al perché la casella x con due monete è la + N – a – 1; dato N, non si riesce ad andare troppo in territorio negativo: ad esempio, guardando lo schema qua sopra, con N=8 (e quindi a=3), per poter arrivare alla casella –2 è necessario che sulla casella 0 vengano compiute 4 mosse: 3 per portare a 3 monete la casella –1 (che così può mandare una moneta sulla –2), e una quarta per mettere sulla –1 la sua moneta; più indietro di così non si riesce ad andare; cioè, la casella più indietro che si riesce a riempire è la –(a–1); poiché in tutto le caselle riempite saranno N–1, abbiamo:

$$x = (N-1) - (a-1) \text{ (le caselle negative) } - 1 \text{ (la casella 0) } = N - a - 1$$

E arriviamo al punto più difficile: perché si vince se e solo se N = 2^a?

Intanto noto, sempre sullo schema con N=8, che il numero di mosse delle caselle "positive" scala di 1 in 1 rispetto a quello della casella 0 fino a diventare pari a 0 sulla casella che contiene le due monete (la nostra N – a –1)

Quando N cresce succede quanto segue:

- Quando N è dispari (es., da 8 passiamo a 9), il numero di mosse complessive non cambia, ma uno degli "1" della casella 0 o di quelle negative diventa un "2", finché, subito prima della nuova potenza di 2, tutte le caselle 0 e negative contengono "2"
- Quando N è pari (es., da 9 passiamo a 10) il numero totale di mosse cresce, il numero di mosse della casella 0 aumenta, le celle positive continuano ad avere un numero di mosse a scalare rispetto al nuovo valore di quelle della casella 0, la catena si allunga in territorio positivo, e comunque tutte le caselle positive continuano a contenere "1", tranne l'ultima che contiene "2"

In altre parole, tra una potenza di 2 e la successiva, la parte positiva della catena rimane corretta (…112) e man mano si allunga, mentre la negativa, che non si è allungata, è sporcata dai "2".

Quand'è che finalmente la catena si allunga di una casella in territorio negativo (dalla –2 per N=8 alla –3)? Quando sulla casella 0 vengono effettuate abbastanza mosse da far diventare 4 quelle della casella –1 che così può far diventare 1 le mosse della casella –2 (che a sua volta può mandare una moneta sulla –3). e poi metterci una moneta.

Per poter fare 4 mosse sulla casella –1 occorre che ci arrivino 4*3=12 monete, più una 13ma perché alla fine contenga il suo "1"; ma due monete gliele rimanda la unica mossa della casella –2, per cui basta che sulla casella 0 avvengano 11 mosse.

E, guarda caso, ciò avviene proprio per N=16, con lo schema che segue (mostro solo le prime e ultime generazioni):

	generazione -->	0	1	2	27	28	29
casella	71	1	1	2	1	1	0
-3	0		0	0	1	1	1
-2	1		0	0	1	1	1
-1	4		1	2	1	1	1
0	11	16	13	10	1	1	1
1	10		2	4	1	1	1
2	9		0	0	1	1	1
3	8		0	0	1	1	1
4	7		0	0	1	1	1
5	6		0	0	1	1	1
6	5		0	0	1	1	1
7	4		0	0	1	1	1
8	3		0	0	0	1	1
9	2		0	0	3	0	1
10	1		0	0	2	4	1
11	0		0	0	0	0	2

Ma 11 è proprio il valore, per $a = 4$, di N – a – 1!

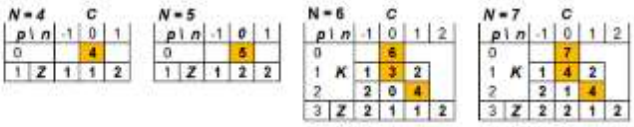
Quindi, quando N torna ad essere una potenza di 2 e le mosse della casella 0 diventano N – a – 1 la catena si estende contemporaneamente di una casella in più in territorio negativo, e fino alla N – a – 1 in territorio positivo. In effetti, era la stessa cosa con le 4 mosse dello schema N = 8.

Avendo scoperto OEIS (grazie, trentatre!) sono anche andato a vedere se era catalogata la sequenza 1, 4, 11, (26, 57, 120, …) e ho visto che è nota come A000295. OEIS mi ha anche fatto notare che la sequenza è costituita dai numeri che sono la somma dei valori della a-esima riga del triangolo di Tartaglia (la cui somma totale è il nostro N), meno gli ultimi due, che sono proprio a ed 1.

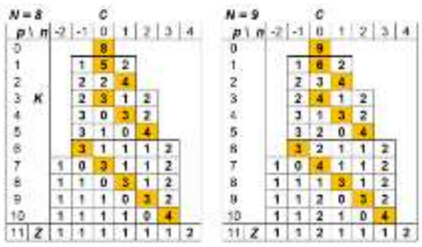
Avete perso la pazienza? Noi non ancora. Qualcuno ha detto ***trentatre***? Bene, è arrivato il suo momento:

Le fig. 1 e 2 riportano lo sviluppo del gioco per N da 4 a 9.

1



2



Per ogni N le colonne sono numerate con l'indice n da $-N$ a $+N$; ogni riga rappresenta un passo (indice p); sono indicate con ***C*** la colonna centrale e con ***Z*** la riga finale; indico con k^* la mossa della casella di valore k (in giallo), che modifica la riga successiva. In tutti i casi $N > 5$ si parte dal valore k^* in colonna ***C*** e riga 1 e si scende in diagonale fino a un 4* che genera nella riga successiva i valori (1, 1, 2); da qui si riparte nello stesso modo dal primo valore k^* con $k>2$ a sinistra; se questo non esiste si è arrivati alla riga ***Z*** priva di valori >2.

Sono evidenti le proprietà

[1] la costruzione precedente non è unica; in una riga con più valori >3 si può scegliere l'ordine di trasformazione e ottenere uno schema diverso, ma alla fine si ha sempre la stessa ***Z*** e lo stesso numero p di mosse

[2] per ogni N il processo termina in $\boldsymbol{Z}$ in un numero finito di passi

[3] <u>tutte le righe</u> di N si ripresentano in N+1 <u>uguali come lunghezza e valori, salvo l'aumento di 1 (la moneta aggiunta) nella colonna</u> $\boldsymbol{C}$

[4] gli N dispari <u>non sono soluzioni</u> e hanno le stesse righe del caso precedente

<u>dimostrazioni</u>

[1] ogni k^* modifica 3 valori nella riga successiva delle quantità fisse $(+1, -3, +2)$ che non dipendono dai valori delle caselle; i contributi di diversi k^* si possono quindi sommare in qualsiasi ordine; p.es. nella riga 4 in N=8 (3, 0, 3, 2) trasformando i 3 in ordine diverso si ottiene sempre in tre passi (1, 0, 3, 1, 1, 2) cioè la riga 4+3=7.

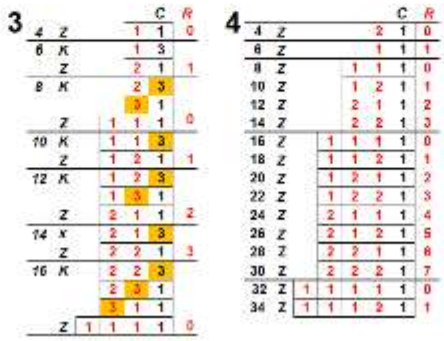
[2] ogni k^* mantiene il totale delle monete, ma sposta una moneta in avanti; dato che queste non possono superare il posto N <u>il processo deve finire quando non sono più possibili mosse, cioè in</u> $\boldsymbol{Z}$ – la cosa è più chiara calcolando il <u>momento statico</u> $\boldsymbol{M}$ delle monete rispetto alla colonna $\boldsymbol{C}$ – p.es. in N=8 moltiplicando le monete per la loro posizione n e sommando si ha per le prime righe $\boldsymbol{M} = 0, 1, 2, \ldots$ quindi aumenta ad ogni mossa ed è sempre uguale al n° di riga, cioè $\boldsymbol{M} = n$.

[3] $\boldsymbol{M} = n$ vale in N+1 solo se l'aumento di 1 moneta avviene in colonna $\boldsymbol{C}$.

[4] in N pari il valore di $\boldsymbol{Z}$ in colonna $\boldsymbol{C}$ è 1; quindi lo stesso valore in N+1 diventa 2 e non è una soluzione; inoltre la riga è ancora $\boldsymbol{Z}$ in quanto priva di caselle >2.

Restano da trovare le soluzioni.

Usando la [3] il calcolo di N pari si può abbreviare come segue.



In fig. 3 sono riportati in verticale i casi N pari da 4 a 16 con inizio dalla riga $\boldsymbol{K}$ e limitati alle colonne fino a $\boldsymbol{C}$ (si trascura la coda composta da 1 e terminata da 2 che si ricava uguagliando a N il numero di monete nella riga)

- l'inizio di ogni N è copiato dalla $\boldsymbol{Z}$ precedente con aumento di 2 in colonna $\boldsymbol{C}$ – ogni 3* aumenta di 1 la casella sotto a sinistra; quando questa diventa un 3 provoca lo stesso effetto; quindi i numeri rossi a sinistra di $\boldsymbol{C}$ si comportano come un contatore aumentato di 1 a destra ad ogni passo.

In fig. 4 si riportano solo le righe $\boldsymbol{Z}$ e il calcolo è esteso fino a N=34

- i valori in rosso a sinistra diminuiti di 1 e letti come un numero binario danno il valore (decimale) rosso a destra, nullo solo per N potenza di 2 (dove compaiono solo 1) e in progressione aritmetica negli intervalli fra questi valori

- quindi le uniche soluzioni sono

$N = 4, 8, 16, 32, \ldots$ cioè $N = 2^m, m > 1$.

Aggiungo, senza dimostrazione, che per questi N il numero di passi è

$p = (N/2)\,(N - 2m + 1) - 1$.

A questo punto ci sembra sia opportuno passare ai problemi di gennaio.

4.2 [288]

4.2.1 Una scommessa sequenziale

Nel primo problema del mese scorso si gioca a testa e croce:

> *Stiamo giocando a testa e croce, ma "con memoria"; in pratica ci annotiamo la sequenza di teste e croci generate, e ne tiriamo abbastanza; a fine serata controlliamo la sequenza, cercando la prima ricorrenza di "Testa-Testa" e la prima combinazione di "Croce-Testa"; se compare prima la prima, vince Doc, se compare prima la seconda vince Rudy. Chi vince di più?*

Questo gioco appassiona forse qualcun altro. La scrivente soffre già prima ancora del primo solutore, che incredibilmente è ***Valter***:

> La sequenza dei primi tre tiri della moneta può essere con pari probabilità una delle otto:
> - TTT
> - TTC
> - TCT
> - CTT
> - CTC
> - CCT
> - TCC
> - CCC
>
> Nei primi due casi vince Doc, negli ultimi due nessuno, nei restanti quattro centrali Rudy.
> I tiri proseguono, quindi, per gli ultimi due casi ma, alla fine, quando esce T vince Rudy.
> In definitiva direi, se non sto sbagliando, che Rudy vince mediamente tre volte su quattro.

Continua il nostro stupore con un'altra soluzione di ***Gas***:

> Veloce veloce…
>
> Se nel primo tiro viene Croce allora vince ovviamente Rudy perché Doc non potrà mai vedere 2 Teste consecutive prima che Rudy veda C-...-C-T.
>
> Se, invece, al primo tiro viene Testa aspettiamo il secondo tiro: se viene ancora Testa allora ha vinto Doc ma se abbiamo una Croce allora vince Rudy perché ci riportiamo al caso precedente. In totale, la probabilità che vinca Rudy è:
>
> P=1/2*1+1/2*1/2=3/4
>
> Quindi Rudy vince 3 volte su 4. Il bello del gioco è che per sapere chi vince non c'è bisogno di tirare "abbastanza" monete, basta tirare le prime 2 ed il risultato è definito. A meno che Doc non faccia il pignolo e non pretenda di vedere veramente apparire la sequenza C-T; in linea teorica, infatti, si potrebbe avere una sequenza di C infinite senza mai una T e senza quindi avere alcun vincitore… ma la probabilità che questo accada è piccola a piacere.

I nostri lettori sembrano poco impressionati, ***Galluto*** scrive:

> Doc ha una sola speranza: che i primi due lanci diano Testa-Testa; per le altre tre combinazioni dei primi due tiri, o perde subito (Croce-Testa), o vuol dire che il secondo lancio ha dato Croce; da quel momento in poi, possono uscire tutte le Croci possibili, ma è solo un ritardare l'ineluttabile, presto o tardi uscirà Testa e Rudi si berrà il suo caffè.
>
> Quindi Doc ha il 25% di probabilità e Rudi il 75%. Sembra troppo facile…

Con le probabilità non si sa mai. Gettiamo la spugna e vediamo come avete risolto il secondo problema.

4.2.2 La serie dei numeri trentenni

Si gioca con i numeri:

> *Dati i numeri tra uno e un miliardo scritti in base dieci, in quanti di questi la somma delle cifre dà trenta?*

O l'estensione:

Dati i numeri tra uno e N, scritti in base k, quanti di questi hanno somma s?

Arriva subito ***Valter***:

Tento solo, con due esempi, di mostrare un metodo di calcolo, che può essere, deducendolo da questi, generalizzato.

Probabilmente, poi, si può ricavarne, se non sto sbagliando, una formula chiusa che lascerei ai solutori più abili.

Come per i numeri sino a un miliardo le cui cifre danno somma trenta limito ai casi di tutti quelli fino a *n* cifre.

I due esempi sono tutti i numeri, in base dieci e sette, di quattro cifre, cioè da 0 a 9999_{10} e 6666_7, con somma 21.

Nel proseguo mi servo di tre formule; rappresentando con "(*x*, *y*)" il binomiale di *x* su *y*, vale a dire *x*!/[*y*!(*x*–*y*)!]:

- (*n*–1+*s*, *s*) fornisce in quanti modi si ottiene "*s*" come somma di "*n*" numeri, se tutti sono maggiori o uguali a zero
- (*n*, *d*) i modi di disporre "*d*" cifre in un numero che ne ha "*n*"; p.e. due in un numero con tre = (3, 2)= 3 → xx., x.x, .xx
- *n*!.tutte le possibili permutazioni di *n* numeri; negli esempi che seguono i numeri 10 e 11 hanno 2!=2 permutazioni.

Con "numero" intendo la rappresentazione di un valore nella base specificata, ad esempio: 19_{10} che corrisponde a 25_7.

Le "cifre" o "digits" sono i singoli valori che compongono il numero, per esempio in 25_7 le sue cifre sono "2" e "5".

tutti i numeri da 0 a 9999, scritti in base 10, calcolo in quanti di questi la somma dalle loro cifre dà ventuno:

- ventuno si ottiene, come somma di quattro numeri, maggiori o uguali a zero, in: (4–1+21, 21) = (24, 21) = 2'024 modi
- … c'è però da togliere un po' di roba in quanto, su base 10, un valore è rappresentato da cifre che vanno da 0 a 9
- devo sottrarre i casi in cui negli addendi delle somme vi sono numeri da 10 a 21 in quanto non corrispondo a cifre
- con ventuno i restanti tre numeri danno somma zero, quindi in ogni posizione si ripete (3–1+0, 0) = (2, 0) = 1 volta
- poi 20 → (3, 1) = 3, 19 → (4, 2) = 6, 18 → (5, 3) = 10, 17 → (6, 4) = 15, 16 → (7, 5) = 21, 15 → (8, 6) = 28, 14 → (9, 7) = 36, 13 → (10, 8) = 45, …, 10 → (13, 11) = 78
- i casi da sottrarre in quanto contenenti addendi non corrispondenti a cifre è 1+3+6+10+15+21+28+36+45+55+66+78=364
- tali numeri possono trovarsi in una delle quattro posizioni della somma, quindi moltiplico per quattro 364*4=1'456
- ora però ho conteggiato due volte i casi con due dieci e un dieci con un undici che rispettivamente sono in tutto:
- (4, 2)*(2, 1)=12 vale a dire come sono disposti i due dieci nei quattro addendi e l'uno per fare 21 nei restanti due
- (4, 2)*2!=12, come sono disposti 10 e 11 nei 4 addendi, cioè la disposizione di due valore per le loro permutazioni
- conteggiando ottengo: 2'024 – 1'456 + 12 + 12 = 592 che corrisponde ai modi di ottenere 21 dalla somma delle cifre.

Di tutti i numeri da 0 a 6666, scritti in base 7, calcolo, in quanti di questi, la somma dalle loro cifre dà ventuno:

- ventuno si ottiene, come somma di quattro numeri, maggiori o uguali a zero, in: (4–1+21, 21) = (24, 21) = 2'024 modi
- … c'è però da eliminare un po' di roba in quanto, su base 7, un valore è rappresentato da cifre che vanno da 0 a 6
- devo sottrarre i casi in cui negli addendi delle somme vi sono numeri da 7 a 21, in quanto non corrispondo a cifre
- con ventuno i restanti tre numeri danno somma zero, quindi in ogni posizione si

ripete (3–1+0, 0) = (2, 0) = 1 volta
- poi 20 → (3, 1) = 3, 19 → (4, 2) = 6, 18 → (5, 3) = 10, 17→(6, 4) = 15, 16 → (7, 5) = 21, 15 → (8, 6) = 28, 14 → (9, 7) = 36, 13 → (10, 8) = 45, …, 7 → (16, 14) = 120
- casi da sottrarre perché hanno addendi non corrispondenti a cifre: 1+3+6+10+15+21+28+36+45+55+66+78+91+105+120=680
- tali numeri possono trovarsi in una delle quattro posizioni della somma, quindi moltiplico per quattro 680*4=2'720
- non ripeto il discorso fatto prima ma in sostanza sottraggo tutti casi che hanno due addendi con valori tra 7 e 11
- se presenti due sette ho conteggiato due volte (4, 2)*(1+7, 7)=6*8=48 casi; se un sette e un otto (4, 2)*2*(1+6, 6)=84
- tutte le coppie che devo conteggiare vanno da 7/7 a 7/14, da 8/8 a 8/13, da 9/9 a 9/12 più le coppie 10/10 e 10/11
- la loro somma che devo togliere da 2'720 è: 48+84+72+60+48+36+24+12+36+60+ 48+36+24+12+ 24+36+24+12+12+12 = 720
- ora, però, sto sottraendo due volte i quattro casi con tre sette, quindi, conteggiando tutto: 2'024–2'720+720–4=20.

Siccome non mi fido dei miei sproloqui ho scritto un programma, che allego, per conferma dei due risultati 592 e 20.

Il programma ha parametri: la base, il numero di cifre e la somma; fornisce quante volte compare e i relativi numeri.

Sicuramente si può meglio, parametrizzando i calcoli, in relazione sia alla base k, sia alla somma s che è richiesta.

Inoltre, penso si possano accorpare somme binomiali, cercando di ridurre il più possibile i calcoli a formule chiuse.

Io mi fermo qui sperando di non aver farneticato troppo.

Il problema "è piaciuto" a ***Gas***:

Che problemaccio, varia tutto! Metto subito le mani avanti sul fatto che nella risoluzione del problema seguente non presenterò tutti i singoli passaggi con un formalismo matematico spinto; lascerò un po' di semplificazioni per non appesantire una dimostrazione già abbastanza lunga e, almeno per me, articolata…

Prima di tutto definiamo:

- k la base numerica con cui lavoriamo
- n ed s due generici numeri naturali
- $N=k^n-1$
- $P(s; k; n)$ la quantità di numeri in base k che hanno s come somma considerando tutti i numeri fino ad N.

<u>P(*s*; *k*; *n*) rappresenta, quindi, proprio la risposta al problema</u>

STEP 0

Procediamo innanzitutto calcolando, per ogni k ed ogni n, quanto vale il massimo valore s_{MAX} per cui $P(s; k; n)>0$

In generale, il numero più grande esprimibile è composto da n volte la cifra più alta del sistema in base k, quindi k–1. Il massimo valore di s possibile è quindi

$$s_{MAX}(k; n) = n*(k-1) \quad [1]$$

Es.1: per $n=4$ e $k=10$ si ha N=10^4–1=9999 e quindi vale $s_{MAX}(10; 4)=4*9=36$

Es.2: per $n=6$ e $k=8$ si ha N=8^6–1=777777 e quindi vale $s_{MAX}(8; 6)=52_{(base7)}=42_{(base10)}$

Nel seguito saranno quindi sempre considerati valori di s compresi tra 0 e $n*(k-1)$, estremi inclusi, in quanto valori maggiori di s avranno sempre un $P(s; k; n)=0$

Per non appesantire l'esposizione, sarà sempre sottinteso il

$$s \leq n*(k-1) \quad [2]$$

STEP 1

Per procedere dobbiamo leggere il quesito nei termini di un problema combinatorio. Notiamo infatti che P(s; k; n) rappresenta, nella pratica, il numero di modi diversi in cui è possibile disporre s elementi in n posizioni con il vincolo che non ci siano più di (k–1) elementi in ogni posizione. E il vincolo finale è proprio quello che rende difficile il problema! Facciamo quindi prima i conti senza considerare tale vincolo e definiamo P'(s; k; n) questa prima approssimazione della soluzione del problema.

Trovare P'(s; k; n) è un classico problema combinatorio: basta immaginare di mettere in fila s punti e disporre tra di loro (n–1) barriere che rappresentano le separazioni tra le n posizioni.

Es.: k=10, s=10, n=4

| * * * * | * * * * * | * rappresenta il numero 0451

* * | * * | | * * * * * * rappresenta il numero 2206

Abbiamo quindi (n–1) elementi di un tipo ed s elementi di un altro tipo da disporre in sequenza. Il numero delle loro combinazioni è

$$P'(s;k;n) = \frac{(n-1+s)!}{(n-1)!\cdot s!} \quad [3]$$

Questa sarebbe la (facile) soluzione del problema nel caso in cui non tenessimo conto del vincolo che non ci siano più di (k–1) elementi in ogni posizione. Consideriamo infatti nuovamente uno degli esempi precedenti:

| * * * * | * * * * * | *

Nel caso in cui stessimo lavorando, ad es., in base k=4 questa configurazione è infatti senza senso in quanto le posizioni centrali si scriverebbero come 10_{base4} e 11_{base4} e quindi la combinazione in questione non può essere formata in quanto avrebbe più di n=4 cifre totali.

In ogni caso, la [3] da soluzioni esatte per s<k, è già un primo passo…

STEP 2

Dobbiamo quindi rivedere l'approssimazione [3] per eliminare, per ogni k, le combinazioni senza senso introducendo, adesso si, il vincolo del numero massimo di (k–1) elementi per ogni posizione.

La formula ricavata in [3] rappresenta infatti una stima per eccesso in quanto considera anche combinazioni impossibili in cui sono presenti k o più elementi in una o più delle n posizioni. È quindi necessario trovarne il numero per eliminarle da [3].

Introduciamo quindi una nuova variabile x che rappresenta, per una data combinazione, il numero di posizioni in cui sono presenti almeno k elementi.

Riprendendo l'esempio giù usato

| * * * * | * * * * * | *

nel caso in cui k=4 si ha x=2 in quanto in 2 posizioni, la seconda e la terza, abbiamo almeno k elementi.

Abbiamo quindi da disporre un totale di s elementi che possiamo dividere come segue:

- x blocchi da k elementi, per un totale di kx elementi
- s–kx altri elementi rimanenti

Considerando inizialmente solo il contributo B possiamo ragionare come allo STEP 1 ed otteniamo un numero di combinazioni dato da

$$B(s;k;n;x) = \frac{(n-1+s-k\cdot x)!}{(n-1)!\cdot(s-k\cdot x)!} \quad [4]$$

Dobbiamo adesso posizionare il contributo dato dal punto A e quindi x blocchi dei restanti elementi nelle n posizioni, questi possono essere inseriti in A modi diversi con:

$$A(n;x) = \frac{n!}{x!\cdot(n-x)!} \quad [5]$$

In totale, quindi, abbiamo un numero di combinazioni C(s; k; n; x) dato dal prodotto di [4] e [5]:

$$C(s;k;n;x) = \frac{(n-1+s-k\cdot x)!}{(n-1)!\cdot(s-k\cdot x)!}\cdot\frac{n!}{x!\cdot(n-x)!} \quad [6]$$

N.B.1: C(s; k; n; x) rappresenta il numero di combinazioni possibili con *almeno* x blocchi da k elementi e non quelle che contengono *esattamente* x blocchi

N.B.2: Confrontando la [6] con la [3] possiamo notare che

$$P'(s;k;n)=C(s;k;n;0) \quad [7]$$

N.B.3: per come è costruito, C(s; k; n; x) ha un problema in quanto contiene delle combinazioni duplicate, infatti combinazioni differenti di A e di B possono portare ad uno stesso risultato finale A·B nel caso in cui $s\geq(x+1)*k$. Quindi, per la precisione, C(s; k; n; x) è una stima <u>per eccesso</u> del numero di combinazioni possibili con almeno x blocchi da k elementi

Possiamo comunque ottenere una seconda approssimazione P" del problema sottraendo alla [3] il numero di combinazioni con almeno x=1 blocco da k elementi, otteniamo quindi:

$$P''(s;k;n) = P'(s;k;n) - C(s;k;n;1) \quad [8]$$

Questa potrebbe essere la soluzione del problema se non fosse che, come già evidenziato, C(s; k; n; 1) contiene delle combinazioni duplicate per $s\geq 2k$.

In ogni caso, la [8] da soluzioni esatte per $s<2k$, è già un secondo passo avanti…

STEP 3

Per affinare la soluzione [8] dobbiamo quindi sottrarre a C(s; k; n; 1)

il numero di combinazioni duplicate introdotte. In linea di massima tale numero è proprio pari a C(s; k; n; 2) se non fosse che anche tale stima contiene delle combinazioni duplicate ed è quindi una stima per eccesso… Comunque, la stima aggiornata P''' diventa:

$$P'''(s;k;n) = P''(s;k;n) + C(s;k;n;2) =$$
$$= P'(s;k;n) - C(s;k;n;1) + C(s;k;n;2) =$$
$$= C(s;k;n;0) - C(s;k;n;1) + C(s;k;n;2) \quad [9]$$

Per gli stessi motivi visti per P' e P", P''' da valori corretti per $s<3k$

Per affinare questa stima per i valori $s\geq 3k$ si prosegue come sopra aggiungendo e sottraendo, alternativamente, C(s; k; n; x+1) alla stima precedente. Perché scrivo "aggiungendo e sottraendo"?

Scriviamo per semplicità C(s; k; n; x) = C(x) e ricordiamo che C(x) è sempre una stima per eccesso del numero di combinazioni possibili con almeno x blocchi da k elementi; per affinare la stima di C(x), quindi, a C(x) va sottratto C(x+1). Abbiamo infatti visto che:

$$P'=C(0)$$
$$P''=C(0)-C(1)$$
$$P'''=C(0)-[C(1)-C(2)]$$

e proseguendo

$$P''''=C(0)-[C(1)-[C(2)-C(3)]]$$

ecc…

Quindi le stime successive C(x) avranno segni alterni +–+–+–...

Ma per quante iterazioni vanno avanti le stime successive C(x)? Ricordando la [2] che dava il valore massimo per s:

$$s\leq n*(k-1) \quad [2]$$

abbiamo la garanzia che la somma non ha termini infiniti ma si ferma, al massimo, al valore C(s; k; n; n*(k–1)/k) considerando ovviamente il valore n*(k–1)/k arrotondato per difetto.

In definitiva possiamo quindi presentare la soluzione finale del problema come segue:

$$P(s;k;n) = \sum_{i=0}^{s/k} (-1)^{x} \cdot C(s;k;n;x) =$$

$$= \sum_{x=0}^{s/k} (-1)^{x} \cdot \frac{(n-1+s-k\cdot x)!}{(n-1)!\cdot(s-k\cdot x)!} \cdot \frac{n!}{x!\cdot(n-x)!}$$

ed anche in questo caso l'estremo della sommatoria s/k deve essere considerato arrotondato per difetto.

Per fare un esempio concreto consideriamo quanto presentato nel problema: *dati i numeri tra uno e un miliardo scritti in base dieci, in quanti di questi la somma delle cifre dà trenta?*

Abbiamo quindi:

k=10

n=9 (considero i numeri da 1 a 999.999.999)

s=30

e possiamo quindi calcolare:

$$P(30;10;9) = \sum_{x=0}^{3} (-1)^{x} \cdot \frac{(38-10\cdot x)!}{8!\cdot(30-10\cdot x)!} \cdot \frac{9!}{x!\cdot(9-x)!} =$$

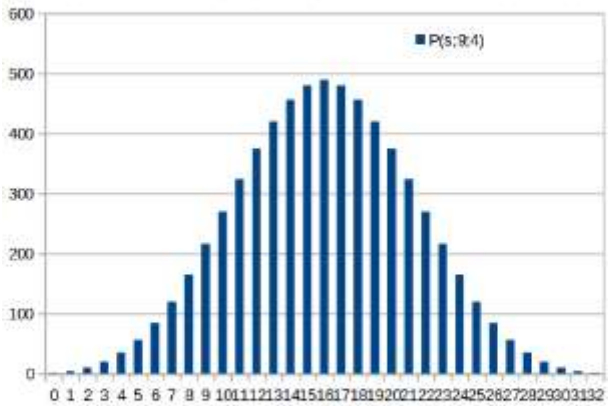
$$= \frac{38!}{8!\cdot 30!} - \frac{28!}{8!\cdot 20!}\cdot\frac{9!}{8!} + \frac{18!}{8!\cdot 10!}\cdot\frac{9!}{2!\cdot 7!} - \frac{9!}{3!\cdot 6!} = 22.505.751$$

Interessante adesso analizzare le distribuzioni che assume P(s; k; n) al variare di k ed n; riportiamo qualche esempio.

Es.1

k=9

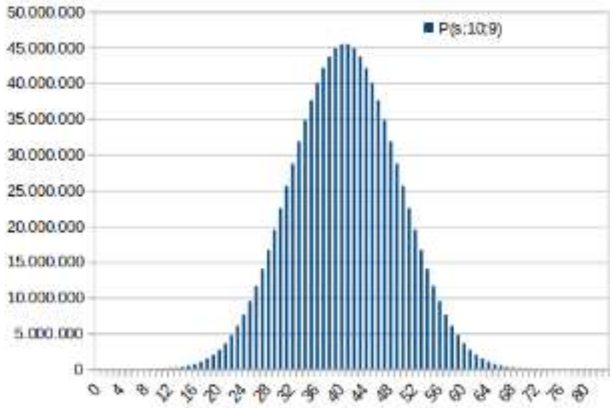
n=4



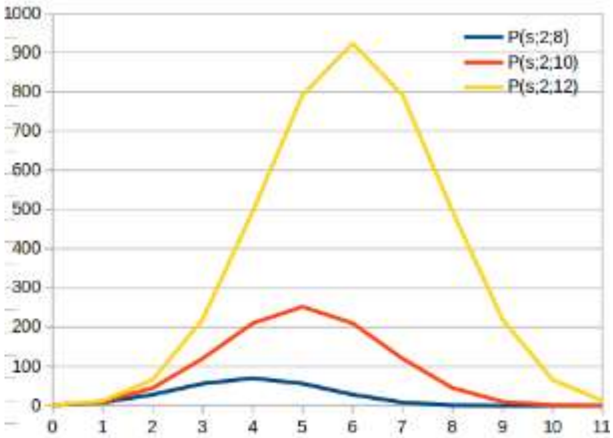
Es.2

k=10

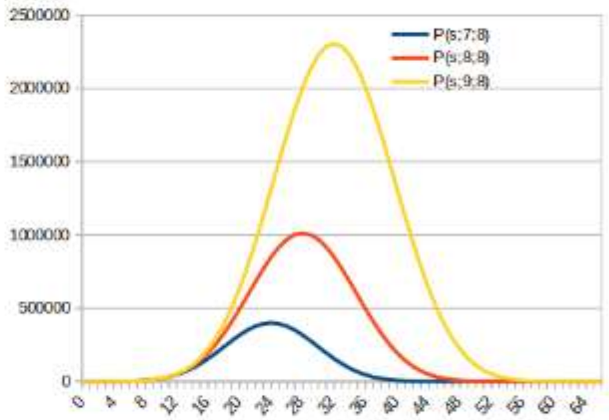
n=9



Es.3
k=2
n=8, 10, 12



Es.4
k=7, 8, 9
n=8



La distribuzione assunta è quindi con andamento binomiale come era facile aspettarsi vista la natura combinatoria del problema.

Complimenti al nostro ***Gas***, ma non ci fermiamo ancora, vediamo che cosa scrive ***Galluto***:

Se c'è una formula che risolve il problema, faccio i miei complimenti, ma non riesco proprio a pensarla; e peggio mi sento per il caso più generale. Per cui, mi vengono in mente le seguenti idee:

- Metodo Brutale: provo uno per uno tutti i numeri fino a un miliardo… scherzavo!
- Metodo Montecarlo: penso una buona quantità di gruppi di 9 numeri casuali tra 0 e 9, conto quanti hanno somma 30 e riproporziono a un miliardo: con un po' più di un milione di tentativi il risultato è 22.481.772.
- Metodo Mi faccio aiutare da OEIS (c'ho preso gusto), che mi serve la pappa quasi scodellata: la sequenza A289354 mi dà proprio il numero di volte che la somma delle cifre di un numero di 9 digit fa "*n*"; il "quasi" è perché per numero a 9 digit OEIS intende da 100.000.000 in poi; poco male, basta prendere le sequenze "sorelle" per 4, 5, 6, 7, 8 digit (quella da 3 non mi serve, al massimo arriva a 27) e sommare i valori per *n*=30 di tutte quante; il risultato è **22.505.751.**
- Metodo Analitico:
  - prendo tutte le 5604 Partizioni di 30
  - scarto tutte quelle con un termine ≥10
  - scarto tutte quelle con 10 o più termini
  - per ciascuna delle 1128 che rimangono calcolo la molteplicità; ad esempio, per il caso 9-9-9-3, i tre 9 possono stare in 9*8*7/1*2*3 = 84 modi diversi, e per ciascun modo il 3 può stare in uno dei 6 posti rimasti (gli altri ovviamente sono tutti 0), per un totale quindi di 504 diversi modi di avere 9-9-9-3; chiamando O_0, O_1… O_9 le occorrenze di 0, 1… 9 di ogni partizione (dove O_0 è uguale a 9 meno la somma delle occorrenze di 1,2,…9); la molteplicità è uguale a $9!/(O_0!* O_1!*\ldots O_9!)$
  - sommo il risultato di tutte le 1128 e ottengo ancora **22.505.751!**

Il Metodo Analitico mi sembra l'unico che possa essere usato generalizzando il problema, a meno che il risultato approssimativo del Montecarlo sia accettabile.

I passi sarebbero gli stessi:

- prendo tutte le Partizioni di *s*
- scarto tutte quelle con un termine ≥*k*
- scarto tutte quelle con più termini del numero di digit di *N* (scritto in base *k*)
- per ciascuna delle Partizioni che rimangono calcolo la molteplicità; qui c'è però una complicazione: se N (sempre scritto in base k) non è un bel numero tondo come 1.000.000.000, non tutte le combinazioni sono valide; ad esempio, se N = 500.000.000, devo scartare tutte quelle che hanno 5 o più al primo digit; è un po' più laborioso, ma ci si riesce comunque
- sommo il risultato di tutte le Partizioni

Concludiamo con ***Heaviside***:

I numeri trentenni da uno a un miliardo dovrebbero essere 17432604. Sottolineo "dovrebbero", perché ho grossi dubbi.

Per calcolarli, ho provato a costruire la tabella dei numeri T(*s*, *n*), ossia i numeri di *n* cifre la cui somma è pari a *s*. Ovviamente T(*s*, *n*) dipende dalla base utilizzata: per iniziare, ho ipotizzato la base 10.

Nella prima riga (i numeri la cui somma delle cifre sia pari a 1), abbiamo un solo numero di una cifra (1), uno solo di due (10), e così via.

Nella seconda riga, abbiamo un solo numero di una cifra (2), due con due cifre (20, 11), e così via. Fino ad arrivare alla nona riga, che ha un solo numero di una cifra (9), nove con due cifre (90, 81, 72, 63, 54, 45, 36, 27, 81), e così via.

Passando poi ai numeri le cui cifre sommate danno 10 si ha una "discontinuità": servono numeri di almeno due cifre per arrivare a 10. In questo caso la prima colonna è pari 0, mentre la seconda è pari alla somma dei primi 9 numeri della prima colonna.

Lo stesso vale per la prima riga di questa sottotabella (0 9 45 165 495 1287 3003 6435 12870).

Lo stesso accade quando si passa da 18 a 19 e in generale da $9m$ a $9m+1$.

Tutti gli altri elementi delle sottotabelle si possono calcolare osservando che $T(s, n) = T(s–1, n) + T(s, n–1)$.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001
1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008
1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448
1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758
	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758
	8	53	218	713	2000	5003	11438	24308	48618	92376
	7	60	278	991	2991	7994	19432	43740	92358	184734
	6	66	344	1335	4326	12320	31752	75492	167850	352584
	5	71	415	1750	6076	18396	50148	125640	293490	646074
	4	75	490	2240	8316	26712	76860	202500	495990	1142064
	3	78	568	2808	11124	37836	114696	317196	813186	1955250
	2	80	648	3456	14580	52416	167112	484308	1297494	3252744
	1	81	729	4185	18765	71181	238293	722601	2020095	5272839
		45	803	3655	17573	69985	234861	718168	2008855	5251351
		36	845	4500	22473	91938	326799	1042965	3051820	8303011
		28	873	5173	27646	119584	446383	1489348	4540968	12843979
		21	894	5867	33513	153097	599480	2088828	6629796	19473775
		15	909	6576	40089	193186	792666	2881494	9511290	28985065
		10	919	7295	47384	240570	1033236	3914730	13426020	42411085
		6	925	8020	55404	295974	1329210	5243940	18669960	61081045
		3	928	8748	64152	360126	1689336	6933276	25603236	86684281
		1	929	9477	73629	433755	2123091	9056367	34659603	121343884
			165	6231	59511	382263	1957695	8575062	33367114	118101148
			120	6351	65862	448125	2405820	10980882	44347996	162449144
			84	6435	72297	520422	2926242	13907124	58255120	220704264
			56	6491	78788	593210	3525452	17432576	75687696	296391960
			35	6526	85314	684524	4209976	21642552	97330248	393722208
			20	6546	91860	776384	4986360	26628912	123959160	517681368
			10	6556	98416	874800	5861160	32490072	156449232	674130600
			4	6560	104976	979776	6840936	39331008	195780240	869910840
			1	6561	111537	1081313	7932249	47263257	243043497	1112954337

Sommando allora i primi 9 elementi della riga 30 abbiamo 17432604 (anche se i primi tre sono ovviamente pari a 0).

Possiamo provare allora a generalizzare per una qualunque base k. Il procedimento è analogo, ma dobbiamo considerare sottotabelle con k righe. Ipotizzo poi per (mia) comodità N come una potenza di k, ossia N=k^M. In questo caso i numeri tra 1 e N diventano i numeri con al più M cifre in base k, e i numeri la cui somma delle cifre è pari a s corrispondono alla s-sima riga della tabella $T(s, n)$.

La tabella si costruisce come prima (dobbiamo solo sostituire 9 con k). Sommando i primi M elementi della s-sima riga ottengo la risposta al quesito generale.

Forse, riscrivendo l'indice s in funzione della base, ossia $s=mk+t$ (con t compreso tra 1 e k), si può arrivare anche a trovare una formula generale...

Non sappiamo più che dire e ci fermiamo qui. Complimenti a tutti per la pazienza, e alla prossima!

5. Quick & Dirty

Definiamo come 4-*palindromo* un numero di quattro cifre in base 10 (eventualmente con zeri come cifre più significative) che assume lo stesso valore se letto da destra a sinistra. Qual è la somma di tutti i numeri 4-palindromi?

6. Pagina 46

Siano i numeri estratti (nell'ordine di estrazione) a, b, c, d, e. Il numero ottenuto è quindi:

$$N = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e$$

Il numero dei possibili risultati è $10·9·8·7·6 = 30240$.

Affinché N sia divisibile per $495 = 5·9·11$, deve essere divisibile contemporaneamente per 5, 9, 11.

Affinché N sia divisibile per 5, deve essere e=0 o e=5.

Verifichiamo le altre due divisibilità[20].

Possiamo scrivere N nella forma:

$$N = (9999a + 999b + 99c + 9d) + (a + b + c + d + e)$$

e poiché la prima parentesi è sempre un multiplo di nove, a*ffinché N sia divisibile per* 9 è necessario che lo sia $a+b+c+d+e$.

Possiamo anche scrivere N nella forma:

$$N = (9999a + 1001b + 99c + 11d) + (a - b + c - d + e)$$

e, come nel caso precedente, poiché la prima parentesi è sempre un multiplo di undici, *affinché N sia divisibile per* 11 è necessario che lo sia $a-b+c-d+e$.

Ora, si ha che:

$$a + b + c + d + e \geq 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$a + b + c + d + e \leq 9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 35$$

quindi $a+b+c+d+e$ sarà divisibile per 9 solo se sarà pari a 18 o a 27. Consideriamo i due casi separatamente.

Se $a+b+c+d+e=18$, allora $a-b+c-d=18-2b-2d$ sarà pari, e sarà $|a-b+c-d+e|<18$, quindi dovrà essere:

$$a - b + c - d + e = 0$$

in quanto zero è l'unico multiplo pari di *11* nell'intervallo considerato, e quindi deve essere:

$$a + c + e = b + d = 9$$

Nel sottocaso in cui $e=0$, si ha che (a, c) e (b, d) possono essere scelti tra le otto coppie (1, 8), (2, 7), (3, 6), …, (8, 1). Una volta che sia scelto (a, c), esistono solo sei possibili scelte per (b, d), in quanto non è possibile che sia uguale a (a, c) o a (c, a)*;* quindi, per $e=0$ otteniamo un totale di $8{\cdot}6=48$ soluzioni.

Nel sottocaso $e=5$, edve essere $a+c=4$, $b+d=9$, e quindi (a, c) deve essere una delle coppie (0, 4), (4, 0), (1, 3), (3, 1); nei primi due casi, (b, d) può essere una qualsiasi delle otto coppie (0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (6, 3), (7, 2), (8, 1) o (9, 0), ma negli altri due casi (b, d) può essere solo una delle quattro coppie (0, 9), (2, 7), (7, 2) o (9, 0), e quindi otteniamo un totale di $2{\cdot}8+2{\cdot}4=24$ soluzioni.

Se $a+b+c+d+e=27$, abbiamo che $a-b+c-d+e=27-2b-2d$ deve essere dispari; inoltre,

$$27 > a - b + c - d + e > 27 - 2{\cdot}9 - 2{\cdot}8 = -7$$

Quindi deve essere $a+b-c+d-e=11$, visto che non ci sono altri multipli di 11 nell'intervallo ammesso.

Segue quindi che $b+d=8$ e $a+c+e=19$; quindi (essendo $9+8<19$), la soluzione $e=0$ è impossibile e deve essere $e=5$. Quindi $a+c=14$, il che implica che (a, c) sia una delle coppie (6, 8) o (8, 6). Questo elimina i valori 5, 6 e 8 per b e d, quindi (b, d) può essere solo (1, 7) o (7, 1). Quindi in questo caso sono possibili $2{\cdot}2=4$ soluzioni.

Combinando i due casi, vediamo che i risultati favorevoli sono 72+4=76; questo implica che la probabilità cercata sia:

$$76/30240 = 19/7560 \approx 0.0025.$$

[20] Si noti che i metodi utilizzati per le divisibilità per 9 e per 11 rappresentano una dimostrazione della correttezza dei criteri "standard" di divisibilità.

7. Paraphernalia Mathematica

Non sappiamo se la toponomastica lunare preveda un "Mare dell'Invidia" ma nel caso possiamo garantirvi una cosa: Rudy sfrutterà la bassa gravità del luogo per non sentirsi un inetto mentre guarda le gare di salto in alto delle prossime olimpiadi.

7.1 Fisico Olimpionico [6] – *Non* la seconda che hai detto...

...nel senso che di "Citius, Altius, Fortius" la seconda per Rudy è proprio negata[21]. Il suo record personale di salto in alto è poco sopra i novanta centimetri, quindi è l'argomento giusto per una trattazione teorica. Ma prendiamola alla lontana. Con una domanda di cui non sappiamo la risposta.

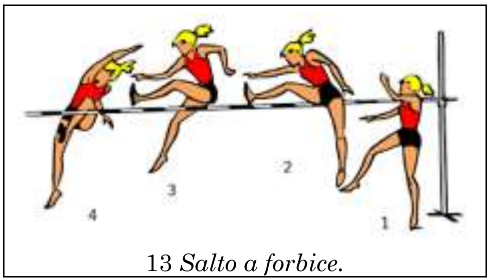
Se avete letto "Asterix alle Olimpiadi, avete sicuramente visto che nel *gymnasium* dove si allenano i Romani, uno sta facendo un salto in alto tenendo, per equilibrio, due pesi in mano. Bene, le nostre fonti (che dal punto di vista sportivo sono un po' più affidabili di Goscinny e Uderzo) sostengono che "...alle Olimpiadi classiche non è mai stato ammesso come gara il salto in alto, che compare solo successivamente presso i Celti...". Chi ha ragione? Non lo sappiamo, e francamente non ci importa neppure molto. Più interessante è quando compare come esercizio fisico.

E questo avviene in Germania, nell'ambito delle lezioni di educazione fisica somministrata ai ragazzi, sicuramente prima del 1797, visto che in quella data ne compare una raffigurazione a stampa.

12 *Germania, 1797.*

In questa tecnica, basilarmente si tratta di "sollevare le gambe" per farle arrivare dall'altra parte; l'obiettivo, in questo salto, è quello di far arrivare il centro di massa dell'atleta al di sopra (e dall'altra parte) dell'asticella, senza far toccare al corpo la sbarra. Per facilitare quest'ultima parte, un primo (ma molto grande) miglioramento della tecnica consistette nel piegare in avanti il torso, quasi raggomitolandosi. In questo modo, si equilibra la tendenza del corpo a "scendere" quando si sollevano le gambe.

Il successivo progresso fu una vera e propria rivoluzione copernicana: chi lo aveva detto, che le gambe devono passare l'asticella "tutte e due assieme"? E chi l'aveva detto, che bisognava arrivare all'asticella "da davanti"? Il mettere in dubbio questi due assiomi porta allo sviluppo della tecnica cosiddetta "a forbice" (che, sia detto per inciso, è anche la tecnica nella quale il Vostro Umile Narratore ottiene i migliori risultati), nella quale dall'altra parte dell'asta viene portata prima una gamba, poi l'altra.

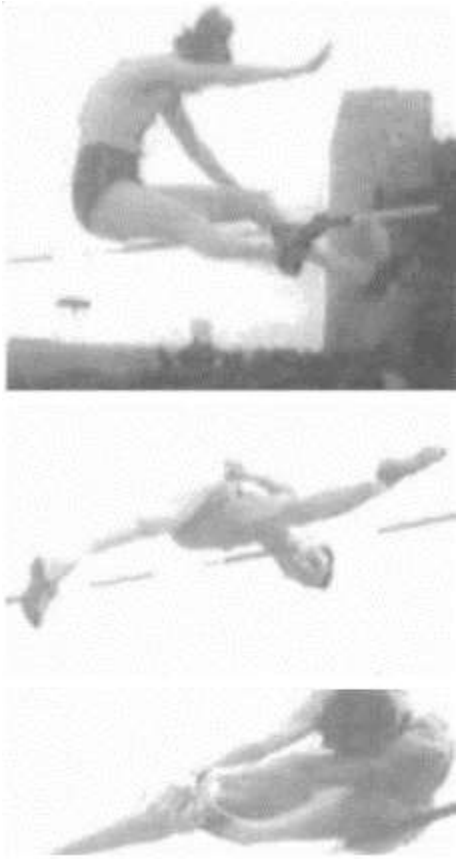


13 *Salto a forbice.*

Qui di fianco, vediamo nelle varie fasi la dinamica del salto: allo stacco, si porta (con la spinta verticale delle gambe) il centro di massa il più in alto possibile; quindi, la gamba (destra, nell'immagine) si alza e passa dall'altra parte; infine (terza fase), si abbassa la gamba destra e si alza la sinistra, il che non sposta verticalmente il centro di massa e, se è passata la prima gamba e non si tocca l'asticella in questo secondo passaggio, dovrebbe passare anche la seconda. Infine si atterra senza aver toccato l'asta. Dell'immagine, non ci convince molto il fatto che nella figura sia indicata, nella quarta fase, una rotazione dell'atleta a guardare l'asta, ma questa è una parte che, per ora, non ci interessa.

[21] Anche sulla prima e sulla terza ci sarebbe da commentare, ma preferiamo non farlo.

Ma qual è il vantaggio di questa tecnica? Focalizziamoci sul momento di picco del salto: siccome la gamba che è già dall'altra parte dell'asticella sta scendendo e l'altra sta salendo, avremo buona parte delle gambe *al di sotto* dell'asticella, il che permette di avere il possibile punto di contatto (la zona pelvica) *più in alto*, e quindi di saltare più alto. Questo momento è ben visibile nella prima delle foto qui a fianco (sì, sono dalle riprese di Leni Riefenstahl alle Olimpiadi di Berlino).



14 *Germania, 1936.*

Il passo successivo è simile a quello compiuto con la tecnica del tirare su le gambe: consiste infatti nell'abbassare il tronco nel momento di scavalcamento dell'asta, permettendo quindi di alzare ulteriormente la zona pelvica. Questa tecnica è diventata nota come "forbici alla Lewden" in Europa, mentre in America è più nota come "Eastern cut-off"; può sembrare problematico (e uno spreco di energia) il piegare in avanti il busto durante il salto, ma se portate la seconda gamba a passare *indietro* rispetto al corpo anziché in avanti, la cosa diventa più semplice[22], come si vede nella seconda foto.

Se, a questo punto, vi sorge la domanda della ragione per cui viene chiamato "*Eastern* Cut-off", avete pienamente ragione: infatti, esiste un "*Western* roll" che, sostanzialmente, differisce dal precedente per dove mettete la gamba; notate che nessuno ha detto che la gamba debba stare dritta, e infatti nella terza foto la gamba sinistra è piegata sotto la destra.

...e questa comincia a somigliare a qualcosa di noto.

15 *Un po' dappertutto, fino alla metà degli anni '60.*

Infatti, negli anni immediatamente successivi, si sviluppa la tecnica del salto oggi detta "all'americana" o "ventrale" (*straddle* nella versione originale), nella quale la sbarra viene superata a faccia in basso, mentre il corpo si allunga parallelamente alla barra. È in questo salto che avviene la vera rivoluzione: infatti, abbiamo sempre una gamba (prima una, poi l'altra) *al di sotto* dell'asticella, il che permette di tenere il centro di massa più in basso e di scavalcare l'asticella con minore sforzo, arrivando quindi ad altezze maggiori.

È piuttosto buffo che il miglioramento finale al salto "all'americana" venga introdotta dall'Unione Sovietica. Qualcuno si ricorda di un certo Valery Brumel[23]?

Abbiamo detto "miglioramento", non "rivoluzione": infatti, ragionando unicamente per via teorica, tutto si basa sulla considerazione che l'umano ha *quattro* arti, non due; cosa impedisce di fare uno "scavalcamento alternato" anche con le braccia? Sembra poca roba,

[22] Abbiamo detto "*più* semplice", non "semplice": richiede, oltre ad un notevole coordinamento, anche la capacità di fare un'ottima spaccata...

[23] Porta, il 21 luglio 1963 a Mosca, il record mondiale a due metri e ventotto. L'oro olimpico lo prende alle Olimpiadi di Tokyo, 1964, con 2.18.

ma riesce a portare il buon Valery cinque centimetri abbondanti sopra il precedente record mondiale.

Il salto "alla Fosbury" lo avete visto tutti, quindi non stiamo a spiegarvelo; ci limitiamo a mettere un'immagine con il punto che vogliamo sottolineare.

16 *Questo è l'ultimo.*

Dov'è il centro di massa?

Sotto l'asticella.

Nulla impone, nel salto, che il centro di massa sia *all'interno* del corpo umano; possiamo benissimo, se assumiamo una forma a "U", averlo al di fuori del corpo. E questo è esattamente quanto avviene durante il salto alla Fosbury: il saltatore si contorce variamente in modo da far superare (un pezzo per volta) al corpo l'asticella, pur mantenendo il centro di massa *al di sotto* di quest'ultima; e, come abbiamo detto, se lo sforzo necessario è quello di portare ad una data altezza il centro di massa, il fatto che il corpo (sempre, lo ricordiamo, un pezzo per volta) si trovi molto al di sopra non ha nessuna influenza. Tranne per il fatto che superiamo asticelle più alte.

Per saltare il più alto possibile, quindi, l'atleta deve massimizzare la propria velocità *verticale* nel momento del distacco; per quanto riguarda la componente orizzontale, è sufficiente mantenere quel poco necessario a fare in modo che durante il salto il corpo si sposti di quel tanto che lo porti più in là dell'asticella (sui materassi). Ma allora, perché si prende la rincorsa? Cominciamo con una risposta "quasi sbagliata".

Quando prendiamo una rincorsa, se arriviamo al momento dello stacco con una velocità $\boldsymbol{v}$ (e con una massa m), avremo un'energia cinetica pari a:

$$\tfrac{1}{2}\, m\, v^2$$

Che, trasformandola totalmente in energia potenziale mgH, ci permette di portare il centro di massa ad un'altezza

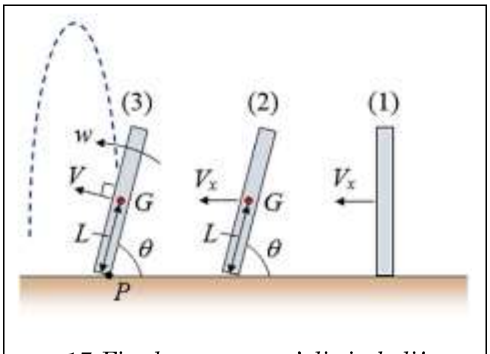
$$H = v^2/(2g)$$

La parte "sbagliata" è che la vostra velocità è *orizzontale*, e voi volete passare il tutto sulla verticale (il che andrebbe benissimo per un salto in lungo, ma di quello ne parliamo un'altra volta); la parte "quasi", invece, nasce dal fatto che nelle vostre gambe c'è il quadricipite, che è uno dei muscoli più potenti del corpo umano. Se utilizzate la vostra energia cinetica per tendere il quadricipite, accumulando energia al suo interno, potete scaricarla sulla verticale (quasi... mantenete una componente orizzontale per andare "dall'altra parte dell'asta") e quindi far salire il centro di massa al punto opportuno. Poi, ricordatevi che non è necessario, nel salto alla Fosbury, portare il centro di massa *sopra* l'asticella. Se la cosa vi è poco chiara, pensate al salto con l'asta: lì, la funzione del quadricipite è svolta dall'asta; siccome questa ha un potere flettente molto maggiore del vostro quadricipite, prendete una rincorsa molto lunga per accumulare maggior energia cinetica[24].

In realtà, l'abbiamo fatta un po' semplice.

Oltre all'effetto "molla" del piantare il piede di stacco per terra, dobbiamo anche considerare un altro effetto: in quel momento, il piede per terra fa da perno e trasforma (parzialmente) la velocità orizzontale in velocità verticale.

[24] Una domanda che potrebbe sorgere spontanea a questo punto è: "Perché nel salto con l'asta non si usa la tecnica Fosbury?". In realtà, se riducete la tecnica a "il centro di massa sta sotto l'asta", vedete che si fà esattamente in questo modo: semplicemente, dato che avete un'asta, è più comodo farlo ventrale, che dorsale (...ed è anche più facile "piegarsi"...).



17 *Finalmente un po' di simboli!*

Se rappresentiamo il nostro saltatore come un rettangolo, i momenti nell'intorno dello stacco da terra sono schematizzabili come nella figura qui di fianco (la linea di vista è parallela all'asta: insomma, siete circa nella posizione di uno dei giudici). In (1) vediamo il nostro saltatore verso la fine della corsa, prima che si chini (di profilo): niente di speciale, si sta muovendo ad una certa velocità V_x. In (2), il nostro saltatore si sta chinando un poco all'indietro ed è rappresentato subito prima di piantare il piede di stacco per terra (quindi dovreste vederlo di faccia, anche se ha preso una curva talmente stretta da conservare la componente V_x della velocità). In (3), infine, abbiamo una rappresentazione del momento immediatamente precedente lo stacco. Notiamo che *il momento angolare è conservato* rispetto al punto di rotazione P tra (2) e (3).

Vediamo un po' di simboli in figura: V_x è la velocità orizzontale del centro di massa (G) subito prima di piantare il piede di stacco per terra; L è la distanza tra P e G, θ è l'angolo "all'indietro" (in realtà, al suo fianco) del saltatore, V è la velocità del centro di massa subito prima che il piede di stacco sia piantato per terra (in pratica, la velocità del centro di massa subito prima della fase di stacco), w è la velocità *angolare* dell'atleta immediatamente dopo che il piede di stacco è piantato per terra.

Dicevamo, il momento angolare si conserva; quindi deve essere:

$$M V_x L \sin\theta = I_p w$$

dove I_p è il *momento di inerzia* rispetto ad un asse che esca dalla pagina passante per il punto P.

Essendo il saltatore rappresentato da un rettangolo, abbiamo che:

$$I_p = 1/12\, M (2L)^2 + ML^2$$

Ricordando che $w=V/L$ e sostituendo questo e il calcolo del momento di inerzia nella prima formula, si ha:

$$V = \tfrac{3}{4}\, V_x \sin\theta$$

che ha una componente verticale:

$$V_y = \tfrac{3}{4}\, V_x \sin\theta \cos\theta$$

si noti che questa velocità *va a sommarsi* alla componente data dall'estensione del quadricipite; qui, abbiamo considerato il saltatore come un corpo rigido. In soldoni, possiamo considerare questa componente come il "di più" dato al centro di massa dalla tecnica Fosbury rispetto alle altre.

Dovremmo chiudere con un "...ora è tutto più chiaro, andate e vincete l'oro". Ma ricordando i nostri trascorsi, non ne abbiamo il coraggio...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms