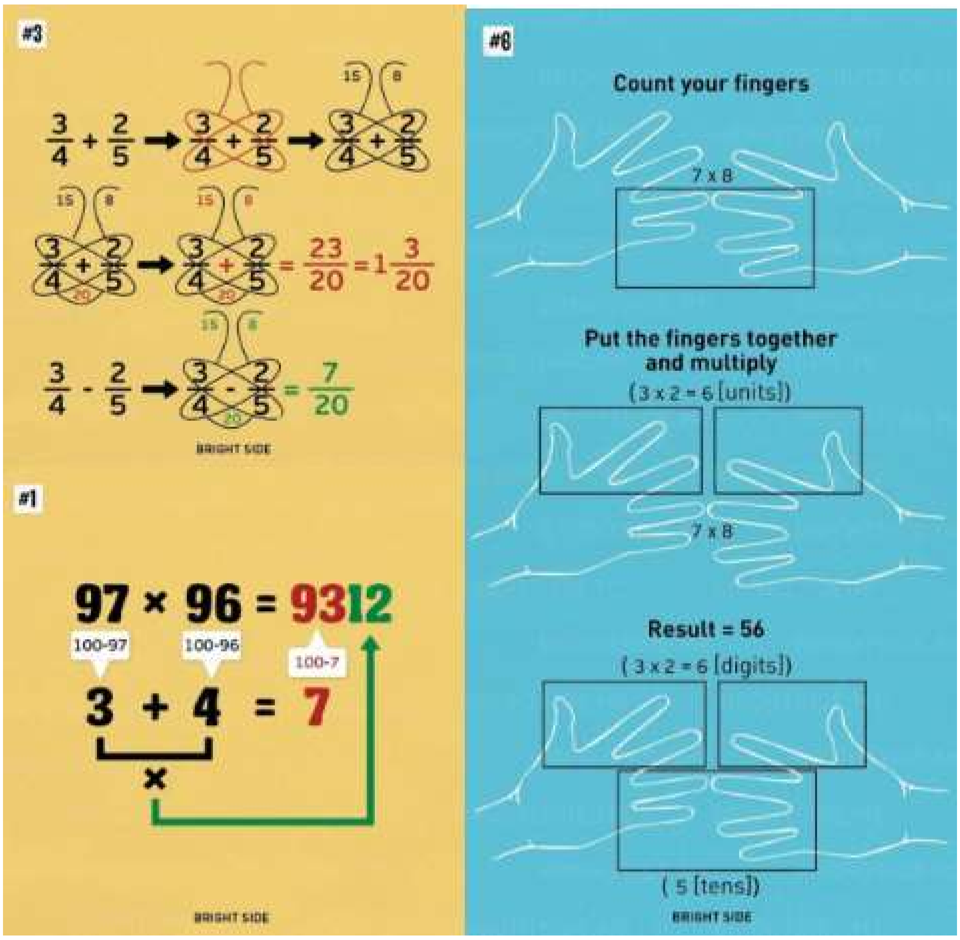
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 288 – Gennaio 2023 – Anno Venticinquesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com
www.rudimathematici.com

RM285 ha diffuso 3'366 copie e il 10/01/2023 per Google eravamo in 41'000 pagine.

Tutto quanto pubblicato dalla rivista è soggetto al diritto d'autore e in base a tale diritto *concediamo il permesso di libera pubblicazione e ridistribuzione* alle condizioni indicate alla pagina `diraut.html` del sito. In particolare, tutto quanto pubblicato sulla rivista è scritto compiendo ogni ragionevole sforzo per dare le informazioni corrette; tuttavia queste informazioni non vengono fornite con alcuna garanzia legale e quindi la loro ripubblicazione da parte vostra è sotto la vostra responsabilità. La pubblicazione delle informazioni da parte vostra costituisce accettazione di questa condizione.

A giudizio dello scrivente, una delle frasi più seccanti che si possano sentire è "...per esempio...". Per dimostrare questo assunto, qui avete tre esempi; ricavate le regole generali (se esistono) e, nel caso, mostrate se e quando funzionano.

1. A corte della regina pazza e bambina

"Per il lacchè non può esistere il grand'uomo, perché il lacchè ha un concetto tutto suo della grandezza."

(Lev Tolstoj, "*Guerra e pace*", 1865)

Quali sono le caratteristiche imprescindibili di un castello, quelle la cui assenza sia riducibile ad un numero infimo di casi (e, in buona parte di queste, al fatto che il castello sia un'imitazione moderna)?

Nelle rappresentazioni dell'infanzia sono irrinunciabili le mura turrite e merlate, ma una veloce verifica su, ad esempio, il Castello di Masino[1], vi permette di appurare che l'unica torre è lì unicamente per permettervi di ammirare il panorama, e le mura non sono merlate ma servono a sostenere la "piazzetta".

Sulla principessa in ambasce, il drago sputafuoco e il fossato (con o senza coccodrilli) non ci pare il caso di stare a portare esempi: nelle immediate vicinanze di chi scrive[2] sono sicuramente più i castelli senza fossato, anche perché, ad una superficiale indagine, non ce ne sovviene nessuno fornito di fossato vero e in uso.

Non esiste un castello senza passaggi segreti.

Adesso, non cominciate a pensare a oscuri cunicoli (...anche se, a ben pensarci, quelli che abbiamo avuto occasione di vedere non erano certo particolarmente luminosi ed areati...) che si aprono solo ruotando il candelabro sinistro di trenta gradi verso destra cui ci hanno abituato fior di narrazioni cinematografiche di cappa e spada o i libri del *Ruritanian romance*: i "passaggi segreti" che potete trovare in un castello reale (*pun not intended*, come dicono gli inglesi) sono, di solito, chiusi da porte estremamente anonime che fanno di tutto per mimetizzarsi con l'ambiente circostante, con prosecuzione delle modanature e della tappezzeria; non hanno una maniglia o una serratura vera e propria, ma di solito un foro (anche lui, piuttosto nascosto) permetteva, con un ferro curvo, di aprire lo scrocco anche dalla parte delle "sale ufficiali". Dall'interno, lo scrocco era facilmente accessibile a mano.

Per capire la loro funzione, pensate a quando, nella visita al castello, avete visitato le cucine: di solito entrate dall'ingresso fornitori, fate il giro, uscite e rientrate dalla porta principale del castello; con il tempo scarsamente clemente dei luoghi, se il maiale arrosto doveva essere trasportato attraverso la stessa via, all'arrivo al desco del potente di turno sarebbe stato immangiabile e indigeribile. E infatti, il suo percorso era tutto attraverso i "passaggi segreti": scale e corridoi che portavano in ogni punto del castello, con al più alcuni fugaci attraversamenti lungo dei corridoi secondari; cucine, lavanderie, e l'intera logistica interna del castello si basavano su questi; non solo, ma anche servitori di un certo rango, come valletti, maggiordomi et similia, per spostarsi velocemente all'interno del castello senza doversi genuflettere ad ogni piè sospinto a un qualche nobiluccio oziante per i saloni, utilizzavano queste vie che, tra le altre cose, collegavano anche le ali del castello che rappresentavano le loro abitazioni.

Insomma, se il castello era, per quanto riguarda la nobiltà, ufficio e abitazione con sfarzo di saloni e sale da ballo, anche coloro che badavano al suo mantenimento vivevano in un ambiente completamente chiuso, se possibile ancora più di quello ufficiale del signore del luogo. E anche in questa città sotterranea esistevano precedenze e gerarchie, spesso con distinzioni più sottili e nette di quelle del mondo di fuori.

[1] Si veda, in merito, l'ottima narrazione di Doc del mese scorso (RM287), "Taccuino di viaggio – Masino".

[2] …e chi sia "chi scrive" dovrebbe esservi chiarissimo fin dalle prime righe, nevvero? Se aveste dei dubbi, lasciateceli dileguare: questo compleanno esce diritto dalla tastiera di Rudy [NdPRS - NdAR].

Nella Francia precedente la Rivoluzione Francese[3], uno dei livelli più visibili all'interno di questa organizzazione era quella di *premier* (o *ancien*) *valet de pied*; sottoposto unicamente al *majordome* (che sottostà al *maître de maison*), è probabilmente l'ultimo dei dipendenti ad abbandonare la parrucca incipriata e la livrea, ed infatti sono tra i pochi domestici visibili nella casa: i loro ruoli (a parte un piuttosto nebuloso "coordinamento dei *seconds valet de pied*") consistono, in questo periodo, nell'apparecchiare (e sparecchiare) tavola, suonare le ore dei pasti, portare in tavola cibi e bevande, effettuare gli acquisti delle derrate alimentari, gestire il guardaroba, rispondere alla porta, aprire e chiudere porte e finestre all'inizio e a alla fine della giornata: insomma, i passaggi segreti dovevano essere il loro regno[4].

Ci si aspetta che un lavoro di questo genere, soprattutto se svolto nel primo quinto del millesettecento, non lasci grande spazio alla propria vita privata; ma guardando ad almeno uno di questi personaggi, possiamo affermare che matrimoni, nascite e funerali si svolgevano esattamente come nel mondo di fuori. Infatti, quella che a noi interessa è la sesta figlia (di nove) di Jean Étable de Labrière, *premier valet de pied* di Louise-Élisabeth d'Orléans, al Petit Luxemburg[5] a Parigi.

1 *Nicole-Reine Étable de Labrière (in Lepaute).*

Nicole-Reine Étable de Labrière nasce quindi il 5 gennaio del 1723 al Petit Luxembourg: ed è un periodo abbastanza significativo, per gli abitanti e la servitù dell'augusto palazzo. Non sappiamo se al tempo il papà di Nicole-Reine fosse già incaricato del compito di *premier valet de pied* di Luisa Elisabetta d'Orléans, che poi svolgerà per gran parte della sua vita, e questo per due buone ragioni. La prima è che Luisa Elisabetta, al momento della nascita dell'ennesima figlioletta del suo primo valletto, aveva da poco compiuto tredici anni, e forse i rapporti con la servitù non erano ancora allo stesso livello di quelli che avrà poi nella maturità. La seconda ragione è ancora più stringente: infatti Luisa Elisabetta, pur essendo così giovane, è già convolata a giuste nozze da un anno, e si è trasferita presso la dimora del marito, in Spagna. L'augusto coniuge è solo di poco più anziano di lei: al momento delle nozze, il 20 gennaio 1722, il principe delle Asturie, erede al trono, ha solo quindici anni; ciò non di meno, diventa presto Re di Spagna, nel gennaio 1724, dopo l'abdicazione del padre. In buona sintesi, la nobildonna che risiede e possiede il Petit Luxembourg diventa regina di Spagna – seppur solo "regina consorte" – ad appena quattordici anni; certo, è donna con nobilissimi quarti di nobiltà: sua madre è figlia legittima nientepopodimeno che del Re Sole, Luigi XIV di Francia, e della più bella e famosa delle sue amanti, Madame de Montespan. Pur con tale pedigree, salire sul trono di uno dei maggiori reami d'Europa appena quattordicenne sembra davvero un colpo di fortuna eccezionale, soprattutto se si tiene conto che non era la maggiore delle sue sorelle,

[3] Ma non solo: il termine riappare ed è correntemente utilizzato per tutto il diciannovesimo secolo.

[4] Il termine viene normalmente tradotto in italiano come "valletto" o "lacchè"; quest'ultima espressione, avendo ricevuto ormai una connotazione non proprio ammirevole, viene utilizzata solo più in senso negativo, mentre "valletto" permette una facile confusione con il *valet de chambre*: per intenderci e farla breve, il *valet de pied* fa da *valet de chambre* nei confronti di eventuali ospiti. E, come detto, coordina *i valet de chambre*.

[5] Il *Petit Luxembourg* è l'ala più antica del *Palais du Luxembourg*, nel sesto *arrondissement* parigino; quest'ultimo oggi ospita il Senato francese, e il Petit Luxembourg è la residenza del Presidente del Senato. Non sappiamo quali corridoi usi per recarsi al lavoro.

e che persino in Francia si pensava che le sarebbe toccato in sposo, al massimo, qualche gentiluomo di qualche piccolo regno italiano.


2 *Louise Élisabeth d'Orléans.*

E, in realtà, la fortuna mal si addice alla giovane Luisa Elisabetta. La corte spagnola non è entusiasta del matrimonio, e lo diventa ancor meno quando si rende conto che l'adolescente francese ha dei comportamenti assai strani: ha un pessimo comportamento, e non solo commisurandolo agli obblighi di una corte reale. Si presenta spesso sporca e disordinata, e talvolta anche del tutto priva di vestiti; sembra non conoscere le basi della normale educazione, rutta in pubblico, è aggressiva, si rifiuta categoricamente di indossare biancheria intima e si mette in bocca qualsiasi cosa le arrivi a tiro, che sia o meno commestibile. Le viene presto affibbiato il soprannome di *loca*, matta, e anche gli studiosi contemporanei leggono nella descrizione dei suoi comportamenti gli estremi di un disturbo borderline della personalità. Persino il suo giovanissimo sposo si preoccupa e non vede possibilità di condurla alla ragione, e pianifica di farla rinchiudere: non ci riuscirà, perché lui contrae il vaiolo e muore dopo solo pochi mesi di regno, segnando il poco ambito record di regno più breve della storia di Spagna. Luisa Elisabetta, seppur così giovane e poco affidabile, si prese cura del marito, si infettò a sua volta di vaiolo, ma sopravvisse.

Il trono di Spagna tornò così a Felipe V, padre del giovane e sfortunato sposo; il titolo di "regina consorte" tornò anch'esso sul capo di Isabella Farnese, sua suocera, che fece in modo che la sfortunatissima Luisa Elisabetta se ne tornasse in Francia. Così, dopo un triste viaggio di ritorno, finì per un paio di anni in convento, prima di rientrare nel suo *Petit Luxembourg*. L'ultimo giorno da regina di Louise-Élisabeth d'Orléans era stato il 31 agosto 1724, quando non aveva ancora compiuto i quindici anni d'età. A diciassette, ritorna finalmente nel suo palazzo parigino, dal quale non uscirà praticamente più, fino alla morte che la coglierà nel 1742, a trentadue anni d'età. Con una così particolare padrona di casa, è difficile immaginare come potesse essere l'infanzia della nostra Nicole-Reine, figlia di valletto. Ha una "regina" nel nome, e una "regina" in casa, ed è venuta al mondo proprio quando quella ragazzina – in fondo neanche troppo più vecchia di lei, "regina" lo era davvero. Ma non viene da pensare ad una fanciullezza piena di gioia e di sfarzi, vissuta com'era in una sorta di clausura.

I (pochi) siti della rete che parlano di lei sono abbastanza contradditori sulle sue origini: non ci risulta i *valet de pied* fossero scelti tra i nobili, ma in molti punti le si trova appiccicato l'attributo di "nobildonna francese"; ci permettiamo di dubitarne, anche perché nessuno riesce a dirci quale sia il suo titolo nobiliare, e non ci risulta si riesca a trasmetterne comunque uno alla sestogenita.

L'infanzia scorre, riteniamo, piuttosto tranquilla e i suoi studi procedono sulla via dell'autodidattica; viene spinta all'interesse per la computazione da Lalande[6], che si accorge dell'interesse di Nicole per la matematica.

Sin quando, come sempre, non scoccano i dardi di Cupido.

[6] Jérôme Lalande (1732-1807), tra i maggiori astronomi francesi di tutti i tempi.

3 *L'orologio galeotto.*

Infatti, in un giorno imprecisato di un anno imprecisato (ma comunque precedente il 27 agosto 1749), i fratelli Lepaute, Orologiai del Re[7], si recano al *Palais du Luxembourg* per installare un nuovo orologio (per chi è interessato ai dettagli tecnici: si tratta del primo orologio orizzontale e con il meccanismo a scappamento che siamo abituati a vedere oggi negli orologi meccanici). Nicole si invaghisce di Jean André, il più anziano dei due fratelli e, appunto, il 27 agosto 1789 convolano a nozze.

E qui potrebbe prospettarsi una tranquilla vita da moglie di un orologiaio, ma fortunatamente Jean André è pigro. E lascia la gestione del bilancio aziendale e familiare nelle mani di Nicole, che riesce a gestirlo *en souplesse*. Non solo, ma il marito le permette (all'epoca, era una concessione, e non da poco) di collaborare con Lalande che, essendo astronomo, era un ottimo cliente della *maison* Lepaute, e questo trio si dedica alla progettazione e costruzione di orologi astronomici, per i quali la parte matematica era totalmente nelle mani di Nicole: tutti i calcoli del *Traité d'Horlogerie* di Lepaute sono infatti farina del suo sacco.

Come in ogni *romance*, a questo punto deve comparire un cattivo, per quanto sfumato; infatti, Clairaut[8] aveva appena trovato una soluzione approssimata al problema dei tre corpi e Lalande gli propone di utilizzare le capacità di calcolo di Nicole per applicare questa soluzione al ritorno della cometa di Halley, tenendo conto delle perturbazioni di Giove e Saturno: in una corsa contro il tempo, riescono a prevedere il ritorno al perielio della cometa di Halley per il 15 aprile 1759; risultato che desta scalpore[9]. I risultati ottenuti vengono pubblicati da Clairaut, senza citare Nicole, nel 1760, nel volume *Théorie des Comètes*[10]. Per la gioia degli apprezzatori del *cherchez la femme* (o gli estimatori di Clairaut), aggiungeremo che secondo alcuni l'assenza della menzione di Nicole-Reine è da attribuire alle insistenze di mademoiselle Goulier, al momento amica di Clairaut.

Lalande non la prende bene, e ne scrive: nel linguaggio dell'epoca, una frase come "*plaire à une femme jalouse du mérite de Madame Lepaute, prétentieuse mais dépourvue de quelque connaissance que ce fût. Elle parvint à faire commettre cette injustice par un homme de science judicieux mais faible, qu'elle avait subjugué*"[11] doveva fare lo stesso effetto della tirata di un plotone di *hater* su Facebook. Questo causa la rottura dell'amicizia tra Lalande e Clairaut, e Nicole-Reine continua i calcoli per il marito.

Ma, sempre nel 1759, l'Accademia delle Scienze commissiona a Lalande il calcolo delle effemeridi astronomiche (per l'osservatorio di Parigi); questi, occupato in altri studi, delega il lavoro a Nicole, che non solo riesce a pubblicarle con il proprio nome, ma per soprammercato calcola anche quelle relative al meridiano di Béziers (nel Dipartimento di Herault), il che le vale l'ingresso alla locale Accademia[12].

[7] Vi ricordiamo che all'epoca l'orologeria era circa l'equivalente della *rocket science* di periodi più vicini a noi: poco più di un anno dopo la nascita di Nicole, moriva infatti Daniel Quare. E se non sapete chi è, la cosa è *male*. Ne abbiamo parlato, fuori di qui.

[8] Alexis-Claude Clairaut (1713-1765) astronomo, al pari di Lalande.

[9] La soluzione era *approssimata*, e il passaggio al perielio avvenne il 15 marzo. Ma tanto per cominciare provava la periodicità della cometa (cosa, all'epoca, non scontata); inoltre, un mese su settantacinque anni rappresenta un errore poco maggiore dell'uno per mille.

[10] Lo scrivente è aduso ad ardite associazioni libere, ma non crede di essere l'unico cui, in questo momento, vengano in mente il Dottor Moriarty e la *Dinamica di un Asteroide*.

[11] Rudy dà per scontato che tutti conoscano il francese, lingua che nelle sue opinioni è giusto un paio di gradini meno nobile del torinese. Coloro che non hanno lo stesso metro di misura sappiano che, dando in pasto a Google-translate la frase suddetta, viene fuori questo: "*per compiacere una donna gelosa dei meriti di Madame Lepaute, pretenziosa ma priva di qualsiasi conoscenza. Riuscì a far commettere questa ingiustizia da un uomo di scienza giudizioso ma debole, che aveva soggiogato*" [NdPRS].

[12] Volete un altro *villain*? Pronti. E questa volta miriamo alto: "*[… est une] manufacture d'astronomie [..] dirigée en second par une académicienne de je ne sais plus quelle académie*". Cassini. Ma, a quanto si dice, questa frecciata era destinata a colpire il Lalande che "si faceva guidare da una donna" e del cui lavoro Cassini era geloso.

Nicole-Reine e Jean André non hanno figli; questo però non impedisce loro di accogliere in casa, nel 1768, Joseph Lepaute Dagelet, nipote di Jean André; il quale Joseph viene opportunamente indirizzato e riesce a diventare professore di matematica alla scuola militare e, successivamente, ad essere eletto astronomo aggiunto all'Accademia delle Scienze. Non che Nicole intanto resti inoperosa; infatti, tutte le effemeridi calcolate per gli anni dal 1785 al 1792 sono, per ammissione di Lalande, calcolate in buona parte da lei. E, dove la cosa non è ammessa chiaramente, resta comunque aperto un dubbio su chi abbia fatto i conti: Lalande, in merito al calcolo della posizione di Saturno, mette in prefazione alle effemeridi un anodino "*Je m'étais transporté à Béziers, où l'on a communément le plus beau ciel de la France*"[13].

Tutte le belle storie finiscono, e nel 1774, per problemi di salute, Jean André deve ritirarsi dal campo dell'orologeria; Nicole gli sarà vicino anche se, malata anche lei, perderà la vista poco a poco. Precederà di pochi mesi suo marito, morendo a Parigi nel dicembre del 1788.

I francesi la ricordano con un asteroide, un cratere lunare e una via del tredicesimo *arrondissement*; con lo stile che contraddistingue la visione francese del mondo, tutti e tre sono intitolati a Nicole-Reine *Lepaute*.

[13] Vedi nota 11. "*Ero andato a Béziers, dove di solito abbiamo il cielo più bello di Francia*".

2. Problemi

2.1 Una scommessa sequenziale

Siamo i primi ad ammettere che l'ambientazione non è un gran che, ma quella che avevamo in mente riguardava *podcast* e violazioni della privacy; per le seconde si rischiano le ire del Garante, mente per i primi si rischiano le (giustificatissime[14]) ire di Doc. Quindi, ci accontentiamo di una ambientazione più "neutra". Liberi di lanciarvi nelle più spericolate elaborazioni ambientalistiche, se volete.

Stiamo giocando a testa e croce, ma "con memoria"; in pratica ci annotiamo la sequenza di teste e croci generate, e ne tiriamo abbastanza; a fine serata (tirare monete è un sistema per passare la serata molto migliore che tirare altro) controlliamo la sequenza, cercando la prima ricorrenza di "Testa-Testa" e la prima combinazione di "Croce-Testa"; se compare prima la prima, vince Doc, se compare prima la seconda vince Rudy. Come sempre quando c'è di mezzo Rudy, l'ambito premio è un intero caffè.

Considerato che è un bel po' di tempo che andiamo avanti a giocare questo appassionante gioco, chi dei due ha dormito meno? O, se preferite, chi ha bevuto più caffè gratis? Oh, non vale la riposta "Rudy, che spesso beve quel crimine contro l'umanità che è il caffè americano". Quello, in caso, lo riservo per la mattina, e solo d'inverno.

2.2 La serie dei numeri trentenni

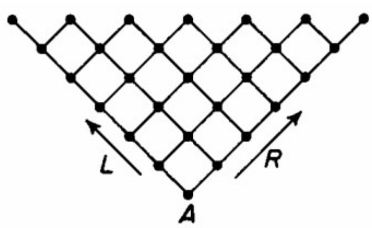
Eh, nel senso che ormai sono quasi trent'anni che abbiamo visto per la prima volta un problema di questo tipo; per i cultori, lo abbiamo pubblicato in queste lande quasi venti anni fa (...sì, *ci pensiamo*, ai problemi. Che sono sotto gli occhi di tutti, quindi aspettiamo che ve li dimentichiate per rifilarveli). Siccome questa volta non abbiamo nessuna voglia di arrampicarci sugli specchi inventandoci improbabili animali che seguono una dieta matematicamente limitata, andiamo subito al sodo.

Il problema originale era una cosa del genere: dati i numeri tra uno e un miliardo scritti in base dieci, in quanti di questi la somma delle cifre dà trenta?

Ma noi siamo di ampie vedute, e quindi ci troviamo a disagio con ogni forma di vincolo. Dopo aver risolto il primo, potreste provare ad impegnarvi su questo (per il quale, come d'uso, non abbiamo neanche cercato la soluzione): dati i numeri tra uno e N, scritti in base k, quanti di questi hanno somma s?

3. Bungee Jumpers

In figura è mostrata una rete di strade: 2^{1000} persone partono dal punto A, metà nella direzione L e metà nella direzione R. Raggiunta la prima intersezione, ogni gruppo si divide in due parti, e procedono metà in direzione L e metà in direzione R; la stessa cosa avviene a tutte le successive intersezioni.



Quante persone si troveranno in ognuno dei punti terminali, posti in millesima riga?

La soluzione, a "Pagina 46"

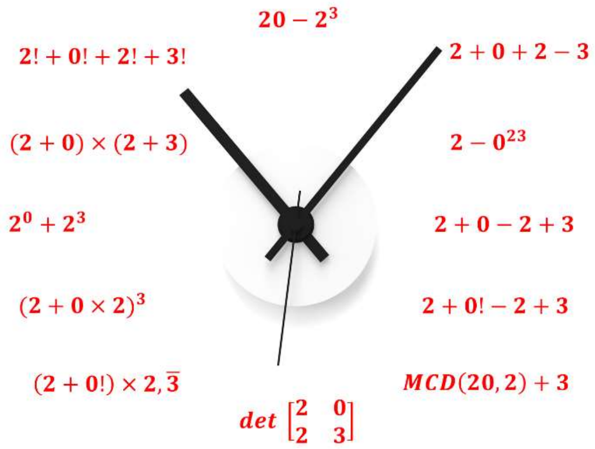
[14] Questa ve la raccontiamo. Siccome a quanto pare se non hai un podcast oggi non sei nessuno, a Rudy era venuto in mente di farne uno. Doc, lungimirante, si è immediatamente accorto che mettere una formula in un podcast è assolutamente impossibile [RdA: "*...beh, potremmo recitare il Poscript...*"], e quindi ha cassato immediatamente l'idea. Anche perché gli unici pezzi "fattibili" sarebbero stati i Compleanni, e quindi indovinate chi avrebbe dovuto fare la gran parte del lavoro... OK, tranquillo, Doc. Come non detto.

4. Niente Soluzioni e Note, solo Auguri

Gennaio!

Sono arrivate in Redazione cose meravigliose, e le vogliamo condividere con voi. Le soluzioni sono rimandate al mese prossimo, non vi preoccupate.

Prima di tutto, per il nuovo anno, visto che già avete il miglior calendario, vi serve un nuovo orologio. Ce ne ha mandato uno ***Giorgio Dendi***, e se ne avete bisogno lo potete usare anche voi:



Come ogni anno ***Alan Viezzoli*** ci invia gli auguri:

2023

Logogrifo[15] in senari liberi con acrostico

Da me lietamente
Udrete deliri
E detti dementi:

Mai valuterete

In altre maniere

La lettera mia.
Averne di tali
Valenti diletti

E idee divertenti!

Nei lieti dimani

Temete le armi,
I mali e i veleni?

Teniam i rimedi:

Ridente ed invitta

Eterni la vita!

Bellissimo, vero? Aspettate di vedere che cosa arriva ora: auguri di matematici.

Cifre crescenti, solo le 4 operazioni

$$(123+4+5-6-7)\times(8+9)=2023$$

$$(123-4)\times(5+6+7+8-9)=2023$$

$$[1-(2-34)\times 5+6\times 7]\times(8+9)=2023$$

$$(12+345)\times 6-7\times(8+9)=2023$$

$$1+2\times 3\times[456-7\times(8+9)]=2023$$

[15] ogni parola è formata potendo usare unicamente le lettere comprese in DUEMILAVENTITRÉ.

$$(1-2+3+4+5+6)\times 7\times (8+9)=2023$$
$$1+2\times 3+4\times 567\times 8\div 9=2023$$
$$(1+2\times 3)\times [4\times (5+67)-8+9]=2023$$
$$1+(2-3+4)\times (5+678-9)=2023$$
$$1+2\times [3+(4+5\times 6+78)\times 9]=2023$$
$$(1+2\times 3\times 4)\times 56+7\times 89=2023$$
$$(-1+234+56)\times 7=2023$$

Cifre crescenti, tutti gli operatori ammessi

$$1234+5!\times 6+78-9=2023$$
$$[(1+2)\times 3\times 4!+5!]\times 6+7=2023$$
$$1+2\times \frac{(3+4)!}{5}+6=2023$$
$$1\times 2+(3!)^4+5+6!=2023$$
$$-1\times 2+\sqrt[3]{45^6}=2023$$
$$(3!)^{\sqrt{4}}\times 56+7=2023$$
$$(arctan 1)^2-3!+4=2023$$

Cifre decrescenti, solo le 4 operazioni

$$[987+6\ \times (5-4+3)]\times 2+1=2023$$
$$98\times \left(7\times 6-\frac{5}{4+3}\right)\div 2\times 1=2023$$
$$9\times 8\times (7+6)+543\times 2+1=2023$$

Cifre decrescenti, tutti gli operatori ammessi

$$\left(\sqrt{9}\times 8+7\right)\times 65+4+3+2-1=2023$$
$$\sqrt{9^8}-7!+(6+5!)\times 4-3+2-1=2023$$
$$\frac{8\times 7!\times 6}{5!}+\sqrt{4}+3+2\times 1=2023$$
$$8+\frac{7\times 6\times 5!\times \sqrt{4}}{3+2}-1=2023$$
$$-\frac{8!}{7}+6^5+\sqrt{4}+3+2\times 1=2023$$
$$(9+8)\times (-7+6+5!)=2023$$

Numeri primi

$$-2\times 3!+(-5+7)^{11}-13=2023$$
$$\sqrt{17-13}^{11}-7-\frac{5!}{3!}+2=2023$$

Le cifre di 2023, in ordine

$$-2+arctang(0!)^{\sqrt{-2+3!}}=2023$$

Le cifre di 2023 due volte

$$2+0+(2^3\div 20)+2+3=2023$$
$$(2+0+2+3)\times (20-3)^2=2023$$

Successione di Fibonacci

$$1+\left(1+2^{(3+5)}\right)\times 8-13-21=2023$$
$$1\times 1+2^{(3!+5)}+8-13-21=2023$$
$$-(1!+2!)!+\frac{3!}{5!}\times 8!+13=2023$$

$$1 + (arctan1)^2 - 3 = 2023$$

$$[-antilog(0!) + antilog(1) + antilog(1)] \times antilog(2) + 3 + 5! = 2023$$

Numeri di Catalan

$$1 - 2 + 5 - 14 + 42 + 132 + 429 + 1430 = 2023$$

$$\left(42 + \sqrt{14 - 5}\right)^2 - 1 - 1 = 2023$$

Una sola cifra

$$\sqrt{2}^{22} - 2^2! - \frac{2}{2} = 2023$$

$$\sqrt{2^{22}} -,2^{-2} = 2023$$

$$(,\overline{2} - ,2)^{-2} - 2 = 2023$$

$$[(3!)! - 3!] \times \left[3 - \frac{3}{3 \times 3!}\right] = 2023$$

$$\sqrt{\sqrt{4^{4!}} : \sqrt{4}} - \frac{4}{4} - 4! = 2023$$

$$\left(5 + \frac{5!}{5 + 5}\right) \times \left(5! - \frac{5}{5}\right) = 2023$$

$$6 \times 6 \times 6 \times 6 + 666 + 66 - 6 + \frac{6}{6} = 2023$$

$$\left(6 + \frac{6}{6}\right) \times \left(6 + \frac{66}{66}\right) \times \left(6 + \frac{66}{66}\right) = 2023$$

$$\left(6 + \frac{6}{6}\right) \times \left(6! \times ,6 \times ,\overline{6} + \frac{6}{6}\right) = 2023$$

$$[7! \div (7 + 7 + 7) + 7 \times 7] \times 7 = 2023$$

$$\frac{8!}{8 + 8 + \sqrt{8 + 8}} + 8 - \frac{8}{8} = 2023$$

$$(9999 + 9999) \times 9,\overline{9} \div 99 + \sqrt{9} = 2023$$

$$\left(\frac{9 + 9}{9}\right)^{\left(9 + \frac{9}{9}\right)} + 999 = 2023$$

Quadrato magico

22	13	17	14	24	21
3	36	2	35	31	4
27	12	29	26	7	10
9	25	11	8	30	28
34	6	32	5	1	33
16	19	**20**	**23**	18	15

©Alexandre Costa, Andrea Nari, Dario Uri, Giovanni Battista Scambia, Jacopo Garlasco, Marco Broglia, Marco Primo Portioli, Giorgio Dendi

Auguri, quindi, anche da parte nostra, e alla prossima!

5. Quick & Dirty

Una biglia d'acciaio galleggia sul mercurio. Al crescere della temperatura, la biglia galleggia di più, di meno o nello stesso modo?

> *Il fatto che i termometri siano pieni di mercurio e non di acciaio è un indizio importante. Il coefficiente di espansione termica del mercurio è maggiore di quello dell'acciaio, quindi la forza di Archimede applicata alla biglia diminuisce e questa galleggerà di meno.*

6. Zugzwang!

Premessa: a noi ricorda ***Black Box***, ma ad una più attenta analisi sembra non avere nessuna parentela. Però ci sembra carino (e analizzabile). E ci permette di inventarci qualcosa. E di continuare (...ve ne siete accorti, *vero*?) il discorso dei giochi che usano microscacchiere.

6.1 Biliardo di carta

No, il nome lo abbiamo inventato noi; l'originale, ***Tabletop Billiards***, ci pare piuttosto inflazionato da una pletora di "biliardi per bambini" che a Santo Stefano (oggi, per chi scrive: sentitevi in colpa) occupano le tavole dove gli adulti (o almeno una parte di loro) vorrebbero mangiare: in realtà i bambini, appurato che con le stecche è possibile darsi delle botte in testa ma l'azione non è contemplata da nessun regolamento, né del gioco né del condominio, stanno bellamente ignorando il tutto; la parte restante degli adulti, abitualmente più interessati al biliardo che ai pranzi, ne stanno esplorando tutte le possibilità, sperimentando astruse carambole che mai ardirebbero tentare su un tavolo da biliardo reale. Tanto, in caso di fallimento, si potrà sempre incolpare la dilettantesca costruzione dello strumento.

Per portare in un ambiente del genere un minimo di tranquillità e di organizzazione, ***Walter Joris*** ne ha inventata una versione che può essere giocata con carta (va bene anche un tovagliolo, purché a quadretti) e qualche monetina (consigliamo i cinque e venti cent; tranquilli, vi basta raggranellare meno di un euro tra tutti e due); oltretutto, il gioco ci pare talmente veloce che una partita con il commensale più prossimo "ci sta" agilmente nei cambi piatti tra antipasto, primo, secondo, formaggio, frutta e dolce (...ma non vi siete già strafocati ieri?).

Come dovreste aver brillantemente dedotto dal paragrafo precedente, si gioca in *due*; i pezzi necessari sono, come anticipato, *tre*+*tre* monete: consigliamo i cinque e venti cent in quanto hanno un diametro simile ma sono chiaramente distinguibili tra di loro: se preferite altre monete, la cosa non dovrebbe influenzare il gioco. Vi serve anche un piano di gioco, che preferiremmo chiamare *scacchiera*: una griglia *quattro* (colonne) per *tre* (righe): siccome ci limitiamo ad appoggiare sopra i pezzi senza scarabocchiare, se i quadretti del tovagliolo (o della tovaglia) sono di dimensioni opportune, come dicevamo la cosa può essere giocata anche a tavola imbandita. Per comodità, come negli scacchi, chiamiamo le colonne A, B, C e D e le righe 1, 2 e 3. La complicazione è che la posizione iniziale è sulle colonne estreme, non sulle righe come negli scacchi: in pratica, posizionate le monete da 5 cent in $A1$, $A2$ e $A3$, mentre quelle da 20 si trovano in $D1$, $D2$ e $D3$.

L'*obiettivo del gioco* è riuscire, per primi, a muovere le proprie tre monete nelle caselle alla partenza occupate dalle monete dell'avversario; non si "mangia", ma si muove.

La *mossa* consiste nel far scivolare un proprio pezzo diagonalmente o ortogonalmente sin quando non si incontrano il bordo della scacchiera o un pezzo (di chiunque) sulla propria traiettoria; quando si incontra uno di questi, il pezzo *ruota di 90°* (come percorso, spiritosi... Non è testa o croce!) e continua il proprio movimento; la rotazione avviene a sinistra o a destra (dove è possibile); se sono libere entrambe le direzioni, la cosa è a scelta del giocatore. Questo "rimbalzo" avviene *una volta sola*, e non influenza l'eventuale altro pezzo coinvolto; al secondo incontro, il pezzo "si ferma lì" (no, non potete decidere di fermarvi prima del primo rimbalzo o "a metà strada").

Se il pezzo termina il proprio movimento nella colonna dei pezzi avversari, viene "congelato" e non può più muovere (ma può rappresentare un punto di rimbalzo per chiunque). È obbligatorio muovere, se possibile; se non potete muovere, saltate il turno (ma non perdete).

Domande del tipo "...e se vado a finire in un angolo?", "...e se ho un doppio rimbalzo immediato?" o "esiste la patta?") riceveranno tutte la stessa risposta: "non ne abbiamo la più pallida idea". Un'ipotesi potrebbe essere il definire le mosse delle prime due domande come illegali ed impedirle, e a quanto abbiamo capito (si veda dopo) questa era l'idea del buon Joris.

Adesso, potremmo farvi vedere una partita; ci inventiamo la notazione delle mosse, indicando la casella di partenza, la casella di rimbalzo e la casella di arrivo. Siccome vogliamo fare i raffinati, mettiamo anche qualche commento. Oh, piccola nota: sempre l'inventore, chiama "prima mossa" la prima mossa del primo giocatore e "seconda mossa" la prima mossa del secondo giocatore. Comincia il Nero (i cinque cent?), che si trova sulla sinistra (in colonna A).

1.A1-C1-C3 2.D2-B2-B3 3.A3-C1-D2 e D2 risulta congelata 4.B3-B1-A1 e A1 risulta congelata A2-B3-C2 6.D1-B1-B3 questa mossa è, secondo Joris, "forzata" (sì, stiamo copiando). Da questo si deduce che probabilmente è corretto considerare come illegali i rimbalzi d'angolo o quelli "doppi", che potrebbero essere eseguiti da A1 (andando in A3 o in C1) 7.C2-C1-D1 e D1 risulta congelata 8.D3-B1-A2 e A2 risulta congelata 9.C3-B2-C1 10.B3-C2-B1 11.C1-C3-D3 e, con il congelamento di D3, il nero vince.

...più veloce degli scacchi, ma più complicato della dama, a occhio e croce. Non solo, ma abbastanza piccolo da essere (almeno secondo noi) analizzabile. Chi ha voglia di scrivere un programmino o, almeno, calcolare le dimensioni dell'albero del gioco? Dopo, se fate i bravi, potremmo anche ~~darvi un altro pezzo di dolce~~ lasciarvi esplorare scacchiere più ampie...

7. Pagina 46

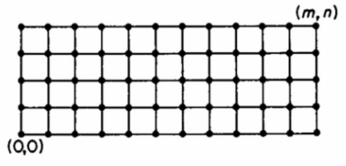
Selezioniamo, all'interno della nostra rete, uno qualsiasi dei cammini che collegano il punto A ad un dato nodo della millesima riga di incroci, e determiniamo quante persone percorreranno questo cammino.

Il cammino in questione è formato da mille lati di "isolati" separati, e alla fine di ogni isolato (all'incrocio successivo) chi ha camminato lungo questo isolato si dividerà in due gruppi: metà di questi continueranno sul cammino che stiamo esaminando e metà devieranno invece da questo.

È evidente che, nel punto A, $2^{1000}/2=2^{999}$ persone seguiranno il cammino in oggetto, ma solo $2^0=1$ lo seguiranno sino alla fine: quindi, il cammino in esame sarà seguito da una sola persona di quelle alla partenza.

Da questo (ma la cosa è visibile anche calcolandolo direttamente) segue che il numero dei cammini possibili è pari al numero delle persone, ossia 2^{1000}; il nostro problema si trasforma quindi nel calcolo di quanti cammini portano ad una specifica intersezione alla millesima riga.

Se ruotiamo la nostra rete di strade sino a trasformarla nella struttura di reticolo quadrato indicata qui di fianco, possiamo indicare ogni intersezione attraverso le sue coordinate cartesiane (m, n), dove m è il numero di strade verticali tra l'origine (0, 0) e il nostro punto e n il numero di strade orizzontali sempre tra (0, 0) e il nostro punto.



Ci saranno allora $\binom{m+n}{n}$ cammini (tutti della stessa lunghezza $m+n$, con m isolati percorsi in orizzontale e n percorsi in verticale) che portano al punto dato, e quindi un cammino può essere descritto in modo non ambiguo specificando, degli $m+n$ isolati, quali sono gli n verticali, e queste n tratte possono essere scelte tra gli $m+n$ disponibili in $\binom{m+n}{n}$ modi.

Quindi, nel nostro caso, numerando l'intersezione più a sinistra della millesima riga di intersezioni come zero, un cammino è definibile identificando i k isolati che vengono percorsi in direzione R, lasciando i restanti 1000–k percorsi in direzione L.

Conseguentemente, il numero totali di cammini che portano alla k-esima intersezione è $\binom{1000}{k}$, e quindi

$$\binom{1000}{k} = \frac{1000!}{k!\,(1000-k)!}$$

persone giungeranno alla k-esima intersezione (con $0 \leq k \leq 1000$).

8. Paraphernalia Mathematica

Il ritardo di questo mese è dovuto al fatto che quando questa cosa era stata spiegata a Rudy, per una serie di motivi non l'aveva capita; ecco, deve essergli rimasto una specie di rifiuto inconscio... Eppure, è anche interessante.

8.1 Cerchiamo di essere chiari

Dovreste ormai sapere sino alla noia che Rudy fa ginnastica al mattino; tra i vari esercizi che svolge, ve ne sono alcuni che esercitano particolari muscoli delle gambe e che, ogni volta, gli creano dei problemi; non per rigidità, complessità o fatica, ma proprio solo per il nome. Questi esercizi mettono in movimento i muscoli adduttori e i muscoli abduttori. Che, tra le altre cose, sono praticamente l'uno il contrario dell'altro; non potevano trovare dei nomi altrettanto diversi? Quanto siamo sicuri che non sia un errore di stampa?

Se preferite un esempio più matematico e meno faticoso, prendete la distribuzione binomiale. Tutta la questione consiste nel trattare due probabilità, p e q=1–p; ma proprio "q" dovevano chiamarla, che è facile da confondere con "p"?

Procediamo con calma. Per scrivere il messaggio che intendiamo inviare, per prima cosa ci serve un *alfabeto*, composto da p simboli distinguibili tra di loro; siccome siamo pigri, ci farebbe piacere che questo numero p fosse il più piccolo possibile (così è più facile imparare l'alfabeto[16]); siccome i simboli possono essere a nostro gusto, utilizzeremo per indicarli 0, 1, 2, …, p–1.

Una qualsiasi sequenza di questi simboli viene chiamata *parola*; attenzione che, nelle lingue normali, viene definita "parola" un qualchecosa che convogli un significato, mentre qui non stiamo a vedere sottigliezze di questo genere; tutte le combinazioni di caratteri sono parole, semplicemente non tutte hanno senso compiuto.

Sulle parole, faremo un'altra importante assunzione: che abbiano *tutte la stessa lunghezza*. Il motivo di questa affermazione piuttosto balzana è, principalmente, che in questo modo i conti diventano molto più semplici. A questo punto, possiamo cominciare a inventarci dei nomi.

L'insieme di tutte le parole (comprese quelle prive di senso) è noto come ***spazio del codice***; in particolare, l'insieme delle parole dotate di un significato è noto come "codice" o, più pomposamente, come ***vocabolario***. È ragionevolmente evidente che, se il nostro alfabeto ha p simboli e la lunghezza delle parole è n, il nostro spazio del codice avrà dimensione p^n.

Il concetto fondamentale nella teoria dei codici è la ***distanza di Hamming***, definita come "il numero dei punti in cui queste parole differiscono una dall'altra"; ad esempio, i muscoli della gamba hanno distanza di Hamming pari a 1 (nel primo c'è una "d", nel secondo c'è una "b" nella stessa posizione), così come i nomi delle probabilità della binomiale. A questo punto, dovrebbe essere chiaro il motivo per cui abbiamo richiesto che le parole fossero tutte della stessa lunghezza: la parola "adutto ri", che potrebbe essere una qualsiasi delle due cui fosse "caduta" una lettera, non appartiene al nostro vocabolario, quindi non è considerata. Nel seguito, indicheremo la distanza di Hamming tra due parole a e b come $d(a, b)$.

Un altro concetto che ci potrà essere utile è la ***cardinalità*** di un codice (attenzione, abbiamo detto "codice", non "spazio del codice"), indicata con $|C|$: questa non è altro che il numero delle parole appartenenti al codice[17]. Il che ci porta a definire la ***distanza di codice*** $d(C)$ come la *minima* distanza di Hamming tra parole del codice; per altrettanto ovvie ragioni, vorremmo che questa distanza fosse la più grande possibile: in questo modo, dovremmo riuscire a capire cosa significa una parola anche se al suo interno c'è un errore, almeno sin quando la distanza di codice è maggiore di uno. Da questo, deriva un concetto decisamente più complesso (ma solo perché espresso in forma "strana"), relativo al numero

[16] Vedremo dopo che è anche preferibile che p sia primo.

[17] Per fare un esempio piuttosto stupido: secondo alcuni, Shakespeare utilizzava un codice di cardinalità 12000. Sicuramente ne conosceva di più, ma le parole effettivamente utilizzate nella sua produzione sono quelle e basta.

di parole dotate di senso rispetto al numero totale di parole generabili, detto ***ridondanza*** del codice e definito come:

$$\log_p \frac{p^n}{|C|}$$

insomma, il rapporto tra le parole possibili e le parole sensate all'interno del nostro codice.

Servono, oggetti del genere? Beh, sì: se, in luogo di una data parola a, ricevete a', allora avete una procedura standard: Se a' appartiene a C, allora si tiene a'; in caso contrario, si cerca la parola alla minima distanza di Hamming da a' presente in C (che, a questo punto, si spera essere a).

Come è facile intuire, questo sistema non è dei migliori; giusto per fare le cose complicate, pensate al caso nel quale avete ricevuto la parola "caso": siccome appartiene al vostro linguaggio, la tenete; ma cosa vi garantisce che non ci sia un errore? E e c'è un errore, cosa intendeva chi l'ha trasmessa? Voleva dire "naso" o "coso"? Sono entrambe a distanza uno dalla parola ricevuta!

La cosa è teoremizzabile: se supponiamo $d(C)\geq 3$, allora la decodifica secondo la regola vista qui sopra è sempre corretta se non c'è più di un errore in ogni parola trasmessa.

Infatti, se è stato trasmesso a e ricevuto a', deve essere $d(a, a')\leq 1$; d'altra parte, per qualsiasi parola b in C diversa da a, abbiamo $d(a, c)\geq 3$.

Questa misura segue un'importantissima proprietà della distanza, la diseguaglianza triangolare, ossia $d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c)$; applicandola al nostro caso,

$$d(a', b) \geq d(a, b) - d(a', a) \geq 2 > d(a', a)$$

E quindi a' sarà decodificato come a, che è quanto richiesto.

Esiste anche una versione più generale di questo teorema, asserente che se allora il nostro codice correggerà r errori in una parola.

Per dimostrare questa versione più generale, è sufficiente considerare che nel codice dato non esistono parole aventi distanza minore o uguale a r. Se ne esistessero, per la diseguaglianza triangolare dovrebbero distare $2r$ (o meno) una dall'altra, il che è vietato. Quindi la decodifica è sempre univoca, se gli errori sono meno di r.

Qui, si vede anche perché non è preferibile una bassa ridondanza: un testo di questo tipo conterrà più informazioni di uno con lo stesso numero di caratteri ad alta ridondanza, ma per questa medesima ragione diventa estremamente difficile, se non impossibile, correggere gli errori di trasmissione. D'altro canto, anche un'alta ridondanza non è bene; infatti, se la trasmissione di ogni singolo carattere ha un "costo", la trasmissione ad alta ridondanza diventa molto più costosa, anche se corregge più errori.

Per affrontare il prossimo passo, partiamo da un problemino di telefonia.

> In una città, i numeri di telefono hanno sei cifre; quanti telefoni possono essere installati, se richiediamo che ogni numero differisca da qualsiasi altro per almeno due cifre?

Questo non significa altro che richiedere la possibilità di riconoscere un singolo errore; infatti, se tutti i numeri accettabili sono utilizzati, un numero che differisca per una cifra da un numero esistente è un errore, e può essere corretto. In questo ambiente, una "parola" è qualsiasi numero di sei cifre, e quindi avremo in totale 1000000 di parole disponibili. Per quanto riguarda i numeri effettivamente utilizzabili, non possono certamente essere più di 100000: altrimenti, per il principio della piccionaia, si potrebbero trovare due numeri che differiscono solo per la sesta cifra, il che è proibito; ma siamo sicuri che questo sia il risultato del problema?

Questo problema è stato posto in alcune selezioni nazionali della trentunesima Olimpiade Matematica, quindi non vorremmo toglervi la semplice ma intensa gioia di risolverlo da soli (SPOILER in nota[18]).

Torniamo al nostro alfabeto con simboli 0, ..., p–1, vedendo questi simboli come i resti della divisione per p; a questo punto, non volendo introdurre complicazioni quali i divisori dello zero, è immediato che, come detto in nota all'inizio, sia preferibile avere p primo: il che, visto che due è tale, è esattamente quanto fanno i computer con il binario.

Riducendo le cifre del nostro "codice telefonico" ai soli zero e uno, la condizione di costruibilità diventa allora (generalizziamo a n caratteri) $x_1+x_2+\ldots+x_n\equiv 0 \pmod 2$: ma, essendo questa un'equazione lineare, diciamo che il nostro è un ***codice lineare***.

Generalizzando, il nostro codice può essere descritto come un insieme di equazioni lineari:

$$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=0 \\ b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_nx_n=0 \\ \vdots \\ c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n=0 \end{cases}$$

dove tutto è visto in modulo p. Assumiamo inoltre che il numero delle incognite sia molto maggiore del numero delle equazioni, in modo tale che siano possibili molte soluzioni: diciamo allora che l'insieme di tutte le soluzioni è un ***codice lineare***.

Attraverso la teoria dei sistemi di equazioni lineari potremmo calcolare la cardinalità di questo codice, ma per fortuna esistono delle scorciatoie. Se prendiamo un'equazione qualsiasi del sistema, vediamo che possiamo esprimere un determinato termine in funzione di tutti gli altri e quindi, se ci sono m equazioni e n incognite, in generale potremmo assegnare valori arbitrari a $n–m$ incognite, che può essere fatto in p^{n-m} modi, mentre le altre m incognite restano fissate; quindi, la cardinalità del nostro codice è pari a p^{n-m}, mentre per quanto riguarda la ridondanza si ha che è pari a:

$$\log_p \frac{p^n}{p^{n-m}} = m$$

...il che, tra le altre cose, dovrebbe anche rendere intuitivo un buon motivo per il quale si utilizza un logaritmo: calcoli molto più semplici!

Da un punto di vista strettamente pratico, veniamo ad avere $n–m$ posizioni nelle quali mettiamo il nostro messaggio (sarebbero le cifre "arbitrarie" viste sopra), mentre nelle restanti m posizioni mettiamo i valori calcolati in modo tale da soddisfare il nostro sistema di equazioni, ossia dei ***valori di controllo***[19]. Alla ricezione, metteremo tutti i valori nel sistema e verificheremo che i conti siano giusti: in questo caso, avremo la *ragionevole* certezza di aver ricevuto il messaggio corretto ("ragionevole" in quanto potrebbero esserci *un mucchio* di errori, scelti ad arte dalla Natura matrigna...).

Passiamo alla geometria? Definiamo ***sfera*** di raggio r e di centro a (dove a è una parola del nostro codice) l'insieme di tutte le parole b tali che $d(a, b)\leq r$. La cardinalità della sfera (ossia i punti del nostro codice al suo interno) viene detta *volume*: si noti che una sfera di raggio zero ha comunque volume uno, in quanto il punto a va comunque considerato.

Come sempre, attribuire certi nomi ad oggetti discreti causa alcuni pseudo-paradossi: ad esempio, se q è il massimo intero minore di r, la sfera di raggio r è l'insieme unione di tutte le sfere di raggio 0, 1, 2, ..., q. Proviamo a calcolarne qualcuna per p=2, con centro nel punto (0, 0, ..., 0) origine degli "assi".

---

[18] Sì, sono esattamente centomila; se consideriamo tutti i numeri la cui somma delle cifre è divisibile per dieci, questi non possono differire in una sola posizione. D'altro canto, possiamo mettere cinque cifre arbitrarie nelle prime posizioni e costruire l'ultima cifra in modo tale che la somma sia divisibile per dieci, e quindi vi sono tanti numeri divisibili per dieci quanti sono i numeri di cinque cifre, ossia centomila. Ma avreste dovuto accorgervene già dal secondo problema di questo numero di RM.

[19] Visto che queste cifre vengono messe in posizioni ben precise (per "sapere dove sono" alla ricezione), si preferisce parlare di *posizioni di controllo*, o *control places*.

La sfera di raggio 1 comprende tutte le stringhe che differiscono dallo zero in una posizione (qualsiasi), e quindi saranno n. La sfera di raggio 2 comprende tutte le stringhe aventi al proprio interno due 1 e 0 in tutte le altre posizioni, quindi saranno $C(n, 2)=n(n-1)/2$ punti. E quindi, $V_1 = 1+n$, $V_2 = 1 + n + n(n-1)/2$.

E un codice può correggere un errore se questo è ad una distanza da una parola a del codice al più pari al ***raggio della sfera unitaria*** centrata in a. Posto che le sfere *non si sovrappongano*, evidentemente.

Con lo stesso ragionamento, se vogliamo che il codice corregga r errori le sfere di raggio r devono essere disgiunte; ma allora deve valere la diseguaglianza

$$|C| \cdot V_r \leq p^n \text{ ossia } |C| \leq \frac{p^n}{V_r}$$

Per passare a un caso particolare, consideriamo un codice binario con n=7; la cardinalità del codice deve allora soddisfare $|C| \leq \frac{2^7}{8} = 2^{7-3}$, e quindi il codice deve essere definito da ***non meno di tre equazioni***. Il valore $(n-m)/n$ viene definito ***rateo trasmissivo*** o ***code rate***, ed evidentemente a noi interessa che sia il più grande possibile: le equazioni appena viste ci dicono però che, per n=7, non può essere maggiore di 4/7.

Consideriamo un sistema arbitrario di tre equazioni in sette incognite, ad esempio (somme modulo 2, variabili nel range {0,1}):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_1 + x_6 + x_7 = 0 \end{cases}$$

Se il nostro trasmettitore invia la parola 1001101 (che soddisfa la nostra equazione) ma il ricevitore riceve 1011101 (errore in terza posizione): per lui, il nostro sistema diventa:

$$\begin{cases} 1+0+1 = 0 \\ 0+1+1+1+0 = 1 \\ 1+0+1 = 0 \end{cases}$$

e la seconda equazione non è soddisfatta: ma la colonna dei risultati ***è esattamente la colonna dei coefficienti di*** $\boldsymbol{x_3}$: e, se ci pensate un attimo, vedete che la cosa è sempre vera: se sbagliate un carattere, il risultato del calcolo sarà sempre pari ai coefficienti del carattere sbagliato nel nostro sistema.

A questo punto, dovreste vedere "a occhio" che il codice che abbiamo appena scelto è una schifezza: infatti, sia la terza colonna che la quinta hanno gli stessi coefficienti. Quindi i due messaggi 1011101 (errore in terza posizione) e 1001001 (errore in quinta posizione) porteranno allo stesso risultato: sappiamo che è sbagliato, ma non troviamo il risultato giusto!

Ci serve allora una matrice con tutte le colonne diverse tra loro; le colonne di questo tipo sono otto, ma una è assolutamente inutile (...indovinate quale... aiutino: non porta informazioni); siccome ne dobbiamo avere sette, ci servono tutte, le mettiamo in un ordine qualsiasi e costruiamo il nostro sistema.

Come avrete intuito, questi sono i ***Codici di Hamming***, scoperti nel 1940; emozionato dal risultato, il Nostro ha cercato subito un codice che correggesse ***due*** errori di trasmissione, ma non ce l'ha fatta: ci sono riusciti, dopo dieci anni, ***Bose***, ***Chaudhuri*** e ***Hocquenghem***.

Ma questa è un'altra storia.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms